506.45
A211

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIII

1916

SERIE QUINTA

MEMORIE

DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

VOLUME XI.

Smithsonian Institution
266255
National Museum

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1916

506.40

MEMORIE DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

ANNO CCCXII

SERIE QUINTA — VOLUME XI — FASCICOLO I.

UGO CERLETTI

SULLA STRUTTURA DELLA NEVROGLIA

Smithsonian
SEP 2 9 1924
National

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1915

RELAZIONE

letta dal Socio B. Grassi, relatore, a nome anche del Socio Ett. Marchiafava, nella seduta del 6 giugno 1914, sulla Memoria del dott. Ugo Cerletti, avente per titolo: *Sulla struttura della nevroglia.*

Il dott. Ugo Cerletti, libero docente nell'Università di Roma, ha presentato alla R. Accademia dei Lincei un lavoro dal titolo: *Sulla struttura della nevroglia*, chiedendone la pubblicazione tra le Memorie della nostra Accademia.

Abbiamo esaminato il lavoro del dott. Cerletti: è un manoscritto di 55 pagine accompagnate da 8 belle tavole in nero ed a colori. Sulla base di accuratissime ricerche microscopiche eseguite con l'aiuto dei più moderni metodi di colorazione e di fortissimi ingrandimenti, sopra un ampio materiale normale e patologico, col controllo di svariate indagini sopra altri tessuti e mediante ingegnosi modelli in paraffina, l'autore sostiene che il concetto oggi generalmente accettato, che cioè la nevroglia sia costituita da due elementi morfologicamennte e chimicamente distinti, le cellule e le fibre, non sia esatto. Secondo l'autore, da un canto le cosiddette fibre altro non sono se non i prolungamenti di cellule nevrogliche o porzioni del corpo cellulare che ci appariscono in aspetto fili forme solo per particolari disposizioni ottiche del substrato o per raggrinzamenti del protoplasma dovuti massimamente alla fissazione; dall'altro lato, le indagini circa il valore di *differenziazione microchimica* attribuito alle colorazioni dette specifiche, hanno mostrato che a queste colorazioni non spetta in alcun modo un tale significato e che la colorazione delle cosiddette fibre avviene per processi puramente fisici e si verifica anche sopra molte altre parti del protoplasma cellulare.

Il Cerletti ritorna così all'antico concetto circa la struttura del tessuto nevroglico, essere cioè questo costituito di cellule munite di prolungamenti più o meno abbondanti a seconda dei varî punti dei centri nervosi, e a seconda dei processi patologici intervenuti a carico del tessuto stesso.

Il lavoro del Cerletti è veramente interessante per i cultori dell'istologia del sistema nervoso, e perciò lo giudichiamo degno di essere pubblicato tra le Memorie dell'Accademia per esteso e con le tavole, essendo queste ausilio indispensabile per la esatta comprensione del testo.

Sulla struttura della nevroglia.

Memoria di UGO CERLETTI

presentata nella seduta del 6 giugno 1914.

(con 8 tavole)

I.

Introduzione.

Non rifaccio la storia delle nostre conoscenze circa la struttura della nevroglia, perchè essa storia fu già svolta ampiamente da molti antori, e da moltissimi fu riassunta. Nei classici lavori del Golgi ([1]) e del Weigert ([2]), e poi nelle più recenti monografie dello Held ([3]) e del Da Fano ([4]), si trova analiticamente registrato tutto il succedersi delle indagini fino all'epoca attuale.

Mi limiterò, pertanto, ad enunciare le tappe più importanti di questo lungo cammino, quelle che rappresentano veri mutamenti nel modo di concepire la costituzione della nevroglia, salvo ad illustrare di qualche breve considerazione il determinismo di alcune dottrine.

Dopo che Virchow ([5]), per il primo, ebbe fatto parola di una sostanza interstiziale, diffusa, sostegno e cemento (glia) degli elementi nervosi, venne a poco a poco precisandosi, specialmente per merito delle classiche ricerche del Golgi, la concezione che questa sostanza interstiziale fosse costituita da cellule stellate, munite cioè di numerosi, sottili, lunghi prolungamenti del loro citoplasma, irradianti in tutte le direzioni. Questo concetto venne fieramente attaccato, nel 1895, da Carlo Weigert, il quale, fondandosi su particolari aspetti che del tessuto nevroglico forniva un suo nuovo metodo di colorazione, sostenne recisamente — sviluppando un concetto già espresso dallo Schultze ([6]) e dal Ranvier ([7]) — che i filamenti, descritti come prolunga-

([1]) Golgi, *Sulla sostanza connettiva del cervello.* Gazzetta med. ital., n. 19, 1870; *Contrib. alla fina anatomia degli organi centrali del sistema nervoso.* Rivista Clinica, nov. 1871; *Sulla fina anatomia degli organi centrali del sistema nervoso.* Tessuto interstiziale. Opera omnia, vol. II.

([2]) Weigert, *Beitraege zur Kenntniss der normalen menschlichen Neuroglia.* Festschr. Frankfurt, 1895.

([3]) Held, *Ueber den Bau der Neuroglia,* etc. Abhandl. d. K. Sächs. Gesellsch. d. Wissensch. Bd. XXVIII, 1903.

([4]) Da Fano, *Osservazioni sulla fine struttura della Nevroglia.* Ricerche labor. anat. norm. di Roma, vol. XI, fasc. 2-3, 1906.

([5]) Virchow, citato dal Golgi.

([6]) Schultze, citato dal Golgi.

([7]) Ranvier, *De la névroglie.* Arch. e physiol. norm. et phatol., 1883.

menti delle cellule nevrogliche, sono invece *fibre chimicamente diverse* e *spazialmente separate dal protoplasma* delle cellule; fibre indipendenti dalle cellule, tutt'al più, ad esse contigue.

Il concetto di *fibra nevroglica*, come elemento filiforme indipendente, si è imposto originariamente al Weigert — e ancor oggi s'impone agli osservatori — davanti al classico reperto dei così detti *feltri nevroglici* (Gliafilze), fornito con peculiare nettezza dal metodo di colorazione del Weigert e dai metodi affini. Nei preparati allestiti con detto metodo, mentre, per tutta l'estensione dei centri nervosi, delle cellule nevrogliche non si vede colorato che il nucleo, in determinate aree dei centri nervosi stessi si vedono ammassi fittissimi di filamenti sottili, intensamente colorati. Seguendo, nei preparati, uno ad uno questi filamenti sino alla loro terminazione, si constata che, per lo più, essi sono tronchi ai due capi. Di qui il nome — ed il concetto — di *feltro* nevroglico: tessuto, cioè, costituito da tante fibre, isolate, interrotte ai capi, intersecantisi tra loro in tutti i sensi.

Fu questo reperto — evidentemente — che condusse il Weigert a credere ad una analogia col tessuto connettivo fibroso, quale era allora inteso, e a stabilire il dualismo fra *cellule* nevrogliche da un lato, e *fibre* nevrogliche dall'altro, conferendo anzi a queste ultime la parte principale, essenziale nella costituzione del tessuto nevroglico.

Non tardarono però gli studiosi ad indagare se veramente tutte le fibre dei «feltri» nevroglici terminassero tronche come appariva nei preparati. Data la direzione svariatissima del loro decorso, non vi era dubbio che, per molte di esse almeno, la interruzione fosse dovuta ai tagli che hanno separato la sezione microscopica; ma, oltre a questo, un'indagine accurata, lo studio di materiale meglio adatto e l'applicazione di colorazioni di contrasto che mettevano in evidenza i protoplasmi delle cellule nevrogliche, condussero presto a scorgere di questi filamenti colorati, di queste presunte fibre indipendenti, inserirsi e fondersi nel protoplasma delle cellule nevrogliche.

Dunque queste presunte fibre altro non erano che i noti prolungamenti cellulari descritti dal Golgi! È quanto alcuni pochi Autori, primo fra tutti il Pellizzi (1), affermarono, inascoltati. Inascoltati rimasero per varie ragioni. Anzitutto, per una ragione invero non molto solida, ma tanto facilmente suggerita da certi aspetti istologici, che pur oggi noi la sentiamo ripetere di tanto in tanto. Si obbiettò: in certi punti dei centri nervosi si osserva un numero enorme di filamenti nevroglici tronchi ai due capi e, frammezzo ad essi, ben scarse cellule nevrogliche; vien naturale il pensiero che una buona parte di quelle innumerevoli fibre non possan considerarsi quali prolungamenti di quelle poche cellule. E ciò in molti casi è giusto, ma solo rispetto alle cellule che abbiamo sott'occhio nella sezione. Perchè, se si tien conto della grande lunghezza che hanno in molti casi i fini prolungamenti degli astrociti, e dell'enorme numero di prolungamenti che può fornire una sola cellula (si rammentino le figure di Golgi, di Kölliker e di altri antichi autori che lavorarono per dilacerazione o con sezioni a forte spessore), apparirà ben naturale che in certi punti dei centri nervosi

(1) Pellizzi, *Sulla struttura e sull'origine delle granulazioni ependimali*. Rivista sperim. di Freniatria. vol. XXII, 1896.

possano trovarsi fitti ammassi di filamenti nevroglici che altro non sono se non prolungamenti di cellule lontane non comprese nella sezione. Nulla di strano che per la nevroglia si ripeta, per quanto in forma e proporzioni diverse, un fatto che a noi sembra oggi indiscutibile in un tessuto che ha la stessa origine embriologica della glìa: nel tessuto nervoso: Di fronte agli enormi ammassi di fibre nervose, noi non dubitiamo punto che ciascuna di esse sia un prolungamento di cellule situate spesso a grandissima distanza dal punto in esame.

Ecco perchè apparve — come appare anche oggidì — pienamente sostenibile la tesi che per lo meno la massima parte delle fibre che fanno parte dei « feltri » nevroglici sieno prolungamenti di cellule.

Non valse. Convennero, lo stesso Weigert ed i suoi numerosi seguaci, che non fosse sostenibile la primitiva loro affermazione essere il protoplasma delle cellule nevrogliche privo di prolungamenti; essi ammisero, cioè, che molte cellule nevrogliche sono munite di prolungamenti protoplasmatici, ma vollero sempre considerato l'elemento *fibra* come qualche cosa di assolutamente distinto dal *protoplasma* nevroglico.

Due argomenti fondamentali costituirono la base di questa distinzione:

I. Il fatto che le « fibre » reagiscono positivamente di fronte a determinati metodi di colorazione, mentre i citoplasmi non reagiscono di fronte agli stessi metodi. E, invero, accolta la ingegnosa teoria con cui del suo complicato metodo il Weigert faceva una vera e propria reazione microchimica, sembrò indubbio che il metodo del Weigert (al pari di altri a risultati affini, escogitati in prosieguo) ponesse effettivamente in rilievo, nelle « fibre », un peculiare elemento chimicamente diverso dal protoplasma delle cellule.

II. Il fatto che non solo nude, isolate nei feltri nevroglici, ma anche in seno al protoplasma delle cellule e dei loro maggiori prolungamenti non colorati con la colorazione « specifica », si videro le « fibre » specificamente colorate. Se dunque le fibre si vedevano *dentro* i prolungamenti e in essi differenziate, parve evidente che non si potessero identificare con i prolungamenti.

Così il concetto che nella nevroglia, di fronte allo elemento *cellule con o senza prolungamenti protoplasmatici*, vi fosse l'elemento *fibra*, ben differenziato, si consolidava stabilmente, ma anche si complicava. Si complicava, perchè, ora, entravano in questione due specie di fibre: quelle *nude*, isolate, e quelle decorrenti *entro* il protoplasma nevroglico. La primitiva tesi semplicista del Weigert, al fuoco delle minuziose ricerche di controllo che ponevano in rilievo nuovi fatti, doveva fare delle concessioni e trasformarsi. Molte fibre « nude » apparivano indipendenti dalle cellule; molte si vedevano chiaramente inserirsi per un capo alle cellule; altre fibre erano immerse nel protoplasma nevroglico. Quale il significato di queste differenze nei loro rapporti con le cellule? Si ricorse all'ipotesi e si disse: le fibre endoprotoplasmatiche sono fibre appena formatesi nella cellula o ancora in via di formazione; le fibre nude sono fibre adulte, ormai resesi più o meno completamente indipendenti dalla cellula che le ha prodotte.

Era una spiegazione alquanto arbitraria, di cui però convenne accontentarsi, finchè non giunse lo Held con una dottrina che parve conciliare le singolari diversità dei reperti. Sulla base di nuovi metodi che, mentre coloravano le fibre, mettevano anche

bene in evidenza i protoplasmi, egli affermò che quasi tutte le fibre nevrogliche sono *endoprotoplasmatiche*. I nuovi metodi, egli disse, mettono in rilievo un velo protoplasmatico che accompagna ogni fibra, mentre esso velo non viene colorato col metodo del Weigert e con i metodi affini.

Solo in pochi casi, e per tratti relativamente brevi del loro decorso, le fibre rimarrebbero prive del loro involucro protoplasmatico. Il punto di passaggio fra il tratto che ancor presenta il rivestimento protoplasmatico, e il tratto nudo, mostrerebbe un graduale assottigliarsi del rivestimento stesso, finchè questo si riduce ad un lembo sottilissimo e infine scompare: forse persiste, soltanto diviene invisibile con i nostri mezzi di esame.

La dottrina dello Held, come quella che toglieva di mezzo molte incongruenze tra i dati dell'osservazione e le concezioni teoriche, incontrò larghissimo favore; e il lungo dibattito parve alfine composto, il giorno in cui un allievo del Golgi, il Da Fano, in una diligente monografia sulla struttura della nevroglia, facendo suoi, in massima, i concetti dello Held, chiudeva il suo lavoro con le seguenti conclusioni, che io riporto integralmente perchè riflettono la concezione oggi da tutti accolta circa la *struttura* della nevroglia:

I. La nevroglia è costituita da cellule e da fibre.

II. Le cellule hanno un corpo di solito lamellare, con numerosi e sottili prolungamenti ramificati, a disposizione varia nelle diverse parti del sistema nervoso.

III. Le fibre sono chimicamente diverse dal protoplasma cellulare, in quanto reagiscono in modo diverso ai diversi metodi di colorazione.

IV. Le fibre sono intimamente connesse colle cellule e coi prolungamenti: sono situate entro lo strato corticale del protoplasma delle cellule e dei prolungamenti; rappresentano una particolare differenziazione del citoplasma.

V. Non si può escludere, in modo assoluto, che esistano fibre di nevroglia indipendenti dalle cellule.

II.

Il problema.

Come abbiamo visto, la chiave di volta delle odierne concezioni circa la struttura della nevroglia consiste nella distinzione di *due elementi diversi* che entrerebbero nella costituzione di questo tessuto: da un lato le *cellule con i loro prolungamenti*, dall'altro le *fibre* (1).

Questa distinzione è basata su criterî *microistiochimici* e su criterî *morfologici*.

(1) È questo certamente ancor oggi il concetto cardinale circa la struttura del tessuto interstiziale dei centri nervosi, ma, come accenno alla fine di questa Memoria, da tempo ho insistito sopra ulteriori distinzioni, fra i varî tipi di cellule, fra il vario tipo e significato dei prolungamenti e su altre questioni strutturali, che solo in questi ultimi tempi incominciano ad essere affrontate dagli studiosi.

In quanto ai primi, fu attribuita alle fibre la proprietà di reagire a varî metodi di colorazione in modo nettamente diverso da quello del protoplasma cellulare, di avere cioè in speciali condizioni una peculiare *elettività chimica* per colori che invece non vengono assunti dal protoplasma. Tutti i testi moderni di tecnica istologica, infatti, annoverano metodi speciali (cosiddetti elettivi, specifici per la nevroglia), a colorazione semplice, destinati a colorare *soltanto le fibre* della nevroglia, e non i protoplasmi delle cellule e dei prolungamenti (metodi « per la nevroglia fibrillare »); metodi, parimenti a colorazione semplice, con i quali si tingono soltanto le cellule nevrogliche con i loro prolungamenti, e *non le fibre* (metodi « per la nevroglia protoplasmatica »); infine, metodi a doppia colorazione, nei quali un colore viene assunto dalle « fibre » e l'altro viene assunto — a contrasto — dal protoplasma delle cellule e dei prolungamenti.

Precipuamente da questi preparati a doppia colorazione furono tratti i criterî *morfologici*, su cui si rafforza la distinzione dell'elemento fibra dall'elemento cellula con prolungamenti, in quanto, da essi preparati, furon descritte le fibre come elementi filiformi, sottili, omogenei, compatti, decorrenti *nel* protoplasma della cellula e dei prolungamenti, ma da esso ben distinti.

Da quindici anni a questa parte, da quando cioè ho incominciato ad occuparmi di ricerche d'istologia e di istopatologia del sistema nervoso, son venuto raccogliendo una serie di osservazioni sulla nevroglia, le quali mi hanno condotto a dubitare sulla fondatezza dei due criterî su esposti, sui quali fu basata la distinzione fra cellule con prolungamenti da un lato, e fibre dall'altro. In questi ultimi anni, intensificando le ricerche, sulla guida di un metodo di studio complesso e coordinato allo scopo, sono giunto alla conclusione che tanto i criterî microistochimici quanto i criterî morfologici, di cui sopra, poggiano su osservazioni e deduzioni inesatte, per cui l'intera distinzione dei due elementi, che entrebbero nella costituzione del tessuto nevroglico, dev'essere riveduta ([1]).

([1]) In molte mie pubblicazioni mi sono occupato, più o meno estesamente, di questioni riguardanti l'istologia e l'istopatologia della nevroglia. Un primo lavoro complessivo sulla struttura della nevroglia presentai nel 1906 al R. Istituto lombardo di scienze e lettere; non portai però questo lavoro alla pubblicazione. Nel 1908 pubblicai alcune mie ricerche sui rapporti della nevroglia con la pia madre (Rivista sperim. di freniatria, vol XXXIV). Nel 1909 (*Note sopra alcune particolarità di struttura della Nevroglia.* Rivista sperim. di Freniatria, vol. XXXV), ho particolarmente insistito sulla necessità di una distinzione tra cellule nevrogliche con prolungamenti e cellule nevrogliche *adendritiche*. Nel 1910 ho esposto succintamente, nella monografia sulle alterazioni cerebrali nella malaria perniciosa (Histologische und histopathol. Arbeiten. Nissl-Alzheimer. Bd. IV, 1910), accanto a varie altre osservazioni sulla glìa, i tratti essenziali della concezione svolta in questa Memoria. Non avendo in quel tempo completate le ricerche di controllo, non volli allora generalizzare le mie conclusioni. Comunque, rimando a quel lavoro chi voglia veder applicati i concetti qui svolti ai reperti di metodi per la colorazione *in massa* del protoplasma nevroglico, e chi s'interessi della questione dei rapporti della glia con i vasi. Una brevissima Nota preventiva, in cui sono riassunti i dati e i concetti scaturiti dalle ricerche qui esposte, ho pubblicato nel volume giubilare in onore di L. Bianchi (Catania, Giannotta, 1913).

III.

Metodo delle mie ricerche.

Dirò in breve quali vie d'indagine e quali metodi tecnici mi hanno permesso di porre in rilievo i nuovi dati di fatto che impongono questa revisione dell'odierna dottrina sulla struttura della nevroglia.

Nelle mie ricerche mi hanno grandemente giovato due artifizî che rendono più evidenti, più chiari i dati dell'osservazione; artifizi che gli altri indagatori non adoperarono sistematicamente. Il primo, semplicissimo: studiare metodicamente ogni dettaglio con i più forti ingrandimenti. *Io invito fin da ora formalmente, coloro che vorranno controllare i miei dati, ad emettere un giudizio, solo dopo avēr analizzato i preparati a forti ingrandimenti (1600 diam. almeno).* Per le delicatissime e complesse strutture nevrogliche, nove volte su dieci, quanto si osserva a 1600 D. risulta radicalmente diverso da quanto sembrava di vedere a 500 D.: ed è appunto per questo che io ho disegnato le mie figure in proporzioni inconsuete.

L'altro artifizio consiste nello illuminare molti particolari poco evidenti, presentati dalla nevroglia normale, mediante lo studio *parallelo* della nevroglia in determinate condizioni patologiche. È ben noto (e di questo fatto hanno profittato tutti gli Autori che si sono occupati della struttura della nevroglia) che, in particolari condizioni patologiche, pur restando inalterato il tipo strutturale di questo tessuto, si rendono più evidenti parecchi suoi particolari morfologici.

Infine un'altra condizione mi ha messo in grado di concretare le mie conclusioni, ed è stato l'impiego dei metodi per la colorazione della nevroglia, recentemente introdotti nella tecnica istologica dall'Alzheimer (¹). Questi metodi, la cui precipua e preziosa proprietà è quella di colorare *insieme* le varie parti della nevroglia, con una intensità e con una finezza non raggiunte dai metodi precedenti, mi hanno permesso di controllare volta a volta, su immagini più evidenti, le osservazioni che io venivo facendo col classico metodo del Weigert e con i metodi affini.

Poichè l'odierno dottrinale sulle « fibre » nevrogliche trae fondamentalmente dai risultati del metodo del Weigert, io ho voluto prendere a base delle mie ricerche soprattutto questo metodo: mi son potuto servire, anzi, per lo studio di non pochi dettagli, di preparati eseguiti dal grande istologo in persona. Questo metodo, del resto, è quello che fornisce, rispetto allo studio delle « fibre » nevrogliche, le immagini più incisive e più chiare, perchè, al pregio di dare una colorazione quanto mai intensa e distinta, unisce quello di non colorare se non pochi elementi estranei alla nevroglia, restandone così più trasparente il preparato e quindi più agevole lo studio con forti ingrandimenti.

(¹) Alzheimer, *Beitraege zur Kenntniss der patholog. Neuroglia* etc. Histologische und Histopathol. Arbeiten Nissl-Alzheimer, Bd. III, 1910.

Ma, accanto al metodo del Weigert, ho utilizzato tutti gli altri metodi indicati per la glia, dai più antichi ai più recenti che a mano a mano venivan proposti. Questi varî metodi ho anche cercato d'applicare con svariate modificazioni, sia rapporto ai fissatori, sia rispetto alle sostanze coloranti o ai reattivi che si adoperano nei singoli metodi. Oltre ai metodi specialmente indicati per la nevroglia, ho adoperato, per lo studio di questo tessuto, qualunque altro metodo che, sia pure in circostanze tutte speciali, ponesse in rilievo qualche parte della glia. Così, ad es., il nostro Laboratorio fu certo tra i primi ad applicare per lo studio della nevroglia, sistematicamente, e con varie modificazioni, i metodi all'argento ridotto indicati per la colorazione delle neurofibrille.

Il materiale preso in esame è il più svariato possibile. Materiale normale umano e di molti altri vertebrati, all'età adulta e nello stato embrionale e fetale, e materiale patologico d'ogni sorta, quale può passare in tanti anni in un laboratorio che si è specializzato in ricerche d'istopatologia del sistema nervoso.

Ho quindi avuto occasione di osservare il tessuto nevroglico sotto i più svariati aspetti ad esso conferiti e dall'azione di cause patologiche e da tutte le azioni svariatissime dei reattivi che adoperiamo per fissare, per includere, per mordenzare, per colorare i tessuti. Molto credo di aver appreso procedendo sempre al più ampio confronto possibile tra i diversi reperti che *uno stesso* materiale normale o patologico fornisce, quando sia fissato in modo diverso, quando sia incluso in modo diverso o non sia incluso affatto, quando sia mordenzato o colorato in modi differenti.

In questa mia Memoria io espongo, più che altro, sintesi di osservazioni che son venuto facendo in condizioni svariatissime; e se volta a volta mi riferirò a un determinato metodo tecnico, questa designazione deve essere intesa come una *esemplificazione* fra metodi affini o no, ma che possono fornire gli stessi reperti. Perciò, nel corso di questo lavoro, mi limito a nominare una diecina di metodi, in quanto tra questi sono ben compresi i diversi « metodi-tipo » che possono mettere in evidenza le varie parti costitutive della glia. Questi metodi ho scelto fra quelli più in uso, cosicchè mi posso risparmiare di specificarne il dettaglio. Più avanti discuterò partitamente il valore e il significato da attribuirsi alle varie reazioni che in questi metodi intervengono.

Per non intralciare lo svolgimento della mia tesi con lunghe ed analitiche descrizioni dei singoli reperti, io accennerò qui volta a volta, secondo l'opportunità, a particolari osservati in materiale svariato e con metodi diversi. *Rimando chi vorrà conoscere i dati precisi circa ciascun caso, alla particolareggiata descrizione delle figure.*

IV.

I reperti.

Abbiam detto che i criterî su cui è basato l'odierno dottrinale circa la struttura della nevroglia sono essenzialmente di due categorie: istiochimici e morfologici. Allo scopo di meglio intenderci circa le singole parti che entreranno in discorso, incominciamo a trattare dei *dati morfologici*.

E, anzitutto, giacchè oggi la massima parte degli Autori sono d'accordo nel ritenere che le fibre nevrogliche giacciono *nel* protoplasma della cellula e dei suoi prolungamenti, cerchiamo di dare una descrizione dell'aspetto esteriore della cellula nevroglica munita di prolungamenti, dell'*astrocita*, senza preoccuparci del suo contenuto.

Ma quale astrocita imprenderemo a descrivere? Poichè, per molte ragioni che a noi sfuggono, ma certamente anche per la proprietà, che hanno le cellule del tessuto interstiziale dei centri nervosi, di plasmare il loro corpo cellulare e i loro prolungamenti sulle strutture nervose e sui vasi sanguigni; in genere, sugli elementi istologici a cui si trovano a ridosso, noi riscontriamo la più grande varietà di volume, di forma complessiva; di forma, numero, grossezza e lunghezza dei prolungamenti, a seconda che abbiamo sott'occhio un astrocita della sostanza bianca del midollo spinale o un astrocita delle parti profonde della corteccia cerebrale, o invece un astrocita del primo strato corticale, o un astrocita della glia periependimaria, e così via.

Ma, oltre a queste differenze, diremo così, preesistenti, originarie delle cellule nevrogliche dei varî punti dell'asse cerebrospinale, vi sono poi, anche in cellule originariamente uguali, diffenze notevolissime, che chiameremo acquisite, dovute a condizioni sopravvenute *post mortem*, ad es., al diverso modo di fissazione. Le differenze che risultano da questa condizione sono, nelle cellule nevrogliche, addirittura enormi: in rapporto soprattutto con la consistenza assai molle del protoplasma nevroglico e col tipo del fissatore (semplicemente coagulante, disidradante, disidratante e insieme degrassante, ecc. ecc.). Il fissatore modifica più o meno profondamente la forma dell'astrocita per due vie: direttamente per la sua azione sulla cellula stessa, indirettamente per le modificazioni di forma, volume e disposizione reciproca che induce negli elementi contigui all'astrocita stesso.

Per aver davanti, dunque, un còmpito più preciso e più direttamente vòlto al nostro obbiettivo, io mi limiterò a descrivere alcuni caratteri morfologici che son comuni ad astrociti di varia forma e grandezza, quando essi siano fissati con fissatori *molto energici*, dalla quale condizione generica — mi pare — risultano gli aspetti che più s'avvicinano a quelli dati dal fissatore-mordente del Weigert (Gliabeize). Ciò, precipuamente, in vista del fatto che il mordente del Weigert è uno dei fissatori più usati e meglio adatti per poter mettere in evidenza le « fibre » nevrogliche.

Per poter comprendere molti particolari morfologici degli astrociti, è indispensabile di rappresentarsene le parti plasticamente, non solo nelle due dimensioni di super-

ficie, ma anche nella *dimensione di profondità*, e, per descrivere certe complesse disposizioni, sarà pur necessario mi esprima con qualche metafora.

Notiamo anzitutto che il citoplasma si presenta di solito come se si fosse retratto fra un prolungamento e l'altro; e viceversa i prolungamenti, i quali appariscono come tesi a un punto fisso periferico, sembrano aver esercitato una trazione sul citoplasma nel loro punto d'impianto su di esso. Perciò la base di ciascun prolungamento ha per lo più una forma conica o, meglio, è paragonabile ad un ombrello semiaperto, vale a dire è percorsa longitudinalmente da costolature, da rilievi lineari — le stecche dell'ombrello — corrispondenti alle linee di maggior trazione, rilievi alternantisi con avvallamenti. Alcuni di questi *spigoli* delle eminenze coniche si perdono gradatamente nella superficie della cellula; ma, trovandosi due eminenze una di fronte all'altra, spesso uno spigolo dell'una si continua con uno spigolo dell'eminenza vicina, e si solleva così tra le due eminenze una *lamella* di protoplasma. Il margine di queste lamelle sollevate dal citoplasma tra due prolungamenti segue di solito una linea curva, come i margini di una vela rigonfia, fissata ai suoi angoli.

Ora, dobbiamo ricordare che da tutta la superficie del citoplasma e in tutte le direzioni emanano prolungamenti di vario calibro: ne consegue che la cellula *non possiede una superficie propria* più o meno pianeggiante, ma che essa superficie è totalmente costituita da eminenze coniche con i rispettivi spigoli ed avvallamenti, da lamelle tese fra due eminenze ecc. Da ciò risulta che, osservando il profilo i contorni della cellula, noi non avremo sott'occhio la linea superficiale propria dell'*intera massa* del citoplasma, ma soltanto i margini di *singole* eminenze coniche o di singole lamelle.

Perciò, se noi coloriamo queste cellule con i metodi che dànno una colorazione diffusa, di massa del protoplasma nevroglico, osserveremo una colorazione molto intensa nella parte *centrale* della cellula, mentre tutte le parti periferiche — essendo costituite da *singole* eminenze o lamelle continuantisi nei prolungamenti, le quali per la loro tenuità sono molto debolmente colorate — appariranno, senza pari, meno colorate delle parti centrali. Questo rapido sbalzo tra la intensa colorazione della massa centrale e la colorazione talora addirittura impercettibile delle delicatissime formazioni periferiche, indusse già alcuni Autori a negare una continuità fra il corpo cellulare ed i prolungamenti.

Possiam distinguere i prolungamenti cellulari in *grossi* e *sottili*. I primi, di solito poco numerosi per ciascuna cellula, hanno per lo più forma lamellare, a nastro più o meno largo. Raramente hanno forma cilindrica. In vicinanza della cellula forniscono talora collaterali. Generalmente non raggiungono grande lunghezza; spesso hanno decorso ondulato e si presentan più o meno ritorti su sè stessi a spirale. Per lo più vanno ad inserirsi sull'avventizia di vasi vicini.

I prolungamenti *sottili* hanno aspetto filiforme, calibro uniforme, non dànno collaterali, presentano decorso ora rettilineo, ora a bruschi zig-zag; meno frequentemente a fitte tortuosità spirali che posson accentuarsi fino a formare vere e proprie anse. Di solito raggiungono grande lunghezza, tanto che è raro di poter seguire in tutto il suo tragitto in una sezione microscopica uno di questi prolungamenti dalla cellula d'origine al punto d'impianto sulla parete d'un vaso o nel punto in cui esso va a fondersi in un'altra cellula nevroglica.

a) Le nuove osservazioni morfologiche.

Quanto precede, per ciò che riguarda la forma esteriore dell'astrocita. Dovendo ora studiare i due elementi che si ammette costituiscano la nevroglia (protoplasmi e fibre), convien procedere ad una analisi del contenuto degli astrociti, e ciò, naturalmente, applicando quei metodi di colorazione che mettono nettamente in evidenza i due elementi suddetti. Noi possediamo oggi parecchi di questi metodi. Per ora, per brevità, e anche per diritto di precedenza, mi riferirò soprattutto a preparati allestiti col metodo classico del Weigert, con la colorazione di contrasto al cromogeno. È noto che, in questo metodo come in tutti gli altri affini « per la colorazione della nevroglia », si suol distinguere, secondo le designazioni del Weigert, una « colorazione propriamente detta » (die eigentliche Faerbung) — data, nel caso speciale, dal violetto di metile, la quale colora « specificamente » le fibre nevrogliche — e una colorazione aggiuntiva, di contrasto, la quale tinge i protoplasmi nevroglici.

Descriviamo, ora, le parti degli astrociti che si vedono colorate con la colorazione « specifica », vale a dire — nei preparati alla Weigert — col violetto di metile. E, procedendo dal più semplice al più complesso, incominciamo con i *prolungamenti sottili.*

Questi prolungamenti appariscono per lo più, a medî ingrandimenti, intensamente ed uniformemente colorati. Ma, a forti ingrandimenti, si osserva che la colorazione in essi non sempre è uniforme: essa è più intensa ora su un margine, ora sull'altro, per tratti più o meno lunghi; è intensissima ove vi è una curva o un angolo brusco. Qua e là si posson riscontrare brevi tratti non colorati (fig. 1 *e*, 18 *a*). Talora, per breve tratto, il prolungamento presenta un rigonfiamento: qui diminuisce bruscamente la colorazione, sì che ad un'osservazione non molto attenta il prolungamento può sembrare interrotto. In sezione trasversa questi prolungamenti non si presentano come filamenti perfettamente cilindrici, ma di solito dànno una sezione più o meno schiacciata e, comunque, irregolare.

Nel punto in cui essi si impiantano sulla cellula, le parti colorate si presentano in aspetti diversi a seconda delle modalità dell'impianto. Se il sottile prolungamento *gradatamente* si allarga in una espansione che va a fondersi col citoplasma, si osserva che la colorazione violetta si attenua in proporzione dell'aumentare del calibro (fig. 5 *e*, 9 *a*, 10 *a*). Se l'allargarsi del prolungamento è lentissimo, si trapassa allora ad un prolungamento di medio calibro (fig. 1 *e*, 2 *f*), circa le cui particolarità tratto più innanzi. Spesso la espansione d'impianto è brevissima; ed allora il passaggio dalla colorazione intensa ad una tenuissima avviene bruscamente (fig. 9 *e*, *d*, *f*). Si rileva però sempre, ad una attenta osservazione, la sfumatura di colore corrispondente.

Le stesse modalità d'impianto, e, quindi, di colorazione, valgono per i sottili prolungamenti che non traggono direttamente dal corpo cellulare, ma da prolungamenti di grosso calibro, quali ramificazioni degli stessi (fig. 1 *c''*, 2 *g*), o come assottigliamento *terminale* di questi ultimi in forma di uno o più (biforcazione, sfioccamento) filamenti sottili.

I *prolungamenti di medio e grosso calibro* si distinguono dai prolungamenti sottili in quanto non si colorano intensamente *in toto* come questi ultimi. Vedemmo che raramente presentano forma cilindrica: di solito mostrano forma appiattita, spesso addirittura a nastro, a lamella. I tratti a decorso rettilineo, visti in superficie, mostrano una *colorazione diffusa*, più o meno tenue, a seconda della maggiore o minore ampiezza della superficie stessa (fig. 1 *i*, *b*, *m*, *m'*, 2 *b*, 3, 4 *a*, 8 *b*). Talora non si colorano altro che brevi tratti di essi, debolmente, in corrispondenza di piccole incisure, di lievi strozzamenti (fig. 5 *g*, 11 *b*).

Più spesso si osserva il *margine* di questi prolungamenti maggiori segnato per tratti più o meno brevi da linee sottili, taglienti, intensamente colorate (fig. 1 *c'*, *e*, *m*, 2 *b*, *e*). Come vedremo più avanti, in certi casi, il tratto colorato corrisponde all'*arrovesciamento* di un sottile lembo marginale. In altri casi, questi tratti colorati corrispondono ai punti in cui il margine, in una curva o in una delle frequentissime ondulazioni spirali del prolungamento, viene a presentarsi *in taglio*, anzichè di profilo. Infatti, essi tratti colorati s'iniziano sottilissimi, acquistano rapidamente un certo spessore in corrispondenza del mezzo dell'ondulazione, e poi rapidamente si attenuano e scompaiono (fig. 2 *b'*). *Il comparire e lo scomparire di queste linee colorate è sempre in rapporto diretto con le speciali ondulazioni del prolungamento.* I corrispondenti cambiamenti di forma e le relative sfumature, che questi margini presentano, non si distinguono bene se non a forti ingrandimenti. È così che certi margini, i quali, a medî ingrandimenti, ci appaiono rappresentati da una linea colorata *continua* uniforme, a forte ingrandimento si mostrano invece segnati da una successione di brevi linee affilate agli estremi, e con i rispettivi capi in apparenza contigui ma in realtà giacenti in piani diversi (fig. 7 *e*, 22 *a*, *a*, 16 *c*).

Poichè le ondulazioni del prolungamento si accompagnano con torsioni *spirali* dello stesso, così anche le linee colorate, che corrispondono al margine visto in taglio, traversano spesso obliquamente il prolungamento stesso (fig. 1 *d*, 5 *d*, *b*). Questi rapporti talvolta sono di difficile interpretazione, perchè le ondulazioni si svolgono non solo nelle due direzioni di superficie, ma anche nella *direzione di profondità*, nella quale non si possono seguire se non col gioco della vite micrometrica. Per la stessa ragione, le figure non possono dare che un'idea approssimativa di queste disposizioni.

Nei prolungamenti a forma cilindrica, in rapporto evidente con la colorazione prevalente delle parti superficiali, si vede pochissimo colorata la porzione centrale, corrispondente all'asse longitudinale del prolungamento, e, a mano a mano, sempre più colorate le porzioni marginali (fig. 2 a sin.). È un fatto analogo a quello che si osserva nei nuclei delle cellule, i quali, essendo forniti di una membrana colorata, appariscono quasi incolori nelle parti centrali, mentre la colorazione va aumentando verso la periferia fino ad un *maximum*, corrispondente all'orlo estremo, in cui la membrana nucleare si presenta in taglio.

Queste varie modalità, secondo cui i margini dei prolungamenti si presentano colorati, valgono pienamente anche per i margini delle lamelle e per gli spigoli delle eminenze protoplasmatiche, con le quali i prolungamenti sorgono dal corpo cellulare. È così che, spesso, molti o solo alcuni orli delle varie eminenze coniche e lamellari, che limitano tutto all'intorno la periferia cellulare, possono presentarsi più o meno intensamente colorati (fig. 1 *h*, *n*, *n'* 5 *f'*, 10 *b*, *d*, 11 *c*, 16 *c*).

Quantunque meno frequentemente di quanto si osservi nei prolungamenti sottili, anche nei maggiori si riscontrano curve assai brusche, e persino strette anse a spirale. Ne ho portato numerosi esempî nel mio lavoro sulle alterazioni cerebrali nella malaria (ved. fig. 267, 371, 272, 276).

Specialmente in queste curve risulta evidente la forma appiattita, a nastro, del prolungamento. Noi riesciamo, infatti, molto spesso, a vedere all'inizio della curva il margine convesso sollevarsi in costa, e poi l'intero prolungamento trapassare, dalla disposizione in piano, alla disposizione in taglio (fig. 6, 2, 11, 12 *a*). Quivi esso mostra uno spessore molto minore della sua larghezza, e, parallelamente, una colorazione *molto più intensa* di quella del tratto che si vede in piano (fig. 2 *b'*, 11 *a*, *b*). Questo apparente assottigliarsi di un grosso prolungamento non va confuso col normale assottigliamento *terminale* di molti di questi prolungamenti, perchè nel nostro caso, finita la curva, il prolungamento, adagiandosi nuovamente in piano, ripresenta la sua primitiva larghezza. Per questa determinazione, ci serve soprattutto lo studio esatto dei *nodi* o *fuochi di torsione*.

Lo studio dei fenomeni di torsione — per cui un prolungamento passa dalla disposizione in piano alla disposizione in taglio e viceversa, o addirittura s'arrovescia su sè stesso, presentando all'osservatore la superficie opposta a quella che si vede nel tratto precedente — ha notevole importanza perchè chiarisce molti particolari morfologici e fornisce elementi importanti per il problema tintoriale.

Già nei larghi prolungamenti lamellari si possono osservare momenti iniziali, incompiuti, di tali torsioni, sotto forma dell'arrovesciamento di un breve lembo marginale sul prolungamento stesso (fig. 1 *b*, *b'*). La parte arrovesciata presenta una colorazione molto intensa. Non vi ha dubbio che la colorazione intensa di molti tratti marginali dei prolungamenti e delle lamelle protoplasmatiche con cui essi si continuano nella cellula, è dovuta a una disposizione di tal fatta. Da questi gradi iniziali si passa al sollevarsi dell'intero prolungamento dalla giacitura in piano alla disposizione in taglio, il che vedemmo avvenire molto frequentemente nelle curve. Così si giunge al caso estremo, in cui il prolungamento si rivolta completamente su sè stesso, con una intera torsione, che può esser compresa entro un brevissimo tratto. Qui vediamo nettamente i margini incrociarsi a X, e il prolungamento si presenta più o meno strozzato nel fuoco di torsione (fig. 3 *b*, 2 *b'*). Non è raro vedere questi rivolgimenti totali succedersi (a verso alterno?) a brevi distanze in uno stesso prolungamento, in corrispondenza di gomiti successivi o anche in tratti rettilinei (fig. 6, 6^{bis}).

Ciò che importa rilevare è:

1°) che il fuoco o nodo di torsione, trattisi di torsione completa o incompleta, è sempre *intensamente colorato, anche se le restanti parti del prolungamento appariscono debolmente o per nulla colorate* (fig. 3, 6, 6^{bis}, 11);

2°) che dal fuoco di torsione partono striature longitudinali *intensamente colorate*, estendentisi nel prolungamento per un tratto più o meno considerevole. La forma e la direzione di queste striature nonchè i loro rapporti col nodo di torsione, mostrano all'evidenza che *esse rappresentano pieghe prodottesi nel substrato in seguito al meccanismo di torsione* (fig. 3 *a*).

Simili striature noi vediamo non soltanto nei punti in cui il protoplasma nevro-

glico ha subìto una torsione, ma anche ove esso ha subìto semplicemente una strozzatura (fig. 2 *b*) o un raggrinzamento (fig. 12 *b*, 21 *p*, 38 *p*).

Osserviamo anche non di rado queste striature longitudinali intensamente colorate, nelle basi coniche con cui i prolungamenti s'impiantano sulla cellula; ed esse striature stanno evidentemente in rapporto col raggrinzamento che il protoplasma presenta per il brusco assottigliarsi della massa quando essa si riduce a sottile filamento. Si osservano in questi casi tante sottili pieghe superficiali che convergono verso il vertice del cono protosplasmatico che trapassa in vero e proprio prolungamento (fig. 1 *n*, *n'*, 2 *b*).

Fin qui ho trattato soprattutto di quelle porzioni di prolungamenti e delle eminenze coniche e lamellari del citoplasma le quali sogliono assumere con la massima intensità la colorazione « specifica » con i metodi tipo Weigert. Ma oltre che in queste parti, anche in tutte le restanti porzioni del prolungamento o delle eminenze e lamelle noi troviamo spesso la colorazione « specifica » estesa in modo *diffuso* e con varia intensità. Questa colorazione diffusa, evidentissima in svariate condizioni patologiche, si riscontra, meno estesa, ma non meno evidente, anche negli elementi nevroglici normali. Nelle figure 1, 2, 4, 8, 11, 12, 13, 16 della tavola I e II si può osservare chiaramente che larghe superficî dei grossi prolungamenti e del citoplasma presentano una tinta violetta diffusa, la cui intensità varia dal violetto pallido ad un violetto molto carico. Non diversamente, con qualunque altra delle colorazioni semplici o doppie, proposte per la dimostrazione delle fibre nevrogliche, i corpi cellulari si mostrano parzialmente o intensamente colorati con la « colorazione propriamente detta » (die eigentliche Färbung).

Questa colorazione diffusa, conferita dal metodo del Weigert e dai metodi affini, è una colorazione *di superficie*.

Lo vediamo dal modo con cui essa appare sul citoplasma e sui grossi prolungamenti, quando il substrato presenti *un certo spessore*. In questo caso la massa si mostra sempre colorata più o meno intensamente sugli orli, lungo le linee marginali, e la colorazione si attenua rapidamente, fino a scomparire, quando si passa verso le parti centrali (fig. 2, 10, 45 *d*, *c*). È il fenomeno ottico tipico per qualunque corpo *trasparente*, colorato soltanto alla sua superficie. Spesso, pur essendo tutta la superficie indubbiamente colorata, si osserva un distacco assai brusco tra il margine della massa, intensamente colorato, e le parti centrali apparentemente incolori. Come già ebbi ad accennare, l'identico fenomeno noi abbiamo sott'occhio nei grossi nuclei cellulari, a membrana sottile. In essi la membrana colorata ci si rivela *soltanto alla periferia* con una linea quasi affatto priva di sfumatura. Questa linea corrisponde alla parte della membrana che noi vediamo in taglio.

La localizzazione della colorazione alla superficie del protoplasma nevroglico si può constatare anche direttamente. Certe sezioni trasverse di prolungamenti cilindrici mostrano chiaramente colorato uno straterello periferico anulare e incolori le parti centrali (fig. 33, 33 *a*, 33 *b*). Soltanto nei prolungamenti più sottili, secondo apparisce dalle loro sezioni trasverse, appare colorato tutto il substrato. È difficile dire se la colorazione superficiale del protoplasma degli astrociti e dei loro prolungamenti indichi

l'esistenza di una membrana cellulare [1]. È una questione che, allo stato attuale delle conoscenze e delle possibilità tecniche non si può risolvere in modo sicuro: perciò mi limito a parlare di strato superficiale colorato. Lo spessore di questo strato varia molto a seconda di speciali condizioni fisiopatologiche o patologiche, in cui si trova la cellula (è maggiore nell'età avanzata, in processi ipertrofici, in processi regressivi succedenti ad una ipertrofia, ecc.). È perciò che, mentre quando lo strato colorato è tenuissimo, esso non ci si rivela che per la sottile linea colorata marginale delle masse, quando invece esaminiamo citoplasmi o prolungamenti d'una certa massa, specialmente in cellule che si trovino in stadio regressivo, si riscontra, procedendo dai margini verso le parti centrali, una colorazione intensa che va sfumando molto lentamente.

Queste modalità con cui si presenta la colorazione, si riscontrano, ripeto, soltanto in masse protoplasmatiche d'un certo spessore, non in nastri e lamelle. Un prolungamento di forma piatta, se si trova perfettamente in piano, mostra appena segnati i margini per una sottile linea che stacca appena sul restante protoplasma. Non appena, però, dalla giacitura in piano esso trapassa alla disposizione in costa, ci appare contornato da due margini sottili ben colorati, che risultano dalle due sottili ma *estese* superfici colorate viste *in taglio*. Ma, poichè è raro il caso che tutte e due si presentino perfettamente orientate in taglio, così solo per brevi tratti esse ci appariscono come due sottili linee marginali parallele; per lo più, a seconda della loro varia *obliquità*, ci si presentano in forma di linee più o meno sfumate da un lato. Spesso, anche, le rispettive sfumature si confondono, cosicchè il prolungamento appare colorato *in toto*. Gli stessi fenomeni entrano in campo quando soltanto *un* margine del prolungamento nastriforme o una lamella lasciano la giacitura in piano per ripiegarsi in alto o in basso.

Non vi ha dubbio che anche l'intensa colorazione che mostrano i « fuochi di torsione » dei prolungamenti nevroglici, risulta, in parte, da questi speciali fenomeni ottici, dovuti alla *visione tangente di sottili superfici colorate*.

A questa speciale condizione è pur dovuta l'impressione, che si ha nell'esame di questi preparati con forti ingrandimenti, di qualche cosa di instabile nella intensità e nella estensione della tinta — e perciò anche della forma — di certe parti colorate, impressione che può grossolanamente paragonarsi a quella che dànno certi rasi a contropelo, nei quali la forma dei riflessi e la intensità delle tinte di ogni piega mutano al minimo cambiamento della luce incidente o della linea visuale. Nei preparati

[1] Se pure oggi non si possa ammettere che le cellule ed i prolungamenti nevroglici siano cavi, pare indubbio che già il Frommann, fin dal 1864, abbia avuto l'impressione dell'esistenza di una membrana costituente la superficie delle cellule nevrogliche e dei loro prolungamenti. Egli, infatti, descrivendo da preparati al carminio, così si esprime «.... so glaube ich, dass die Fasern alle aus den Ausläufern der Zellen hervorgegangen und *wie diese hohl sind*, und dass somit die ganze Bindesubstanz der weissen Substanz aus einem zusammenhängenden Netzwerk von Kanälchen von verschiedener Grösse besteht, für welche die zahlreich eingeschalteten Zellen Sammel und Mittelpunkte bilden ». Con ciò era altresì tracciata fin d'allora la teoria del reticolo nevroglico tridimensionale ripresa più tardi dallo Held. (Frommann, *Untersuchungen über die normale und pathologische Anatomie des Rückenmarks*. Teil I, Jena 1864, Teil II, 1877).

alla Weigert, infatti, nello studio dei minuti particolari, basta un lieve cambiamento della direzione della visuale, per lo spostamento del portaoggetti o semplicemente per il giuoco della vite micrometrica, perchè mutino le condizioni ottiche, da cui risultava una maggiore o minore *estensione* ed *intensità* della colorazione delle parti.

***

Nel descrivere le parti dei protoplasmi nevroglici che più intensa presentano la colorazione « specifica » con i metodi di tipo Weigert, io ho parlato correntemente di *margini più o meno arrovesciati o in taglio*, di *raggrinzamenti* e di *pieghe* delle superfici, con un apriorismo che potrà esser parso audace. Io invito i dubbiosi a ripetere le mie osservazioni su buoni preparati allestiti col metodo del Weigert o con metodi affini, con colorazione di contrasto, tenendo sempre presenti i rapporti tra la forma e disposizione dei tratti che hanno assunto intensamente il colore « specifico » e la morfologia *complessiva* della parte. Invero non vi è ragione per non dare gli stessi nomi a determinate disposizioni morfologiche di un corpo, solo perchè noi l'osserviamo attraverso le lenti del microscopio.

Tuttavia un fatto poteva realmente lasciar qualche dubbio sulla esattezza di certe designazioni morfologiche, ed era la *intensa colorazione* che assumono i margini arrovesciati o in taglio, le grinze e le pieghe, in brusco contrasto con la colorazione spesso debole e talora quasi nulla del substrato, dal quale pure essi lembi arrovesciati, esse pieghe risultano. Delle ragioni ottiche, per le quali da una superficie debolmente colorata, vista in taglio, può risultare una linea marginale intensamente colorata, ho già parlato più sopra. Ma, come vedremo più avanti, vi sono altre condizioni per cui i margini, gli spigoli, le pieghe del substrato possono presentare una colorazione particolarmente intensa. Limitiamoci, per ora, a constatare che non si tratta qui di fatti nuovi: il fenomeno della intensa colorazione di margini o di spigoli sottili e di pieghe è già stato osservato in cellule di altri tessuti. Rammento soltanto la colorazione intensa a linee sottili e taglienti presentata spesso dai margini o spigoli delle cellule di certi epitelî, quando l'epitelio sia osservato in superficie. Rammento il noto reperto delle « pieghe nucleari ».

Io ho dedicato speciali indagini, già pubblicate in una Nota a parte (¹), ad una miglior conoscenza delle pieghe della membrana dei nuclei delle cellule nervose. Ora, da queste ricerche risulta chiaramente, che, malgrado la membrana di questi nuclei sia estremamente sottile e perciò offra una colorazione percettibile soltanto sull'estremo margine del nucleo, nondimeno le pieghe della membrana si presentano come linee *di grosso spessore e intensissimamente colorate*, attraversanti l'intera superficie nucleare, che pur apparisce affatto incolore.

Ma io son riescito anche a *riprodurre artificialmente in substrati cellulari le disposizioni morfologiche in questione* ed ho potuto studiare quindi, con la certezza dell'obbietto, il comportamento di esse di fronte ai varî metodi coloranti.

Stendendo sopra un portaoggetti la sottile patina che si ricava abradendo con una spatola la mucosa orale, e fissando poi il tutto con opportuni fissatori, si ven-

(¹) *Zur Pathologie der Ganglienzellenkerne* (Folia neurobiologica, Bd. V, 1911).

gono ad avere sul portaoggetti innumerevoli cellule epiteliali isolate, o ancor connesse tra loro in piccoli brandelli di epitelio.

Molte di queste cellule restan fissate in piano, totalmente distese; molte, invece, presentano raggrinzamenti, accartocciamenti, cincischiamenti, prodotti dalle violenze meccaniche esercitate su di esse nell'allestire il preparato a striscio.

Orbene, eseguendo su questi preparati punto per punto, incominciando dalla fissazione, il metodo del Weigert per la nevroglia (o i metodi affini), si ottengono i seguenti risultati:

a) Le cellule *perfettamente spianate*, tolto il nucleo, non presentano affatto o solo molto debolmente la colorazione « specifica », tanto che, senza la colorazione di contrasto, il protoplasma resterebbe invisibile (fig. 30 *c*);

b) ove i margini cellulari presentano ondulazioni un po' marcate, i tratti in cui il margine, causa l'ondulazione, si presenta, anche per breve tratto, di taglio, appariscono come linee nette taglienti, intensamente colorate (fig. 29 *aa*, 37 *mm*, 30 *m*);

c) le pieghe che attraversano parti spianate della cellula, spiccano come filamenti intensamente colorati attraverso un protoplasma che spesso apparisce perfettamente incolore (figg. 29, 37, 40);

d) Le parti di protoplasma non perfettamente spianate, ma raggrinzate o accartocciate, presentano spesso una colorazione diffusa più o meno intensa; in questa colorazione, si distinguono striature più o meno marcate a seconda che si tratti di vere pieghe o di sottili scanalature superficiali dovute al raggrinzamento (figg. 29, 30);

e) infine, ove vi hanno fatti di torsione, di sovrapposizione di parti ecc. si osserva una intensa colorazione più o meno diffusa dei protoplasmi (fig. 30, 31 *r*, 41 *r*).

Si riscontrano, dunque, nelle cellule dell'epitelio buccale raggrinzate, trattate col metodo del Weigert per la glia, particolari morfologici affatto simili a quelli descritti nelle lamelle nevrogliche, ed essi assumono la colorazione « specifica » esattamente con le stesse modalità che si osservano nelle cellule nevrogliche trattate con lo stesso metodo.

Le cellule non raggrinzate, non presentano nessuna di queste particolarità morfologiche, e non assumono che in modo debolissimo e diffuso, o non assumono affatto la colorazione « specifica ».

Da queste osservazioni io traggo, per ora, soltanto il corollario che la intensa colorazione delle parti degli astrociti nevroglici da me interpretate come *margini più o meno arrovesciati*, *pieghe*, ecc. non solo non contraddice a queste interpretazioni, ma che anzi questo singolare fenomeno tintoriale, ripetentesi in pieghe di altri elementi istiologici e negli esperimenti sulle cellule dell'epitelio buccale, conferma pienamente le interpretazioni stesse.

I risultati di questo insieme di osservazioni nei riguardi dello studio morfologico delle parti che, con i metodi di tipo Weigert, assumono la colorazione « specifica » si possono sintetizzare nelle seguenti proposizioni:

I. Col metodo del Weigert per la nevroglia e con i metodi affini si ottiene una colorazione più o meno intensa, più o meno estesa di *uno strato superficiale del protoplasma degli astrociti.*

II. Con gli stessi metodi, nel protoplasma degli astrociti e nelle porzioni ampie dei prolungamenti degli stessi, appariscono colorati con particolare intensità alcuni sottili lembi marginali *arrovesciati* o *disposti in taglio*, le porzioni *ritorte* o *raggrinzate*, le *pieghe* relative. Con la stessa intensità si colorano la maggior parte dei *sottili prolungamenti filiformi* che traggono dagli astrociti.

b) **Le nuove osservazioni riguardo al problema microistiochimico.**

In possesso ora della esatta conoscenza delle parti della nevroglia che si colorano — che « reagiscono » con la colorazione « specifica » (die eigentliche Faerbung) del Weigert, possiamo meglio prendere in esame i criterî *microistiochimici*, secondo i quali si è distinto nella nevroglia l'elemento *fibra*, in quanto esso reagirebbe positivamente alla colorazione specifica, dall'elemento *protoplasma* in quanto questo non reagirebbe con la detta colorazione.

Non mi tratterrò in discussioni circa i concetti *teorici*, in base ai quali si volle attribuire a certi metodi per la colorazione della glia il valore di vere e proprie reazioni chimiche. L'esperienza ha mostrato che non poche argomentazioni su cui si basavano le relative teorie chimiche, erano certamente errate.

In pratica si è visto che al metodo del Weigert, che, quando fu pubblicato, apparve quasi un reattivo *specifico* delle fibre nevrogliche, non compete, a vero dire, un significato così importante. Sta bene che al concetto di specificità di una colorazione si conceda una certa latitudine; ma intanto non sarà inutile rammentare che questo metodo, che dovrebbe dare una reazione istiochimica caratteristica della particolar sostanza delle fibre nevrogliche, colora anche ottimamente tutti i nuclei cellulari (n. delle cellule nevrogliche, nervose, connettivali, sanguigne), molti globuli rossi del sangue, i filamenti di fibrina e talvolta le fibre di connettivo (quando questo si trovi in particolari condizioni regressive).

Gli stessi singoli procedimenti del metodo del Weigert che sembravano necessariamente concatenati l'un l'altro per azioni e reazioni chimiche, si mostrarono non tutti anelli indispensabili della catena reattiva. Così ad es. la mordenzatura metallica, che dapprima era parsa *conditio sine qua non* per la riescita della reazione colorante, si mostrò poi — e lo stesso Weigert lo ha riconosciuto — non assolutamente necessaria. Ed anche sull'azione dei varî reattivi siamo ben lungi dall'essere illuminati. Rammento soltanto il lungo e vivace dibattito fra il Weigert ed il Benda sull'azione del mordente metallico, dibattito che non condusse mai alla conversione di uno dei contendenti.

Comunque, si è presto constatato che gli stessi risultati che fornisce il classico metodo del Weigert, si ottengono facilmente con metodi svariati, basati su principî totalmente diversi da quelli che informano il metodo del Weigert.

Dall' insieme delle mie ricerche comparative sui metodi di colorazione, ho tratto l' impressione che, per ottenere i tipici reperti, assai più che la scelta di tale o di tale altra colorazione, abbiano importanza particolari condizioni del materiale su cui applichiamo i metodi stessi. La ben nota « capricciosità » dei « metodi per le fibre nevrogliche » non tanto è da imputarsi ai metodi di colorazione, quanto al materiale: infatti, sopra un materiale che una volta ha dato buoni reperti, tutti i metodi pro-

posti e anche molti altri non particolarmente destinati alla dimostrazione delle fibre nevrogliche, dànno, con lodevole costanza, buoni risultati.

Sarebbe troppo lungo enumerare tutte le circostanze che furono accusate dai varî Autori come causa d'insuccesso nei varî metodi di tipo Weigert, quasi a giustificazione della sconfortante capricciosità dei risultati. In base alla mia non breve esperienza, mi sembra di poter affermare che le condizioni principali d'insuccesso, rispettivamente di riescita di questi metodi, si aggirano tutte sullo stato di minore o maggiore *retrazione, in senso lato* dei substrati; dipenda essa da circostanze che hanno agito in vita, o nel cadavere, o durante lo manipolazioni successive del materiale.

Non vi ha dubbio che una delle condizioni che più comunemente impediscono di ottenere i tipici reperti del metodo Weigert è lo stato di tumefazione degli elementi istologici. Chi ha pratica di ricerche d'anatomia patologica sa già *a priori* che molto difficilmente un cervello tumefatto, molle (il *feuchtes Gehirn* dei tedeschi) darà risultati positivi con i metodi di tipo Weigert per la glia: una condizione, questa, che si verifica specialmente nei centri nervosi di soggetti morti per malattie acute febbrili, nelle quali le cellule nervose non solo, ma anche gli elementi nevroglici si trovano in preda alla così detta « tumefazione torbida » ([1]). Condizioni « trofiche » in certo modo analoghe si hanno verosimilmente nei centri nervosi normali di neonati, dei bimbi e dei mammiferi inferiori. È ben nota la consistenza molliccia e l'aspetto quasi edematoso, « vitreo », che ha in questi casi il tessuto nervoso; ed è altrettanto noto quanto sia difficile ottenere anche soltanto qualche scarso risultato con i metodi di tipo Weigert in questo materiale. D'altra parte è un fatto notorio che, in genere, la tumefazione degli elementi istiologici diminuisce di molto la loro colorabilità, tanto che questo principio viene applicato nella tecnica istiologica, facendo rigonfiare artificialmente quelle parti dei tessuti che si desidera rimangano incolori: esse allora, nella differenziazione, *cedono il colore più rapidamente delle altre.*

Al contrario, in tutti i cervelli *duri*, in cui gli elementi nevroglici sono meno tumidi, meno succulenti; ad es., nel cervello normale dell'uomo adulto, si hanno maggiori probabilità di ottenere buoni reperti. Molto bene si colora in genere la nevroglia in soggetti di età avanzata, nei quali, come è noto, gli elementi nevroglici si trovano in uno stato di riposo, mostrando lievi modificazioni regressive (retrazione dei citoplasmi e della sostanza dei prolungamenti). Nelle istesse condizioni trovansi *normalmente* gli elementi nevroglici in varî punti dei centri nervosi, specialmente nelle zone superficiali. E rammento al proposito la facile colorabilità, col metodo del

([1]) Anche in tutti gli stadî molto *recenti* di processi ipertrofici ed iperplastici della nevroglia, i metodi di tipo Weigert non forniscono reperto di « fibre ». A parte i risultati quanto mai dimostrativi delle ricerche sperimentali, nell'uomo un classico esempio si ha nella così detta sifilide cerebrale « produttiva », nella quale si riscontra un'enorme ipertrofia ed iperplasia della nevroglia, la quale, secondo hanno notato tutti gli autori, da Nissl in poi « non s'accompagna con formazione di fibre », e ciò a contrasto con quanto si verifica nella paralisi progressiva. Facciamo notare che, nel caso della lues produttiva, si tratta di processi acuti che vengono all'osservazione in periodi molto recenti, e che tutti gli elementi cellulari — anche le cellule nervose — sono rigonfiati. L'intera porzione di corteccia ha un aspetto tumefatto, vitreo.

Weigert, della glia dello strato marginale della corteccia cerebrale, del midollo, etc. L'*optimum* dei risultati, secondo mostrano anche le mie ricerche sperimentali, si ha nei casi in cui ad un processo d'ipertrofia delle cellule nevrogliche è succeduta una forte retrazione. In questi casi, non è raro trovar colorato, oltre a tutti i prolungamenti, anche l'intero corpo cellulare.

Questo, per le condizioni che si possono già avere in vita. In quanto alle cause che intervengono dopo morte, credo che l'attribuire, come fanno molti Autori, grande importanza, per la riescita dei metodi in questione, alla freschezza del materiale, sia giusto solo in quanto riguarda l'eventualità dello intervento di processi di imbibizione e di *tumefazione* cadaverica degli elementi.

La *fissazione*, già lo vedemmo, in tanto contribuisce a fornire buoni risultati, in quanto agisce prontamente ed *energicamente*; sarei per dire in quanto meglio *coarta* i protoplasmi nevroglici. Se io, fin dalle mie prime descrizioni, ho invocato il concetto di *retrazione*, di coartazione di masse in senso lato, gli è che, in realtà noi dobbiamo ammettere che in ogni preparato tipo Weigert siano avvenuti processi di retrazione a carico degli elementi nevroglici. A convincersene basta un confronto della morfologia degli astrociti in materiale fissato per le colorazioni tipo Weigert con quella degli astrociti dello stesso materiale, trattato ad es. con i fissatori diluiti al bicromato potassico, già adoperati dal Golgi.

Ma nel piccolo blocco istesso — e ciò fu notato anche dal Weigert — non di rado le porzioni centrali, non raggiunte con sufficiente prontezza e concentrazione dal liquido fissatore, non forniscono la colorazione « specifica ». E, anche in pezzi ben fissati, si osserva spesso in tutta la periferia del blocco un numero di elementi colorati, maggiore che non nel centro del blocco stesso.

Ho detto che, quando il materiale, per il concorso delle condizioni favorevoli di cui sopra, dà buoni risultati con uno qualunque dei metodi tipo Weigert, fornisce generalmente buoni reperti con tutti i metodi affini e anche con varî metodi non precisamente destinati alla colorazione della glia.

Possiamo radunare i metodi utilizzabili all'uopo in due grandi classi: *a*) colorazioni *regressive*; *b*) colorazioni *progressive*.

a) Nel classico metodo del Weigert noi abbiamo essenzialmente una colorazione *regressiva*, in quanto, dopo aver ipercolorato, si procede all'estrazione del colore fino ad un punto determinato. Esso metodo pone dunque in rilievo le parti della nevroglia (e di altri tessuti) che meno facilmente cedono il violetto di metile di fronte all'azione estrattiva esercitata dalla miscela di olio d'anilina e xilolo.

Ma *il residuo* di questa sottrazione non è qualche cosa di fisso. Esso varia, lo vedemmo, in uno stesso blocco di materiale a seconda dello stato di fissazione dei suoi varî strati: esso varia, in sezioni microscopiche uguali, a seconda del grado a cui abbiamo spinto la decolorazione. Molte parti voluminose, molti prolungamenti grossi e fibre sottilissime si decolorano protraendo la differenziazione. Lasciando agire molto a lungo il differenziatore, si giunge alla decolorazione totale. Anche nelle parti, che di solito rimangono colorate col metodo del Weigert, la tenacia della colorazione è molto variabile. In genere la colorazione non è molto tenace, almeno nel materiale

normale: spesso, infatti, la differenziazione rappresenta un momento critico: se di poco protratta, quasi ogni cosa è decolorata. E, anche, cause di lieve momento possono estrarre il colore dalle parti già tinte: io ho osservato in sezioni, per il resto ben colorate, formarsi tante striscie in cui tutto il tessuto è incolore, per il solo fatto di aver asciugato la sezione energicamente con carta bibula grossolana. Le striscie corrispondevano ai filamenti della carta più sporgenti, i quali avevano assorbito ed estratto completamente il colore dal tessuto.

Risultati molto simili a quelli che dà il metodo del Weigert vengono forniti da una serie di metodi, i quali, malgrado alcune differenze nella fissazione, nell'inclusione o nella scelta del colore d'anilina, sono essenzialmente basati — come il metodo classico del Weigert per la glia — sul principio della colorazione del Weigert per la *fibrina*. Tali sono ad es. il metodo dell'Anglade, il metodo del Robertson al violetto di metile, il metodo di Benecke, quello del Merzbacher, quello del Ranke, quello del Lehrmitte ecc. Questi metodi ho riunito sotto la designazione di metodi *affini* a quello del Weigert.

Il metodo del Weigert ed i metodi affini sono certamente quelli che dànno il *residuo* più piccolo, quelli cioè che lasciano colorate proprio soltanto le parti che più tenacemente trattengono il colore. Ma abbiamo altre colorazioni regressive, nelle quali non siamo costretti — come in quella di Weigert — a spingere tanto innanzi la decolorazione in quanto questa è schiava della contemporanea, indispensabile, ma spesso lenta chiarificazione del preparato. Con varie ematossiline noi ipercoloriamo gli elementi, per poi estrarne una certa quantità di colore nella « differenziazione », ma giacchè, adoperando differenziatori in soluzioni molto diluite, possiamo far procedere la decolorazione lentamente, così noi possiamo fermarla quando ci aggrada: possiamo spingerla avanti fino a raggiungere il *quadro medio* corrispondente ad un preparato Weigert; possiamo arrestarla prima e arricchire così i preparati di una quantità di mezze tinte, di parti nuove, cioè, che si tingono con media intensità. Possiamo seguire così, in una serie di preparati, *una scala continua*, *ininterrotta di passaggi*, fino ad avere le cellule con i loro prolungamenti intensamente colorate in nero. In questa categoria rientrano i metodi di Heidenhain all'ematossilina ferrica (nei quali si possono applicare differenziatori diversi: allume ferrico, miscela del *van Gieson* allungata, alcool acido, ecc.), le colorazioni B e C del Benda, i metodi di tipo Held, ecc. (v. figg. 45, 46, 48, 50, 51, 54, 55. Per i particolari, cfr. la spiegazione delle figure).

Lo studio di tutte le fasi di passaggio graduale, da un *minimum* ad un *maximum* di parti colorate col colore che suol tingere le « fibre » e viceversa, riesce particolarmente dimostrativo col metodo VI dell'Alzheimer (tipo *May-Grünwald*), in quanto in esso noi ipercoloriamo con fuxina ed estraiamo poi *ad libitum* quest'ultima, massimamente coll'azione del verde-luce, il quale funge da differenziatore, ma contemporaneamente colora, a contrasto, le parti che vanno cedendo la fucsina (v. la tav. VIII, meno le fig. 83, 93). Ora, se, in sezioni tratte dallo stesso blocco, facciamo agire un po' più a lungo la fucsina o un po' meno a lungo il verde-luce, otteniamo preparati in cui moltissime parti son colorate in rosso. Facciamo agire un po' meno la fucsina, ovvero un po' più il verde-luce (ovvero laviamo un po' più in soluzione picrica o nell'alcool) ed avremo preparati, in cui poche parti mostrano il colore che

tinge normalmente le « fibre » nevrogliche, il rosso, mentre, corrispondentemente, molte hanno assunto il colore di contrasto, il verde. Otteniamo così, *ad libitum*, mediante piccole modificazioni di tempi, tutte le gradazioni: dalle cellule totalmente o prevalentemente colorate dalla fucsina (fig. 81 *b*, 86), a cellule in cui soltanto i prolungamenti son colorati dalla fucsina (fig. 84, 89, 91), a cellule in cui solo alcune pieghe, alcuni lembi ecc. son colorati in rosso, mentre altri son colorati in verde (fig. 81 *a*, 82, 83, 90, 92), fino a cellule, di cui nessuna parte è colorata in rosso: totalmente verdi (fig. 86, 88).

Con minor costanza, ma con altrettanta nettezza possiamo osservare questa varia vicenda della colorazione delle parti con l'uno o con l'altro colore della doppia miscela di bleu di metile ed eosina, adoperando il metodo V dell'Alzheimer, a seconda che aumentiamo o diminuiamo anche di poco la quantità dell'eosina nella miscela, o anche prolungando più o meno la decolorazione (v. tav. VII, cfr. spiegazione delle figure).

Naturalmente, anche qui, si verifica la nota legge fisica delle colorazioni, per la quale il colore « più leggero » — in questo caso, l'eosina — si apprende di preferenza alle strutture più fini.

b) Tra le colorazioni *progressive*, quelle cioè in cui noi lasciamo che i tessuti assumano un colore, interrompendo l'azione di questo quando determinate parti si sono colorate con la voluta intensità, ve ne sono parecchie che, nella nevroglia, colorano innanzi tutto le parti che rimangono tinte col metodo del Weigert. Più in là, lasciando proseguire il processo colorante, si colorano anche altre parti della glia.

In questa categoria rientra un gruppo di metodi che non dànno una vera e propria colorazione, ma una *impregnazione* del substrato con sali metallici. Tale, ad esempio, il metodo del Bielschowky per le neurofibrille (fig. 47, 49, 52, 53, 56, 64), il quale per il nostro scopo riesce soltanto in materiale adatto, particolarmente in materiale fissato col mordente del Weigert per la glia [Perusini ([1])] o nella miscela di alcool, formolo ed. acido arsenioso proposta dal Golgi. Tale anche l'ottimo metodo al tannino dell'Achucarro (v. tav. VI).

In genere, però, con le colorazioni progressive è difficile fermare la colorazione nel momento in cui son colorate *soltanto* le parti che rimangono colorate col metodo del Weigert. Ciò può farsi agevolmente solo con particolari colorazioni ad azione lenta, come ad es. col metodo I del da Fano. Con quelle ad azione più rapida, si colorano di solito, fin dal principio, anche alcune parti *in più* di quanto non colori il metodo del Weigert.

Noi passiamo così, per gradazione, ai metodi che dànno piuttosto colorazioni *massive totali* della glia, colorazioni cioè che comprendono e le parti colorantisi col metodo del Weigert e quelle che col Weigert rimangono incolori. Tra questi metodi, io ho adoperato su larga scala il metodo IV dello Alzheimer, che è indubbiamente tra i migliori del genere. In questo gruppo rientrano molti metodi usati dagli antichi autori (Golgi, Ranvier, Bevan Lewis ecc.), nonchè, per casi particolari, anche i metodi

([1]) Perusini, *Ueber Gliabilder mittels der Bielschowsky'schen Neurofibrillenmethode*. Neurol. Centralblatt. 1910, n. 22.

del Bielschowsky e dell'Achucarro e anche il metodo V dell'Alzheimer. Altrove [1] ho mostrato come buone colorazioni di quest'ultima classe si ottengano anche con varie ematossiline diffusive (Delafield, Vassale) su materiale fissato in formolo e tagliato al congelatore.

Riassumendo le nostre osservazioni circa le modalità con cui il metodo del Weigert ed altri metodi forniscono la colorazione della nevroglia, risulta:

a) che il metodo del Weigert non può ritenersi una reazione colorante *specifica* per una particolare sostanza chimica contenuta nella glia; esso colora, infatti, insieme alla glia, svariati altri elementi dei tessuti; inoltre le parti che con esso metodo vengono poste in rilievo, si colorano ottimamente con molte altre colorazioni basate sui principî tintoriali più diversi;

b) col metodo del Weigert, e con tutti gli altri metodi che dànno risultati simili, si colora una quantità maggiore o minore di parti degli elementi nevroglici a seconda dell'intervento di svariate condizioni fisiche del substrato; inoltre, la quantità delle parti che si colorano nelle cellule della glia, può arbitrariamente aumentarsi o diminuirsi in una scala artificiale, modificando, a seconda dei varî metodi, la durata della colorazione o della differenziazione.

V.

Interpretazioni e controlli.

Di fronte a queste risultanze, apparve molto verosimile il concetto che i metodi così detti « per la glia fibrillare » non rappresentino reazioni specifiche per una particolare sostanza chimica, ma diano la colorazione per processi puramente *fisici*. Questo concetto trova subito una conferma non appena noi scendiamo ad una analisi minuta delle parti che si colorano col metodo del Weigert e con gli altri metodi che ne riproducono i reperti.

La nostra analisi morfologica, esposta nella prima parte di questo lavoro, ha mostrato che il metodo del Weigert ed i metodi affini, nonchè differenziare nella glia l'elemento *fibra* dall'elemento protoplasma, hanno semplicemente la proprietà di colorare meglio certe parti degli elementi nevroglici piuttosto che altre o, precisamente: *a*) forniscono un'intensa colorazione in molti dei fini prolungamenti e talune particolari disposizioni morfologiche dei protoplasmi, sia nella cellula che nei grossi prolungamenti; *b*) dànno in genere una colorazione diffusa più debole in uno strato superficiale degli astrociti; *c*) infine, in questi, colorano appena o non colorano affatto, in profondità, le ampie masse del citoplasma.

Notiamo subito che parecchie delle parti che più intensamente « reagiscono con la colorazione specifica », meglio diremo: che presentano una colorazione molto intensa, non corrispondono ad una particolare formazione esistente in vita, perchè altro non

[1] Cerletti, *Sopra speciali corpi a forma navicolare nella corteccia cerebrale*, ecc. Rivista sperim. di Freniatria, 1908, fasc. I-II.

sono che disposizioni morfologiche *puramente accidentali* del protoplasma nevroglico. Son dovute, infatti, o alla orientazione della sezione rispetto alla visuale (disposizioni in taglio ecc.), o a retrazioni subìte dal tessuto nelle varie manipolazioni tecniche (molte curve con relative torsioni, molte pieghe ecc.).

Le condizioni per cui queste parti presentano una particolare intensità di colorazione non sono che di ordine *fisico*. Sono però assai diverse, a seconda dei casi.

Ad una di queste condizioni abbiamo già accennato quando abbiamo descritto gli effetti della *visione tangente di sottili superfici colorate* (v. pag. 15). Io ho voluto studiare, anche sperimentalmente, questi fenomeni ottici, ed ho subito constatato che la colorazione del *substrato* non è neanche indispensabile al loro prodursi. Essa non fa che accentuare quanto si osserva anche in cellule nevrogliche *non colorate*.

In queste, infatti, laddove un margine delle formazioni lamellari si presenta di taglio, ivi esso stacca nettamente come *orlo scuro* filiforme, in virtù di un fenomeno di refrazione della luce.

È un fatto identico a quello ben noto a chi ha pratica nell'esame microscopico di filamenti di tessuti. Ad es. fra le fibre della seta, omogenee, prive di struttura, trasparentissime, ve ne sono di piatte, e queste, dovunque presentino un margine anche solo parzialmente ripiegato in taglio, appariscono come orlate da una linea *oscura nettissima*, la quale non è un filamento individualizzato decorrente nel sottile nastro, ma altro non è se non il risultato della refrangenza della luce sul margine ripiegato.

Per meglio studiare queste condizioni ottiche, ho voluto riprodurle artificialmente, fabbricando dei modelli di cellule nevrogliche in paraffina di sufficiente trasparenza per potersi paragonare al protoplasma nevroglico chiarificato in xilolo o in glicerina e visto per trasparenza, quale siamo soliti ad osservarlo nei nostri preparati. L'interesse dello studio di questi modelli sta precipuamente *nel confronto* fra l'aspetto ch'essi presentano quando son visti a luce incidente diffusa, e l'aspetto loro quando siano osservati per trasparenza. Le fotografie, ch'io qui riproduco, dànno soltanto una pallida idea di questi fenomeni ottici, soprattutto perchè non è facile ottenere buone prove fotografiche dai modelli illuminati per trasparenza, dovendo fotografarli contro luce con la insufficiente illuminazione diffusa data da una finestra. Nella realtà, però, e specialmente opponendo i modelli a una viva sorgente luminosa, meglio paragonabile alla illuminazione del microscopio, i particolari, che verrò descrivendo, risultano con una nettezza ed un contrasto veramente sorprendenti.

Ho eseguito due gruppi di modelli, modelli pieni, in tutto spessore, e modelli formati di una sottile lamina di paraffina. Nei primi, siccome la massa della paraffina oppone al passaggio della luce tutta la sua — relativa — opacità, si riproducono a un dipresso le condizioni delle colorazioni diffuse, *di massa* dei protoplasmi. Nei secondi, la relativa opacità della paraffina essendo limitata ad una lamina, si riproducono piuttosto le condizioni di colorazione *di superficie*, quale noi abbiamo ritenuto si verifichi col metodo del Weigert ed affini.

La fig. 1 (nel testo) mostra un primo modello, nel quale, riproducendosi una condizione tanto frequente nelle cellule nevrogliche, una parte — la più centrale — presenta un certo spessore, mentre le parti periferiche son piuttosto lamellari. Nel modello, la grossa costolatura mediana verticale A-B, è costituita di paraffina in massa, mentre le alette laterali sono in paraffina sottilmente laminata. I prolungamenti X, X″ sono costituiti da lamelle presentantisi in taglio; in X, X′, X‴ ecc. i margini sono più o meno ripiegati in costa. Tutti questi particolari appariscono abbastanza evidenti nella fotografia a luce incidente (fig. 1). Lo stesso modello fotografato *contro luce*, per trasparenza, mostra (fig. 2) che la grossa costolatura massiccia verticale fornisce una massa d'ombra *diffusa*, mentre le lamelle presentantisi in taglio X, X″, ed i margini ripiegati in X, X′, X‴, dànno un'ombra *lineare*

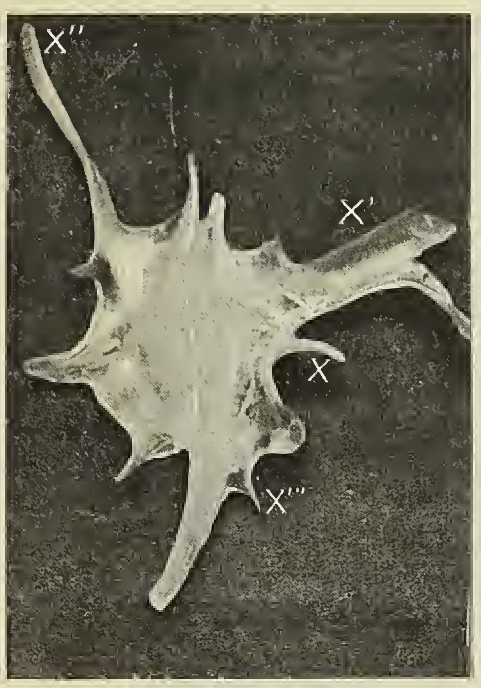


Fig. 1.

Fig. 2.

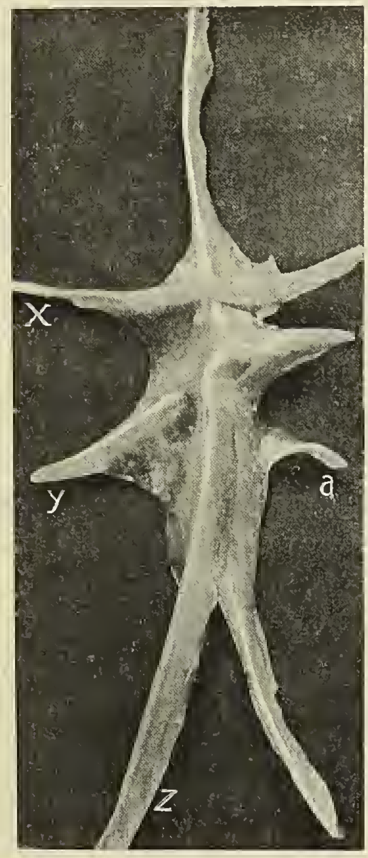


Fig. 3.

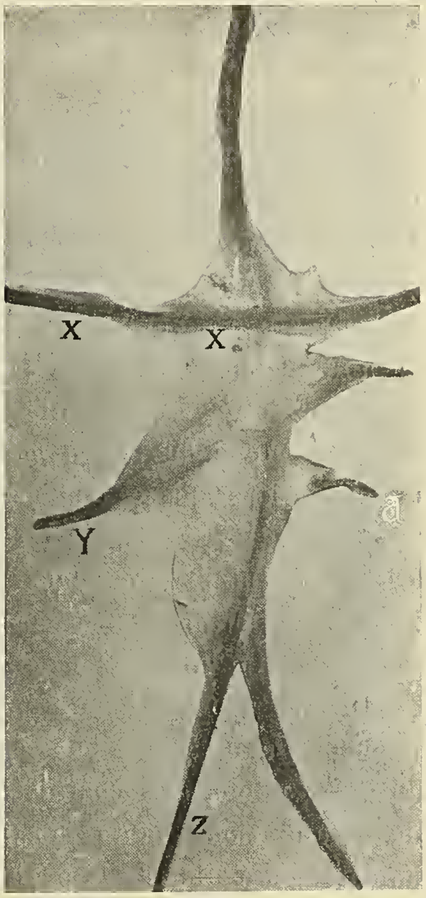


Fig. 4.

tagliente. Nella parte massiccia *a-b* si riproducono grossolanamente gli effetti delle colorazioni *di massa* delle cellule nevrogliche — per es. della colorazione con l'ematossilina del Ribbert (Metodo IV, dell'Alzheimer); nelle ali laterali del modello, invece, si riproducono gli effetti d'una colorazione di *uno strato* superficiale (Metodi tipo Weigert).

Quest'ultima condizione, vale a dire la colorazione di uno strato superficiale, ma estesa *a tutta* la cellula nevroglica, è riprodotta nei modelli rappresentati a figg. 3, 4, 5, 6, eseguiti con sottili lamine di paraffina. Nelle figg. 3, 5 i modelli sono fotografati a luce incidente e mostrano i rilievi, le costolature, gli spigoli, le torsioni delle lamelle e dei prolungamenti, imitati da quanto si osserva nelle cellule nevrogliche. Le figure 4 e 6 rappresentano gli stessi modelli fotografati per trasparenza, contro luce e dimostrano all'evidenza l'ombra intensissima, lineare, tagliente che forniscono le suddette parti per il solo fatto di presentarsi in *taglio* sulla visuale.

Notinsi specialmente le lamelle in taglio *a* (figg. 3, 4) *a*, *b*, *c* (figg. 6); i margini in costa *x*, *y*, *z* (figg. 5, 6); i rilievi *cavi*, il prolungamento *filiforme f* (figg. 5, 6) il quale *pur essendo di spessore uguale a quello dell'intera lamina di paraffina*, apparisce, grazie alla sua forma cilindrica, senza pari più oscuro che non le estese superfici della lamina stessa. E si rammenti, infine, che si tratta qui di modelli costituiti di un substrato perfettamente incolore. I contrasti che ho posto in rilievo sono senza pari più salienti in modelli eseguiti con paraffina tenuamente colorata. Non ne ho riportato figure perchè non mi è riescito di trarne buone riproduzioni fotografiche.

Ma, oltre a questi fenomeni ottici risultanti dalla *visione tangente di superfici*, altre condizioni fisiche di ordine completamente diverso possono dar luogo ad una particolare intensità della colorazione del substrato.

Non vi ha dubbio, ad es., che a far apparire così intensamente colorati i lembi arrovesciati e sovrapposti di lamelle protoplasmatiche, e le grinze e le pieghe, deve concorrere la *sommazione* della tinta delle porzioni di protoplasma, le quali vengono a sovrapporsi una sull'altra negli arrovesciamenti e nelle pieghe. Questa condizione, però, non sempre appar sufficiente a spiegare la grande intensità di colorazione delle parti in questione, e ciò specialmente nei casi in cui tutto il substrato è molto debolmente colorato.

Molto probabilmente intervengono nel fenomeno anche processi di *adesione per capillarità*, per i quali una certa quantità di sostanza colorante vien trattenuta fra le parti arrovesciate e sovrapposte, in seno alle grinze ed alle pieghe.

Ciò sembra debba ammettersi per ispiegare la intensa colorazione delle pieghe artificialmente prodotte nelle cellule dell'epitelio buccale, nei casi, in cui le parti spianate della cellula appariscono *perfettamente incolori*. In questi casi, infatti, non si può far ricorso alle già cennate condizioni ottiche dovute a sovrapposizione, a visione tangente di strati, ecc. Del resto gli stessi preparati alla Weigert ci offrono una riprova sperimentale, grossolana, ma molto dimostrativa, del fenomeno in questione. È noto che, prima di sottoporle alla colorazione, le sezioni debbono venir spianate ed asciugate sul porta oggetti, mediante energica compressione con carta asciugante. In questa operazione si producono spesso nella sezione stessa delle pieghe. Orbene, quando, eseguita la colorazione, si passa alla decolorazione con la miscela di olio di anilina e xilolo, si incontra sempre nelle pieghe della sezione un'enorme resistenza alla decolorazione, tanto che, mentre le parti piane della sezione sono già da tempo completamente differenziate, dalle pieghe continua a fluire abbondantemente il colore. Spesso, per non sciupare l'intera sezione, dopo aver prolungato per parecchio tempo la differenziazione, siamo costretti ad interromperla e a montare il preparato, lasciandovi tutte le pieghe intensamente colorate in violetto.

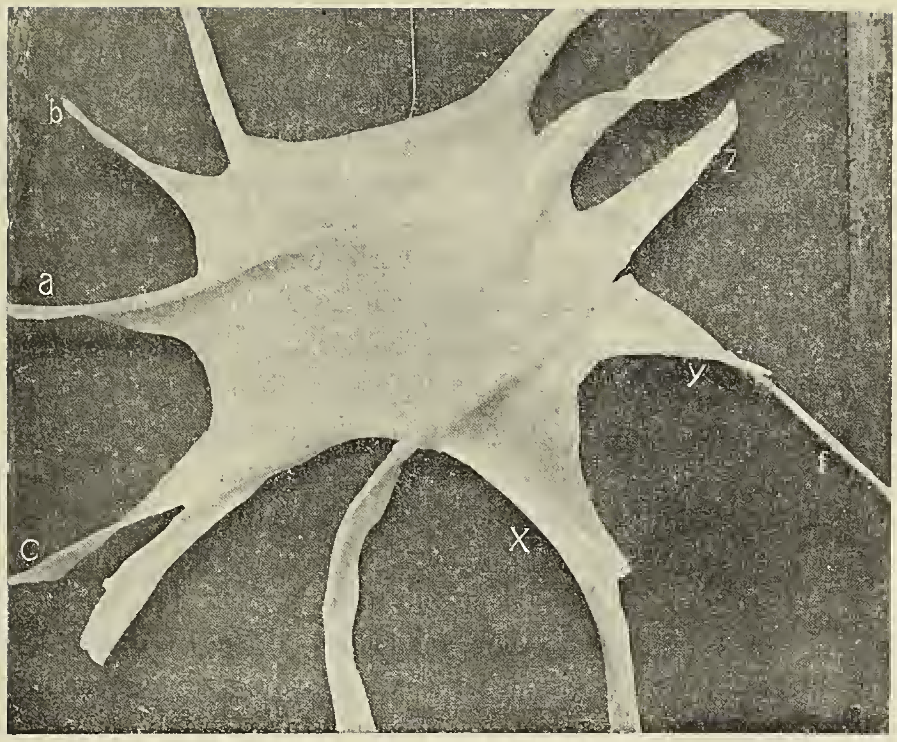


Fig. 5.

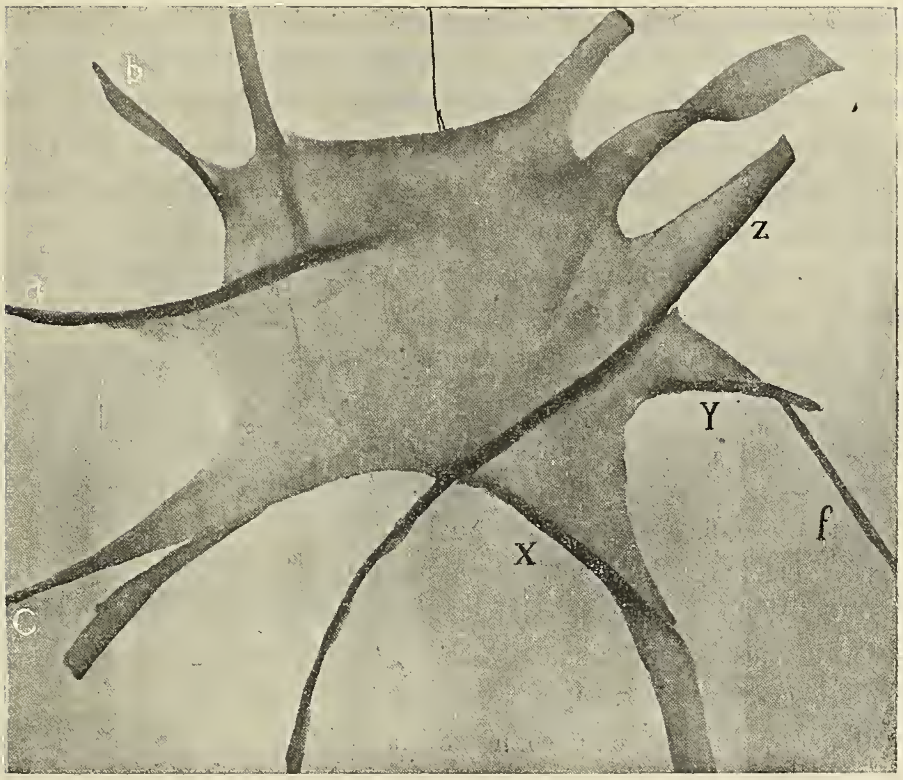


Fig. 6.

Riguardo alle particolari disposizioni morfologiche in questione, dunque, ci sembra indubbio che esse assumano la colorazione per processi puramente fisici.

Ma, per meglio indagare le condizioni per cui si stabilisce il noto contrasto fra la colorazione intensa dei *sottili prolungamenti*, e la colorazione debole e superficiale dei larghi tratti di *protoplasma nevroglico*, ho pensato di sperimentare la colorazione del Weigert per la glia e le affini, nonchè la semplice colorazione per la fibrina (metodo del Weigert), che poi è a base del metodo del Weigert per la glia, *sulla fibrina stessa*, cercando di ottenere in essa varie forme di coagulazione. Orbene, dalle mie ricerche risulta nel modo più evidente che la riescita o meno delle colorazioni, e anche la maggiore o minore intensità della ottenuta colorazione, *sono in strettissimo rapporto con la forma del substrato*. Se la fibrina non è coagulata in filamenti, ma in masse più o meno larghe, essa non assume colorazione di sorta. E anche quando la coagulazione è avvenuta in forma di filamenti, soltanto una parte di essi, di calibro e di forma determinati, ma variabili da caso a caso, assumono una intensa colorazione. In genere i filamenti estremamente sottili ed i più larghi — a nastro — assumono una colorazione piuttosto pallida (v. fig. 36, 42, 43, 44).

In tutti i filamenti di fibrina, poi, sia nei sottili che nei grossi, lo studio a forti ingrandimenti mette in rilievo gli identici particolari morfologici che abbiamo riscontrato nei prolungamenti e, in genere, nei protoplasmi nevroglici. Richiamo specialmente l'attenzione sui margini lineari intensamente colorati che si osservano nei larghi filamenti di fibrina (fig. 36 *m*, 44), e che sono in tutto simili ai margini colorati delle lamelle nevrogliche fin qui interpretati come fibre marginali. Anche è da notarsi l'identico comportamento della colorazione nelle curve, negli angoli, nei tratti ritorti dei filamenti stessi (fig. 36 *x*, 42, 43, 44) nonchè l'aspetto fibrillare che assume spesso la sostanza d'un filamento di fibrina, in rapporto con le frequenti curve e torsioni e, in genere, in rapporto con uno stato di maggior raggrinzamento (v. fig. 42, 43). In verità, osservando, anche a forti ingrandimenti, questi varî tipi di filamenti di fibrina, non si riesce a trovar differenza tra essi ed i prolungamenti nevroglici di analogo spessore, colorati con i metodi « per la glia fibrillare ». Or non si vorrà sostenere che in seno ai filamenti di fibrina esista un particolare elemento fibrillare chimicamente e morfologicamente differenziato.

A parte queste interessanti identità morfologiche e tintoriali, mi sembra molto importante la constatazione che il classico metodo per la colorazione della fibrina non rappresenta affatto, come molti ancor ritengono, una reazione microchimica propria di questa sostanza, ma non è che una colorazione fisica, la quale richiede, per riescire, una particolare forma del substrato.

Del resto, ricercando nella storia del metodo del Weigert per la fibrina, ho trovato che lo stesso Weigert accenna [1], benchè fuggevolmente, a questo fatto, che cioè la condizione per la riescita della sua « reazione della fibrina » è la *forma a filamenti* della fibrina stessa.

È da ritenersi, dunque, che, come per la fibrina, così anche, nella nevroglia, vi sia *un optimum di forma che ammette la permanenza del colore nel substrato* e

(1) Weigert, *Fibrinfaerbung*, nella Enzyklopaedie der Mikroskopischen Technik II Aufl. pag. 458.

che quest'*optimum* sia rappresentato specialmente dalla forma a filamento. Se poi la particolare forma porti seco anche una peculiare aggregazione molecolare del substrato, tale da renderlo particolarmente *cromofilo*, o se invece, a spiegare la cromofilia, bastino le leggi della dinamica delle superfici, son questioni nelle quali io non intendo addentrarmi. Invero, non sarebbe difficile approntare al proposito, sulla base della fisica molecolare, eleganti disquisizioni più o meno irte di formule, ma mi sembra che ciò non avrebbe una utilità pratica, in quanto le condizioni che dovrebbero entrare in discussione sono troppo numerose e s'intrecciano in modo troppo complesso perchè si possa giungere ad una conclusione soddisfacente.

Per il mio scopo, mi basta d'esser giunto a stabilire che il processo tintoriale che si verifica nella colorazione del Weigert per la glia e nelle colorazioni affini, è un processo d'ordine puramente fisico e che *la colorazione positiva di alcune parti degli elementi nevroglici di fronte alla mancata colorazione di altre parti, non indica per nulla una differenza chimica di substrati.*

Concludiamo:

I) Le nostre ricerche morfologiche ci hanno mostrato che gli elementi descritti dagli autori come *fibre nevrogliche*, quando si presentano come filamenti più o meno nudi, sono certamente, nel massimo numero dei casi, verosimilmente in tutti i casi, null'altro che sottili prolungamenti protoplasmatici di cellule nevrogliche; quando si presentano come linee colorate nel protoplasma nevroglico, non sono che spigoli o lembi marginali di lamelle protoplasmatiche presentantisi in taglio alla visuale, ovvero grinze e pieghe della superficie del protoplasma.

II) Le nostre ricerche sui metodi di colorazione hanno dimostrato che la particolare colorazione che queste parti possono assumere con diversi metodi, non denota affatto che esse siano costituite di sostanza chimicamente diversa dal restante protoplasma nevroglico.

III) Ne consegue che non vi è nessuna ragione nè morfologica, nè microistiochimica per ammettere, come sinora si è fatto, che nella nevroglia, oltre agli elementi cellulari con i relativi prolungamenti protoplasmatici, esista anche un elemento morfologicamente e chimicamente da quelli differenziato: la « fibra » nevroglica.

Circa la struttura della nevroglia, convien dunque tornare all'antica teoria del Golgi e ritenere che questo tessuto sia costituito di cellule, molte delle quali sono munite di numerosi e lunghi prolungamenti protoplasmatici. Alcuni di questi prolungamenti sono larghi, per lo più appiattiti; altri sono sottili, filiformi. I primi generalmente s'impiantano sull'avventizia dei vasi sanguigni, talvolta si ramificano o si sfioccano in tanti prolungamenti filiformi. I prolungamenti filiformi decorrono, spesso per tratti lunghissimi, in svariate direzioni, formando il così detto « feltro fibrillare nevroglico ». Non vi ha dubbio che molti di essi vanno a fondersi nel citoplasma di cellule nevrogliche più o meno lontane, altri s'impiantano sulle pareti vasali. Non è ancor dimostrato che alcuni di essi abbiano una terminazione libera.

Queste, le conclusioni delle mie ricerche rispetto al particolare problema dell'esistenza o meno di due elementi costitutivi il tessuto nevroglico: le cellule con i loro prolungamenti e le « fibre ». Con ciò, parecchie altre questioni, circa la struttura di

questo tessuto, rimangono ancora aperte. Uno dei problemi, che, a nostro avviso, maggiormente meriterebbero di essere approfonditi, è quello di stabilire se veramente, nel normale, i prolungamenti cellulari che non s' inseriscono ai vasi costituiscono ovunque, e non soltanto in taluni punti dei centri nervosi, ponti di passaggio fra due cellule. Un altro problema, che già ho tentato, senza poterlo definitivamente risolvere, è quello di stabilire se realmente esistano cellule nevrogliche prive di prolungamenti. Al proposito, ritengo ancor incompiuto lo studio morfologico delle così dette cellule « cuboidi » o « sferoidi » della sostanza bianca. Specialmente rispetto alla nevroglia, bisogna guardarsi dal concludere sulle immagini, per quanto nette e brillanti, fornite da un solo metodo di colorazione. Ogni metodo, infatti, se pone bene in rilievo certe parti, non colora che incompletamente o non colora affatto altre parti pur molto importanti del tessuto nevroglico.

APPENDICE

Da molti anni, partendo dal concetto che le « fibre » nevrogliche rappresentino, almeno in parte, formazioni intercellulari prodotte e secrete dalle cellule, i ricercatori si sono sforzati di mettere in rilievo qualche speciale disposizione istologica che potesse rappresentarci il supposto processo di produzione e di « secrezione » di fibre. Nessuno però ha mai trovato dati sufficienti perchè l' ipotesi della produzione e della separazione di fibre dalle cellule potesse passare nel campo dei fatti. Data l' importanza della questione per il nostro tema, ho intrapreso le più accurate ricerche in proposito ed ho specialmente studiato materiale patologico umano e sperimentale, nel quale si aveva ragion di supporre che fosse in atto, secondo la vecchia espressione, « una attiva neoformazione di fibre ».

Intanto giova rammentare che, poichè in questi feltri nevroglici molti dei filamenti sono *indubbiamente* prolungamenti di cellule, bisogna ritenere che le supposte fibre indipendenti siano identiche ai prolungamenti cellulari. Ma, anche concessa questa possibilità, non mi è mai stato possibile di trovare, in un ricchissimo materiale, qualche aspetto istologico che suggerisse l' idea di una separazione di fibre neoformate da cellule produttrici.

Ho cercato allora di studiare, in diversi loro stadî, alcuni processi regressivi, che affettano la cellula *in toto* fino a determinarne la scomparsa, e dai quali si potrebbe pensare possano residuare piccoli ammassi di filamenti di nevroglia non più in connessione con cellule.

In varie malattie croniche dei centri nervosi e particolarmente nelle forme di grave alterazione senile del cervello, si riscontra frequentemente un tipo particolare d'alterazione regressiva delle cellule nevrogliche, caratterizzato da una estrema retrazione del corpo cellulare, il quale è ridotto a poche e brevi lamelle che ancor tengono unita in un punto centrale la raggiera dei prolungamenti (v. specialmente la tav. III). Talora, essendo il corpo cellulare quasi per intero occupato da un piccolo accumulo di sostanze grassose, il citoplasma è ridotto a sottili lacinie che connettono tra loro i prolungamenti in un brevissimo tratto laterale prossimo al nucleo (fig. 63, 65). Il nucleo, poi, tiene sempre una posizione eccentrica ed è pur esso

impiccolito, spesso picnotico. Si direbbe che, col retrarsi del corpo cellulare, il nucleo venga sospinto fuori, quasi « espulso » dal citoplasma. Sta il fatto che non di rado noi lo vediamo aderente al citoplasma soltanto per un breve tratto laterale (fig. 21, 25, 66). Talora i prolungamenti della cellula stessa circondano e ravvolgono il nucleo come in una piccola gabbia (fig. 26, 27, 67).

Ho cercato di studiare specialmente gli stadî estremi di questa forma di alterazione. Ho trovato casi in cui la grave picnosi del nucleo (fig. 21, 26, 27, 66) trapassava in cariorrexi (fig. 25 *n*, 69 *n*), sì che del nucleo non restavan che scarse tracce di cromatina; casi, anche, in cui il nucleo era molto impiccolito e quasi più non reagiva ai colori (fig. 28). È da supporsi che questi nuclei sian destinati a scomparire. Più in là la nostra ricerca non può spingersi perchè il trovare un piccolo cespo protoplasmatico *anucleato* da cui irradiino parecchi prolungamenti, non costituirebbe una prova della totale scomparsa del nucleo, potendo il piccolo groviglio corrispondere soltanto ad una parte escissa da una cellula completa.

Analoghi processi, per quanto meno avanzati, rispetto all'assottigliamento dei citoplasmi, ho potuto riscontrare in antichi « feltri » residuanti da rigogliosi processi ipertrofici in varie forme d'alterazione cerebrale (fig. 19, 20, 50, 55).

Queste osservazioni, che parrebbero indicarci positivamente un peculiare modo con cui potrebbero formarsi, per scomparsa delle cellule e dissoluzione degli ultimi legami protoplasmatici, ammassi di filamenti (fibre in senso lato) come residuo d'intere cellule, non mi sembrano bastanti e neppure adatte a spiegare una supposta formazione di fibre libere, indipendenti frammezzo e a rinforzo degli intrecci dei sottili prolungamenti cellulari.

Questa peculiar forma d'alterazione, infatti, si presenta solo in *periodi molto avanzati di processi*, nei quali si osserva, di solito, una ricca neoproduzione di « fibre » meglio diremo, di prolungamenti nevroglici *fin dai primi stadî*.

Inoltre, per lo più, il prodotto finale del processo di dissoluzione cellulare da me descritto, ossia il piccolo groviglio di prolungamenti, non rassomiglia affatto agli accumuli di « fibre » dei comuni feltri nevroglici. In questi, « fibre » cilindriche, lisce, intensissimamente colorate; in quelli, filamenti esili, piatti, a contorni spesso raggrinzati, *scarsamente colorati*.

In un'altra forma, che forse non è che uno stadio meno avanzato dell'alterazione qui sopra descritta, il citoplasma si retrae su sè stesso in modo da ridursi moltissimo di volume, e il nucleo viene sospinto da un lato e talora quasi espulso dal corpo cellulare: i maggiori prolungamenti, però, si proseguono, al loro punto d'impianto sullo scarso e poco visibile citoplasma, in forma di grosse e robuste costolature che formano una specie di gabbia entro la quale talora rimane come innicchiato il nucleo (v. fig. 14, 19, 24, 61, 66). In certi casi, il citoplasma che collega le grosse costolature riesce solo visibile con metodi speciali di colorazione. È difficile affermare ch'esso scomparisca e, comunque, non si sa come dalle grosse costolature residuali potrebbero risultare i sottili e lisci filamenti degl'intrecci nevroglici.

Credo che, comunque, queste mie osservazioni meritino di essere ulteriormente estese. Se non al problema qui proposto, ne verranno utili contributi alla conoscenza del ciclo biologico delle cellule nevrogliche.

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE

Tavola I.

Tutte le figure sono tratte da preparati allestiti col metodo del Weigert per la nevroglia, con colorazione di contrasto al cromogeno, e sono state disegnate con microscopio Leitz obb. 1/12 e oc. 12 comp.

Fig. 1. — Aggregato di astrociti del corno di Ammone, in un caso di epilessia. I corpi cellulari salvo che nella cellula più a sinistra, sono retratti, impiccoliti, proporzionatamente ai nuclei. Si osservi la intensa colorazione dei margini dei citoplasmi (ad es. in *n*, *n'*, *h*), in varî tratti in cui i prolungamenti si raggrinzano e si assottigliano (*b'*, *c*, *l*), in tratti ritorti dei prolungamenti stessi (es. *b*, *d*), nelle grinze, pieghe delle superfici cellulari (*o*, *o'*); la scarsa o nulla colorazione delle parti spianate del protoplasma, nel mezzo della cellula più a sinistra, in alcuni tratti dei prolungamenti, in certe lamelle (*e*).

Fig. 2. — Astrocita del ponte in un caso di tabe superiore con degenerazione del nucleo del X. Corpo cellulare alquanto retratto. Intensa colorazione delle parti raggrinzate, ritorte (es. *b*, *b'*), delle lamelle ripiegate (*c*) delle parti viste in taglio (margini) dei prolungamenti più massicci, di alcuni tratti più sottili di certi prolungamenti (es. *g*, *f*).

Fig. 3. — Tratto di un prolungamento di un astrocita del nucleo lenticolare in un caso di arteriosclerosi cerebrale. La colorazione appare più intensa nei punti ritorti della lamella, debole o quasi nulla nei punti visti in piano. Notisi la forte colorazione nel nodo di torsione in *b*, la colorazione delle pieghe in *a*.

Fig. 4. — Astrocita del primo strato della corteccia cerebrale in un caso di paralisi progressiva. Stato ipertrofico del citoplasma, lieve colorazione diffusa della superficie del grosso prolungamento che si inserisce ad un vaso; grinze di questo prolungamento segnate come lievi striature più intensamente colorate.

Fig. 5. — Astrocita ipertrofico della corteccia cerebrale in un caso di demenza precoce. Le parti spianate del citoplasma e dei prolungamenti sono scarsamente o affatto colorate in violetto. Si osservino specialmente le lamelle con cui s'iniziano i prolungamenti in *e*, *e'*. Ben colorati appaiono i tratti raggrinzati ritorti dei prolungamenti, alcuni sottili prolungamenti, alcuni margini delle lamelle (ad es. in *f*, *h*). In alcuni prolungamenti pur sottili si ripete la vicenda di intensa tinta lungo i margini e di scarsa colorazione nelle parti piatte come nei prolungamenti di maggior superficie (cfr. *d*, *d'* con *b*).

Fig. 6. — Tratto di prolungamento di un astrocita della corteccia cerebrale di un vecchio di 85 anni. Si osservi l'alternarsi di intensa colorazione con tratti non colorati, in rapporto al presentarsi o no in taglio del prolungamento.

Fig. 6-*bis*. — Tratto di prolungamento di astrocita del margine del midollo allungato in un uomo di 40 anni morto per polmonite (v. fig. 6).

Fig. 7. — Astrocita della sostanza bianca in un caso di sclerosi lobare. I sottili prolungamenti intrecciati che vanno ad inserirsi al vaso V, sono qua e là colorati, specie nelle ondulazioni dei loro margini.

Fig. 8. — Astrocita della corteccia cerebrale in un caso di paralisi progressiva a decorso molto cronico. Colorazione prevalente nelle parti più raggrinzate del citoplasma e dei prolungamenti (v. ad es. in *a*).

Tavola II.

Tutte le figure sono tratte da preparati allestiti col metodo del Weigert per la nevroglia con colorazione di contrasto al cromogeno, e sono state disegnate al microscopio Leitz con obb. imm. 1/12 oc. 12 comp.

FIG. 9. — Astrocita del ponte in un caso di sclerosi lobare di antica data. Come sempre nei processi morbosi molto antichi, il corpo cellulare è assai piccolo ed i prolungamenti per la massima parte sottili, intensamente colorati. Notisi il fatto, frequente a verificarsi negli intrecci nevroglici e anche negli intrecci di fibrina (fig. 42, 43), che cioè, i più fini prolungamenti assumono il colore piuttosto debolmente. I punti colorati sul corpo cellulare sono le sezioni trasverse di prolungamenti tagliati presso il loro punto d'impianto. Notisi il trapassare della colorazione violetta dei prolungamenti, nella colorazione giallastra a mano a mano che il protoplasma si fa più abbondante (*a*, *b*, *c*, ecc.). E si osservi anche il repentino passaggio del colore violetto nel giallastro, ove manca il graduale allargarsi del prolungamento (*d*, *e*, *f*)

FIG. 10. — Astrociti della sostanza bianca cerebrale nel caso di cui sopra. In *a* si osservi il graduale trapasso della colorazione violetta nella giallastra, parallelamente all'allargarsi del prolungamento. In *b*, *c*, *d* ecc. l'estendersi della colorazione lungo i margini della cellula. E si osservi, in *x*, *x*, quanto facilmente possan sembrare pertinenti ad una cellula prolungamenti, i quali invece traggono da cellule vicine, condizione questa comunissima a verificarsi, e che ha dato luogo ai concetti di *fibre* indipendenti dal protoplasma cellulare; di secrezione di fibre dalla cellula, ecc.

FIG. 11. — Astrocita della sostanza bianca cerebrale in un vecchio di 88 anni. Retrazione del citoplasma con accenno alla formazione di robuste costolature in *c*, *c*. Si nota qui il fenomeno da noi chiamato « espulsione » laterale del nucleo. Si osservi l'intensificarsi e l'attenuarsi della colorazione violetta in rapporto con la posizione in taglio o in piatto del prolungamento *a*, *b*, *a*, *b*.

FIGG. 12-13. — Due astrociti della sostanza bianca delle circonvoluzioni cerebrali in un caso di demenza senile. Sono specialmente interessanti le formazioni lamellari nelle quali sono molto evidenti numerose pieghe e grinze, intensamente colorate. Cfr. queste figure con simili formazioni da me illustrate nel lavoro sulla malaria perniciosa (fig. 271-272, 275-276), da preparati allestiti col metodo dell'Alzheimer alla ematossilina di Ribbert. Si osservi la grande intensità della colorazione nei tratti più ristretti dei grossi prolungamenti (*a*, *a*) e nei punti ove essi sono ritorti, a contrasto con la tenuità della colorazione nei tratti lamellari spianati (*b*, *b*). Cfr. anche questi particolari con quelli presentati dalle cellule dell'epitelio brucale: tav. IV, fig. 29, 30, 31, 41) Notisi il modo d'inizio dei sottili prolungamenti (*c*) dalla lamella nella fig. 13.

FIG. 14. — Astrocita della sostanza bianca delle circonvoluzioni cerebrali in un caso di presbiofrenia. Retrazione del citoplasma con formazione di grosse costolature marginali (*c*, *c*). Si osservi nei prolungamenti il variare della intensità della colorazione, in rapporto con le curve e con la torsione spirale (*a*, *a*).

FIG. 15. — Un corpo amiloide racchiuso in una lamina protoplasmatica, espansione terminale d'un prolungamento nevroglico. Nel talamo ottico in un vecchio novantenne. Notisi la torsione spirale del prolungamento (*s*, *s*).

FIG. 16. — Astrocita della sostanza bianca delle circonvoluzioni cerebrali in un caso d'arteriosclerosi cerebrale. Si osservi, nel prolungamento maggiore, la varia vicenda della colorazione violetta in stretto rapporto con la morfologia della parte; specialmente l'intensa colorazione nelle brusche curve e nei tratti ritorti (*a*, *a*), nonchè nei margini arrovesciati e nelle pieghe (*b*, *b*). Si osservino anche le modalità della colorazione violetta sul margine del citoplasma in *c*. Il filamento *f*, deriva da una cellula vicina, e potrebbe erroneamente essere attribuito alla cellula qui disegnata.

Figg. 17-18. — Corpi amiloidi racchiusi in lamelle protoplasmatiche come terminazione di prolungamenti nevroglici. Nel ponte in un caso di tabe superiore. Notisi la torsione spirale dei prolungamenti (*s*, *s*, *s*), ed il variare della intensità della colorazione in rapporto con gli strozzamenti (*b*) e le espansioni (*c*) del prolungamento. Si osservino anche le piccole chiazze non colorate (*a*), frequenti a riscontrarsi nelle così dette fibre, che a piccoli ingrandimenti appariscono uniformemente colorate.

Tavola III.

Metodo del Weigert per la nevroglia. Micr. Leitz obb. imm. 1/12 oc. 12.

Fig. 19. — Aggregato di cellule nevrogliche in fase regressiva. Corteccia cerebrale in un caso di paralisi progressiva giovanile. Si osserva la retrazione del citoplasma che rimane attraversato sulla sua superficie da costolature (*a*, *a*) in prosecuzione dei prolungamenti più robusti. La colorazione di contrasto al cromogeno mette in rilievo le porzioni più tenui del citoplasma, le quali, con molti altri metodi, non risultano affatto. Si noti che anche qui si ha accenno al fenomeno della « espulsione » dei nuclei. Si osservi l'intensificarsi della colorazione nei tratti ritorti dei prolungamenti (*b*, *c*).

Fig. 20. — Astrocita sclerotico del primo strato della corteccia cerebrale in un vecchio ottantenne. Retrazione considerevole del citoplasma con formazione di grosse costolature periferiche (*a*, *a*) i picnosi del nucleo. Notisi l'intensa colorazione delle pieghe di torsione (*p*, *p*),

Fig. 21. — Astrocita in istato regressivo dalla sostanza bianca delle circonvoluzioni cerebrali in un caso di presbiofrenia. Si noti la retrazione del citoplasma e lo spostamento del nucleo gravemente picnotico. Importante la scarsa colorazione del tutto e le sottili grinze longitudinali del grosso prolungamento *p*, che va ad inserirsi al vaso *v*.

Fig. 22. — Astrocita del midollo in una tabo-paralisi. Notevole la colorazione dei margini dei prolungamenti. Si osservino le modalità di questa colorazione a brevi tratti successivi corrispondenti alle ondulazioni del margine libero (*a*, *a*, *a*).

Fig. 23. — Astrocita del midollo in una sclerosi laterale amiotrofica. Si noti la vicenda nella intensità del colore in rapporto al succedersi delle curve e delle torsioni (*a*, *a*) nel prolungamento maggiore.

Fig. 24. — Astrocita in fase regressiva con ispessimento a nastro delle costolature del citoplasma *a*, *a*. « Espulsione » del nucleo, picnotico. Strati profondi della sostanza grigia della corteccia cerebrale in un caso di presbiofrenia. Si noti la scarsa colorazione dei prolungamenti, e si osservi come, malgrado ciò, taluni margini arrovesciati e certi bruschi gomiti siano intensamente colorati (*c*, *c*). Gli accenni di struttura vacuolare nei prolungamenti in *b*, *b* corrispondono alla presenza di accumuli di granuli grassosi.

Fig. 25. — Cellule nevrogliche in stadî molto avanzati dei processi regressivi illustrati specialmente in questa tavola. Dalla corteccia cerebrale in un caso di demenza senile. Si noti la scarsa colorazione dei prolungamenti, la estrema riduzione dei citoplasmi. In *n* un nucleo in cariorressi.

Fig. 26. — Residuo di un astrocita in stadio regressivo avanzatissimo, dalla corteccia cerebrale d'un presbiofrenico. Il citoplasma è estremamente ridotto, il nucleo picnotico vi aderisce solo per un lato. Si noti la debole colorazione dei prolungamenti, che hanno un aspetto a nastro tenuissimo.

Figg. 27-28. — Stadî estremi dell'alterazione regressiva degli astrociti, illustrata specialmente in questa tavola. Corteccia cerebrale in casi di grave presbiofrenia. Si osservi la estrema riduzione del citoplasma e le profonde alterazioni dei nuclei che sono come respinti fuori del piccolo groviglio di filamenti. Notevole è la scarsissima colorazione del tutto. Si osservino anche i singolari avvolgimenti di prolungamenti intorno al nucleo (in *a*, *a*), fenomeno, questo, frequente a verificarsi in questo tipo d'alterazione (v. anche fig. 26 tav. III 66-67, tav. VI, 55, tav. V).

Tavola IV.

Metodo del Weigert per la nevroglia, salvo per le figg. 36, 42, 43, 44, che son tratte da preparati allestiti col metodo del Weigert per la fibrina. Ingrandimenti figg 29, 30, 31, 37, 40, 41 obb. imm. 1/12 oc. 6 comp. Leitz. Tutte le altre figure obb. imm. 1/12 oc. 12 comp.

Fig. 29. — Brandello d'epitelio buccale — 3 cellule — alquanto spiegazzato nella fissazione del preparato. Le pieghe risultano nettamente ed intensamente colorate come linee taglienti che traversano il citoplasma. Si notino anche i margini colorati in *a*, *a*, *a*. Cfr. ad es. con la fig. 22, tav. III, *a*; con le figg. 12, 13, tav. II.

Fig. 30. — Cellule dell'epitelio buccale variamente spiegazzate nella fissazione. La cellula *c*, fissata quasi totalmente in piano, è pressochè incolore. Il margine inferiore *m*, e le altre cellule, mostrano svariate striature colorate, corrispondenti alle grinze e alle pieghe del sottile protoplasma.

Fig. 31. — Cellule dell'epitelio buccale come sopra. Si osservi l'intensificarsi della colorazione in rapporto con lo stato di maggior raggrinzamento in *r*, *r*. Si noti anche la striatura abbastanza uniforme in senso longitudinale, nonchè la più marcata colorazione dei margini in *m*, Cfr. specialmente con le figg. 12, 13, tav. II.

Fig. 32. — Prolungamento d'un astrocita della periferia del midollo spinale d'un uomo normale, con clava terminale. Cfr. nel mio lavoro sulla malaria le figg. 266-270. Notisi l'intensa colorazione in corrispondenza degli angoli bruschi del prolungamento.

Fig. 33, *a*, *b*. — Tre tratti di prolungamenti nevroglici variamente colorati dal violetto di metile, in rapporto alle retrazioni e alle torsioni del substrato. Ai capi, i tagli trasversi od obliqui dei prolungamenti mostrano come la colorazione violetta sia localizzata alla superficie.

Fig. 34. — Un tratto di prolungamento d'un astrocita del talamo (in un caso d'arteriosclerosi cerebrale) nel quale si osservano grinze longitudinali e margini colorati.

Fig. 35. — Prolungamenti nevroglici sottili a decorso prevalentemente rettilineo nel ponte, in un uomo normale. A questo forte ingrandimento si osservano, se pur meno distintamente, gli stessi particolari della colorazione che si riscontrano nei grossi prolungamenti (v. l'intensa colorazione dei nodi e delle curve *c*, *c*, *c*, dei tratti ritorti a spirale *s*, ecc.

Fig. 36. — Intreccio di grossi filamenti di fibrina di un coagulo in un vaso sanguigno. Si osservi la scarsa colorazione delle parti più larghe dei filamenti e la intensa colorazione delle parti più sottili *s*, *s*, e specialmente dei tratti strozzati o bruscamente ripiegati *x*. *x*. Si noti anche la colorazione netta tagliente dei margini *m*, *m*.

Fig. 37. — Cellula dell'epitelio buccale fissata quasi interamente in piano. Solo i margini, specialmente nei punti un po' raggrinzati *m*, *m*, presentano tratti lineari intensamente colorati.

Fig. 38. — Astrocita della corteccia cerebrale in un caso di paralisi progressiva (colorazione semplice senza coloraz. di contrasto al cromogeno). Nel grosso prolungamento *p* si osservano distintamente pieghe longitudinali e margini ondulati intensamente colorati. Cfr. con gli stessi particolari nelle figg. 29, 30, 31, 37 della stessa tavola. Notisi in *n* il margine lamellare arrovesciato intensamente colorato.

Fig. 39. — Prolungamento d'un grosso astrocita della corteccia cerebrale in un caso di paralisi progressiva. Preparato senza colorazione di contrasto al cromogeno. Spiccano come linee colorate le pieghe longitudinali ed i margini della delicatissima lamella protoplasmatica. In questi preparati essa è invisibile, e solo si può delimitare mercè le dette pieghe. A minori ingrandimenti queste appariscono come sottili filamenti liberi. In sezioni tinte anche col cromogeno si mettono in rilievo molto nettamente queste lamelle protoplasmatiche. Notisi anche come da una lamella trasparentissima risulti poi nel tratto sottile *s*, *s* un ciuffo di filamenti molto intensamente colorati.

Fig. 40. — Cellula dell'epitelio buccale traversata da molteplici pieghe e spigoli intensamente colorati, a forma di linee taglienti.

Fig. 41. — Tratto raggrinzato e ritorto *r* di cellule dell'epitelio buccale. In esso si ha una colorazione intensa, mentre nei tratti spianati *s* non si ha colorazione col violetto di metile.

Figg. 42-43. — Intrecci di filamenti di fibrina di calibro sottile e medio, da coaguli in vasi sanguigni. La colorazione più intensa si riscontra prevalentemente nei filamenti di medio calibro e in essi particolarmente nei tratti bruscamente ripiegati e attortigliati, con le identiche modalità che si riscontrano nei prolungamenti nevroglici dello stesso calibro. Cfr. con la fig. 36.

Fig. 44. — Ved. spiegazione della fig. 36.

Tavola V.

Tutte le figure sono disegnate all'ingrandimento dato dall'obb. imm. 1/12 oc. 12 comp. microsc. Leitz.

Fig. 45. — Astrocita del primo strato della corteccia cerebrale in un caso di paralisi progressiva giovanile. Fissazione alcool, colorazione Heidenhain, lenta differenziazione in Van Gieson. La cellula trovasi in uno stato regressivo succeduto a un processo d'ipertrofia. Trovasi accanto a cellule per la massima parte fortemente ipertrofiche. Si osservi la colorazione intensa di molti prolungamenti sottili. I sottilissimi, secondo abbiamo spesso osservato, sono debolmente colorati. La colorazione intensa dei prolungamenti trapassa a poco a poco ad una più chiara a mano a mano che il prolungamento si allarga per fondersi nel citoplasma (*a*, *a*). Questo presenta una colorazione diffusa data dall'ematossilina ferrica, ma localizzata ad uno strato superficiale, come mostra la quasi completa trasparenza nel centro della cellula *c* e lo intensificarsi della colorazione nelle parti declivi *d*. È anche da notarsi il fenomeno della « espulsione » del nucleo, tanto frequente nei processi regressivi della glia, e accompagnantesi per lo più con una grave picnosi del nucleo stesso.

Fig. 46. — Astrocita della sostanza bianca delle circonvoluzioni cerebrali in un uomo normale. Fissazione miscela di Carnoys, colorazione Benda. Da notare il graduale attenuarsi della colorazione nera del prolungamento *p* inserito sul vaso *v*, nel tratto che si allarga per fondersi nel citoplasma in *a*. In *b*, colorazione nera in corrispondenza di un avvallamento. L'aspetto del peduccio d'inserzione *i* fa pensare ch'esso sia stato tagliato tangenzialmente e che mostri essere la colorazione localizzata esclusivamente alla superficie.

Fig. 47. — Astrocita della sostanza bianca del centro ovale in un cane normale. Fissazione: miscela del Golgi, colorazione metodo del Bielschowsky. L'impregnazione è avvenuta precipuamente sui prolungamenti filiformi, sui margini e sugli spigoli delle lamelle protoplasmatiche, mentre la massima parte di queste restano trasparentissime e pressochè invisibili. Notinsi specialmente i margini e le pieghe in *a*, *a*. Alcuni filamenti, ad es., *b*, *c*, *d*, appartengono a cellule vicine.

Fig. 48. — Grosso astrocita ipertrofico della corteccia cerebrale in un caso di paralisi progressiva. Fissazione alcool, colorazione Heidenhain e lentissima differenziazione in miscela del Van Gieson. Le cellule vicine che trovansi in fase regressiva presentano molto intensamente colorati in nero i loro prolungamenti. Notisi qui la scarsa colorazione data dall'ematossilina, in rapporto con la tumefazione dell'elemento. Solo in alcuni brevi tratti ricurvi dei prolungamenti, *a*, *a*, si osserva la colorazione nera. Vedansi le sottili pieghe colorate in *b*, *b*.

Fig. 49. — Astrocita ipertrofico della corteccia cerebrale in un caso di paralisi progressiva. Fissazione: mordente del Weigert per la glia. Colorazione Bielschowsky. Notisi la intensa colorazione dei margini in *m*, e dei tratti ritorti dei prolungamenti *r*. S'intravede la struttura vacuolare simile a quella da me illustrata nel lavoro sulla malaria, tavola XI. V: vaso sanguigno.

Fig. 50. — Residuo di un astrocita in fase regressiva nel primo strato della corteccia cerebrale in un caso di antica meningoencefalite luetica con formazione di un grosso intreccio di glia neoformata. Fissazione alcool. Colorazione Heidenhain-Van Gieson. Il nucleo *n* non è quasi più riconoscibile: il citoplasma molto retratto mantiene tuttavia collegati i prolungamenti.

Notisi la loro scarsa colorabilità, fatto questo che fa riscontro con quello già osservato negli esempî d'alterazione regressiva illustrati specialmente nella tav. III.

Fig. 51. — Astrocita in fase regressiva nella corteccia cerebrale in un caso di paralisi progressiva. Fissazione alcool. Colorazione Heidenhain-Benda. Si noti l' intensa colorazione dei margini del citoplasma *m*, e dei tratti strozzati o contorti dei prolungamenti *s*, *s*. Per la retrazione del citoplasma il nucleo è in parte « espulso ». In *p* una costolatura ben colorata.

Fig. 52. — Cellula nevroglica ipertrofica nella corteccia cerebrale in un caso di paralisi progressiva. Fissazione in mordente del Weigert per la glia; colorazione Bielschowsky. Dal corpo cellulare relativamente piccolo si stacca un unico grossissimo prolungamento che va ad inserirsi al vaso *v*. Mentre i sottili prolungamenti nevroglici vicini sono intensamente impregnati in nero, questo largo substrato presenta una debole impregnazione diffusa.

Fig. 53. — Astrocita della sostanza bianca cerebrale in un caso di demenza precoce. Fissazione in mordente del Weigert per la glia. Colorazione Bielschowsky. Si osservi la struttura vacuolare posta in rilievo, in materiale fissato in soluzioni acquose di formolo, dalle colorazioni prevalentemente protoplasmatiche (v. i miei lavori sulla malaria, tav. XI e sui corpuscoli navicolari). Si noti anche il decorso a spirale del grosso prolungamento *p*, la cui estremità *a* che sembra troncata dal taglio, dà l'impressione che l'impregnazione nera sia limitata ad uno strato superficiale. I prolungamenti sottili di questi astrociti sono intensamente colorati.

Fig. 54. — Larga espansione d'un prolungamento nevroglico estendentesi sulla parete d'un grosso capillare; dalla corteccia cerebrale in un caso di paralisi progressiva giovenile. Fissazione alcool. Colorazione Heidenhain-Benda. Si osservi l'attenuarsi della colorazione, data dall'ematossilina, a mano a mano che il prolungamento si allarga. E si notino anche le striature e le pieghe *s*, *s*, date dalla disposizione a lenta spirale del prolungamento stesso.

Fig. 55. — Astrocita in fase regressiva nel primo strato della corteccia cerebrale in un caso di arteriosclerosi cerebrale con formazioni di chiazze di gliosi. Si osservi l' intensa colorazione nera delle parti più sottili dei prolungamenti. Il prolungamento *p* s' inserisce nell'avventizia del vaso *v*. Il nucleo picnotico *n* si trova a giacere, quasi staccato dal citoplasma, in una nicchia laterale. Cfr. il nucleo a fig. 45 della stessa tavola.

Fig. 56. — Grossa cellula nevroglica della corteccia cerebrale in un caso di paralisi progressiva. Fissazione nel mordente di Weigert per la glia. Colorazione Bielschowsky. La cellula è costituita esclusivamente dal largo ponte protoplasmatico che unisce il nucleo *n* con l'avventizia del vaso *v*. Cfr. la cellula a fig. 52 nella stessa tavola. Mentre i sottili prolungamenti nevroglici delle cellule vicine sono intensamente colorati in nero (v. ad es. i due filamenti tagliati trasversalmente in *a*), questo largo citoplasma è colorato debolmente con qualche intensificazione in corrispondenza a lievi strozzamenti *a*, *b*. Cfr. con la fig. 48 nella stessa tavola.

Tavola VI.

Salvo la fig. 64, che è tratta da un preparato Bielschowsky, tutte le altre figure sono prese da preparati allestiti col metodo al tannino dello Achùcarro. Ingrandimento, obb. imm. 1/12 oc. comp. 12, microsc. Leitz.

Fig. 57. — Astrocita della sostanza grigia della corteccia cerebrale in un caso di paralisi progressiva giovenile. L'impregnazione argentica in forma di finissimi granuli neri, si verifica con le identiche modalità constatate nelle colorazioni con colori d'anilina. Le ampie masse di protoplasma e le lamelle non vengono impregnate, mentre lo sono i prolungamenti filiformi ed i margini di alcune lamelle *m*, *m*. Anche, l'impregnazione è più intensa nei tratti ritorti dei prolungamenti *r*, *r*. Notevole il fitto intreccio, mediante il quale il grosso prolungamento P ravvolge il vaso sanguigno *v*. Per essere le lamelle sovrapposte in piani vicini, possono i loro margini impregnati apparire come filamenti traversanti il citoplasma. V. ad es. in *f*.

Fig. 58. — Astrocita del talamo ottico in un caso d'arteriosclerosi cerebrale con piccoli rammollimenti recenti. La cellula, ipertrofica, è scarsamente impregnata e prevalentemente nei suoi

prolungamenti più sottili, in alcuni dei quali tuttavia si osservano accenni alle linee di torsione: *s*, *s*.

Figg. 59-60. — Lo stesso astrocita disegnato a diverso ingrandimento a fig. 3, coll'imm. 1/12 e oc. 12 comp., a fig. 4 coll'imm. 1/12 e oc. 4 comp. Dalla corteccia cerebrale di un presbiofrenico. Mentre a medio ingrandimento si ha l'impressione che i prolungamenti siano per la massima parte costituiti di *filamenti* compatti ed omogenei, a forte ingrandimento si osserva com'essi siano costituiti da protoplasma irregolarmente retratto e impregnato. V. specialmente nei punti in *r*, *r*. Malgrado la irregolarità della impregnazione più o meno grossolanamente granulare, si ripetono le note modalità nella intensità del processo, in rapporto con le curve e le torsioni spirali dei prolungamenti. V. ad es. in *s*. *s*.

Fig. 61. — Astrocita della sostanza bianca cerebrale di un uomo di 88 anni. Si osservi la fine impregnazione granulare prevalente, come nei preparati colorati con colori d'anilina, nei prolungamenti e lungo i margini delle lamelle *m*, *m*. Si osservi il sovrapporsi delle lamelle in piani molto vicini, cosicchè i margini delle lamelle visti per trasparenza, *f* *f*, possono apparire come filamenti che attraversino il citoplasma.

Fig. 62. — Astrocita della sostanza bianca cerebellare in un caso di paralisi progressiva. Si osservi l'impregnazione finemente granulare, specie nei margini *m* ove essa presenta una sfumatura estesa, che manca generalmente nei preparati colorati con colori d'anilina. Nel grosso prolungamento P, che va ad inserirsi ad un vaso, si noti l'intensificarsi dell'impregnazione nei tratti ricurvi *r*.

Fig. 63. — Astrocita della sostanza grigia cerebrale in un caso di demenza senile. La cellula trovasi in fase regressiva e il citoplasma è quasi in totalità occupato da un accumulo di globuli di sostanze grassose. Del protoplasma rimangono alcune lacinie, che si continuano nei prolungamenti. Il nucleo è ricacciato lateralmente. Con l'ulteriore ridursi della parte protoplasmatica (v. ad es. la fig. 65 in questa stessa tavola) si può aver l'impressione, in preparati nei quali le masse grassose non vengono poste in rilievo, che l'elemento cellulare sia costituito soltanto dal nucleo e da un intreccio di filamenti.

Fig. 64. — Astrocita della corteccia cerebrale in un caso di paralisi progressiva. Metodo del Bielschowsky. Fissazione nel mordente del Weigert per la glia. Si osservi come con questo metodo l'impregnazione sia molto più fine che non col metodo dell'Achùcarro (essa non riesce però con altrettanta costanza). Cfr. anche con le figg. 47, 49, 52, 53, 56 a tav. V. Notisi l'intensificarsi della impregnazione in corrispondenza delle curve e delle costolature ritorte, S, S.

Fig. 65. — Astrocita della corteccia cerebrale in un caso di presbiofrenia. Il citoplasma è quasi per intero occupato da una massa grassosa che rimane come ingabbiata dalle lacinie residuali del citoplasma stesso. È una condizione analoga a quella illustrata a fig. 17, tav. II.

Fig. 66. — Astrocita del 1° strato della corteccia cerebrale in un'antica meningo-encefalite luetica. La cellula trovasi in uno stadio regressivo (sclerotico?) avanzato, e rappresenta, un po' accentuato, un tipo molto frequente anche normalmente in questo strato della corteccia. Notisi il fenomeno di « espulsione » del nucleo, che rimane aderente alla cellula per un sol lato.

Fig. 67. — Astrocita della corteccia cerebrale in un caso di demenza senile. La cellula si trova in un estremo stadio regressivo, ridotta a un piccolo groviglio protoplasmatico, da cui partono esili prolungamenti. Il nucleo, picnotico, è ricacciato di lato. Notisi la scarsa impregnazione dei prolungamenti, che ripete la debole colorazione con colori d'anilina già rilevata. V. figg. 25, 26, 27, 28 a tav. III.

Fig. 68. — Astrocita della sostanza bianca delle circonvoluzioni cerebrali in un uomo adulto morto per uremia. Le sottili lamine del citoplasma sono impregnate soltanto sull'estremo margine: *m*, *m*. Nei prolungamenti vi è accenno ad una più intensa impregnazione in rapporto con incurvamenti, torsioni *s*, *s*, e grinze *g*.

Fig. 69. — Probabile residuo di un astrocita gravemente alterato, nella corteccia cerebrale in un caso di paralisi progressiva giovenile. In *c* si osserva ancora un grosso lembo del corpo cellulare; l'aggruppamento dei prolungamenti in P sembra appartenga alla stessa cellula: *n* sembra essere il nucleo picnotico della cellula in questione. Non è lecito, tuttavia, affermare che si

tratti qui di un astrocita dalla cui dissoluzione abbia a risultare un intreccio di filamenti nevroglici, perchè noi non abbiamo sott'occhio molte parti della cellula, che indubbiaménte sono state escise dal taglio. La buona conservazione della parte in C fa pensare che l'alterazione della cellula non sia tanto progredita quanto può apparire dal reperto in questa sezione.

Tavola VII.

Tutte le figure son tratte da preparati allestiti secondo il metodo V dell'Alzheimer (color. bleu di metile-eosina), disegnate con l'obb. imm. 1/12 oc. 12 comp. microscopio Leitz.

FIGG. 70-71. — Astrociti della sostanza bianca delle circonvoluzioni cerebrali di un giovane affetto da demenza precoce. Apparisce distintamente la forma a nastro della maggior parte dei prolungamenti. Notisi l'intensificarsi della colorazione, in rapporto con le curve e le torsioni S, S, dei prolungamenti Si osservi la intensa colorazione dei *margini m*, *m*, la quale, a differenza di quanto si verifica nei preparati alla Weigert, per lo più degrada nel citoplasma con sfumatura più o meno marcata Il protoplasma, a masse e superfici piuttosto ampie, è colorato esclusivamente. dal bleu di metile.

FIG. 72. — Cellula nevroglica della sostanza bianca del midollo spinale d'un cane normale. Sezione *parallela* ai fasci di fibre nervose. Si osservi il tipo particolare di cellula, a prolungamenti spesso riuniti in fasci (F) che decorrono frammezzo e paralleli alle fibre nervose.

FIG. 73. — Astrocita della sostanza bianca del midollo spinale d'un cane normale. Prevalente disposizione a fasci dei prolungamenti. Il protoplasma è colorato esclusivamente dal bleu di metile.

FIG. 74. — Astrocita della sostanza bianca dello stesso caso dal quale sono tratte le figg. 70 e 71. Nella colorazione si è adoperata una miscela nella quale era stata leggermente aumentata la proporzione dell'eosina. Tanto il nucleo quanto la parte strozzata del grosso prolungamento P, che s'inserisce al vaso V sono colorati in rosso, invece che in bleu (Cfr. ad es. la fig. 71). Anche i margini del citoplasma *m* sono colorati in rosso. Non vi è dunque elettività specifica di colorazione. Si osservino le sottilissime grinze lineari in stretto rapporto con lo strozzamento del prolungamento in S. Nel vaso un globulo rosso: *g*.

FIG. 75. — Residuo (anucleato?) di un astrocita in avanzatissima fase regressiva, nel primo strato della corteccia cerebrale in un caso di demenza senile. I grossi vacuoli sono occupati da sostanze grassose (confronto con preparati Daddi-Herxheimer). Non si può stabilire se il nucleo dell'elemento sia scomparso in seguito ad un processo regressivo, o se non sia stato invece esciso dal taglio. Si noti che l'elemento estremamente retratto e a prolungamenti sottilissimi ha assunto l'eosina, mentre le cellule vicine meglio conservate son colorate dal bleu di metile. Il colore più «leggero» si apprende di preferenza, per quanto non necessariamente, alle strutture più fini.

FIG. 76. — Astrocita del corno posteriore del midollo cervicale d'un cane normale. Sezione longitudinale del midollo. Si osservino le grosse costolature *c*, *c* in continuazione dei prolungamenti, e si noti il repentino attenuarsi della colorazione nelle lamelle *l*, *l*. Queste, ad una osservazione superficiale possono facilmente sfuggire, risultando da ciò l'impressione della indipendenza delle costolature. Si notino altresì i nastri e i filamenti di vario tipo *f*, *f*, i quali appartengono ad elementi più o meno vicini.

FIG. 77. — Astrocita dal corpo striato di un uomo adulto, morto per pneumonite. Si osservi la colorazione dei prolungamenti e dei margini delle lamelle. Si constata la sottile sfumatura della linea marginale intensamente colorata, verso la parte interna del protoplasma. Con colori più « leggeri » ad es. con l'eosina (cfr. fig. 74 *m*, nella stessa tavola), come col violetto di metile nel metodo del Weigert, manca spesso la sfumatura, sì che si ha l'impressione di una linea sottile, tagliente, isolata.

FIG. 78. — Astrocita del midollo spinale d'un cane normale. Si osservi l'intensa colorazione nelle curve *c*, *c*, dei prolungamenti a nastro. In F, s'inizia un fascio di prolungamenti come nella cellula disegnata a fig. 72.

Fig. 79. — Residuo di astrocita in avanzata fase regressiva. V. fig. 75. La diversa colorazione delle due parti dello stesso elemento dimostra la mancanza di una elettività specifica nei colori della miscela. Nella parte inferiore, ove i vacuoli *v* contenenti sostanze grassose appariscono più ampî, è forse il processo regressivo un po' più avanzato.

Fig. 80. — Cfr. fig. 75. In *n* vi è, forse, il residuo del nucleo profondamente alterato. Si osservi, comunque, in tutte queste cellule (figg. 75, 79, 80) il fenomeno già osservato in altre forme d'alterazione regressiva, vale a dire l'estremo assottigliamento e la scarsa colorabilità dei prolungamenti residuanti.

Tavola VIII.

Tutte le figure, salvo le figg. 83 e 93, sono tratte da preparati allestiti col metodo VI dell'Alzheimer (color. fucsina-verde-luce), e disegnate con l'obb. imm. 1/12 e l'oc. 12 comp. microsc. Leitz. Le figg. 83 e 93 son tratte da preparati allestiti col metodo IV dell'Alzheimer (color. ematoss. Ribbert) e son disegnate con l'obb. imm. 1/12 e l'oc. 6 comp.

Fig. 81. — Due astrociti contigui, nella corteccia cerebrale in un caso di paralisi progressiva. Si osservi come, mentre la cellula B è quasi totalmente colorata dalla fucsina, la cellula A è per la massima parte colorata dal verde brillante. Si noti anche che la fucsina si apprende prevalentemente ai sottili prolungamenti, ai margini, alle pieghe, ma non con legge costante, assoluta. V. ad es. i margini *m*, le pieghe *p* , *p* .

Fig. 82. — Cellula nevroglica della sostanza bianca cerebrale in un uomo ottantenne. Si osservi come, mentre il citoplasma è colorato dal verde-luce, i margini del grosso prolungamento P sono colorati dalla fucsina, che poi tinge l'intero prolungamento nella sua parte più ristretta. Nel punto d'insersione I al vaso *v* , l'espansione protoplasmatica, vacuolata, del prolungamento riprende la colorazione verde.

Fig. 83. — Astrocita della sostanza bianca delle circonvoluzioni cerebrali in un uomo adulto morto di pneumonite. A malgrado della colorazione « di massa » si osserva ch'essa è più intensa nei prolungamenti di medio calibro *m* (non nei sottilissimi) e nelle curve e strozzature S dei maggiori prolungamenti. Notisi la struttura vacuolare delle porzioni spianate del protoplasma, specie nella lamina in cui si espande il piede d'inserzione al vaso *v*. Nei prolungamenti, di solito il plotoplasma è più retratto, e perciò presenta grinze e striature longitudinali o spirali.

Fig. 84. — Astrocita ipertrofico della corteccia cerebrale in un caso di paralisi progressiva. Nel citoplasma tumefatto si apprende il colore più « pesante » il verde-luce. Nei prolungamenti, invece, la fucsina. Si ripetono in questi ultimi le note modalità della colorazione: maggiore intensità lungo le pieghe di torsione, P — nei tratti ricurvi, S. ecc. V. = vaso sanguigno. Rammentiamo che basta prolungar di poco l'azione del verde-luce, perchè anche i prolungamenti risultino colorati in verde anzichè in rosso (v. fig. 88, nella stessa tavola).

Fig. 85. — Un ponte nevroglico che unisce il vaso *v* tagliato trasversalmente, col vaso V tagliato longitudinalmente. Come dimostra l'esame di tutti gli elementi nevroglici vicini, il ponte nevroglico appartiene indubbiamente ad una cellula, parte della quale non è rimasta compresa nella sezione. Si osservi come la fucsina abbia colorato soltanto i margini *m* , *m* del nastro protoplasmatico e alcune pieghe *p* , in esso. Altri margini S S sono stati intensamente colorati dal verde-luce (cfr. fig. 81, *p*, *m*).

Fig. 86. — Astrocita del primo strato corticale nel preparato istesso dal quale è tratta la fig. 84. Si osservi che questa cellula retratta e con nucleo impiccolito si è colorata interamente con la fucsina, mentre nella cellula a fig. 84 il largo protoplasma e il nucleo son colorati in verde. Basta però prolungare la decolorazione in alcool picrico o l'azione del verde-luce per ottenere anche queste piccole cellule retratte in color verde.

Fig. 87. — Piccola cellula della sostanza bianca del midollo spinale d'un tabico, totalmente colorata in verde. Nelle stesse sezioni, facendo agire un po' più a lungo la fucsina o decolorando

meno in alcool picrico, queste cellule presentano i sottili prolungamenti colorati in rosso o addirittura sono interamente colorate in rosso come le cellule B, fig. 81, o come la cellula a fig. 86.

Fig. 88. — Grosso astrocita ipertrofico della corteccia cerebrale in un caso di paralisi progressiva. Sezione vicina a quella da cui traggono le figg. 84 e 86, nella quale si è di poco prolungata l'azione del verde-luce. Non solo il citoplasma, ma tutti i prolungamenti sono colorati in verde. Cfr. con la fig. 84. Notisi l'intensa colorazione dei margini *m*, delle costolature *c*, e dei fini prolungamenti.

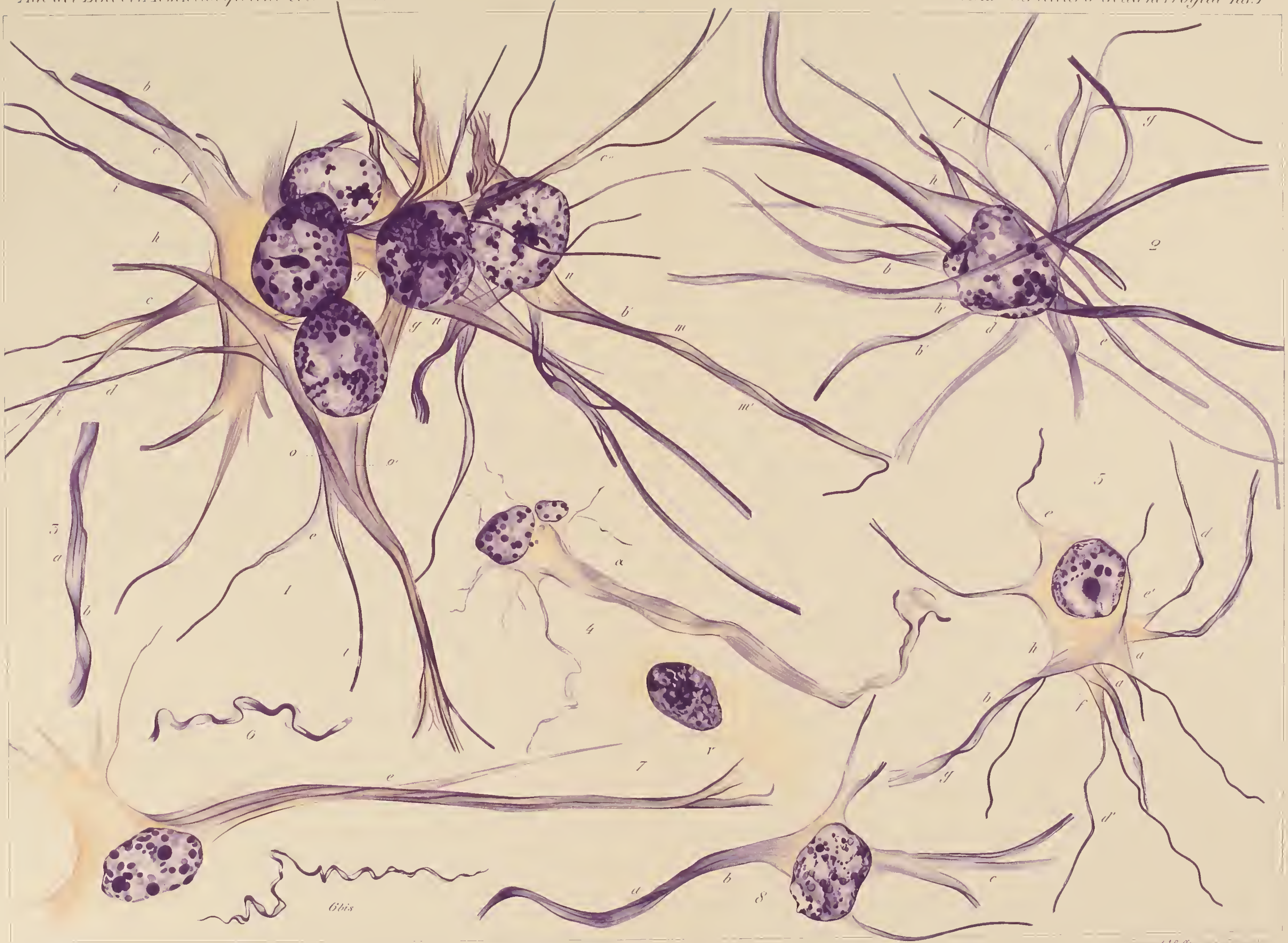
Fig. 89. — Astrocita del bulbo in un caso di selcrosi multipla. Come a figg. 84 e 91, si osserva la colorazione verde del citoplasma e la colorazione rossa dei prolungamenti e del margine *m*.

Fig. 90. — Cellula nevroglica ipertrofica nella corteccia cerebrale in un caso di paralisi progressiva. Il grosso prolungamento protoplasmatico P presenta sottili grinze superficiali per il fenomeno di maggior retrazione dei prolungamenti stessi. Molte di queste grinze son colorate dalla fucsina, ma altre dal verde luce: *g*. Si noti l'intensa colorazione rossa del prolungamento *q* nella sua parte più sottile. V: vaso sanguigno.

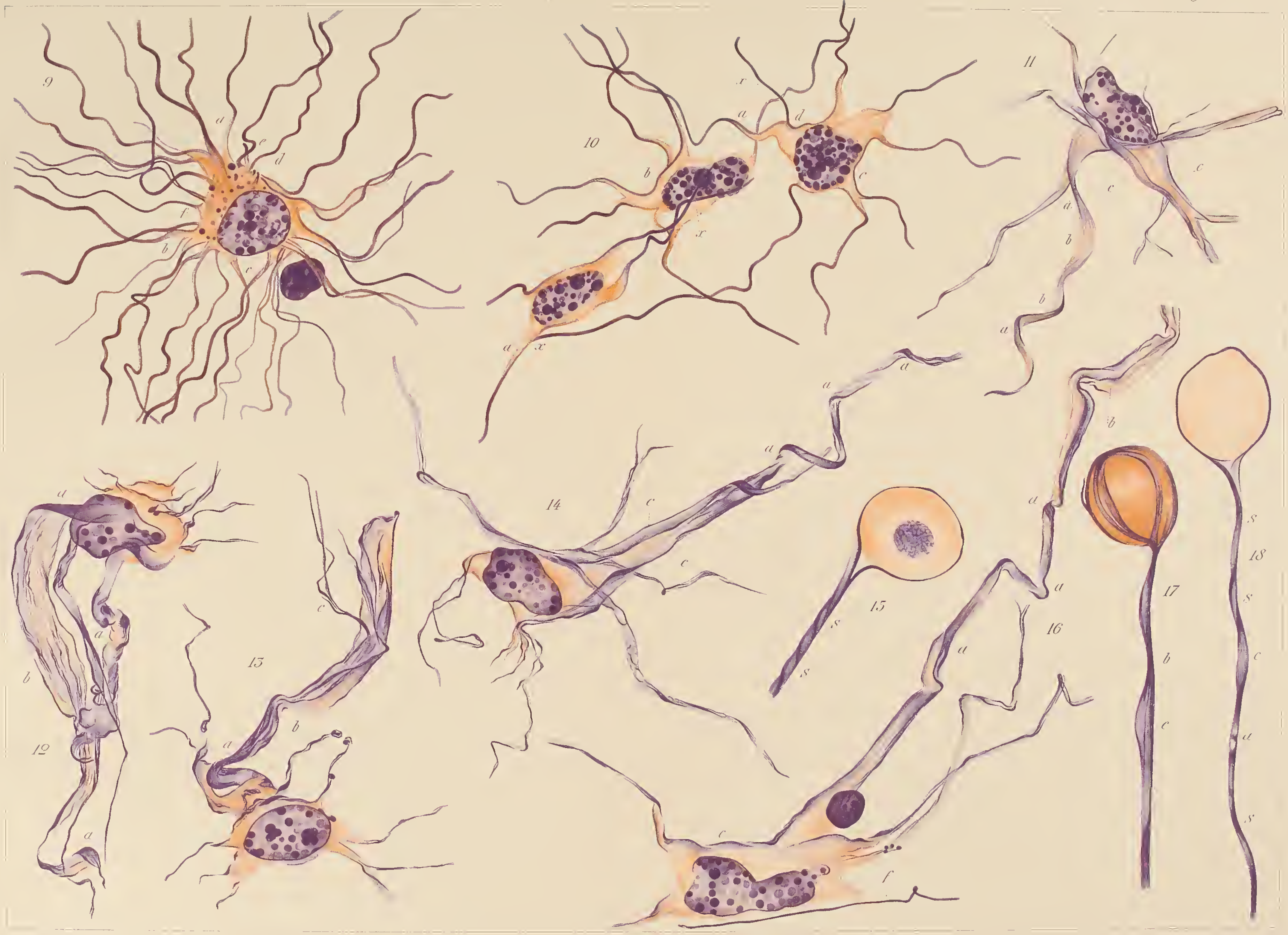
Fig. 91. — Astrocita del ponte in un caso di tabe superiore. Le stesse modalità di colorazione illustrate a figg. 84 e 89. Si noti l'intensificarsi della colorazione rossa nelle curve S, S, e nelle pieghe *p*, *p* e il suo attenuarsi nei tratti più ampî dei prolungamenti *a*.

Fig. 92. — Astrocita tratto dallo stesso caso, dal quale è tolta la fig. 81. Si osserva che la fucsina ha colorato l'estremo più sottile del prolungamento *p* e alcuni margini e pieghe, mentre altri margini e pieghe *m*, *p* son colorate intensamente dal verde-luce.

Fig. 93. — Cellule nevrogliche in rapporto con vasi sanguigni, nella sostanza bianca delle circonvoluzioni cerebrali in un uomo adulto normale. Malgrado la colorazione « di massa » si osserva la intensificazione della colorazione nei sottili prolungamenti, nelle loro curve e nei margini lamellari. Si notino i molteplici prolungamenti ai vasi e il ponte che unisce la cellula A con la cellula B, addossata al vaso sanguigno. Si osservi anche in C una cellula del tipo « sferoide » che si ritiene privo di prolungamenti. Si ripete qui la consueta differenza nell'aspetto del protoplasma nevroglico a seconda ch'esso sia disteso in porzioni piane, lamellari o faccia parte invece dei prolungamenti. Nelle prime presenta aspetto vacuolare *a*, nei secondi, invece, è più o meno retratto e stirato e percorso da grinze e rilievi longitudinali a spira in rapporto con le curve del prolungamento stesso S, S (Cfr. nel mio lavoro sulla malaria perniciosa, la tav. XI).



Cerletti pinx.



Cerletti pinx.

Cerletti e Bonanni pinx.

Firenze Lit. A. Ruffoni

Cerletti e Bonanni pinx.

Cerletti e Bonanni pinx.

Firenze lit. A. Ruffoni, Piazza S. Croce 30

Bonanni pinx.

Firenze, Lit. A. Ruffoni

Bonanni pinx.

Bonanni pins.

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76) Parte 1ª Transunti.
2ª Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — Transunti. Vol. I-VIII. (1876-84).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — Rendiconti. Vol. I-VII. (1884-91).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — Rendiconti *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XXIV. (1892-1915). Fasc. 10°. Sem. 1°.
Rendiconti *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XXIII. (1892-1914).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XI. Fasc. 1.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XII.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia è di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

Ermanno Loescher & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*
Ulrico Hoepli. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

2

MEMORIE DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

ANNO CCCXII

Serie Quinta — Volume XI — Fascicolo II.

FILIPPO BOTTAZZI

NUOVE RICERCHE SUI MUSCOLI STRIATI E LISCI
DI ANIMALI OMEOTERMI.

SECONDA MEMORIA:
RICERCHE SUL M. RETRACTOR PENIS
(E SU ALTRI PREPARATI MUSCOLARI LISCI)

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1915

Smithsonian Institution
SEP 25 1924
National Museum

Nuove ricerche sui muscoli striati e lisci di animali omeotermi.

SECONDA MEMORIA:

Ricerche sul m. retractor penis (e su altri preparati muscolari lisci) (*)

del Corrisp. FILIPPO BOTTAZZI

(presentata nella Seduta dell' 8 novembre 1914)

I.

Generalità sulla fisiologia del tessuto muscolare liscio.

Nel mio lavoro del 1908 ([1]) sui muscoli lisci, io scrissi: « Più studio la fisiologia dei muscoli lisci, e più mi persuado che, quando noi crediamo di sperimentare sul tessuto muscolare liscio, in realtà noi quasi sempre sperimentiamo su questo o quell'organo, nella cui struttura entrano principalmente come elementi costitutivi, insieme con altri elementi anche importanti, le cellule muscolari liscie. Con ciò voglio dire che i caratteri del tessuto muscolare liscio, assai più di quelli del tessuto muscolare striato, dipendono dalla funzione dell'organo di cui esso fa parte ». Aggiungevo che, « mentre è facilissimo procurarsi un muscolo striato isolato, ma integro, e scevro da ogni connessione organica (esso contiene naturalmente fibre nervee, giunzioni neuromuscolari ecc.), è difficilissimo fare altrettanto per i muscoli lisci. Eccetto il *m. retractor penis*, che si può isolare perfettamente senza che subisca alterazioni di sorta, tutti gli altri preparati muscolari lisci sono organi, o parti di organi, aventi in vita funzioni determinate e diverse...., organi che, oltre al tessuto contrattile e alle terminazioni di fibre nervee, contengono plessi gangliari, una tonaca mucosa e una sierosa con nervi centripeti ecc. ». Appresso chiarivo meglio il mio pensiero, con le seguenti parole: « Io voglio dire che maggiori differenze esistono fra le proprietà funzionali del tessuto muscolare liscio di un'arteria, dell'esofago, dell'intestino, del *m. retractor penis* ecc., che non fra quelle di diversi muscoli striati di uno stesso animale; e ciò non può dipendere se non dal fatto che noi in realtà non sperimentiamo sul tessuto contrattile isolato, ma sugli organi o su parti degli organi dei quali quel tessuto fa parte. Il tessuto contrattile dello sfintere pilorico, del fondo

(*) Lavoro eseguito nel laboratorio di Fisiologia della R. Università di Napoli.

dello stomaco, della vescica ecc., conserva sempre l'impronta della funzione particolare dell'organo, di cui fa parte, assai più di quanto il muscolo gastrocnemio o il sartorio o i muscoli oculari ecc. conservino l'impronta della funzione alla quale è adibito normalmente il gruppo di cui il muscolo esaminato... fa parte ».

« La conseguenza di tutto ciò è, che una fisiologia generale del tessuto muscolare liscio presenta maggiori difficoltà a costituirsi, di quelle che ha presentato la fisiologia generale dei muscoli striati; e in queste differenze da me accennate sta, senza dubbio, la cagione del disaccordo che esiste fra i risultati sperimentali delle ricerche dai diversi autori fatte sui muscoli lisci, o, come più propriamente dovrebbe dirsi, sugli organi muscolari lisci ».

Non minori difficoltà incontrano gli autori a mettersi d'accordo circa la fine struttura degli elementi muscolari lisci, e circa le relazioni istologiche che fra essi esistono, affermando alcuni perfino la natura sinciziale o plasmodica del tessuto, e che le miofibrille oltrepassano i confini, del resto non sempre ben distinti, delle cellule muscolari. C'è ancora chi dubita, inoltre, che nelle cellule muscolari lisce esistano realmente fibrille distinte dal sarcoplasma, come nelle fibre striate; ma ammesso che esistano, i più affermano che sono continue, e non discontinue o segmentali, come nelle fibre striate. Non sappiamo con assoluta sicurezza se esse sole siano anisotrope o birifrangenti, e quindi se differiscano in ciò, come nelle fibre striate, dal sarcoplasma, affermando alcuni la birifrangenza dell'intera cellula muscolare liscia, mentre altri negano ad essa ogni traccia di birifrangenza. Meno ancora si sa delle modificazioni che questi elementi presentano durante la contrazione; e niuno sarebbe oggi in grado di formulare un concetto preciso del processo di contrazione dei muscoli lisci, nè dire se e in che esso somigli o differisca dal processo di contrazione dei muscoli striati [2]. La conoscenza della composizione chimica e della costituzione chimico-fisica del tessuto muscolare liscio, per sè e in confronto con quella dei muscoli striati, solo in questi ultimi anni, in parte considerevole per opera dei miei allievi e mia [3], ha incominciato a fare qualche progresso.

Le differenze che esistono fra muscoli lisci e striati sono, senza dubbio, assai grandi: esse riguardano, non solo l'attività funzionale, ma anche la loro struttura e composizione chimica, l'ordinamento degli elementi morfologici onde sono composti, la loro innervazione, l'origine embrionale, la capacità e il modo di rigenerarsi, l'azione che su essi esercitano certe sostanze chimiche, che nell'organismo si formano come prodotti di alcune ghiandole a secrezione interna ecc. Ciò posto, sarebbe ora estremamente azzardato, tanto il dire, per es., che il tessuto muscolare striato rappresenti uno stadio più avanzato nella evoluzione dei plasmi contrattili, rispetto al tessuto muscolare liscio, quanto l'affermare che il processo della contrazione sia di natura identica per i due tessuti contrattili.

Certo è che finora gli sperimentatori, sia morfologi sia fisiologi, hanno dedicato maggior parte della loro attività all'indagine del tessuto muscolare striato che non a quella del tessuto muscolare liscio; il che mi sembra ingiustificato, perchè, infine, la muscolatura liscia partecipa alla composizione e all'attività fisiologica di quegli organi viscerali che, come i vasi sanguigni, il tubo digerente, la vescica urinaria, l'utero e tanti altri, hanno un'importanza grandissima nella economia.

È necessario, dunque, che siano approfondite ed estese le ricerche, vuoi morfologiche vuoi fisiologiche, rivolte alla conoscenza della fine struttura e delle proprietà fisiologiche dei muscoli lisci, prima che si possa fare il tentativo di fondare una fisiologia generale del tessuto muscolare liscio.

II.

I preparati muscolari lisci.

I preparati muscolari lisci, di cui finora si sono serviti i varii sperimentatori, sono stati numerosi e diversi. Si può dire, che ogni organo muscolare liscio ne ha forniti (4).

E si è sperimentato, sia sull'organo *in situ*, sia su parti di organo asportate dal corpo e fatte sopravvivere in condizioni opportune. Così, s'è lavorato sull'esofago di Invertebrati e dei Vertebrati inferiori, su preparati di stomaco e d'intestino, sulla vescica urinaria e sull'uretère, sui vasi sanguigni, sull'utero, sul m. retrattore del pene ecc.

Io mi sono occupato della fisiologia dei muscoli lisci fin dal 1896, e il preparato da me preferito, fino a pochi anni or sono, è stato il « preparato esofageo », cioè l'esofago, sia di animali Invertebrati, come l'*Aplysia* (5), sia di Vertebrati, quali specialmente gli Anfibii (6) e gli Uccelli (7), nei quali la muscolatura dell'organo è esclusivamente liscia.

Sull'esofago delle Aplisie sono state fatte, dopo le mie, le ricerche di von Brücke (8); su quello degli Anfibii hanno sperimentato in seguito Stiles (9), Beck (10), Treves (11) ed altri; su quello dei pulcini io stesso ho fatto nuove esperienze, e poi i miei allievi d'Errico (12) Fienga (13) e Buglia (14) nel mio laboratorio. Tutti gli sperimentatori hanno dovuto riconoscere la bontà del preparato esofageo. Le ragioni della sua superiorità sui preparati di stomaco, di vescica ecc., sono state ampiamente da me esposte nel mio lavoro del 1909 (loc. cit., pagg. 371 e segg.).

Due soli preparati possono reggere il confronto col preparato esofageo, e sono: l'uretère che, dopo le classiche ricerche di Engelmann (15), è stato recentemente studiato di nuovo da altri, fra i quali Lucas (16), Beresnegowsky (17), L. Orbeli e E. Th. von Brücke (18); e il preparato intestinale di Magnus (19); e per la stessa ragione fondamentale, che costituisce il pregio del preparato esofageo, vale a dire la disposizione delle cellule muscolari in fasci aventi due sole direzioni, normali l'una rispetto all'altra, in guisa che si può registrare le contrazioni o della sola muscolatura longitudinale o della sola trasversale.

Altre mie ricerche si riferiscono alla muscolatura liscia dei vasi sanguigni (20), e fra esse debbono essere comprese tutte quelle che ho fatto sull'atrio del cuore dell'*Emys europaea*, la cui muscolatura liscia non può considerarsi se non come muscolatura vasale (21).

I varii risultati delle mie ricerche sulla muscolatura liscia dell'atrio di *Emys* sono stati in seguito confermati da Fano (22), da Oinuma (23), da Buglia (24) e da Spadolini (25), oltre che da Rosenzweig (26).

Alcuni autori hanno sperimentato anche sulle muscolature bronchiale (27, 28) vescicale (29), stomacale (30), iridea (31), uterina (32), e sopra muscoli lisci di Vertebrati inferiori (33) e di Invertebrati (34).

Finalmente, poche ricerche sul *m. retractor penis*, sul quale esperimento esclusivamente da più di due anni, avevo già fatte nel 1906 (35).

Io non m'indugerò nemmeno a riassumere brevemente i resultati delle mie precedenti ricerche sui muscoli lisci, perchè ciò mi porterebbe troppo oltre i confini di questo lavoro, che è dedicato esclusivamente allo studio delle proprietà del *m. retractor penis*; ma ne terrò conto via via che mi si offrirà l'occasione, e poi anche alla fine, nelle conclusioni e considerazioni generali che formulerò in base alle presenti indagini sperimentali.

III.

Notizie bibliografiche e generalità sul preparato muscolare liscio prescelto nelle presenti ricerche.

Pochi autori hanno scelto, dopo Sertoli (ved. appresso), come oggetto delle loro indagini sulla fisiologia e sulla chimica fisiologica del tessuto muscolare liscio il *m. retractor penis*, sebbene questo muscolo presenti, su tutti gli altri, i seguenti vantaggi:

1) di essere un muscolo (doppio) notevolmente lungo e costituito di cellule muscolari disposte tutte in una stessa direzione;

2) di essere facilmente e perfettamente isolabile dal tessuto connettivo che lo circonda;

3) di presentare grandi dimensioni nei grandi mammiferi, quali il toro, il cavallo, l'asino ecc., in guisa che se ne può ottenere facilmente, al macello, una quantità in peso notevolissima (uno o più chilogrammi) in un sol giorno, da servire per ricerche di chimica fisiologica; e dimensioni relativamente piccole in mammiferi di piccola taglia, per es. nei cani, in guisa da potersene servire per ricerche fisiologiche svariate;

4) di non far parte di organi di struttura e funzione complessa, come è il caso della muscolatura liscia del tubo digerente, della vescica o dell'uretère, dell'utero ecc., dove, per giunta, le cellule muscolari si trovano stratificate in più direzioni (almeno due).

Secondo Ellenberger e Baum ([35]), il *m. retractor penis* (Afterrutenmuskel, Afterrutenband) « bildet zunächst einen paarigen, dem Aussehen nach aus unwillkürlichen Fasern bestehenden blassen Muskel, der jederseits aus dem *Sphincter ani externus* hervorgeht, dann von diesem umgeben zur Seite des Afters herablauft und sich ventral vom After mit dem der anderen Seite vereinigt und nunmehr als ein unpaare Muskel, der nur mit dem Messer in 2 Muskeln zu trennen ist, über die Mitte der Oberfläche des *m. bulbo-cavernosus* hinweggeht und an die ventrale Mittellinie der Harnröhre tritt, um hier spitzen-(eichel-) värts zu verlaufen... Der Muskel ist in seinen proximalen Partieen vom *m. sphincter ani externus*, in seinen distalen von der äusseren Haut bedeckt ».

Circa il *m. retractor penis* del cane, Langley ([36]) dice: « The retractor muscle is well developed in the dog, and, as in some other animals, it is a thin band of longitudinally arranged unstriated muscle, inserted at the attachement of the prepuce, and continued backwards in the middle line over the ventral surface of the *corpus spongiosum* and *bulbus urethrae* ».

Lungo la porzione distale del pene, « the retractor runs in a loosely attached sheath, and is apparently a single strip of muscle, though easily divided into two halves near the bulb ». « A few striated muscle fibres are found in the retractor in the cat and dog, they are derived chiefly from the external sphincter of the anus, but a few fibres probably pass into the retractor from the bulbo-cavernosus muscle » ([37]).

Secondo de Zilwa ([38]), le fibre striate si trovano solo nell'estremità perineale del muscolo; ma von Brücke ([39], [40]) dice di averne trovate anche in tagli dell'estremità prepuziale di esso.

Notizie più particolareggiate sulla fine struttura del muscolo, specie per quanto riguarda l'aspetto, la disposizione e le relazioni reciproche delle cellule muscolari, non mi è riescito di trovare.

Solo il de Zilwa dice (pag. 201) che l'intero muscolo, eccetto le poche fibre striate sopra dette, è costituito di cellule muscolari lisce parallele, le quali nello stato di contrazione hanno una lunghezza di mm. 0,3 e un diametro massimo di mm. 0,008. Ciascuna cellula ha un solo nucleo. Le cellule sono intimamente aderenti le une alle altre. (Il lavoro del de Zilwa, però, non è accompagnato da figure istologiche).

Per quanto riguarda l'innervazione del *m. retractor penis*, dalle ricerche di Langley e Anderson ([37], [41]) resulta che esso, come gli altri muscoli viscerali, possiede una duplice innervazione: una derivante dal sistema nervoso simpatico propriamente detto (autonomo toraco-lombare), l'altra derivante dalla porzione sacrale del sistema autonomo. Le fibre simpatiche derivano dai nervi toracici 12° e 13° e dai nervi lombari 1°, 3°, (4°), e passano per il nervo pudendo, che dà origine al nervo dorsale del pene, al nervo genito-anale ecc.; la stimolazione di questi nervi, che sono composti di fibre postgangliari, provoca contrazione del m. retrattore del pene. Le fibre autonome sacrali passano per il nervo pelvico o erigente, e provocano, quando sono stimolate, inibizione del muscolo retrattore del pene. Queste fibre sono pregangliari; esse vanno a connettersi con cellule di gangli periferici, dalle quali partono le fibre (postgangliari) destinate al muscolo. Una differenza notevole tra le fibre pregangliari motorie e le inibitorie sta in ciò: che le prime s'arrestano nei gangli della catena simpatica propriamente detta, mentre le seconde raggiungono la loro stazione gangliare più perifericamente, in piccoli gangli disseminati lungo i rami nervosi e situati in prossimità dell'organo che innervano ([41]). Anche Fletcher (loc. cit., appresso) dice che le fibre inibitorie postgangliari sono brevi, e vanno dal primo ganglio pelvico al muscolo. Di conseguenza, le fibre post-gangliari dei nervi motori sono lunghe, possono essere isolate e stimolate direttamente, e i gangli giacciono più o meno lungi dall'organo; mentre le fibre post-gangliari dei nervi inibitori sono brevissime: e, essendo situate insieme coi gangli onde derivano, in prossimità del muscolo, non possono essere stimolate isolatamente. I gangli più lontani (rispetto all'organo) appartengono al sistema motore: quelli più vicini, al sistema inibitore. In ciò esiste una certa analogia fra il m. retrattore del pene e il cuore, se si ammette, con parecchi autori, che i gangli intracardiaci, per la massima parte, se non esclusivamente, appartengono alla innervazione vagale, cioè inibitoria, del cuore.

Secondo Fletcher ([42]), il *m. retractor penis* di topo e d'istrice contiene, oltre ad un plesso superficiale, un fittissimo reticolo nervoso intercellulare, formato da ramificazioni di fibre nervee che si anastomizzano (?) fra loro. L'A. non vide cellule nervose, ma constatò che molte cellule connettivali situate alla superficie del muscolo si colorano intensamente col bleu di metilene, e possono essere facilmente scambiate per cellule nervose. Non vide nemmeno terminazioni nervose, libere o fornite di apparati speciali; nè è possibile distinguere, nell'uniforme reticolo intercellulare, ciò che spetta alle fibre motorie e ciò che spetta alle inibitorie.

Tagliato, nel topo o nell'istrice, il n. pudendo di un lato, e lasciato passare tempo sufficiente perchè avvenisse la degenerazione delle fibre nervee, l'A. trovò nella metà omolaterale del muscolo il reticolo intercellulare così nettamente colorato come nell'altra metà, in guisa che non era possibile distinguere l'una dall'altra. Escisso, nell'istrice, il primo ganglio pelvico, e tagliate, così, anche le fibre inibitorie post-gangliari, e tagliato inoltre il n. pudendo del lato sinistro, dopo dieci giorni l'A. trovò normale il reticolo intercellulare della metà destra del muscolo, mentre quello della metà sinistra era scomparso.

Dunque, il reticolo intercellulare degenererebbe solo dopo il taglio di tutt'e due i nervi; fatto, questo, che non potrebbe spiegarsi nemmeno ammettendo l'ipotesi dell'A., di una comunione, nel reticolo, delle due categorie di fibre nervee, motorie e inibitorie. Data l'incertezza dei risultati, è meglio quindi aspettare che nuove ricerche siano fatte a questo riguardo.

Anche a proposito delle osservazioni microscopiche contenute nel mio lavoro del 1906 (loc. cit.), Mislawsky ([43]) dice che le supposte cellule gangliari, da me descritte e figurate, non sono cellule nervose, ma probabilmente cellule connettivali del tipo di quelle descritte dal Dogiel ([44]); e che l'inibizione prodotta dalla stimolazione del n. erigente si compie nella stessa sostanza muscolare (?).

Ricerche fisiologiche sul *m. retractor penis* furono fatte, prima dal Sertoli ([45]), poi dal de Zilwa (loc. cit.), da me stesso (loc. cit.), dal Mosso ([46]), dal Mislawsky (loc. cit.), e più recentemente da E. Th. von Brücke ([39], [40]), da Starling ([47]), e da Froelich e Loewi ([48]).

Dei risultati che questi AA. hanno ottenuto mi occuperò particolarmente appresso, quando tenterò di dare un'interpretazione generale di quelli ottenuti anche da me. Debbo qui avvertire, per altro, che, sebbene io abbia fatto ricerche di natura diversa, queste sono state sempre rivolte a chiarire l'oggetto principale delle mie indagini, che era *la natura e la genesi dei movimenti spontanei*, così delle contrazioni relativamente più rapide come dei forti e duraturi accorciamenti, che il muscolo retrattore del pene eseguisce anche fuori del corpo dell'animale, in opportune condizioni di sopravvivenza.

A tal fine, ho studiato l'andamento generale dell'attività motoria automatica in varie condizioni, a temperature diverse e sotto l'influenza di varie sostanze chimiche; gli effetti che determinano le applicazioni della corrente elettrica costante e indotta ecc. Non mi sono occupato affatto della innervazione estrinseca del muscolo, per la quale è necessario di lasciare *in situ* l'organo; ma nella discussione dei resultati sperimentali da me ottenuti, in confronto con quelli ottenuti da altri autori, terrò conto anche dei dati più sicuri che possediamo a questo proposito, perchè l'innervazione del muscolo ha, senza dubbio, importanza per quanto riguarda la natura e la genesi del tono e dei movimenti automatici di esso.

* * *

Prima di passare all'esposizione delle mie ricerche, però, credo utile di indugiarmi un momento sulla denominazione delle varie parti del muscolo e su alcune proprietà generali di esso, non che sul metodo da me seguìto nelle presenti ricerche.

Il m. retrattore del pene, nel cane, è lunghissimo, estendendosi, come sopra ho detto, dall'ano al prepuzio. Chiameremo *porzione perineale* quella che va dall'ano alla radice del pene, che raggiunge là dove questo emerge dal piano perineale. Questa porzione è praticamente impossibile a isolare ed asportare dal corpo, perchè è immersa, per tutto il suo decorso, in una massa di tessuto adiposo. La porzione che va dalla radice dell'asta al prepuzio potrebbe chiamarsi, invece, *porzione peniena*. Essa è facilmente isolabile, perchè è circondata da tessuto connettivo lasso, e la si scorge nettamente, non appena è tagliata la pelle dell'asta e dello scroto lungo la linea mediana, per il suo colorito roseo pallido. È questa la porzione che ordinariamente viene isolata ed asportata. Essa rappresenta un po' più della metà dell'intero muscolo. Essendo, però, anche molto lunga nei cani di grossa taglia, conviene distinguervi ancora tre parti: una *estremità* prossimale che può dirsi anche *perineale*, in quanto che si continua con la porzione perineale propriamente detta; una *estremità* distale o *prepuziale*, che è quella estrema che si attacca al prepuzio; e una *parte peniena media*.

Nella estremità prepuziale, il muscolo, che è notevolmente più spesso e largo e più intensamente colorato in rosso nella estremità perineale, si assottiglia e restringe e impallidisce. L'estremità perineale talora è rossa come un muscolo striato. Vedremo che in essa, anche fisiologicamente, si può dimostrare l'esistenza di fibre muscolari striate.

L'estremità prepuziale rimane affatto illesa, nell'allestimento del preparato, se si ha cura di asportare un piccolo rettangolo della base del prepuzio, alla quale il muscolo si attacca, e di fare in esso il foro per cui deve passare l'uncino superiore,

per mezzo del quale il preparato viene connesso con la leva scrivente. L'estremità perineale, invece, rimane sempre lesa in corrispondenza del taglio che si fa per separare la porzione peniena dalla perineale. Tuttavia, per eliminare gli effetti della stimolazione meccanica permanente, che darebbe la legatura della detta estremità con un filo, io fo passare l'uncino inferiore direttamente attraverso il setto connettivale che unisce le due metà simmetriche del muscolo.

Il muscolo è stato sempre isolato e asportato dal corpo, immediatamente dopo la morte del cane per decapitazione, dopo avere fatto un taglio longitudinale il quale, partendo dal prepuzio, passava per la linea mediana ventrale del pene e dello scroto. Fatto questo taglio, divaricati la pelle e il connettivo sottostante, se un assistente tira il pene prendendolo per la sua estremità distale, il muscolo apparisce subito, e si distingue per il suo colore rosso-pallido sul bianco del tessuto connettivo circostante, e per la direzione longitudinale delle due bandelette simmetriche che lo costituiscono nella sua porzione peniena. Se, essendo l'animale di dimensioni troppo grandi, il muscolo era eccessivamente lungo, prendevo la sola parte prepuziale e media; se invece si trattava di piccoli animali, isolavo e asportavo anche la estremità perineale.

Molta cura mettevo, affinchè durante l'isolamento il muscolo non fosse abnormalmente stirato nè in alcun modo leso.

Il muscolo così preparato era immediatamente sospeso, fra due uncini di oro (l'inferiore fisso; il superiore connesso, mediante un filo di seta, con la leva scrivente sopra un cilindro rotante a piccola velocità), entro il tubo di vetro della mia camera-termostato, che subito veniva riempito di soluzione fisiologica già tiepida, per la quale si cominciava immediatamente a far gorgogliare una corrente di ossigeno.

Se si trattava di esperimentare l'azione di sostanze chimiche, al momento che si riteneva opportuno, la sostanza era aggiunta, già in soluzione e in quantità nota, al liquido in cui era immerso il muscolo, liquido di cui anche precisamente si conosceva il volume. L'influenza della temperatura era studiata eliminando l'azione del termoregolatore, e riscaldando o raffreddando a volontà l'aria della camera, che a sua volta riscaldava o raffreddava il liquido, in cui erano immersi il muscolo e un termometro, che poteva comodamente leggersi dall'esterno.

Come erano fatte le stimolazioni elettriche, sarà detto particolarmente appresso.

In generale, l'attività ritmica automatica fu registrata per più ore di continuo.

Come è noto, la sopravvivenza del *m. retractor penis* è lunghissima, specie se, durante l'esperimento, lo si tiene a temperatura non troppo alta. La sua temperatura *optimum*, vale a dire quella alla quale esso manifesta la maggiore attività motoria per un tempo più lungo, risulta dalle mie ricerche essere inferiore alla temperatura centrale del corpo; essa oscilla propriamente fra 29° e 33° C. Questa proprietà, che il muscolo penieno ha in comune con l'esofago del pulcino ([14]), probabilmente dipende, almeno in parte, dalla sua situazione superficiale, trovandosi esso quasi immediatamente sotto la pelle, e quindi relativamente più degli altri muscoli esposto alla temperatura ambiente.

Subito dopo la preparazione, il muscolo si presenta, per lo più, fortemente accorciato, certamente come effetto sia del raffreddamento sia delle stimolazioni mec-

caniche che subisce durante l'isolamento e l'asportazione dal corpo. Dopo l'immersione nella soluzione fisiologica tiepida, però, e sotto l'influenza dell'ossigeno e dello stiramento che su esso esercita la leva scrivente, caricata in prossimità del fulcro di un peso variabile, per lo più, da 3 a 5 grammi, secondo lo spessore del muscolo, questo man mano si distende, fino a raggiungere la sua massima lunghezza. Se è immerso in soluzione fisiologica fredda, anche si contrae energicamente, e rimane al massimo grado contratto per lungo tempo, per poi distendersi a misura che è gradatamente riscaldato fino alla temperatura *optimum*.

Generalmente, il muscolo comincia ad eseguire contrazioni spontanee; sulle quali tornerò appresso, e che, per lo più, dapprima sono irregolari, ma poi spesso si regolarizzano per frequenza ed estensione. Esse, però, non sono quasi mai contrazioni massimali, come dimostra il fatto che il muscolo, stimolato con scosse elettriche tetanizzanti o con la corrente continua, anche in corrispondenza del culmine di una di quelle, si contrae ulteriormente. In ciò il muscolo retrattore del pene, come del resto ogni altro muscolo liscio, differisce profondamente dal cuore.

Vi sono, però, casi non infrequenti, nei quali il preparato rimane per molto tempo senza fare nemmeno una contrazione automatica, nè è possibile di scoprire la causa di tale incapacità funzionale. Quando ciò avviene, generalmente il muscolo si presenta allungato, atonico o poco tonico. A volte, basta stimolarlo meccanicamente (deboli stiramenti) o elettricamente, perchè dopo un poco incominci a eseguire contrazioni ritmiche più o meno regolari. Spesso, sono anche riescito a promuoverne l'attività ritmica facendo agire su esso qualcuna delle sostanze che, come appresso vedremo, sono più atte a provocare nel muscolo un aumento del tono: per es. la β-iminazoliletilamina o la pilocarpina, etc. Ma in altri casi, nemmeno con questi mezzi si riesce a svegliare l'attività motoria.

Essendomi stato impossibile, per ora, di stabilire le cause del fenomeno qui accennato, credo inutile di enunciare le varie ipotesi che potrebbero essere formulate al riguardo.

***

È invece utile considerare un momento quale possa essere la funzione normale del m. retrattore del pene.

Poichè negli animali che ne sono forniti le erezioni sono piuttosto rare, si può dire che d'ordinario il muscolo trovasi in stato non di allungamento, ma di retrazione. Ma si tratta di un accorciamento tonico duraturo; o il muscolo è, come vogliono Retterer e Neuville (*), funzionalmente inattivo e quindi rilassato, e solo passivamente retratto e quindi in sè stesso pieghettato, per opera del tessuto elastico ond'è per buona parte costituito?

In verità può sembrare strano che il muscolo rimanga contratto, e sia pure mediocremente, per tutto il tempo che corre fra un'erezione e l'altra. Non si capisce quali stimoli intratterebbero tale accorciamento tonico riflesso. È vero che negli altri organi muscolari lisci la muscolatura presenta un grado di mediocre contrazione tonica; ma le condizioni funzionali di essi sono assai diverse.

(*) Ed. Retterer et H. Neuville, *Des connections et de la structure des cordons musculo-élastiques ou retracteurs du pénis*. C. r. Soc. de Biol. 78, p. 60, a. 1915.

Ammettiamo invece provvisoriamente il modo di vedere di Retterer e Neuville. In tal caso, ecco come potremmo raffigurarci la funzione del muscolo retrattore.

All'inizio dell'erezione, impulsi inibitori discendenti per il n. erigente impediscono che il muscolo, sotto l'influenza della distensione passiva alla quale è esposto, entri in contrazione e ostacoli l'allungamento del pene. Terminata l'erezione, impulsi motori discendenti per il n. pudendo fanno contrarre il muscolo, che così contribuisce all'accorciamento del pene. Ma una volta accorciatosi, impicciolitosi il pene, il muscolo cessa d'essere attivo, ed è sostituito dall'azione del tessuto elastico, che si compie durevolmente senza consumo d'energia. Di conseguenza, il muscolo, negl'intervalli fra le erezioni, trovasi in stato di riposo, durante il quale le cellule muscolari liscie che lo compongono debbono essere accorciate, ma non per contrazione attiva, bensì per retrazione passiva dovuta al tessuto elastico circostante, e quindi pieghettate.

Se negli esperimenti il muscolo si allunga, quando si stimola il n. erigente, e cessano i suoi movimenti ritmici, è perchè esso si trovava già in un certo stato di accorciamento tonico, dovuto agli stimoli meccanici e d'altra natura inerenti alle manovre sperimentali.

Poichè il muscolo all'inizio di una erezione non si trova in stato di contrazione tonica attiva, sempre secondo quegli Autori, l'inibizione che accompagna l'erezione non è deputata a far cessare quella contrazione tonica, ma ad impedire che il muscolo, stimolato dalla trazione passiva inerente all'aumento di volume e di lunghezza del pene, entri in contrazione e quindi ostacoli l'erezione.

Gli esperimenti fatti finora sul muscolo *in situ*, stimolando l'uno o l'altro dei due nervi antagonisti, non risolvono affatto il problema riguardante lo stato in cui il muscolo si trova durante gli intervalli fra le erezioni, se cioè esso si trovi in contrazione tonica o no; nè l'allungamento e la cessazione dei moti ritmici, che seguono alla stimolazione del n. erigente, provano che esso si trova normalmente in stato di contrazione tonica permanente, perchè il muscolo in parte isolato e connesso con la leva scrivente è contratto a causa degli stimoli meccanici che lo colpiscono, e allora si capisce che la stimolazione del nervo inibitore debba produrre gli effetti osservati.

***

Nell'esposizione, che appresso farò, non mi limiterò esclusivamente ai fatti che riguardano il m. retrattore del pene, ma accennerò qua e là al modo di comportarsi, in condizioni sperimentali simili, di altri preparati muscolari lisci, quali sono: l'atrio del cuore di *Emys europaea*, l'esofago del pulcino e l'intestino tenue o crasso di cane o di gatto, anch'essi separati dal corpo e conservati in liquido di Ringer ossigenato. Credo opportuno in parecchi casi di fare il confronto fra questi tre preparati e il m. retrattore del pene circa il loro modo di comportarsi di fronte ad alcune azioni esteriori, per due ragioni:

1°) perchè, mentre l'esofago e il preparato atriale, da una parte, e il m. retrattore del pene, dall'altra, ricevono le due innervazioni autonome distinte, rispettivamente bulbare e sacrale, e ricevono i nervi « simpatici » dalle due estre-

mità opposte del segmento toracico-lombare della midolla spinale, il preparato intestinale invece occupa, per così dire, una posizione intermedia, per quanto riguarda la innervazione « simpatica », pur entrando nel gruppo dell'esofago e dell'atrio cardiaco relativamente all'innervazione autonoma bulbare;

2°) perchè, essendo certa la presenza di apparati nervosi gangliari nei preparati atriale, esofageo e intestinale, il comportamento, eventualmente diverso, del m. retrattore del pene di fronte a certi stimoli o all'azione di certe sostanze potrebbe essere considerato come indizio dell'assenza di cellule nervose gangliari, indizio che, in ogni modo, acquisterebbe maggior valore quando fosse appoggiato dai risultati di accurate ricerche microscopiche.

IV.

Azione di varie sostanze chimiche sul m. retractor penis.

1. — *Influenza della temperatura e dell'ossigeno.*

Nel maggior numero delle mie ricerche, essendo stato il liquido di Ringer tenuto intorno alla temperatura *optimum* e sempre ossigenato facendovi gorgogliare incessantemente una corrente di ossigeno, gli effetti osservati in generale non debbono essere attribuiti nè a notevoli variazioni della temperatura nè a difetto di ossigeno o accumulo di acido carbonico.

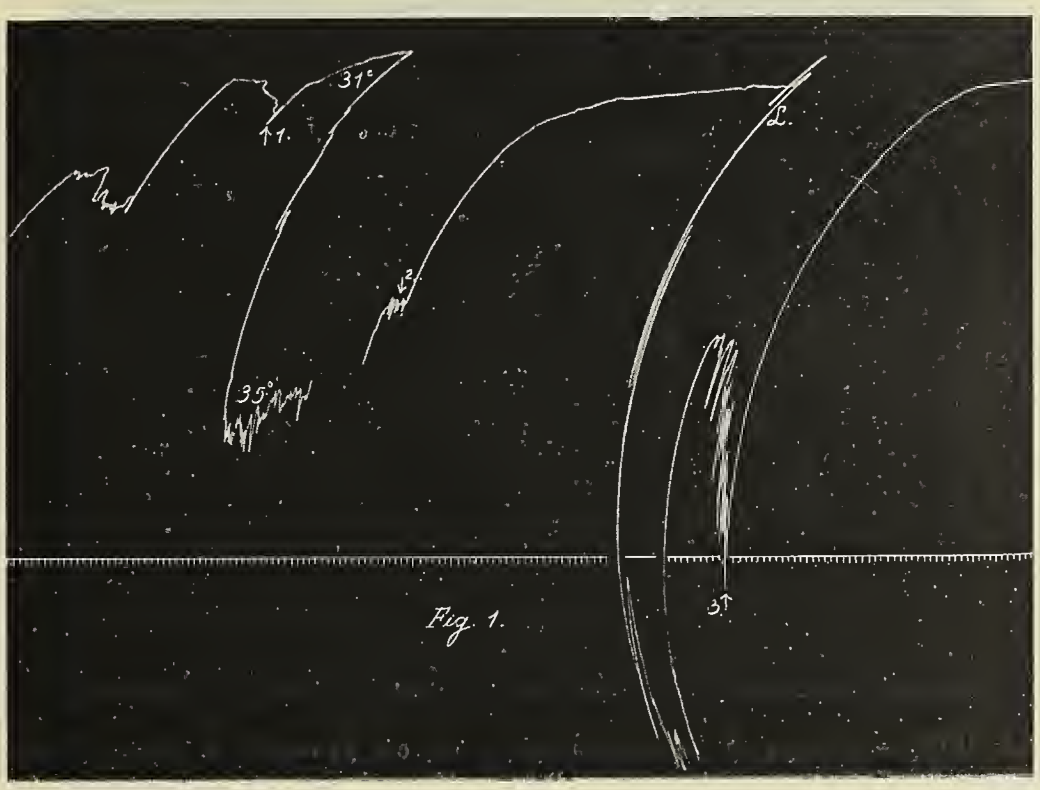
L'influenza delle varie temperature e dei gas della respirazione sui movimenti automatici e sul tono del m. retrattore del pene, in questo lavoro, è presa solo accessoriamente in considerazione, avendo io in mente di farne oggetto speciale di nuove ricerche, che presto saranno pubblicate. Fin da ora debbo dire, però, che l'elevarsi gradualmente della temperatura tende sempre a provocare l'allungamento del muscolo, anzi è il più innocuo e più sicuro mezzo per far diminuire o cessare uno stato di contrattura spontanea che non accenni, nemmeno dopo molto tempo, a risolversi spontaneamente (ved. fig. 1 e fig. 40); e che, per contro, ogni abbassamento della temperatura è capace di provocare una reazione contrattoria, anche immediata, più o meno grande secondo la differenza di temperatura a cui il muscolo è esposto e la rapidità con cui la variazione ha luogo. Ciò deve essere tenuto presente in modo speciale quando, sperimentando l'azione di sostanze sciolte, se ne aggiunge la soluzione al liquido di Ringer. Se il volume della soluzione che si aggiunge è considerevole, e tale da far abbassare di qualche grado la temperatura del liquido di Ringer, per evitare una stimolazione termica del preparato è necessario di riscaldare precedentemente la soluzione fino a che abbia raggiunto la stessa temperatura del bagno.

Per la stessa ragione è da evitarsi un troppo abbondante gorgoglìo di ossigeno per il liquido di Ringer, gorgoglìo che non giova all'ossigenazione di esso, mentre tende ad abbassarne la temperatura, oltre che ad espellerne ogni traccia di acido carbonico.

2. — *Azione del siero di sangue e del cambiamento del liquido di Ringer.*

Io debbo, inoltre, accennare a due fatti, che possono sembrare di poca importanza, ma che invece non debbono essere trascurati.

In queste e simili ricerche accade sovente di dover cambiare il liquido fisiologico in cui il preparato sopravvivente è sospeso: e si comprende che lo si cambia sempre con altro fresco, cioè non ancora usato, sebbene riscaldato alla stessa tem-



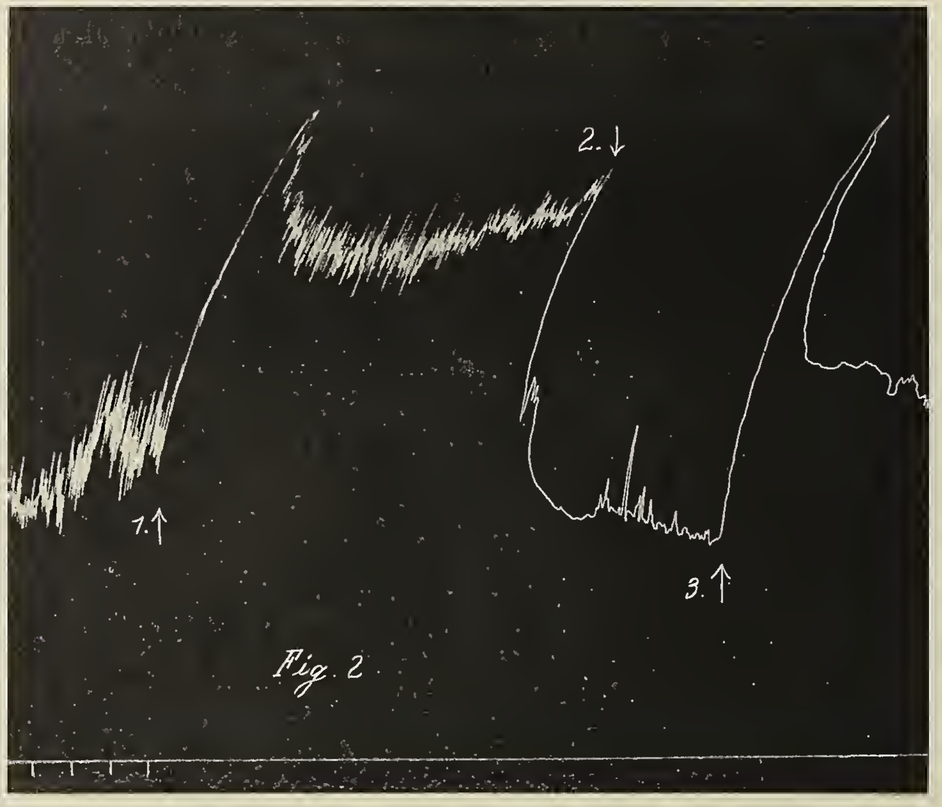
1° maggio 1914. — *M. retractor penis* di cane. Peso: gr. 2, tempo: 1', temper.: scritta sulla figura. In 1, 2 e 3, si aggiungono al liquido di Ringer (100 cm³), in cui è immerso il preparato, 2 cm³ di siero di sangue dello stesso cane. Da 31° a 35° si eleva la temperatura della camera, per cui il tono del muscolo si abbassa. In L. si cambia il liquido di Ringer, e si lava il muscolo con liquido di Ringer alla temperatura di 35° C. (Riduzione fotografica).

peratura del primo. Oltre a ciò, varî autori hanno creduto di dover usare come liquido fisiologico il sangue defibrinato o il siero di sangue dello stesso animale (non è nemmeno da pensare di tenere un preparato muscolare immerso in siero di sangue d'animale di altra specie), o almeno di aggiungere al liquido di Ringer una certa quantità di sangue o di siero, supponendo che ciò significhi mettere il preparato in condizioni meno dissimili dalle naturali.

Ebbene: per quanto riguarda i preparati muscolari lisci, sui quali io ho sperimentato, non è indifferente, nè la sostituzione di liquido di Ringer fresco a quello in cui il preparato è stato immerso e ha lavorato per qualche tempo, nè l'aggiunta pur di piccola quantità di siero di sangue al liquido medesimo. Per non dilungarmi

troppo, io non insisto molto su questi fatti. Aggiungo solamente, in conclusiva brevità, che gli effetti da me costantemente osservati sull'esofago di pulcino, sull'intestino tenue e sul m. retrattore di cane sono i seguenti:

1°) il cambiamento del liquido di Ringer con altro fresco alla stessa temperatura provoca sempre, e in tutt'e tre i preparati, una rapida diminuzione del tono, cioè un allungamento del preparato muscolare, che dura un tempo considerevole (figg. 1, 2);



11 maggio 1913. — Esofago di pulcino sospeso in 100 cm³ di liquido di Ringer. Tempo: 1', temper.: 33° C. In 1, si aggiungono al liquido 2 cm³ di siero di sangue di bue. In 2, si cambia il liquido di Ringer, e si lava il preparato con liquido di Ringer alla stessa temperatura. In 3, si aggiungono di nuovo 2 cm³ di siero di sangue di bue. (Riduzione fotografica).

2°) l'aggiunta di siero di sangue (*), non solo di animali di specie diversa, ma anche dello stesso animale che fornì il preparato muscolare, provoca in questo

(*) Già F. Battelli (*Recherches sur les vaso-constrictines des sérums sanguins.* Journ. de physiol. et de path. génér. », 1905, pag. 1) aveva osservato l'esistenza, nel siero del sangue, di sostanze che provocano vasocostrizione, sostanze che perdono la loro efficacia quando il siero è riscaldato a 56-58° C. (Ved. ivi la letteratura sull'argomento).

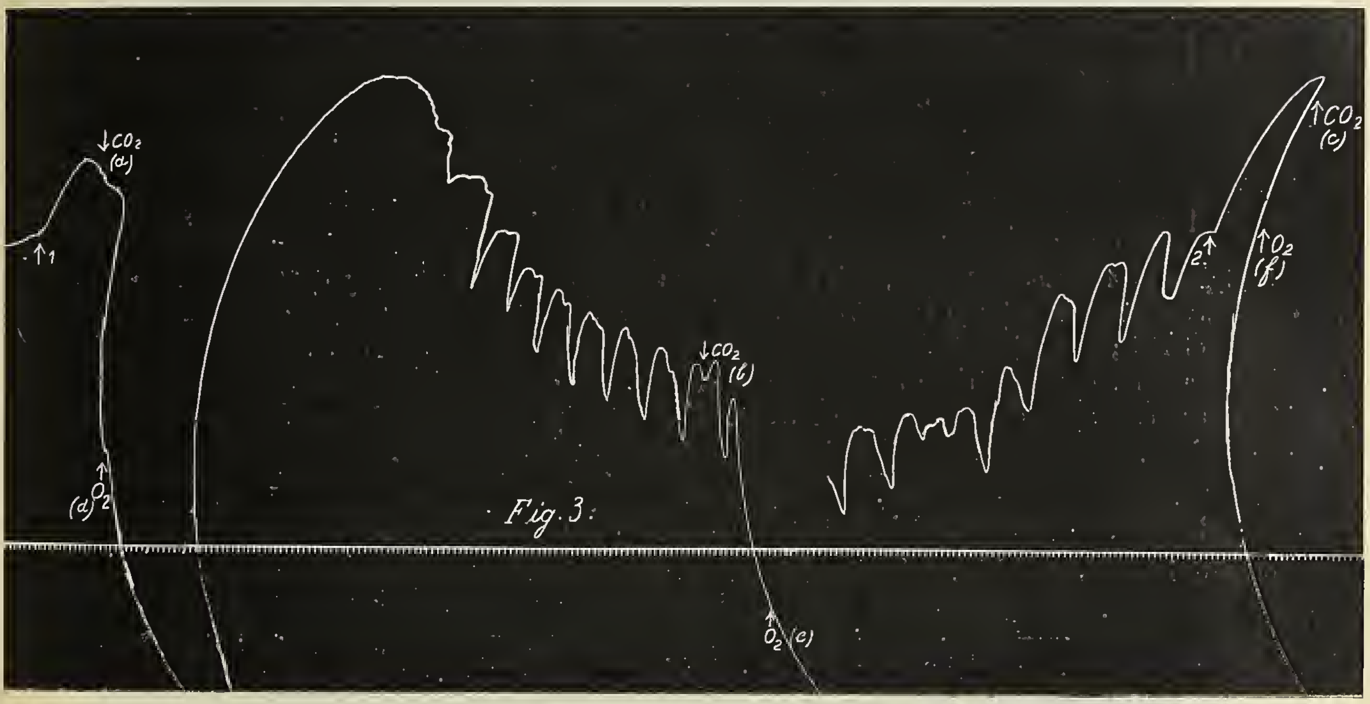
Recentemente, H. Handovsky e E. Pick (*Ueber die Entstehung vasokonstriktorischer Substanzen durch Veränderung der Serumkolloide.* Arch. f. exp. Path. u. Pharmak., *71*, pag. 62, an. 1912) hanno inoltre dimostrato che l'azione vasocostrittiva, la quale aumenta con l'invecchiamento, è legata ai colloidi sciolti del siero, ma non alle globuline nè alle sostanze cristalloidi, e che sembra derivare da processi di disgregazione di complessi colloidali.

Parecchi mesi dopo che le mie ricerche erano state eseguite, sono comparsi i lavori di A. Läwen e R. Dittler (Zeit. f. d. ges. exper. Med., *3*, pag. 1, an. 1914) e di R. Dittler (*Ueber die Wirkung des Blutes auf den isolierten Dünndarm.* I. Mitt. Pflüger's Arch., *157*, pag. 453, an. 1914), che hanno osservato fatti analoghi a quelli da me descritti. Il Dittler ha inoltre constatato che l'azione eccitante del sangue sull'intestino apparisce solo dopo la coagulazione di esso.

una cospicua contrattura di considerevole durata e d'intensità entro certi limiti proporzionale alla quantità di siero mescolato col liquido di Ringer (figg. 1, 2, 3).

A che cosa possono esser dovuti i due effetti opposti?

Ripeto che questi fatti non debbono essere trascurati, perchè è chiaro che, p. es., un abbassamento del tono può esser dovuto semplicemente al cambiamento del liquido di Ringer, e non a una data sostanza sperimentata, se per farla agire sul muscolo la si scioglie in liquido di Ringer e poi si sostituisce questo al liquido in cui il muscolo è rimasto immerso per qualche tempo e per cui ha gorgogliato incessantemente l'ossigeno.



19 marzo 1914. — *M. retractor penis* di cane. Peso: gr. 3, tempo 1′, temper.: 33° C. In 1 e 2, si aggiungono al liquido di Ringer (100 cm³) 2 cm³ di sangue defibrinato dello stesso cane. In CO_2 (*a*), (*b*) e (*c*) si fa passare anidride carbonica; in O_2 (*d*), (*e*) ed (*f*) si interrompe il passaggio dell'ossigeno. (Riduzione fotografica).

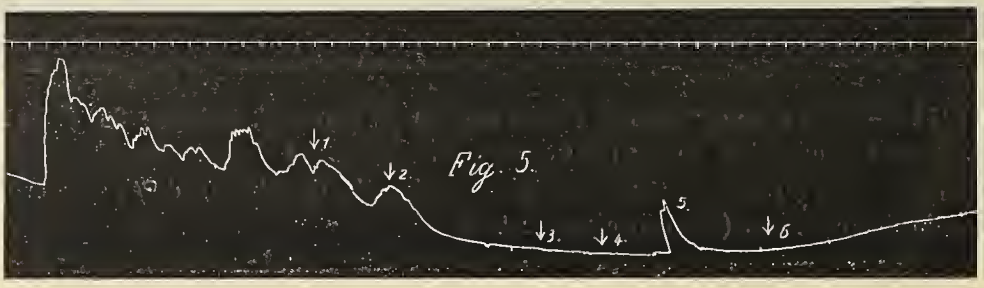
Ho accennato a quest'ultimo particolare, non senza intenzione. Infatti, da mie vecchie ([1,21]) e ora rinnovate esperienze risulta che la reazione del liquido di Ringer subisce una variazione notevole, dimostrabile con opportuni indicatori (per es., mediante la α-naftolftaleina), e propriamente nel senso di un cospicuo aumento della sua alcalinità, quando si fa per esso gorgogliare, per un certo tempo, ossigeno nella stessa quantità che s'usa fare nei nostri esperimenti su organi sopravviventi. Ora, gli alcali in piccolissima quantità elevano il tono, mentre gli acidi nelle stesse proporzioni deprimono il tono dei preparati muscolari lisci (ved. appresso). L'abbassamento del tono che provoca il cambiamento del liquido di Ringer potrebbe, dunque, almeno in parte, essere causato dal fatto che si sostituisce a un liquido, in cui il passaggio continuato dell'ossigeno ha notevolmente diminuito la concentrazione degli $H^{\bullet}$, un altro, del resto simile, nel quale la concentrazione degli $H^{\bullet}$ è maggiore.

3. — *Azione degli acidi, in debole e forte concentrazione, e degli alcali.*

Ho sperimentato l'azione dell'acido carbonico, fatto gorgogliare per il liquido di Ringer insieme con l'ossigeno o dopo aver sospeso il passaggio di questo, l'acido cloridrico, e anche varii acidi grassi.

9 giugno 1914. — *M. retractor penis* di cane. Peso: gr. 3, tempo: 1′, temper.: 34° C. In 1, 2, 3 e , si aggiungono ai 100 cm³ di liquido di Ringer successivamente cm³ 0,5 di soluzione 0,1 *n* di HC*l*; in 5, si aggiunge 1 cm³ della stessa soluzione. Si registra la curva per circa 18 ore: la curva *c* succede alla *b*, e questa alla curva *a*. Come si vede, il muscolo presenta due forti accorciamenti, e dopo il secondo tende ad allungarsi un poco. (Riduzione fotografica).

Basta far agire l'anidride carbonica per pochi secondi, per vedere seguire un forte e immediato allungamento del m. retrattore del pene, come dimostra la fig. 3.



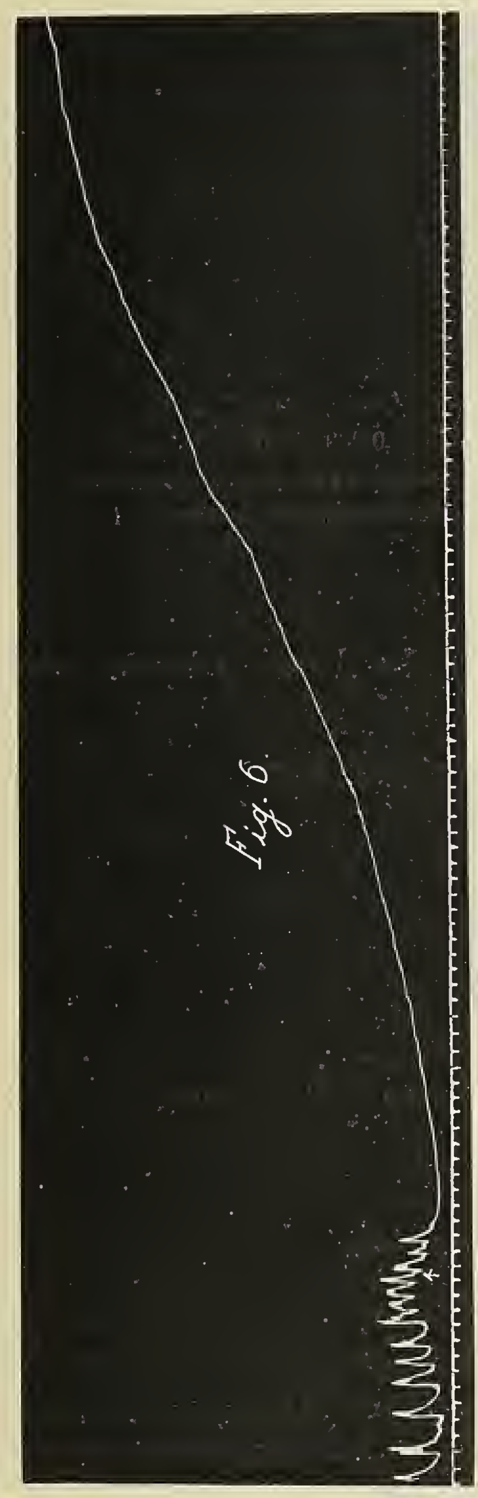
24 gennaio 1914. — *M. retractor penis* di cane. Peso: gr. 4, tempo: 1′, temper.: 35° C. In 1, 2, 3 e 4, si aggiunge ai 100 cm³ di liquido di Ringer 1 cm³, ciascuna volta, di una soluzione-sospensione di acido caproico 1 %. Il muscolo gradatamente si allunga. In 5, si stimola elettricamente il preparato, che risponde. In 6, si aggiungono due gocce di acido caproico puro e si rimescola fortemente il liquido, facendovi gorgogliare ossigeno in grande quantità per pochi secondi. Poco dopo, s'inizia l'accorciamento duraturo del muscolo. (Riduzione fotografica).

Sospeso il passaggio dell'anidride carbonica (CO_2), e fatto gorgogliare l'ossigeno (O_2) in quantità considerevole, il muscolo torna presto ad accorciarsi e ad eseguire le ordinarie contrazioni ritmiche, soppresse dall'acido carbonico.

Nello stesso modo essenzialmente agiscono le minime dosi di acido cloridrico (fig. 4), mentre dosi maggiori, come la stessa fig. 4 dimostra, provocano forte e duraturo accorciamento del preparato.

Similmente, con dosi mediocri di acido caproico ho ottenuto un progressivo abbassamento del tono del m. retrattore, come dimostra la fig. 5.

In forti dosi, invece, gli acidi grassi provocano, come l'acido cloridrico (fig. 4), cospicuo e duraturo accorciamento. Io riproduco qui i tracciati corrispondenti alle esperienze fatte con l'acido butirrico (fig. 6) e con l'acido caproico (fig. 7); ma gli altri acidi grassi inferiori producono tutti, senza eccezione, lo stesso effetto, cioè provocano, a una certa concentrazione, accorciamento cospicuo e duraturo del m. retrattore del pene, sia che questo stesse compiendo contrazioni spontanee, come nel caso della fig. 6, sia che no (fig. 7).



M. retractor penis. Peso: gr. 5, tempo: 1', temper.: 32° C.
In corrispondenza della freccia (↑) si aggiungono al liquido di Ringer (100 cm.³) 2 cm³ di soluzione 0,1 *n* di acido butirrico.
(Riduzione fotografica).

Dégno di nota è il fatto che nell'esperimento con acido caproico (fig. 7), dopo la prima aggiunta, in quantità piccolissima, della sostanza, si ebbe, come sopra ho detto, un lieve allungamento del muscolo, il quale si accorciò dopo la seconda, e ancora più dopo la terza aggiunta, che fu di una goccia di acido caproico puro.

Non v'ha dubbio, quindi, che le minime dosi di acidi provocano inibizione del tono o allungamento del muscolo, mentre le dosi maggiori, probabilmente in parte perchè promuovono il processo d'imbibizione dei colloidi muscolari, provocano accorciamento cospicuo e duraturo.

Anche su altri preparati muscolari lisci, per es. sull'intestino tenue di cane, l'acido cloridrico in piccolissima concentrazione produce abbassamento del tono. E per quanto riguarda l'acido carbonico, io ho già dimostrato, con precedenti ricerche, che esso deprime il tono sia dell'atrio cardiaco di *Emys europaea*, sia dell'esofago del pulcino [1].

Gli alcali in piccola come in grande dose, invece, elevano il tono dei preparati muscolari lisci, probabilmente accelerando e intensificando, almeno nel secondo caso, il processo di imbibizione dei colloidi costitutivi del preparato su cui si sperimenta.

Nel caso cui corrisponde il tracciato della fig. 8, all'aggiunta della soluzione di NaOH seguì un primo lieve accorciamento e poi un accorciamento molto più forte. Il primo accorciamento è, verosimilmente, analogo a quello che provocano in

5 febbraio 1914. — *M. retractor penis*. Peso: 5 gr., tempo: 1', temper.: 33° C. Si aggiungono ai 100 cm³ di liquido di Ringer, in 1, 2 cm³ di soluzione 0,0694 *n* di acido caproico (fatta in soluzione 0,8 °/₀ NaCl), in 2, 5 cm³ della stessa soluzione; in 3, una goccia di acido caproico puro. Si ebbe, prima allungamento, poi forte accorciamento duraturo del muscolo. (Riduzione fotografica).

generale gli alcali in debolissima concentrazione, mentre il secondo è senza dubbio un accorciamento da imbibizione del muscolo.

16 aprile 1914. — *M. retractor penis* di cane giovanissimo. Peso: gr. 3, tempo: 1', temper.: 30° C. In corrispondenza della freccia (↑) si aggiunge al liquido di Ringer (100 cm³) 1 cm³ di soluzione 0,1 *n* di NaOH. (Riduzione fotografica).

4. — *Azione del succo muscolare.*

Un effetto singolare è quello che si ottiene, quando si fa agire su preparati muscolari lisci succo di muscoli striati o lisci ottenuto mediante spremitura al torchio idraulico. L'effetto consiste sempre in una più o meno cospicua contrazione del preparato.

L'effetto è stato da me osservato costantemente, sia sul m. retrattore del pene, sia sull'esofago di pulcino e sull'intestino tenue di cane.

Il primo pensiero che viene in mente è che esso sia dovuto, almeno in parte, all'acidità e all'ipertonicità del succo muscolare.

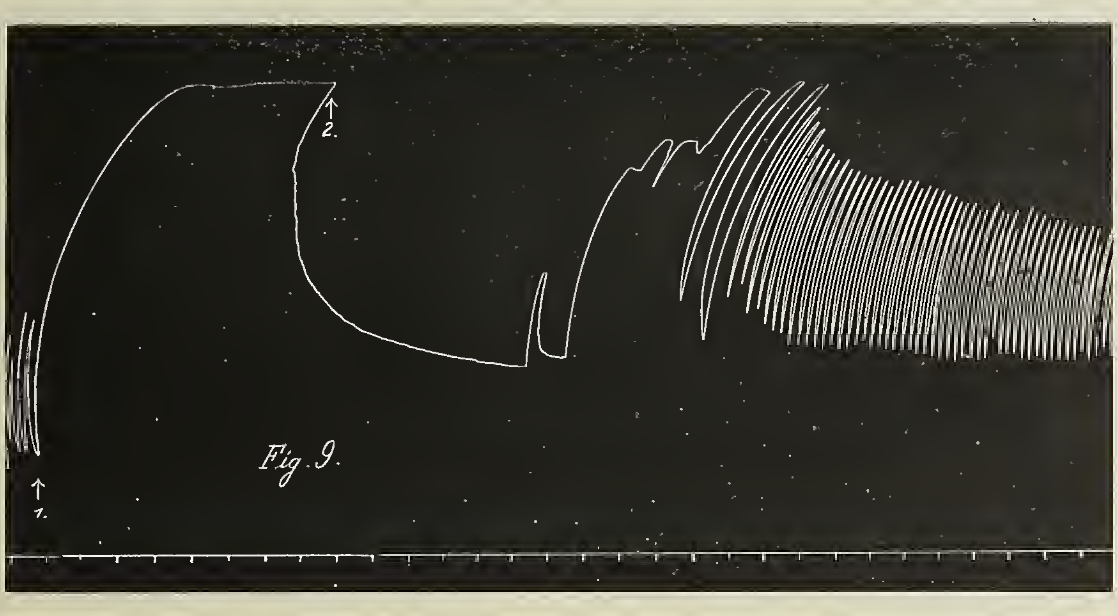
Ma io non ho creduto di approfondire il problema, nel modo come ha fatto Birnbacher ([49]), per quanto riguarda l'azione del succo muscolare sui muscoli striati; e perciò mi limito ad annunziare l'osservazione fatta.

5. — *Azione dell'acqua distillata.*

Un pezzo, lungo 10 cm., di muscolo retrattore del pene di un torello giovane, fu immerso in liquido di Ringer normale. A un certo punto, si sostituì questo liquido con acqua distillata, alla stessa temperatura. L'effetto fu pronto e cospicuo: accorciamento notevolissimo e permanente.

Lo stesso effetto si ebbe in due altri esperimenti simili.

Un muscolo retrattore del pene di cane, immerso in liquido di Ringer ossigenato, eseguiva contrazioni spontanee, di ritmo e forma variabili, come risulta dal trac-



18 giugno 1912. — *M. retractor penis* di cane. Peso: gr. 5, tempo: 5′, temper.: 32° C. In 1, si sostituisce al liquido di Ringer, acqua distillata. In 2 si mette di nuovo liquido di Ringer normale al posto dell'acqua distillata. (Riduzione fotografica).

ciato, a sinistra di 1, della fig. 9. Ma quando si sostituì (in 1.) acqua distillata al liquido di Ringer, il muscolo si accorciò enormemente e cessarono subito le contrazioni spontanee.

Sostituito (in 2.) liquido di Ringer normale all'acqua, di nuovo il muscolo si distese, e poi, dopo un certo tempo, tornò ad eseguire le ordinarie contrazioni spontanee. L'azione dell'acqua distillata, dunque, è reversibile: non abolisce per sempre, agendo per circa venti minuti, l'eccitabilità automatica del muscolo retrattore.

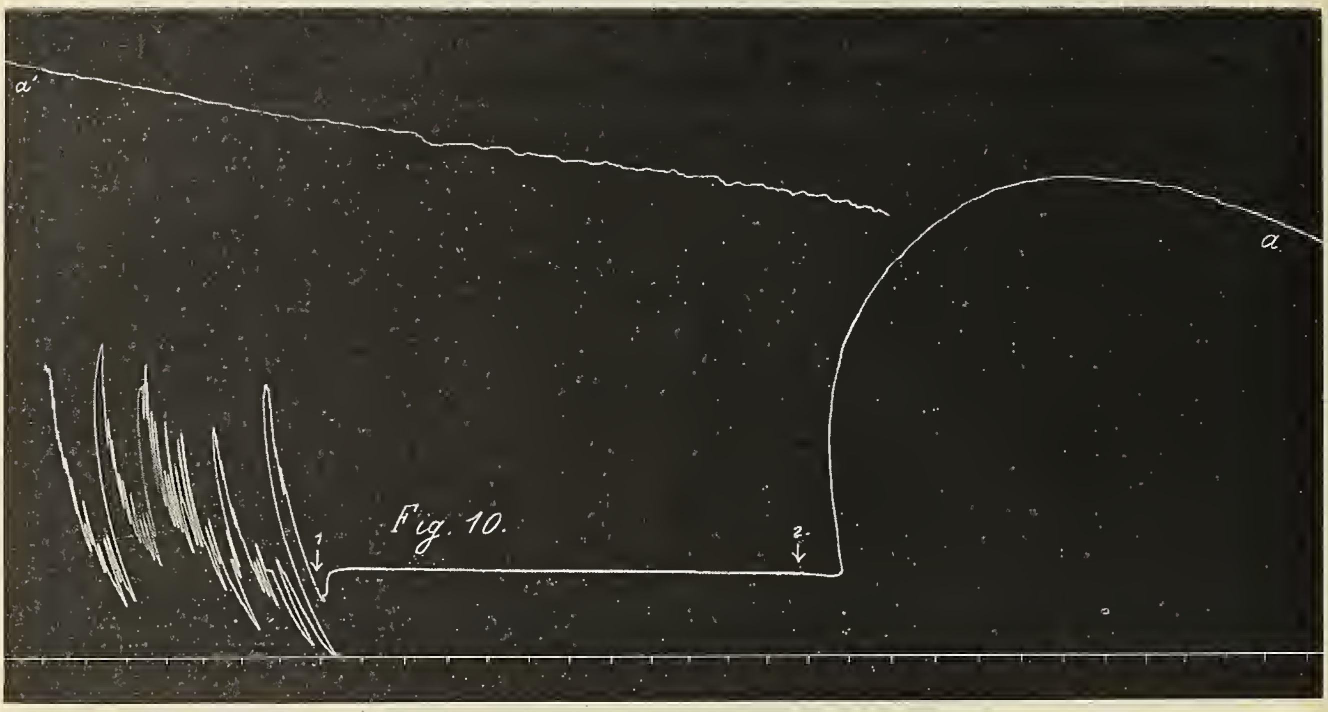
Altri esperimenti sull'azione dell'acqua distillata dettero risultati identici.

6. — *Azione del liquido di Ringer variamente concentrato.*

Parecchi esperimenti ho fatto per indagare la influenza che esercita sul muscolo retrattore del pene il liquido di Ringer più o meno concentrato, e poi la sostituzione di liquido di Ringer normale a quello concentrato.

Incominciamo dal liquido di Ringer più concentrato (50 cm.[3] di liquido di Ringer normale + 50 cm.[3] di liquido di Ringer 10 volte più concentrato del normale: ossia, liquido di Ringer 5 volte più concentrato). Non appena, nel tracciato della fig. 10, al liquido di Ringer normale si sostituisce (in 1.) il liquido concentrato, cessano le contrazioni, e il muscolo rimane come immobilizzato in un debolissimo stato di accorciamento.

Si direbbe che il liquido di Ringer concentrato abbia fissato il muscolo press'a poco nello stato in cui si trovava al momento in cui agì. Sostituito (in 2) il li-

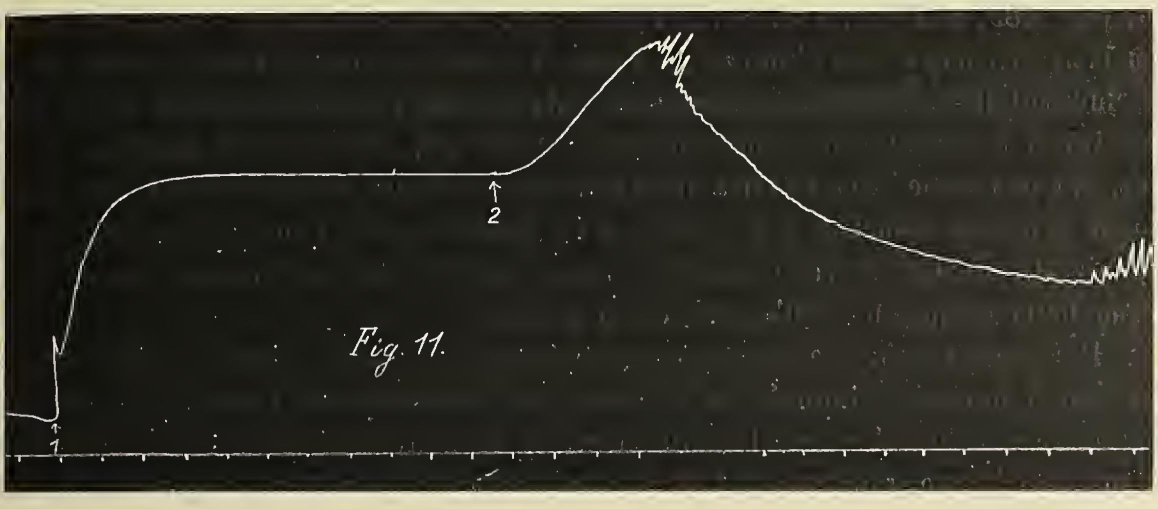


24 giugno 1914. — *M. retractor penis* di cane. Peso: gr. 5, tempo: 5', temper.: 32° C. In 1 al liquido di Ringer normale si sostituisce liquido di Ringer ipertonico (50 cm³ Ringer normale + 50 cm³ Ringer 10 volte più concentrato del normale). In 2, si sostituisce a questo, liquido di Ringer normale. (Riduzione fotografica).

quido di Ringer normale al concentrato, il muscolo si accorcia enormemente, per poi di nuovo distendersi, ma assai poco; infatti rimane per lungo tempo in istato di accorciamento. (La curva *a'* è la continuazione della curva *a*; essa dimostra appunto l'accorciamento duraturo, sebbene in via di diminuzione, del preparato). L'eccitabilità automatica del muscolo non è, tuttavia, interamente scomparsa, perchè verso la fine della curva *a'* si veggono riapparire deboli contrazioni spontanee, che forse sarebbero divenute più forti se la registrazione fosse continuata ancora un pezzo.

Su un altro muscolo retrattore del pene di cane feci agire liquido di Ringer quattro volte più concentrato del normale. Il muscolo eseguì (vedi fig. 11) prima una contrazione piuttosto rapida (in 1), che probabilmente fu effetto di stimolazione; poi accennò ad allungarsi, e finalmente eseguì un accorciamento lento, che raggiunse un valore massimo permanente. A un certo punto, come si vede sulla figura 11, si

sostituì (in 2) liquido di Ringer normale a quello concentrato. Si ebbe un ulteriore accorciamento, e poi un allungamento spontaneo, accompagnato da ricomparsa delle contrazioni automatiche del muscolo; le quali continuarono, intensificandosi, per un pezzo. Il muscolo, finalmente, di nuovo si accorciò fortemente e lentamente (il corrispondente tratto di curva non è compreso nella figura). Questo accorciamento terminale sarebbe forse da considerarsi come dovuto a rigidità cadaverica. In un esperimento del 3 luglio 1912, si fece agire sul m. retrattore del pene anche liquido di Ringer quattro volte più concentrato del normale. Questa volta però l'accorciamento del muscolo fu meno accentuato che non nella esperienza precedente. Ma quando al liquido di Ringer concentrato si sostituì quello normale, il muscolo eseguì un



19 giugno 1912. — *M. retractor penis* di cane. Peso: gr. 5, tempo: 5′, temper.: 32° C. In 1, al liquido di Ringer normale si sostituisce liquido di Ringer ipertonico (80 cm^3 liq. Ringer normale + 40 cm^3 liq. Ringer 10 volte più concentrato del normale). In 2, si torna a mettere liquido di Ringer normale invece di quello ipertonico. (Riduzione fotografica).

enorme accorciamento, e sull'altipiano della rispettiva curva apparvero piccole contrazioni automatiche.

In un esperimento del 20 giugno 1912, si fece agire sul m. retrattore del pene, che già presentava cospicue contrazioni automatiche inscritte sopra una linea di tonicità decrescente, liquido di Ringer 2,6 volte più concentrato. Cessarono immediatamente le contrazioni automatiche; il muscolo si allungò ancora un poco, e poi si accorciò, ma non molto. Quindi si sostituì, al liquido di Ringer concentrato, altro normale. Il muscolo, invece di accorciarsi, come nei casi precedenti, si allungò, e poi, dopo un lungo periodo di non grande rilassamento, incominciò a eseguire contrazioni automatiche.

In questo caso, dunque, il liquido di Ringer, meno concentrato che non nei precedenti esperimenti, inibì le contrazioni automatiche, ma non determinò nel muscolo quegli stessi cangiamenti che negli altri casi valsero a provocare un accorciamento più o meno forte al momento della sostituzione di liquido di Ringer normale a quello più concentrato.

Finalmente, in un altro esperimento si fece agire liquido di Ringer solo due volte più concentrato, il quale determinò un notevole accorciamento, che durò per molto tempo. Alla fine, il muscolo si allungò spontaneamente (ma dopo parecchio tempo), fino a raggiungere un'ascissa inferiore a quella iniziale. Questa volta, non si sostituì liquido di Ringer normale al più concentrato. Il muscolo non eseguì mai contrazioni automatiche.

Non credo che sia difficile di dare una soddisfacente spiegazione dei fatti osservati.

Per quanto risguarda l'azione dell'acqua distillata (o delle soluzioni molto ipotoniche), mi sembra evidente che l'accorciamento prodotto da essa, sia del preparato diaframmatico (ved. Prima Memoria, in queste Mem. d. R. Accad. d. Lincei [5], 10, pag. 489, a. 1914; ved. pp. 557-562, figg. 10-22), sia nel m. retrattore, debba considerarsi come effetto d'imbizione. Tanto il succo dei muscoli striati quanto quello dei muscoli lisci, comunque ottenuto, presenta secondo i risutati concordi di parecchi osservatori e specialmente miei e dei miei allievi ([50]), una notevole pressione osmotica, che può render conto di una forte attrazione d'acqua. Ma nei tessuti intatti, più che la pressione osmotica è da prendere in considerazione l'imbibizione dei colloidi organizzati, quando si vuole rendere ragione del passaggio di notevoli quantità di acqua nella compagine dell'organo o del tessuto.

Per quanto concerne particolarmente i miei preparati, bisogna inoltre avvertire che il processo d'imbibizione si svolge non solamente nei colloidi della sostanza muscolare, ma anche in quelli delle strutture connettivali intrinseche ed estrinseche al muscolo: sarcolemmi, tendini di attacco delle fibre muscolari, perimisio, tessuto connettivo interposto alle fibre e alle cellule muscolari ecc.; e si comprende che, quanto maggiore è il contenuto di un preparato in colloidi non muscolari, tanto maggiore sarà la parte che spetta all'imbibizione di questi nel determinare l'accorciamento del preparato.

Oramai è dimostrato ([50]), che tendini e altri cordoni connettivali o elastici, e perfino i nervi periferici, messi in condizioni opportune (in liquidi ipotonici o in acqua, ad alta temperatura, in presenza di acidi o di alcali liberi; e in assenza, o presenza di piccolissima quantità, di sali neutri), s'imbevono fortemente di acqua, e, imbevendosi, si accorciano. L'imbibizione è effetto della costituzione colloidale dei detti organi. L'accorciamento è dovuto a cause essenzialmente simili a quelle che determinano l'accorciamento dei muscoli striati o lisci, messi nelle stesse condizioni.

Di conseguenza, gli accorciamenti da imbibizione dei muscoli striati o lisci non sono mai dovuti esclusivamente alla sostanza muscolare, ma anche, e in grado diverso, ai loro colloidi connettivali.

È chiaro, inoltre, che la disposizione o direzione delle fibre muscolari e connettivali o elastiche nel preparato, in relazione con la direzione secondo la quale esso agisce sulla leva scrivente, ha un'importanza non trascurabile nel determinare l'espressione grafica del processo d'imbibizione. Immaginiamo, p. es., che il preparato contenga prevalentemente fibre disposte trasversalmente, cioè perpendicolarmente alla linea secondo cui il preparato agisce sulla leva scrivente; si comprende che,

rigonfiandosi le fibre, la leva dovrebbe registrare un allungamento del preparato. La imbibizione dunque si manifesta come accorciamento del muscolo, solo quando le fibre, che si rigonfiano, sono disposte perpendicolarmente alla leva scrivente. È specialmente nelle ricerche sui preparati muscolari lisci che bisogna tener conto di quanto ora ho detto.

Discutiamo ora (*) il probabile meccanismo d'azione delle soluzioni ipertoniche. Il Meigs ([51]), studiando l'influenza di soluzioni variamente concentrate sulla muscolatura liscia dello stomaco della rana, venne alla conclusione che le soluzioni ipertoniche (2 % NaCl) provocano accorciamento del preparato muscolare, mentre le soluzioni ipotoniche provocano allungamento di esso. Nei muscoli striati (m. sartorio di rana), invece, egli trovò che le soluzioni ipertoniche provocano allungamento, le ipotoniche accorciamento. Sulla base di questi risultati, l'A. fece delle considerazioni riguardanti il meccanismo della contrazione muscolare in genere, considerazioni che qui mi astengo dal riferire.

I risultati delle ricerche fatte da Carolina Mac Gill ([52]) sono stati, però, diversi da quelli comunicati dal Meigs, per quanto riguarda i muscoli lisci, mentre per quanto riguarda i muscoli striati furono esattamente gli stessi. Questi, in soluzioni ipertoniche (2 % NaCl, per gli animali terrestri; 6 % NaCl, per gli animali marini), secondo lei, si allungano, e in soluzioni ipotoniche si accorciano.

I muscoli lisci sui quali sperimentò la Mac Gill furono: strisce circolari di stomaco di rana e di rospo, presso il piloro, liberate dalla mucosa; strisce circolari e longitudinali di stomaco di pescecane; muscolatura dello stomaco di gatto, circolare e longitudinale; muscolo adduttore delle valve di Pecten e di Venus (parte liscia e parte striata); muscolo del mantello e del corpo di Loligo ecc. Ebbene, secondo l'A., gli effetti che si osservano nei muscoli lisci non sono gli stessi in tutti i casi: a volte gli effetti somigliano a quelli dei muscoli striati; altre volte sono differenti; il che dimostra che gli effetti variano secondo la struttura dell'organo e le condizioni in cui esso si trova al momento in cui è fatta la preparazione. Giustamente l'A. insiste sopra due punti: 1°) la azione chimica e chimico-fisica del cloruro di sodio sui muscoli striati e lisci, poichè tutti gli AA. si sono serviti di questo solo sale per preparare le loro soluzioni ipotoniche e ipertoniche; 2°) l'essere, il preparato muscolare liscio esaminato, ricco o povero di tessuto connettivo e di altri tessuti (membrane mucose ecc.) estranei al tessuto muscolare. L'A. infatti dice (loc. cit., pag. 246): « Poichè il muscolo liscio, quando è ben liberato (?) dal tessuto connettivo, si comporta come il muscolo striato nelle soluzioni variamente concentrate, sembra necessario concludere che l'effetto fisico è lo stesso in ambedue i tessuti, e che cioè l'assorbimento di acqua è accompagnato da accorciamento, mentre la perdita di acqua è accompagnata da allungamento ».

Io mi ero, già prima di leggere i lavori della Mac Gill, messo al riparo dalle due cause di errore, servendomi, non di soluzioni di NaCl, ma di liquido di Ringer completo, più o meno concentrato (escludendone però il $NaHCO_3$, il quale nel liquido di Ringer molto concentrato dà precipitato di carbonato di calcio, reagendo col $CaCl_2$), e facendo le mie ricerche sul muscolo retrattore del pene, il quale non solo è l'unico muscolo liscio costituito di cellule muscolari parallele disposte in una sola direzione, ma è pure il solo che possa essere preparato libero affatto di tessuto connettivo estrinseco, sebbene contenga una notevole quantità di tessuto connettivo interstiziale, cioè interposto alle cellule muscolari.

Il Meigs ([53]) ha risposto con nuove ricerche alle osservazioni della Mac Gill, confermando i suoi primi esperimenti.

I miei esperimenti sulle strisce di diaframma (muscolo striato) hanno dato risultati ([54]) concordi con quelli di Meigs e di Mac Gill, per quanto riguarda l'effetto dell'acqua disstillata, che produce accorciamento; discordi, per quanto riguarda le soluzioni ipertoniche, le quali, secondo Meigs e Mac Gill, provocano allungamento dei muscoli striati, e secondo me, invece, provocano o un lievissimo accorciamento che solo in qualche caso diviene cospicuo, o immobilizzazione del muscolo, ma in nessun caso, mai, allungamento.

(*) Mi sia lecito riferire qui alcuni passi della mia Prima Memoria, pp. 560-562, etc.

Per quanto riguarda poi i muscoli lisci, i miei risultati (sul muscolo retrattore del pene) sono in completo disaccordo con quelli del Meigs, relativamente all'azione dell'acqua distillata, perchè il muscolo retrattore del pene, nell'acqua, si accorcia enormemente; io non ho mai osservato allungamento del muscolo in acqua distillata; e in ciò i miei risultati si accordano con quelli di Mac Gill.

Nelle soluzioni ipertoniche, tanto il muscolo retrattore del pene, quanto i preparati muscolari lisci sui quali hanno sperimentato Meigs e Mac Gill, si accorciano (più o meno: questo non importa).

L'allungamento dei muscoli striati in soluzioni ipertoniche, osservato tanto da Meigs quanto da Mac Gill, mi sembra incsplicabile. I muscoli striati separati dal corpo sono, generalmente, quasi privi di tono; l'allungamento, quindi, non può essere espressione di una variazione fisiologica del tono.

D'altro canto le soluzioni molto ipertoniche non possono che sottrarre acqua. Come mai questa sottrazione di acqua si manifesti, nei miei esperimenti con un accorciamento debolissimo o un poco più cospicuo, e in quelli di Meigs e di Mac Gill con un allungamento, è difficile il dire. Si noti che le soluzioni ipertoniche adoperate dai due sperimentatori americani ebbero sempre la concentrazione massima del 2 °/₀ di NaCl, e non pare che essi abbiano fatto gorgogliare ossigeno attraverso i liquidi.

Per quanto riguarda i preparati muscolari lisci, non pare che i detti AA. americani si sieno preoccupati dello stato di tonicità di essi, al momento dell'azione dell'acqua e delle soluzioni ipertoniche.

I preparati muscolari lisci hanno, contrariamente ai muscoli striati, sempre un tono considerevole anche fuori dell'organismo; ed è noto, specie per le ricerche di Biedermann ([55]), che le variazioni di tono (di lunghezza) che i preparati presentano sotto l'influenza di agenti diversi, fisici e chimici, dipendono molto dallo stato di tonicità in cui si trova il preparato al momento in cui gli agenti esteriori incominciano ad esercitare la loro influenza. In generale, preparati in stato di contrattura tonica si allungano, e preparati atonici si accorciano, sotto l'influenza degli agenti più diversi.

Sapendo ciò, io ho sempre aspettato che il muscolo retrattore del pene assumesse l'abituale grado di mediocre allungamento nel liquido di Ringer normale riscaldato a 30-32° C ed ossigenato, prima di fare agire l'acqua distillata o il liquido di Ringer più o meno concentrato; ed è probabilmente per ciò che ho osservato sempre accorciamento più o meno forte nel muscolo, tanto in acqua quanto in soluzioni ipertoniche. Se i preparati di Meigs si trovavano in stato di contrattura, al momento dell'azione dell'acqua, può darsi che essi reagissero distendendosi. Ma, dopo un certo tempo, avrebbe dovuto pur presentarsi un accorciamento del preparato, che invece non si vede affatto nelle curve del Meigs (ultimo lavoro).

Un altro difetto, che si può constatare nei tracciati, tanto di Meigs quanto di Mac Gill, consiste nella mancanza di un tratto di curva precedente il momento dell'azione dell'acqua o della soluzione ipertonica, sufficientemente lungo, tanto da permettere di confrontare i valori della variazione di lunghezza che presentò il preparato.

In alcuni casi, per es., specialmente quando sul preparato agisce la soluzione ipertonica, il preparato si allunga e poi si accorcia; ma l'accorciamento (come nella figura 5 del secondo lavoro di Meigs) non fa che riportare il muscolo approssimativamente alla stessa lunghezza che aveva prima dell'applicazione della soluzione di NaCl 2 °/₀.

Dopo quanto ho detto, per me rimane solamente da spiegare il fenomeno del più o meno cospicuo, ma per lo più lieve, accorciamento dei muscoli striati e lisci in soluzioni di Ringer ipertoniche, e quello dell'accorciamento fortissimo che avviene quando i detti muscoli passano dal liquido di Ringer ipertonico in liquido di Ringer normale.

A questo proposito possono essere ricordate le ricerche di Demoor e Philippson ([56]), i quali hanno osservato che le soluzioni ipertoniche producono, solamente per la loro pressione osmotica, una modificazione della contrazione muscolare, che consiste essenzialmente in un allungamento straordinario del periodo di rilassamento del muscolo, mentre il periodo di accorciamento rimane

inalterato, al principio. L'irrigazione prolungata con soluzioni ipertoniche determina poi l'ineccitabilità completa del muscolo. L'effetto osservato dipenderebbe essenzialmente dalla pressione osmotica delle soluzioni, perchè si osserva anche quando si rende ipertonica la soluzione fisiologica ordinaria mediante aggiunta di saccarosio. Secondo gli stessi AA., il passaggio di soluzioni ipotoniche e ipertoniche per i vasi determina nel muscolo un edema considerevole; ma il liquido, secondo essi, non penetra nell'interno delle fibre muscolari, bensì rigonfia i vasi e riempie tutti gli interstizii del tessuto, di guisa che non avverrebbe imbibizione della sostanza muscolare.

Le soluzioni ipotoniche determinano un'alterazione meno accentuata della contrazione muscolare, la quale consiste in un allungamento del periodo di decontrazione. Per quanto riguarda il tetano, Demoor e Philippson ([57]) hanno in seguito osservato che i muscoli di cane sottoposti all'azione delle soluzioni ipertoniche dànno un tetano quasi completo con due soli stimoli al secondo, e quelli di rana con cinque; in altre parole le soluzioni ipertoniche esaltano nel muscolo la proprietà di tetanizzarsi, il che sta pienamente in accordo con il prolungamento della fase estensoria della contrazione, che esse producono. Invece le soluzioni ipotoniche non producono lo stesso effetto: il tetano completo non si produce sempre con venti stimoli al secondo in muscoli sottoposti all'azione di dette soluzioni. Le soluzioni ipertoniche allungano il periodo post-tetanico di decontrazione, le ipotoniche invece modificano il periodo di contrazione e di contrattura durevole.

Soprattutto importante sarebbe stata per noi l'osservazione di questi AA. riguardante l'influenza delle soluzioni ipertoniche e ipotoniche sulla lunghezza dei muscoli (striati) in riposo. Ma disgraziatamente il testo (pag. 10), che deve contenere per giunta un errore di stampa, non è in accordo con la figura 10, dalla quale risulta che le variazioni di lunghezza, dagli AA. osservate, erano trascurabili.

Dalle mie ricerche risulta, come ho detto, che la striscia di diaframma, non appena viene a contatto col liquido di Ringer ipertonico, o rimane immobilizzata presso a poco nella lunghezza che aveva, o si accorcia un poco, e intanto diventa subito ineccitabile; e che il muscolo retrattore del pene si accorcia sempre, poco o molto, a seconda dei casi. Il fatto, che le soluzioni ipertoniche non provochino accorciamenti così grandi come quelli che seguono all'azione dell'acqua, o degli acidi e degli alcali, è chiaro di per sè: ciò è dovuto all'influenza dei sali, i quali inibiscono o attenuano l'imbibizione, che sarebbe determinata (o, meglio, agevolata) dall'acido lattico, che nel muscolo si forma in conseguenza della stimolazione operata dalla ipertonicità del liquido. Spesso, l'accorciamento del preparato incomincia a manifestarsi con notevole ritardo. Ma un fenomeno assai degno di nota è, che nel muscolo retrattore sottoposto all'azione del liquido di Ringer ipertonico, un accorciamento talora grandissimo avviene quando al liquido di Ringer ipertonico si sostituisce liquido di Ringer normale; il che non avviene nel preparato diaframmatico. Ciò si spiega anche facilmente. Il muscolo, come ogni altra formazione colloidale, man mano si mette, in generale, o tende a mettersi in equilibrio osmotico col liquido ipertonico circostante. Quando poi viene a contatto col liquido di Ringer normale, questo, essendo ora ipotonico rispetto al succo intramuscolare, imbeve grandemente i colloidi muscolari e connettivali, e determina l'accorciamento del preparato. Ora questo fenomeno pare che si verifichi tanto più intensamente, quanto maggiore è la quantità di tessuto connettivo interposto agli elementi muscolari, verosimilmente perchè la soluzione ipertonica può penetrare e accumularsi rapidamente in quantità considerevole solo nel tessuto interstiziale. Essendo questo scarsissimo nella sottile striscia di diaframma, e invece abbondante nel muscolo retrattore del pene, si comprende che è precisamente nel secondo che il fenomeno di imbibizione dianzi detto deve

verificarsi. Rammenterò ancora, che spesso i colloidi, da soluzioni saline, assorbono più sali che acqua, cioè concentrano in loro medesimi la soluzione originale in cui furono immersi. Ed è verosimile che di ciò sia capace piuttosto il collageno dei tessuti connettivali che non i colloidi muscolari propriamente detti.

Le soluzioni ipertoniche, dunque, stimolano gli elementi muscolari, sia striati sia lisci, in parte fisicamente sottraendo loro per osmosi acqua, in parte mediante gl'ioni che contengono in maggiore concentrazione. La stimolazione ha per effetto la formazione, in essi, di sostanze acide (acido lattico), le quali tendono ad esaltare il potere d'imbibizione dei colloidi muscolari. Ma al processo d'imbibizione si oppongono i sali neutri contenuti in forte concentrazione nelle soluzioni ipertoniche. Si comprende che, secondo l'eccitabilità e la capacità funzionale del muscolo, formandosi più o meno acido, l'effetto sarà diverso: p. es., se si forma molto acido, imbibizione, e quindi accorciamento di un certo grado, può anche verificarsi, come risulta anche da ricerche fatte nel mio laboratorio ([53]), non ostante la concentrazione dei sali neutri; se invece si forma poco acido, questo non sarà sufficiente a vincere l'azione inibente che i sali neutri esercitano sul processo d'imbibizione, e non si avrà accorciamento, o solo piccolissimo.

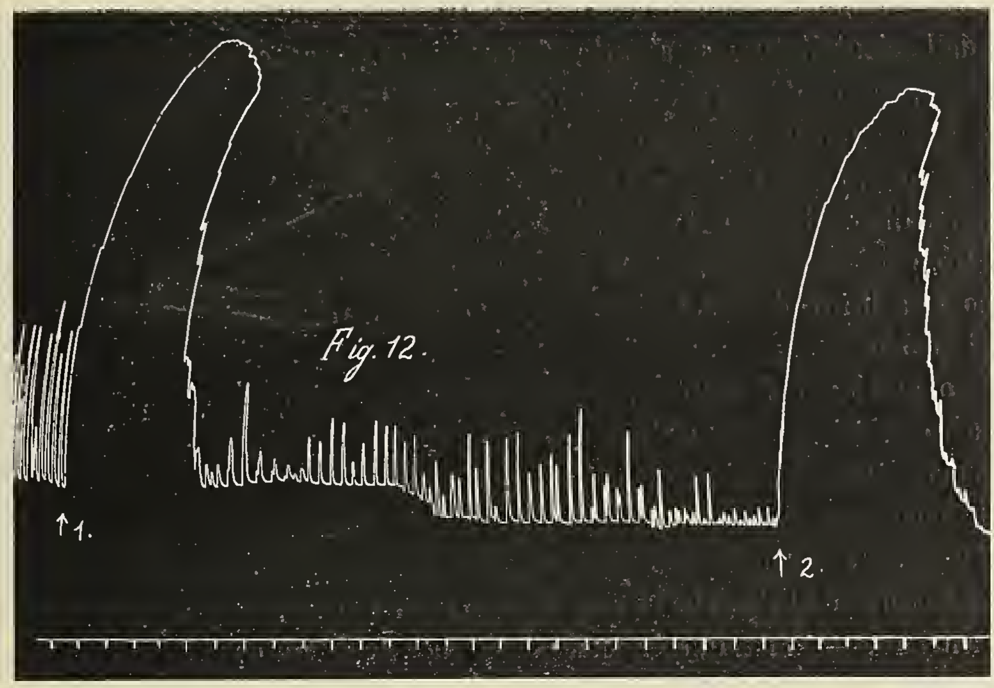
Gli organi muscolari sono però costituiti non esclusivamente di elementi muscolari, ma anche di tessuto connettivo, che però si trova in quantità notevolmente maggiore negli organi muscolari lisci che non in quelli striati. I colloidi connettivali organizzati sotto forma di fibre sono anche dotati della proprietà d'imbeversi e di accorciarsi imbevendosi d'acqua; onde è evidente che l'accorciamento dei muscoli striati e lisci immersi in acqua o in soluzioni ipotoniche è in parte dovuto anche agli elementi connettivali. Il tessuto connettivo interstiziale, inoltre, ha il potere, come un comune pezzo di gelatina, di assorbire e fissare, e magari di concentrare in sè, anche le soluzioni saline ipertoniche. Si comprende, quindi, che quando esso passa da una soluzione più concentrata in una meno concentrata, deve da questa assorbire acqua in grande quantità, cioè deve in essa imbeversi e accorciarsi. E siccome il muscolo retrattore del pene contiene molto tessuto connettivo, mentre la striscia di diaframma ne contiene pochissimo, agevolmente si comprende perchè solo il muscolo retrattore, e non il preparato diaframatico, si accorcia passando dal liquido di Ringer ipertonico in quello ipotonico.

7. — *Azione di alcuni ormoni e di alcune sostanze derivanti da normali metaboliti.*

Scopo delle ricerche, di cui rendo conto qui appresso, è stato di indagare sul *m. retractor penis* (di cui si conosce perfettamente la duplice innervazione autonoma) l'azione di alcune sostanze chimiche, le quali sono o, come l'adrenalina e l'ipofisina, il prodotto dell'attività specifica di ghiandole a secrezione interna, ovvero prodotti del metabolismo generale delle proteine, come l'istidina, e rispettivamente derivati di tali prodotti, come la β-iminazoliletilamina e la p-idrossifeniletilamina,

o finalmente il miscuglio in proporzione determinata di queste due sostanze, dalla casa Bayer detto « tenosina ».

I numerosi tracciati raccolti durante queste ricerche mi sono serviti, poi, non solamente per illustrare l'azione delle dette sostanze (chè questo fu anzi scopo relativamente accessorio per cui esse furono fatte), ma anche e soprattutto per tentar di chiarire la natura della funzione motoria autonoma del muscolo. Infatti, in ogni esperimento, prima di fare agire questa o quella sostanza, io ho sempre registrato, spesso per qualche ora, le contrazioni automatiche del muscolo messo in condizioni sperimentali simili o diverse.



11 aprile 1913. — *M. retractor penis* di cane. Peso: gr. 5, tempo: 5′, temper.: 33° C. In 1 e in 2, si aggiungono al liquido di Ringer (150 cm³) 3 e risp. 4 gocce di soluzione 1 ⁰/₀₀ di Adrenalina Parke Davis et C. (Riduzione fotografica).

1) Azione della adrenalina. — Io ebbi già ad osservare ([34]) che la « adrenalina Clin » e la « paraganglina Vassale » provocano fortissimi accorciamenti nel muscolo retrattore del pene. Ora, questi nuovi esperimenti confermano pienamente i precedenti risultati, per quanto riguarda sia il preparato che va in commercio col nome di « adrenalina Clin », sia « la adrenalina di Parke, Davis et C. », come si vede nel tracciato della figura 12.

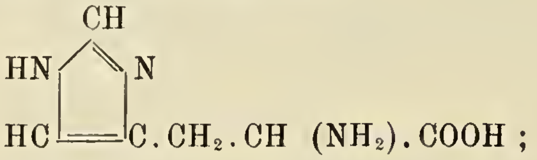
Bastano da 3 a 4 goccie (anche una quantità minore sarebbe sufficiente a produrre qualche effetto) di soluzione 1 ⁰/₀₀ di adrenalina, aggiunte a 100-150 cm³ di liquido di Ringer, per ottenere contrazione fortissima del muscolo. L'accorciamento è, per altro, transitorio; dura, nel primo esperimento (in 1), circa 20 minuti; nel secondo (in 2), circa 25 minuti; dopo, il muscolo torna ad istendersi, e per lo più anche a eseguire contrazioni spontanee simili a quelle che precedono l'accorciamento, specie quando questo fu di breve durata. In alcuni casi, la linea ascendente della curva

d'accorciamento non presenta ondulazioni di sorta; in altri, invece, essa è evidentemente costituita dalla sovrapposizione di contrazioni distinte, onde assume l'aspetto di una rapidissima scala, a gradini seguentisi a intervalli variabili. La linea discendente, poi, che corrisponde all'allungamento del muscolo, è sempre accidentata, ossia dentellata, il che vuol dire che il muscolo, mentre si distende, interrompe la sua discesa, a intervalli per lo più disuguali, per eseguire una piccola contrazione, compiuta la quale si allunga ancora un poco, per poi compiere di nuovo un'altra piccola contrazione, e così di seguito, finchè il muscolo non raggiunga il massimo grado di allungamento. Quando, in conseguenza della stimolazione adrenalinica, il muscolo, entrando in forte stato di eccitamento, eseguisce una contrazione di lunga durata, sull'altipiano o sulla cupola della curva corrispondente appariscono quasi sempre delle dentellature assai fitte, frequenti, che sono evidentemente l'espressione grafica di altrettante contrazioni distinte, che il muscolo fa pur in quello stato di massimo accorciamento. Avremo occasione di vedere più volte verificarsi questo fenomeno, e ne discuteremo da ultimo la genesi.

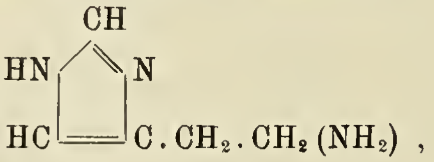
L'adrenalina, dunque, è un energico stimolante della attività contrattoria del m. retrattore del pene. Essa agisce come la stimolazione delle fibre nervee del sistema autonomo toracico-lombare (simpatico propriamente detto), cioè come la stimolazione dei nervi pudendi.

Degno di nota è il fatto che il muscolo, quando si è allungato dopo aver reagito con un accorciamento forte all'azione dell'adrenalina, è sempre pronto a reagire, nello stesso modo e con la stessa intensità, a una nuova dose della stessa sostanza; precisamente come, con iniezioni ripetute a intervalli convenienti di soluzione di adrenalina, si possono ottenere altrettante elevazioni della pressione endo-arteriosa.

2) Azione dell'istidina e del derivato da essa, la β-iminazolíletilamina. — L'istidina è, come si sa, uno degli aminoacidi che derivano dalla scissione idrolitica delle sostanze proteiche. È un aminoacido eterociclico, la cui composizione corrisponde alla formula di struttura:



onde deve considerarsi come un acido α-amino-β-iminazolilpropionico. Sottraendo ad esso una molecola di CO_2 (sottrazione che possono fare anche alcuni batterî intestinali appartenenti al gruppo del *B. coli*, onde è possibile la formazione di tale sostanza nell'intestino, e quindi l'assorbimento da questo, e il passaggio nel sangue), si trasforma, per decarbossilazione, nel derivato in questione:

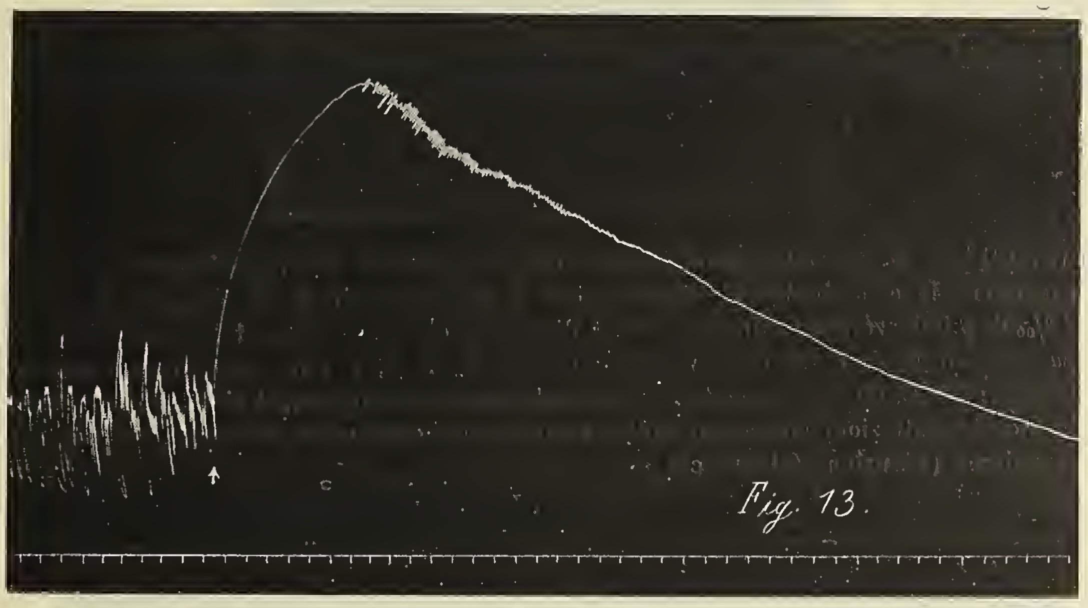


che è la β-iminazoliletilamina.

Questo derivato, in forma di cloridrato, è fornito dalla Casa Hoffmann La Roche et C. e dalla Casa F. Bayer e C. in soluzione acquosa, entro fialette contenenti 1 cm^3 della soluzione 1 $^0/_{00}$, ed è detto « istamina ».

Ora, mentre l'istidina aggiunta sotto forma di cloridrato in soluzione 1 $^0/_0$ in liquido di Ringer, nella proporzione perfino di 10 cm^3 di questa soluzione a 90 cm^3 di liquido di Ringer, non esercita alcuna apprezzabile azione stimolante sul m. retrattore del pene, l'istamina, fatta agire in quantità di molto minore, esercita una azione contrattoria potentissima ([59]).

Ciò risulta evidentemente dalle figg. 13, 14 e 15.

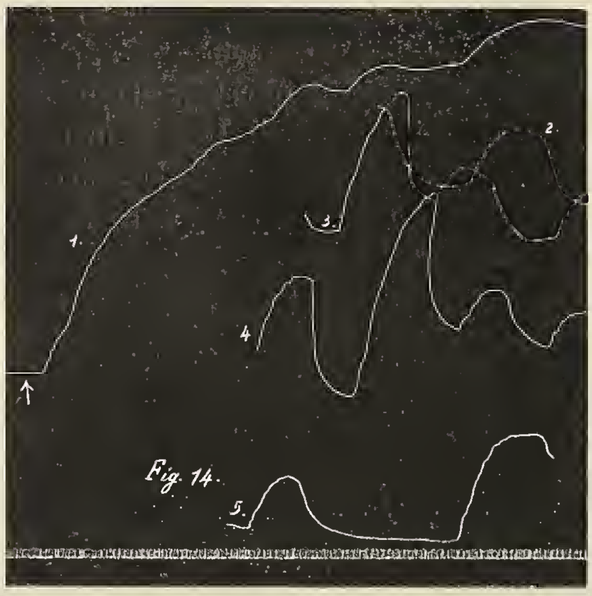


28 gennaio 1913. — *M. retractor penis* di cane. Peso: gr. 5, tempo: 5', temper.: 31° C. In corrispondenza della freccia (↑) si aggiungono 5 cm^3 di soluzione 1 : 50000 di β-iminazolil-etilamina ai 100 cm^3 di liquido di Ringer in cui è immerso il muscolo. (Riduzione fotografica).

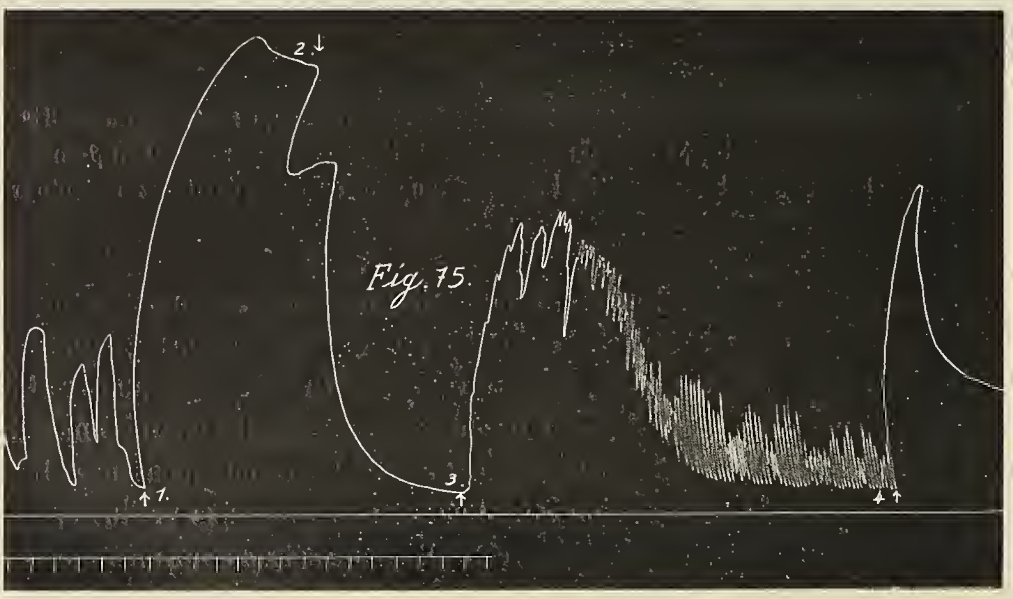
In uno dei molti esperimenti da me fatti, il muscolo era immerso in liquido di Tyrode, al quale, a un certo punto del tracciato, furono aggiunti gr. 0,1 di gligosio agli 80 cm^3 di liquido fisiologico: l'effetto fu nullo. Quindi si aggiunsero 0,3 cm^3 di soluzione 1 $^0/_{00}$ di istamina: l'effetto fu una contrattura di lunghissima durata, sull'altipiano della quale apparvero piccole e frequenti contrazioni spontanee. Lo stesso effetto si ottenne in esperimenti successivi. In alcuni casi la sostanza produsse, alla concentrazione totale di 1 : 1000000, un effetto contrattorio colossale sul muscolo immerso in liquido di Locke, a una temperatura di 30° - 32° C., e la contrattura durò parecchi minuti.

L'altezza massima della curva è più volte l'altezza delle maggiori contrazioni spontanee, rare o frequenti, che il muscolo è capace di eseguire. È specialmente osservando questi tracciati, che risulta evidente come le contrazioni spontanee, che il muscolo d'ordinario eseguisce, sono ben lontane dall'essere accorciamenti massimali. Sul declivio, cioè lungo la linea discendente delle curve di contrattura provocata dall'istamina, appariscono piccole e frequenti contrazioni spontanee.

In un altro esperimento, si vide che, perfino alla diluizione di 1 per 2 milioni,



16 marzo 1914. — *M. retractor penis* di cane, che non fece mai contrazioni spontanee, dopo la sua immersione in liquido di Ringer, prima dell'aggiunta (in ↑) di 10 gocce di soluzione 1 °/₀₀ di β-iminazoliletilamina ai 100 cm³ di liquido di Ringer. Dopo tale aggiunta continuò per ore ad eseguire le contrazioni delle curve 1, 2, 3, 4 e 5. Peso: 5 gr., tempo: 1″, temper.: 33° C. (Data la velocità relativamente grande del cilindro, si distinguono nettamente le piccole contrazioni elementari onde è composta ciascuna curva di contrazione automatica maggiore). (Riduzione fotografica).



21 giugno 1913. — *M. retractor penis* immerso in 80 cm³ di liquido di Ringer. Temper.: 32° C., tempo: 5′, peso: gr. 6. In 1, si aggiunge al liquido 1 cc. di soluzione 1 °/₀ di p-ossifenil-etilamina. In 2, si cambia il liquido di Ringer. In 3, si aggiunge al nuovo liquido di Ringer 1 cc. di soluzione 1 °/₀₀ di β-iminazoliletilamina. In 4, si fa agire di nuovo la tiramina. (Riduzione fotografica).

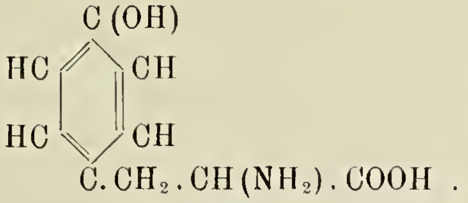
l'istamina è capace di produrre un notevole accorciamento del muscolo. Il cambiamento del liquido di Ringer produce subito un cospicuo abbassamento del tono del preparato.

La sostanza ha anche il potere di provocare contrazioni ritmiche in un muscolo retrattore che per lungo tempo non ne aveva presentate, sebbene si trovasse nelle condizioni ordinarie di sopravvivenza (fig. 14).

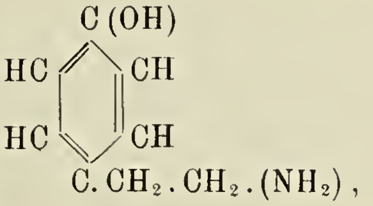
Ho indagato anche l'azione della « tenosina » Bayer, aggiunta nella proporzione di 1 cm^3 della soluzione 1 $^0/_{00}$ a 80 cm^3 di liquido di Ringer. Questa « tenosina » non è altro che un miscuglio di istamina con p-idrossifeniletilamina (ved. appresso).

L'azione della « tenosina », qualitativamente, in nulla di essenziale differisce da quella dell'istamina.

3) Azione della p-idrossifeniletilamina. — Questa sostanza è un derivato dalla tirosina. Infatti la formola di struttura della tirosina (acido β-ossifenil-α-aminopropionico) è:



Questa, perdendo una molecola di CO_2, cioè per decarbossilazione, diventa « p-idrossifeniletilamina »:



che è stata chiamata anche « tiramina ».

L'effetto che produce questa sostanza sul m. retrattore del pene è analogo a quello dell'istamina, con la sola differenza che esso è meno forte ([59]). Infatti, mentre l'istamina è usata generalmente in soluzione 1 $^0/_{00}$, la tiramina dev'essere usata in soluzione 1 $^0/_0$. L'adrenalina, l'istamina e la tiramina, esercitano sul m. retrattore del pene un'azione contrattoria analoga, sebbene le due prime sostanze si rivelino molto più attive della terza.

A me sembra, però, che fra l'istamina e la tiramina non esista solamente differenza nell'intensità dell'azione. Da molti miei esperimenti risulta che mentre la tiramina, dopo aver prodotto la contrattura, sopprime per lungo tempo le contrarioni spontanee del muscolo, tanto che sulla linea discendente delle curve di contrattura (ved. fig. 15) non si vedono mai cospicue contrazioni spontanee; l'istamina, invece, non solo non sopprime queste contrazioni (ved. figg. 13 e 15), ma anzi ne provoca la comparsa (fig. 14), ovvero le intensifica là dove mancavano o erano poco cospicue, oltre a produrre il ben noto fortissimo accorciamento tonico (ved. le figg. 13, 14 e 15). Tutto ciò si vede benissimo, specialmente nella fig. 15. In quell'esperimento, prima agì la tiramina, che fece accorciare il muscolo e abolì le già lentissime contrazioni automatiche; poi si fece agire l'istamina, che subito provocò la comparsa di nette contrazioni automatiche; e finalmente di nuovo la tiramina, che abolì quelle provocate dall'istamina.

A giudicare da alcuni tracciati, che qui non riproduco, si sarebbe indotti a credere che anche la « tenosina » abolisce o attenua le contrazioni spontanee del m. retrattore. Se così è, è probabile che tale effetto sia dovuto alla presenza, nella soluzione di « tenosina », della tiramina accanto all'istamina.

4) Azione della « pituitrina » e della « ipofisina ». — In commercio esistono ora due preparati, contenenti le sostanze attive che elabora la ghiandola pituitaria o ipofisi: la « pituitrina », la quale è un semplice estratto acquoso del lobo posteriore dell'organo, e l' « ipofisina », la quale contiene quattro sostanze chimicamente pure preparate dall'organo e aventi azione analoga. Io ho avuto, per cortesia dal prof. W. Straub e dalla Casa Meister, Lucius e Brüning, l'ipofisina in due forme diverse: in soluzione 1 $^0/_{00}$ entro fialette originali contenenti ciascuna 1 cm^3 di soluzione; e allo stato di solfato delle sostanze pure solide, di cui poi ho fatto da me le soluzioni in liquido di Ringer. Queste soluzioni, preparate in liquido di Ringer, sono dapprima limpide; ma poi, abbandonate a sè stesse, dopo alcune ore s'intorbidano e incominciano a tramandare un nauseante odore di putrefazione. Dopo 24 ore, tali soluzioni sono torbidissime e contengono un cospicuo precipitato granuloso che, dapprima sospeso, alla fine si deposita.

Domandate, alla Casa fabbricante, spiegazioni di ciò che mi occorreva, mi si rispose che, infatti, le soluzioni di ipofisina in acqua o in liquido di Ringer sono instabili, onde per stabilizzarle si suole aggiungere 0,5 $^0/_0$ di cloretone. Questa è la ragione, per cui la soluzione, che la Casa fornisce in fialette, è e rimane limpidissima; mentre le soluzioni, preparate da me, della sostanza pura solida in liquido di Ringer, dopo poche ore s'intorbidano. Probabilmente il solfato di ciascuna delle quattro sostanze, onde risulta composta l'ipofisina solida, subisce in acqua un processo di scissione idrolitica, che il cloretone inibisce (come, non saprei dire), con produzione di un'amina volatile.

Tutto ciò ho dovuto narrare perchè, come si vedrà, le due specie di soluzione, quella fornita dalla Casa in fialette e quella che si può preparare sciogliendo la sostanza pura solida (che non è messa in commercio) in liquido di Ringer, non agiscono allo stesso modo sul m. retrattore del pene.

La « pituitrina » (60) provoca contrazione del muscolo. Ma con questo preparato di costituzione ignota e variabile — perchè, come ho detto, non è che un estratto acquoso dell'ipofisi — ho fatto pochi esperimenti.

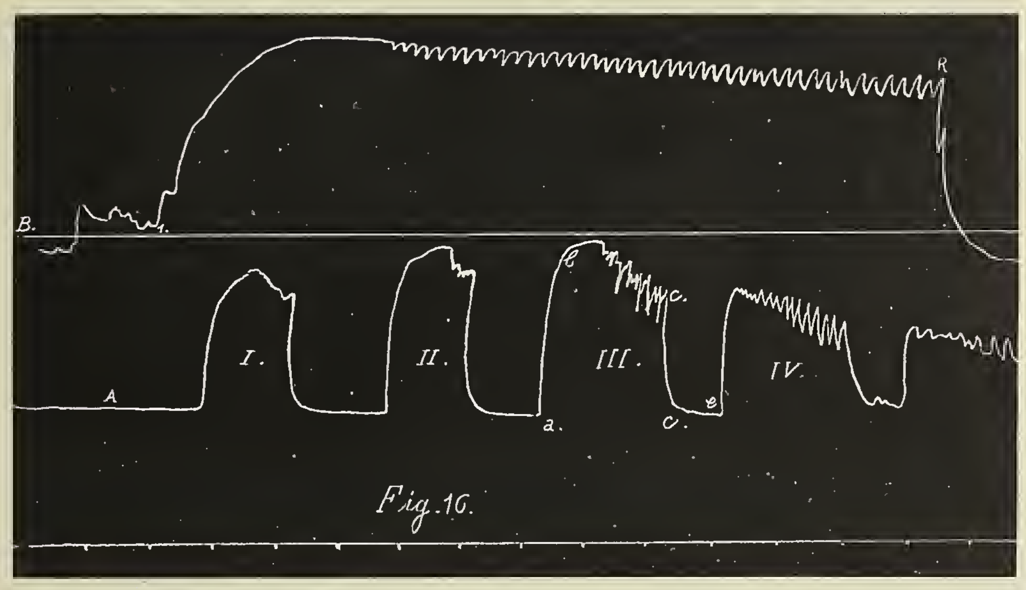
L'ipofisina pura sciolta in liquido di Ringer, sia essa fatta agire quando la soluzione è ancora limpidissima o dopo che si è intorbidata, produce sempre fortissimo accorciamento del m. retrattore del pene, come risulta dai tracciati ottenuti da me in molti esperimenti.

Nell'esperimento cui corrisponde la fig. 16, il muscolo eseguiva (curva A) dapprima spontaneamente forti contratture periodiche, l'altipiano delle quali è contrassegnato dalla comparsa di piccole contrazioni, più evidenti sulla terza e quarta curva che non sulla prima e seconda. Fatta agire in 1. della curva B l'ipofisina, nella proporzione di 1 cm^3 della soluzione 1 $^0/_0$ su 100 cm^3 di liquido di Ringer, il muscolo si accorciò, rimase per molto tempo fortemente accorciato, e a un certo punto sulla curva apparvero frequenti ondulazioni o dentellature, che sono anche abbastanza re

golari per il ritmo con cui si succedono. In fine, cambiato il liquido di Ringer (in R) in cui era immerso il muscolo, subito questo si allungò, come mostra l'abbassarsi della curva, che discende anche sotto la ascissa.

Non altrimenti agisce l'ipofisina su un muscolo retrattore del pene di un feto di bue del peso circa kg. 1,500 (fig. 17).

Esso, dapprima non eseguiva contrazioni spontanee (A). Fatta agire l'ipofisina (in 2.), nella proporzione di 1 cm³ della soluzione 1 °/₀ sopra 60 cm³ di liquido di Ringer, il muscolo si accorciò fortemente. In 3. (R) fu cambiato il liquido di Ringer, e il muscolo, come nel caso precedente, tornò ad allungarsi; dopo di che, incominciò



31 maggio 1913. — *M. retractor penis* di cane. Peso: gr. 5, tempo: 5', temper.: 31° C. La curva *A* presenta quattro (I, II, III e IV) contratture spontanee. In 1, della curva *B*, che segue alla precedente, si aggiungono al liquido di Ringer (100 cm³) 2 cm³ di soluzione 1 °/₀ di ipofisina pura (la soluzione era fatta in liquido di Ringer). In *R*, si cambia il liquido. (Riduzione fotografica).

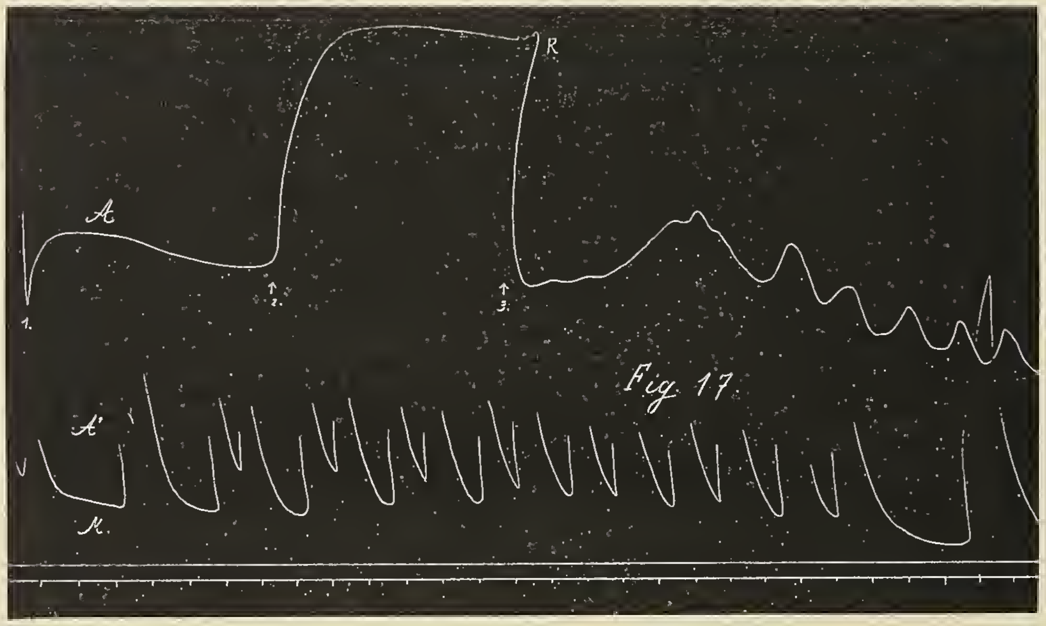
a fare lente e di mano in mano più ampie contrazioni (A') automatiche. (La contrazione tonica che il muscolo eseguì prima di 2., fu provocata da uno stimolo meccanico di trazione esercitato in 1.).

L'ipofisina, dunque, agisce in modo analogo alle sostanze sopra sperimentate, cioè produce anch'essa energiche contrazioni ritmiche (A') e contratture (2. R 3.) del m. retrattore del pene.

La soluzione delle fialette originali, invece, produce l'effetto opposto, In un esperimento, poco dopo l'aggiunta del contenuto di una fialetta, il muscolo incominciò ad allungarsi, senza che le contrazioni automatiche scomparissero del tutto. Esse scomparvero più tardi; ma poi ne apparvero due nel tratto di curva corrispondente al massimo allungamento del muscolo. L'aggiunta successiva di un altro cm³ di soluzione in fialette soppresse del tutto le contrazioni spontanee, ma il muscolo non si allungò più. Cambiato il liquido di Ringer, dopo poco ricomparvero le con-

trazioni spontanee, dello stesso tipo di quelle normali. Un' altra aggiunta della soluzione produsse lo stesso effetto di prima.

In un altro esperimento potei mettere in evidenza l'azione opposta che esercitano la soluzione di ipofisina pura fatta da me, e quella contenuta nelle fialette: la prima provocò contrazione del muscolo; la seconda allungamento e poi soppressione delle contrazioni spontanee. La dose della soluzione in fialette aggiunta in questo esperimento fu evidentemente eccessiva, perchè la soluzione di ipofisina pura, aggiunta in seguito, fece ricomparire le contrazioni spontanee, ma non fu capace di elevare il tono del muscolo sino all'altezza massima raggiunta precedentemente.



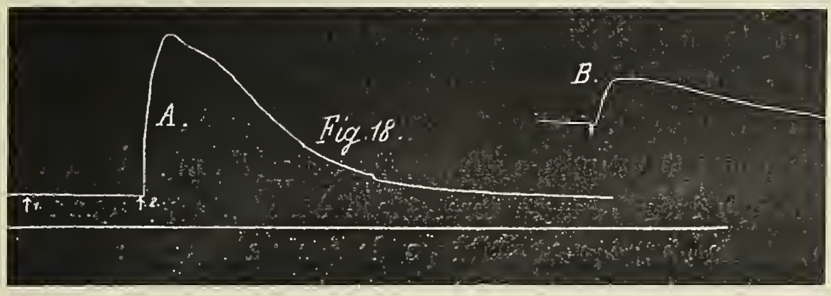
16 maggio 1913. — *M. retractor penis* di feto di bue. Peso: gr. 3, tempo: 5', temper.: 36° C. In 1, della curva superiore (*A*) si stira il muscolo (stimolo tensivo), che risponde con un lento accorciamento tonico. In 2, si aggiunge al liquido di Ringer (60 cm^3) 1 cm^3 di soluzione 1 °/₀ di ipofisina pura. In 3, si lava con liquido di Ringer fresco il preparato. Poco dopo appariscono regolari contrazioni automatiche, che continuano per molto tempo sulla curva inferiore (*A'*). (Riduzione fotografica).

(Miscugli di pituitrina e di adrenalina producono forte accorciamento del m. retrattore: il che non può recar meraviglia, poichè sappiamo che lo stesso effetto producono l'una e l'altra sostanza isolate).

Se le sostanze estratte dall'ipofisi e preparate allo stato di purezza sono le stesse, nell'uno e nell'altro caso, l'effetto diverso, anzi opposto, che producono la soluzione delle fialette a quella preparata da me, non si può spiegare altrimenti se non ammettendo che la presenza del cloretone nella prima non sia indifferente, e che ad esso si debbano la depressione del tono e la soppressione delle contrazioni automatiche.

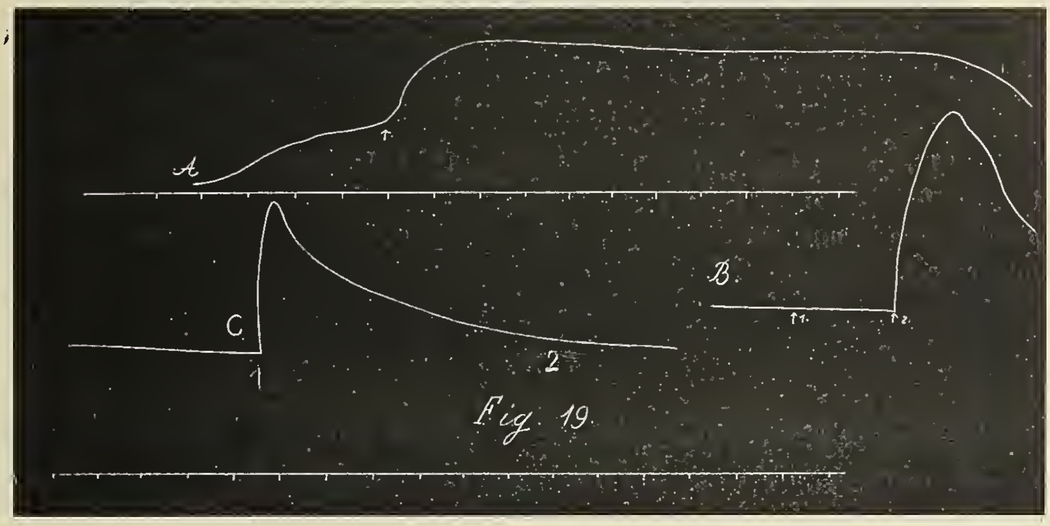
Questa mia supposizione è stata confermata dall'esperimento, e non solo sul m. retrattore, ma anche, come mi ha poi comunicato per lettera il prof. W. Straub, sull'utero.

Ciò non toglie, però, che nell'organismo vevente, diluendosi il cloretone in tutto il sangue, la sua azione si dilegui, mentre rimane immodificata l'azione specifica dell'ipofisina. Ma *in vitro* l'azione del cloretone si manifesta tanto da mascherare



A) Preparato diaframmatico di feto di bue. In 1, si aggiunge al liquido di Ringer (50 cm^3) 1 cm^3 di soluzione 1 ‰ di « tenosina *Bayer* »: nessun effetto contrattorio. In 2, si aggiungono allo stesso liquido 2 gocce di soluzione 1 % di nicotina: forte accorciamento.
B) *M. retractor penis* dello stesso feto di bue. In corrispondenza della freccia (↑) si aggiungono al liquido di Ringer (50 cm^3) 0,5 cm^3 di soluzione 1 ‰ di « tenosina *Bayer* »: effetto contrattorio. 30 maggio 1913. Peso: gr. 2, temper.: 36° C. (Riduzione fotografica).

del tutto quella dell'ipofisina; il che evidentemente è dovuto al fatto che il cloretone esercita la sua azione anche alla concentrazione che raggiunge quando il con-



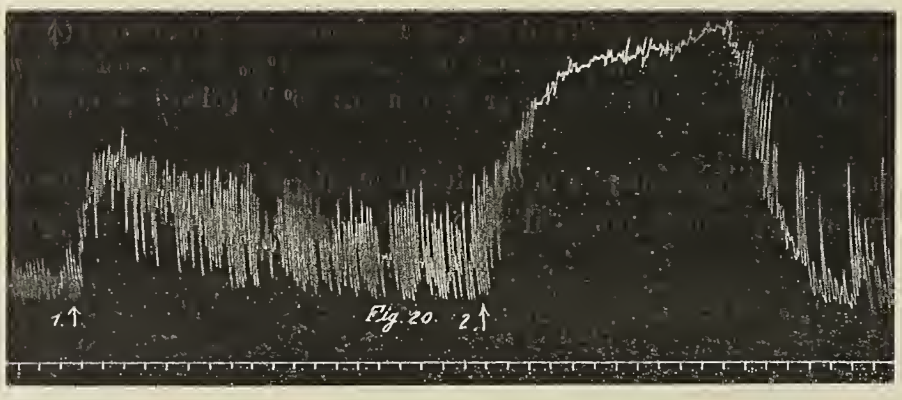
A) 7 maggio 1913. — *M. retractor penis* di feto di bue. Temper.: 37° C. Tempo: 5'. In (↑) si aggiunge al liquido di Ringer (100 cc.) 1 cc. di soluzione 1 ‰ di tenosina.
B) 9 maggio 1913. — Preparato frenico-diaframmatico di feto di bue. Temper. e tempo: idem. In 1, si aggiunge al liquido di Ringer (60 cc.) 1 cc. di soluzione 1 ‰ di tenosina. In 2, 1 cc. di soluzione 1 % di nicotina.
C) 7 maggio 1913. — Preparato fren.-diaframmatico di feto di bue. Temperatura e tempo: idem. In 1, si aggiunge al liquido di Ringer (50 cc.) 1 goccia di soluzione 1 % di nicotina; in 2, una seconda goccia della stessa soluzione non produce alcun effetto. (Riduzione fotografica).

tenuto delle fialette è diluito in 100-120 cm^3 di liquido di Ringer. Può darsi pure che *in vivo* il cloretone iniettato sia rapidamente modificato e quindi reso inattivo.

Degni d'essere presi particolarmente in considerazione sono i tracciati delle figure 18 e 19, perchè da essi risulta che, mentre l'ipofisina e la « tenosina » (lo stesso

potrebbe dirsi dell'adrenalina e delle due sostanze « istamina » e « tiramina »), non esercitano alcuna azione sopra il preparato diaframmatico (muscolatura striata) del feto di bue (e lo stesso può dirsi *a fortiori* del preparato diaframmatico di animali adulti), agiscono invece benissimo sul m. retrattore del pene dello stesso feto (come agiscono sullo stesso muscolo degli animali adulti).

Questi fatti, constatati in varii osperimenti da me eseguiti, dimostrano: in primo luogo, che le dette sostanze esercitano la loro azione sulla muscolatuea liscia, di feti o di animali adulti, mentre sono affatto inefficaci sulla muscolatura striata, fetale o adulta; e in secondo luogo, che la loro azione è identica per qualità e per intensità, indipendentemente dal periodo di sviluppo dell'animale, vale a dire è già dimostrabile in un'epoca, in cui può affermarsi che le fibre nervose del sistema autonomo non hanno ancora mai avuto occasione di propagare eccitamenti efficaci a quel muscolo.



29 maggio 1914. — Esofago di pulcino sospeso in 100 cm³ di liquido di Ringer. Peso: gr. 3, tempo: 1′, temper.: 32° C. In 1, si aggiungono al liquido 0, 4 cm³ di soluzione 1 °/₀₀ di β-iminazoliletilamina. In 2, si aggiungono altri 0,5 cm³ della stessa soluzione. (Riduzione fotografica).

*
* *

Consideriamo ora l'azione che le stesse quattro sostanze sperimentate sul m. retrattore del pene esercitano sugli altri preparati muscolari lisci: atrio del cuore di *Emys*, esofago di pulcino, intestino tenue e crasso di mammiferi), e confrontiamo gli effetti (ved. per la letteratura sull' argomento: Biedl, [60]; Barger, [59]; Quagliariello, [28]).

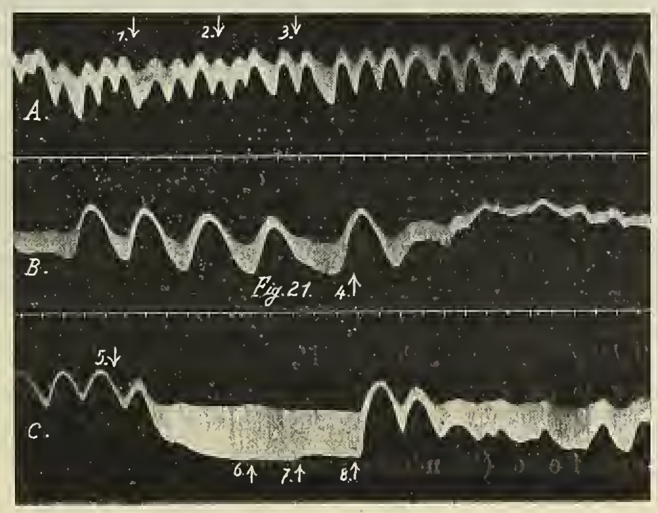
È nota l'azione inibitoria dell'adrenalina sull'intestino dei mammiferi, sull'esofago del pulcino e sull'atrio di *Emys*; e che la p-idrossifeniletilamina agisce sugli stessi organi come l'adrenalina.

La β-iminazoliletilamina provoca forte contrazione dell'esofago di pulcino (fig. 20) e dell'intestino dei mammiferi.

Per quanto riguarda l'ipofisina, questa provoca nel preparato atriale, come la stimolazione del vago, un'evidente contrattura, e ripristina le oscillazioni del tono in un atrio nel quale l'adrenalina le aveva abolite (fig. 21), onde è da tenersi come cosa certa, che adrenalina e ipofisina esercitano sulla muscolatura liscia dell'atrio cardiaco un'azione nettamente antagonista.

E antagoniste sono anche la β-iminazoliletilamina, fortemente contratturante (fig. 22), e la p-idrossifeniletilamina, che deprime il tono e abolisce, come l'adrenalina, le oscillazioni del tono (fig. 23). Quindi si comprende come l'adrenalina sia anche antagonista della β-iminazoliletilamina (fig. 24) etc. La « tenosina » agisce prima come l'istamina e poi come la p-idrossifeniletilamina. La somiglianza nella azione di questa base e dell'adrenalina ha la sua ragion d'essere nella somiglianza della loro struttura chimica, e verosimilmente anche nella comunanza dell'origine loro.

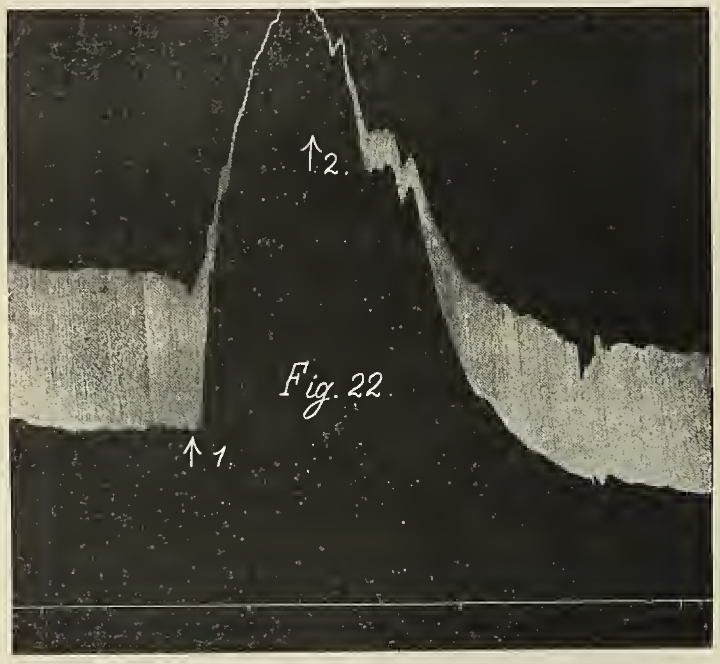
Perfettamente simile all'azione che, come ho detto, esercita sull'atrio di *Emys*, è quella che l'ipofisina esercita sulla muscolatura delle arterie (fig. 25), nella quale



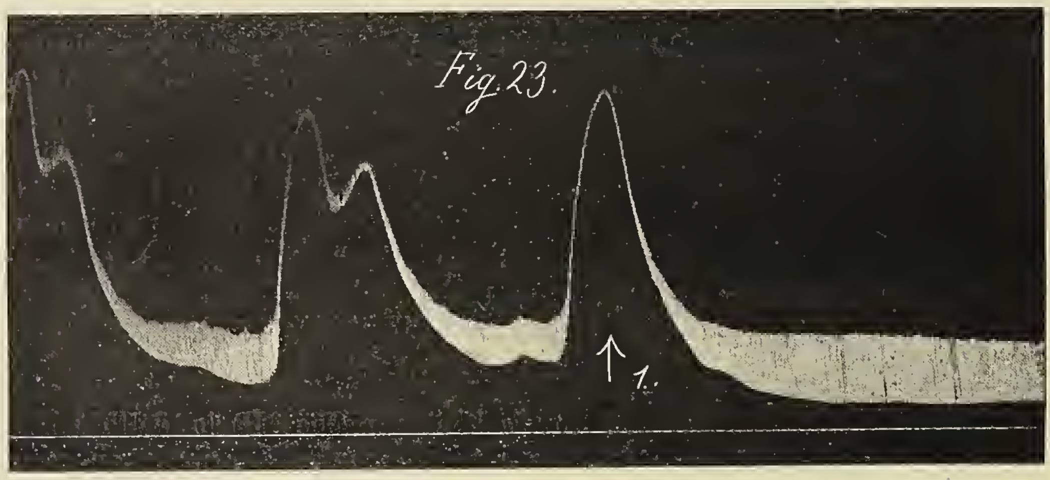
22 aprile 1914. — Atrio destro del cuore di *Emys europaea* sospeso in 30 cm³ di liquido di Ringer. Tempo: 1', temper.: 19° C. — *A*. La soluzione 4,5 °/₀ di ipofisina aggiunta 1 cm³ alla volta al liquido di Ringer in 1, 2 e 3 provoca solamente un lieve aumento del tono. — *B*. La stessa soluzione fatta cadere continuamente a gocce sul preparato atriale tenuto all'asciutto; in 4, provoca cospicua contrattura dell'atrio. — *C*. In 5 si aggiunge al liquido di Ringer contenente ipofisina (30 cm³), una goccia di soluzione 1 °/₀₀ di adrenalina (Clin): abbassamento del tono, scomparsa delle oscillazioni del tono e sviluppo delle contrazioni sistoliche dell'atrio. In 6, 7 e 8 si fa agire di nuovo l'ipofisina in forte dose: aumento del tono e ricomparsa delle oscillazioni del tono. (Riduzione fotografica).

provoca forte contrattura insieme con contrazioni ritmiche. Parlo dell'azione sopra pezzi di arteria (carotide di toro) separati dal corpo e conservati in liquido di Ringer, azione che, quindi, è simile a quella dell'adrenalina iniettata nel corpo. L'antagonismo che ipofisina e adrenalina dimostrano a riguardo dell'atrio, non esiste più, dunque, a riguardo della muscolatura arteriosa, siano le due sostanze sperimentate sopra pezzi isolati di arterie o iniettate nell'organismo vivente. Si noti, che l'azione dell'adrenalina sulla muscolatura liscia dell'atrio è opposta a quella che essa esercita sulla muscolatura liscia dell'arterie, come di effetto opposto sono le innervazioni simpatiche rispettive. L'ipofisina, invece, agisce come sostanza contrattoria tanto sull'atrio, quanto sulle arterie, vale a dire come la β-iminazoliletilamina. Per questa sostanza Quagliariello ha ([28]) emesso l'ipotesi, che agisca direttamente sulle cellule

muscolari. È verosimile, quindi, che anche l'ipofisina eserciti la sua azione direttamente sulle cellule muscolari lisce delle arterie, e non sulle giunzioni neuro-mu-



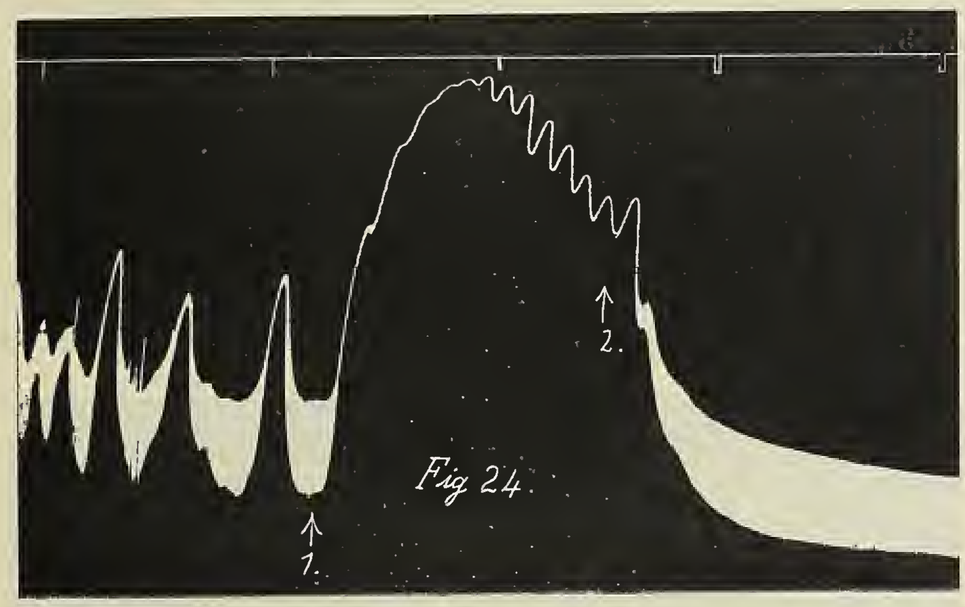
Atrio destro del cuore di *Emys europaea*. Tempo: 5′, temperatura dell'ambiente. In 1, si aggiunge al liquido di Ringer, in cui l'atrio è sospeso, soluzione 1 $^{0}/_{00}$ di β-iminazoliletilamina fino a raggiungere la concentrazione totale di 1 : 5000. In 2, si cambia il liquido, e si lava l'atrio con liquido di Ringer fresco. (Grandezza naturale).



Atrio destro del cuore di *Emys europaea*. Temperatura dell'ambiente. In 1, si aggiunge al liquido di Ringer, in cui l'atrio è sospeso. soluzione 1 $^{0}/_{0}$ di p-idrossifeniletilamina fino a raggiungere la concentrazione totale di 1 : 5000. Come si vede, scompaiono le fortissime contrazioni toniche preesistenti. (Grandezza naturale).

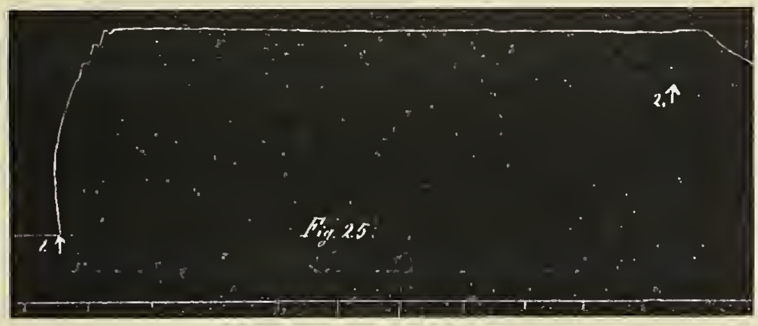
scolari; mentre per quanto riguarda la muscolatura liscia dell'atrio di *Emys*, poichè l'azione della ipofisina coincide con quella del vago, e l'azione dell'adrenalina con quella del simpatico, si potrebbe anche supporre che la prima agisca sull'apparato innervativo vagale e la seconda sull'apparato simpatico.

Per quanto riguarda l'intestino, secondo gli autori (Biedl, [60]), l'azione degli estratti d'ipofisi consisterebbe, dapprima in un impiccolimento delle contrazioni ritmiche automatiche accompagnato da diminuzione del tono, e in un secondo tempo in un



18 maggio 1913. — Atrio del cuore di *Emys europaea*. Tempo: 5′, temper. dell'ambiente. In 1, si aggiunge al liquido di Ringer (50 cc.), in cui l'atrio è sospeso, 1 cc. di soluzione 1 °/₀₀ di β-iminazoliletilamina. In 2, si aggiunge allo stesso liquido 0,5 cc. di soluzione 1 °/₀₀ di adrenalina Clin. L'antagonismo fra le due sostanze è evidente. (Grandezza naturale).

aumento delle contrazioni ritmiche con forte aumento del tono. Data questa duplice azione, io ho voluto sperimentare la mia soluzione di ipofisina pura non solo sull'in-



17 maggio 1913. — Anello di carotide di toro. Tempo: 5′, temper.: 37° C. In 1, si aggiunge al liquido di Ringer (50 cc), in cui l'anello arterioso è sospeso, 1 cc. di soluzione 1 °/₀ di ipofisina. In 2, si cambia il liquido di Ringer. (Riduzione fotografica).

testino tenue, ma anche sul colon (muscolatura longitudinale e circolare) di cane e di cavia.

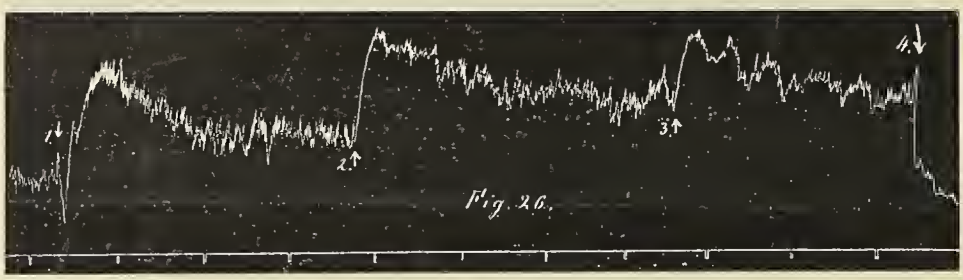
Sul colon di cavia (principalmente sulla muscolatura longitudinale, ma anche sulla circolare), l'ipofisina esercita azione nettamente contrattoria, senza traccia di azione depressoria sul tono o sulle contrazioni ritmiche automatiche (fig. 26). L'ef-

fetto contrattorio più cospicuo è esercitato per lo più dalla prima dose; le aggiunte successive, invece, sono meno efficaci. Cambiando il liquido di Ringer, in cui il preparato è immerso, il tono subito si abbassa (fig. 26, in 4.), il che, in parte, deve essere effetto del semplice cambiamento del liquido, conforme a quanto sopra ho detto (ved. pag. 53).

Sull'intestino di cane, gli effetti osservati furono diversi, secondo che si trattava dell'intestino tenue o del crasso.

Per quanto riguarda l'intestino tenue, l'ipofisina produsse un lieve ma duraturo abbassamento del tono, che tornò ad aumentare in seguito al cambiamento del liquido di Ringer.

Per quanto riguarda il colon di cane, la prima aggiunta di ipofisina produsse anche cospicuo abbassamento del tono, che poi si elevò cambiando il liquido di



22 maggio 1913. — Preparato di colon di cavia sospeso in 50 cm^3 di liquido di Ringer. Tempo: 5′, temper.: 37° C. In 1, si aggiungono al liquido 0,1 cm^3 di soluzione 1 °/₀ d'ipofisina. In 2, si aggiungono 0,5 cm^3, e in 3, 1 cm^3 della stessa soluzione. In 4, si cambia il liquido di Ringer. (Riduzione fotografica).

Ringer. Ma dopo alcuni minuti cambiai di nuovo il liquido di Ringer e lavai con questo liquido il preparato. L'effetto di questa seconda lavatura fu, prima abbassamento del tono, dovuto verosimilmente all'azione del liquido di Ringer fresco, e poi enorme aumento di esso. Durante l'esperimento, la temperatura, prima relativamente bassa (28° C.), crebbe gradatamente, fino a raggiungere, da ultimo, i 35° C. Si noti, però, che il massimo accorciamento del preparato coincise con la temperatura più alta. Come si vede, l'intestino crasso di cane presenta il duplice effetto descritto dagli autori: depressione, prima, forte contrattura, dopo; mentre il colon di cavia presenta sempre, cioè fin dal principio, contrattura cospicua; e l'intestino tenue di cane, per quanto io ho potuto vedere, solo abbassamento del tono. Non ostante il piccolo numero di esperimenti che ho potuto fare, posso concludere che l'effetto più sicuro dell'azione dell'ipofisina è quello osservato sul colon, e consiste in un forte aumento primario o secondario del tono, e cioè un effetto simile a quello della innervazione autonoma sacrale, ma opposto a quello che provocano l'adrenalina o la stimolazione del simpatico.

L'ipofisina eserciterebbe azione contrattoria anche sulla muscolatura vescicale e su quella dell'utero vergine (di gatta).

Abbiamo visto, inoltre, che fa contrarre energicamente anche il m. retrattore del pene. Ma su questo, la stimolazione del sistema autonomo sacrale provoca, in-

vece, netta inibizione. Dobbiamo quindi concludere che l'ipofisina, mentre sull'atrio del cuore di *Emys* agisce come l'innervazione autonoma bulbare, sul m. retrattore agisce invece in senso opposto all'innervazione autonoma sacrale; e quindi che agisce, o, come l'adrenalina, sulle giunzioni simpato-muscolari, o direttamente sulle cellule muscolari lisce, provocandone la contrazione. Ma poichè sull'atrio di *Emys* e sull'intestino l'ipofisina si rivela come una sostanza antagonista rispetto all'adrenalina, è più logico ammettere, almeno provvisoriamente, la seconda di queste due ipotesi, e cioè che l'*ipofisina, come la β-iminazoliletilamina, esercita verosimilmente la sua azione, sempre contrattoria, direttamente sulle cellule muscolari lisce e non sopra apparati sinaptici o giunzionali.*

Riassumendo i risultati ottenuti da me, da Quagliariello e da altri autori, si può costruire il seguente paradigma, utile per la rapida intelligenza degli effetti prodotti dalle sostanze sperimentate sui varii organi muscolari lisci:

Sostanze	Atrio di Emys	Arterie	Esofago di Pulcino	Intestino tenue	Colon	*M. retractor penis*	Musc. bronchiale	Utero vergine	Vescica urinaria
Adrenalina. . .	Inibiz.	Contr.	Inibiz	Inibiz.	Inibiz.	Contr.	?	Inibiz.	Inibiz.
Tiramina . . .	Inibiz.	Contr.	—	Inibiz.	Inibiz.	Contr.	Contr.	Inibiz.	—
Ipofisina. . . .	Contr.	Contr.	—	?	Contr.	Contr.	—	Contr.	Contr.
Istamina. . . .	Contr.	Contr.	Contr.	Contr.	Contr.	Contr	Contr.	Contr.	—

Da questo diagramma resulta un fatto singolare, cioè che *sul m. retrattore del pene di cane nessuna delle sostanze sperimentate* (fra le quali sono due ormoni) *è capace di esercitare azione inibitoria*; ossia che, sulle « giunzioni sacro-muscolari » (cioè, delle fibre postgangliari autonome sacrali, che sono inibitorie, con le cellule muscolari lisce del m. retrattore), le quali, se esistono, debbono teoricamente considerarsi come distinte dalle « giunzioni simpato-muscolari » (cioè, delle fibre postgangliari simpatiche, che sono motorie, con le stesse cellule), nessuna delle sostanze sperimentate agisce, producendo inibizione.

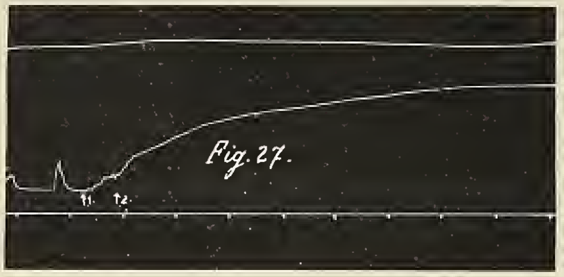
Questo fatto può essere punto di partenza di altre ricerche sperimentali, rivolte a studiare comparativamente il meccanismo delle azioni nervose inibitorie svolgentisi nell'ambito dei due apparati autonomi, bulbare e sacrale; e perciò mi astengo, per ora, dallo sviluppare quelle considerazioni ipotetiche, che il fatto medesimo fin da ora sarebbe capace di suggerire.

8. — *Azione di alcuni alcaloidi e glicosidi.*

Tratterò prima degli alcaloidi e poi dei glicosidi.

1) Azione della veratrina e della nicotina sul m. retrattore del pene di cani adulti. — La veratina (solfato) provoca nel m. retrattore del pene di cani adulti un fortissimo accorciamento (fig. 27) che dura molto tempo e rende poi il muscolo ineccitabile, tanto più presto quanto maggiore fu la dose di

alcaloide usata. Sembra, inoltre, che la grandezza della contrattura e la rapidità dell'ascesa della curva siano approssimativamente proporzionali alla quantità di veratrina fatta agire sul muscolo. Forse v'influisce anche la temperatura. Infatti, in un esperimento, il muscolo era immerso in liquido di Ringer riscaldato a 39° C., mentre in un altro esperimento fatto lo stesso giorno, il liquido era alla tempera-



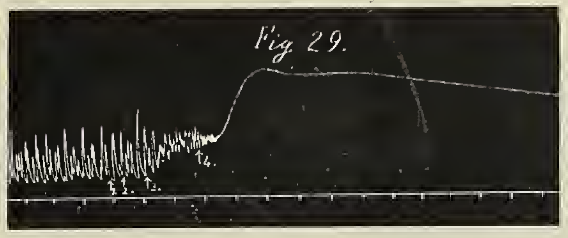
15 luglio 1913. — *M. retractor penis* di cane. Peso: gr. 5, tempo: 5′, temper.: 31° C. In 1, si aggiungono al liquido di Ringer (100 cm³) 0,1 cm³ di soluzione 2 % di solfato di veratrina. In 2, si aggiungono altri 0,4 cm³ della stessa soluzione. (La curva superiore è continuazione della inferiore). (Riduzione fotografica).

tura di 31° C. Ebbene, nel primo la veratrina provocò una contrattura maggiore che nel secondo, la quale forse era da attribuirsi non solo alla dose di poco maggiore della veratrina, ma anche, almeno in parte, alla più alta temperatura.

17 luglio 1913. — *M. retractor penis* di cane. Peso: gr. 5, tempo: 5′, temper.: 35° C. In corrispondenza della freccia (↑) si aggiungono al liquido di Ringer (100 cm³) 0,1 cm³ di soluzione 1 % di nicotina. (Riduzione fotografica).

La nicotina rivelasi meno tossica, a giudicare dal fatto che il m. retrattore riprende la sua funzione motoria automatica, anche dopo aver subìto l'azione di dosi considerevoli dell'alcaloide. La fig. 28 dimostra che la nicotina, aggiunta al liquido di Ringer fino alla concentrazione di circa 1:100000, provoca una rapida ma piuttosto breve contrattura, dopo la quale si ripresentano e continuano per molto tempo le contrazioni spontanee. Più tardi, sullo stesso muscolo furono fatte agire dosi di nicotina crescenti da 0,1 a 0,5 cm³ della soluzione 1 % su 100 cm³ di liquido di Ringer (fig. 29). Dopo la terza aggiunta, il muscolo incominciò ad accorciarsi, senza cessare di contrarsi

ritmicamente. Solo dopo l'aggiunta di 2 gocce di nicotina pura, il muscolo s'accorciò durevolmente. Lo stesso risultato si ebbe nell'esperimento, al quale corrisponde la



17 luglio 1913. — Lo stesso muscolo della figura precedente, dopo che le contrazioni ritmiche automatiche si sono perfettamente ristabilite. Ulteriore aggiunta di nicotina:

in 1, 0,1 cm³ della soluzione 1 %
» 2, 0,1 » » » »
» 3, 0,5 » » » »
» 4, 2 gocce di nicotina pura.

Solo dopo la 3ª aggiunta, si eleva il tono. (Riduzione fotografica).

fig. 30. Anzi, in questo caso, dopo l'azione della nicotina (0,5 cm³ della soluzione

1 luglio 1913. — *M. retractor penis* di cane. Peso: gr. 5, tempo: 5′, temper.: 31° C. In corrispondenza della freccia (↑), si aggiungono al liquido di Ringer (100 cm³) 0,5 cm³ di soluzione 1 % di nicotina. (Riduzione fotografica).

1 % su 100 cm³ di liquido Ringer, a circa 33° C.), le contrazioni automatiche del muscolo, che erano piccole prima, si accentuarono notevolmente; onde può dirsi che la nicotina esercitò un'azione piuttosto eccitante che paralizzante.

Analogo risultato ebbi nell'esperimento, cui si riferisce il tracciato della fig. 31. Riporterò, finalmente, il tracciato della fig. 32, dal quale risulta che la veratrina agisce sul m. retrattore del pene fetale come su quello di animali adulti.

21 luglio 1913. — *M. retractor penis* di cane. Peso: 5 gr., tempo: 5', temper.: 34° C. In corrispondenza della freccia (↑) si aggiunge al liquido di Ringer (100 cm^3) 1 goccia di nicotina pura, e si ha come effetto, aumento del tono, con sviluppo delle contrazioni ritmiche automatiche. (Riduzione fotografica).

2) Azione di alcune sostanze sui muscoli striati e lisci di feto di bue. — I muscoli fetali, oggetto di queste ricerche, sono: una striscia di muscolo diaframmatico (striato) e il m. retrattore del pene (liscio) di feti di bue in diversi periodi di sviluppo. Il m. retrattore del pene può essere facilmente isolato da feti di bue del peso di kg. 1,500 o più. Esso costituisce un ottimo materiale per ricerche di fisiologia sul tessuto muscolare liscio fetale, del quale mi propongo di servirmi molto, appresso.

Quanto al muscolo diaframmatico fetale, esso è stato usato in questi esperimenti unicamente per confrontare i risultati da esso dati con quelli ottenuti dal m. retrattore.

Le sostanze chimiche da me sperimentate furono: l'ipofisina, la tenosina, la veratrina e la nicotina.

Dai tracciati delle figg. 18, 19 e 32 resulta, in breve, quanto segue:

1° La « tenosina » esercita azione contrattoria sul m. retrattore fetale precisamente come l'esercita su quello dei cani adulti.

2° La « tenosina » non esercita alcuna azione contrattoria sul m. diaframmatico fetale, come non l'esercita su quello degli animali adulti.

3° Sui preparati diaframmatici fetali, sui quali la « tenosina » si era rivelata del tutto inefficace, la veratrina e la nicotina producono fortissimi accorciamenti, come sui preparati diaframmatici di animali adulti.

3) Azione dell'atropina, della colina, della muscarina e della pilocarpina. — L'atropina (solfato), fatta agire da sola, contrariamente a ogni previsione provoca, alla concentrazione, del resto variabile, alla quale io l'ho ado-

perata, nel m. retrattore del pene per lo più un fortissimo accorciamento duraturo (fig. 33). L'effetto è più cospicuo se, al momento in cui agisce l'alcaloide, il muscolo trovasi in stato di mediocre accorciamento o di allungamento. L'atropina eccita anche spesso le contrazioni ritmiche automatiche, determinando in qualche caso un

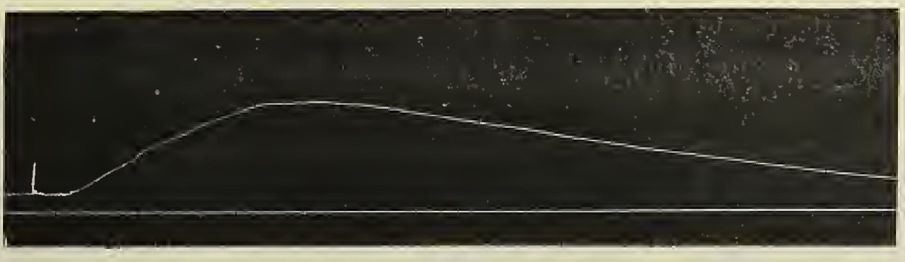
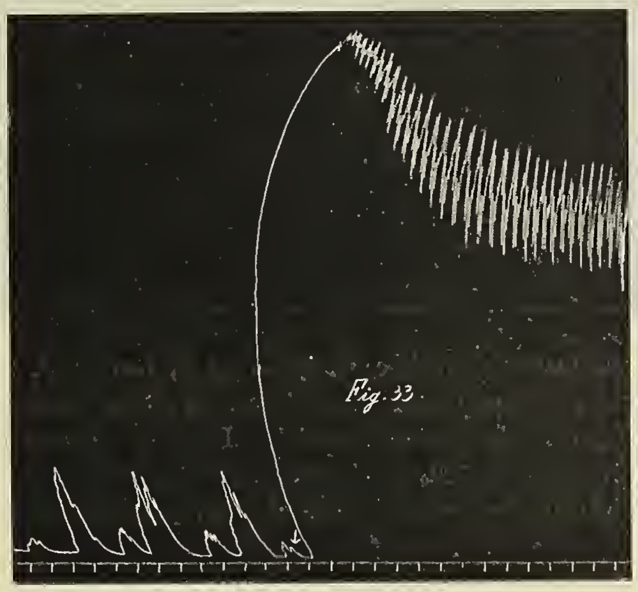


Fig. 32. — Preparato diaframmatico di feto di bue. In 1 e 2, si aggiungono al liquido di Ringer (100 cm³) 2 gocce di soluzione 1 °/₀ di solfato di veratrina. Peso: gr. 2, temper.: 36° C. (Prima di 1, il preparato risponde con una contrazione rapida a una stimolazione elettrica di corrente indotta). (Riduzione fotografica).

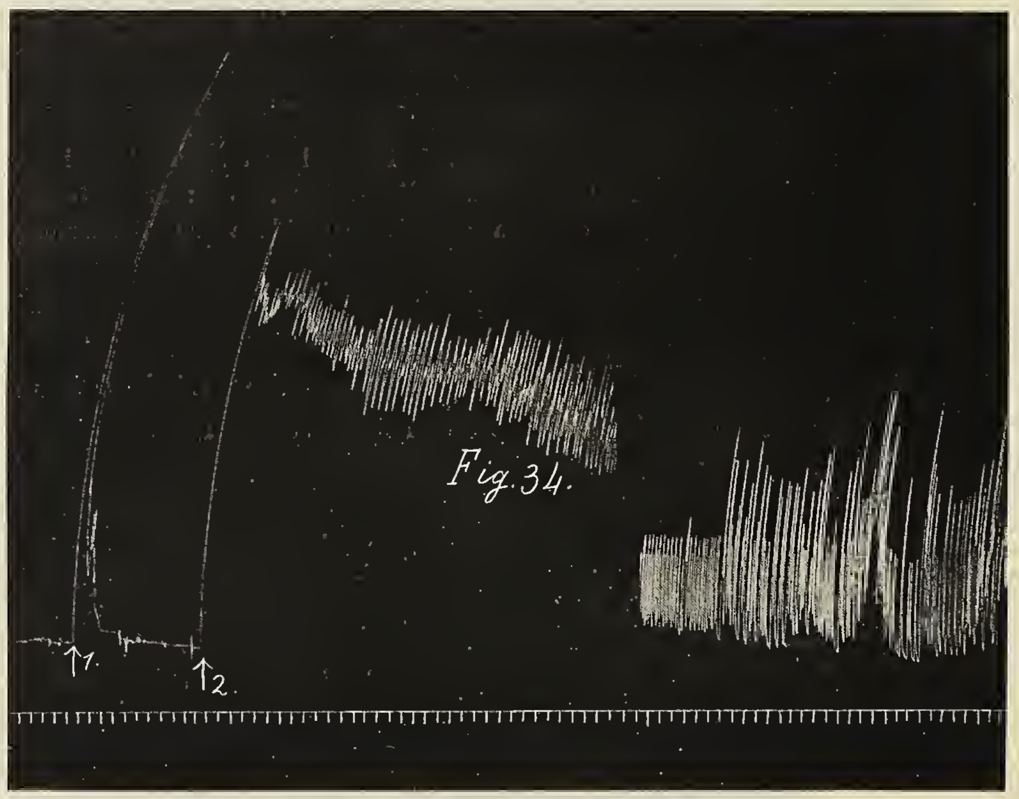
ritmo regolarissimo di esse (ved. fig. 33). (Nel caso cui si riferisce la fig. 33, il tracciato presenta l'aspetto di uno della pressione del sangue!)



12 marzo 1914. — *M. retractor penis* di cane. Peso: gr. 3, tempo: 1′, temper.: 33° C. In corrispondenza della freccia (↑) si aggiungono al liquido di Ringer 0,4 cm³ di soluzione 5 °/₀ di solfato di atropina. Effetto: enorme aumento del tono, e sviluppo delle contrazioni ritmiche automatiche, che appariscono inscritte sopra una linea ondulata. (Riduzione fotografica).

Di muscarina ho avuto a mia disposizione due preparati: soluzione di cloruro di muscarina, gentilmente fornitami dal prof. W. Straub e conservata in tubetti originali chiusi alla fiamma; e muscarina pura della Casa Grübler. Similmente, ho potuto sperimentare sia la colina pura (fornitami dalla Casa Bayer), come il cloruro di colina della Casa Kahlbaum.

La colina esercita, nell'una e nell'altra forma, sempre azione contrattoria (fig. 34), specialmente se il muscolo si trovava in stato di allungamento, ma anche se si trovava in stato di mediocre accorciamento. Essa è poco tossica. Se ne possono, infatti, aggiungere dosi considerevoli senza che il muscolo ne rimanga notevolmente danneggiato. Se si provoca l'allungamento del retrattore, già sottoposto all'azione della colina, lavandolo con liquido di Ringer fresco, la successiva aggiunta di colina determina di nuovo accorciamento. Una volta, un preparato che non aveva mai eseguito con-



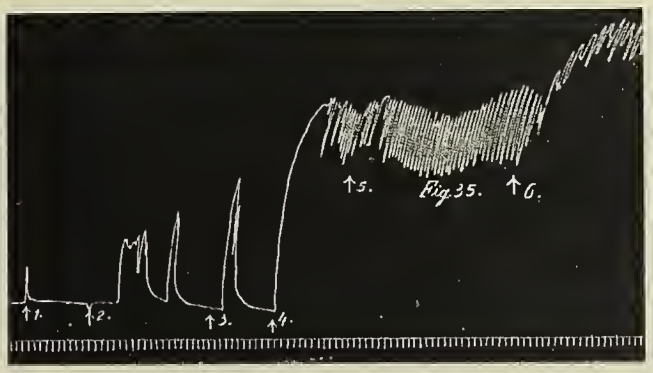
4 maggio 1914. — *M. retractor penis* di cane. Peso: gr. 5, tempo: 1', temper.: 33° C. In 1, si stimola elettricamente il muscolo, che risponde con una forte contrazione. Prima non aveva mai eseguito contrazioni ritmiche automatiche. In 2, si aggiungono al liquido di Ringer (100 cm^3) 2 cm^3 di soluzione 5 % di cloruro di colina. Effetto: forte elevazione del tono e sviluppo delle contrazioni ritmiche automatiche, che poi durarono per molto tempo. (Grandezza naturale).

trazioni ritmiche automatiche, pur essendo eccitabile per gli stimoli di corrente indotta, dopo avervi fatto agire la colina, si accorciò e incominciò a eseguire contrazioni automatiche che durarono per molto tempo. È certo, dunque, che la colina, nelle dosi in cui io l'ho adoperata (in piccole dosi è quasi inattiva) va annoverata, specialmente per quanto riguarda il m. retrattore del pene in stato di allungamento, fra le sostanze che ne elevano il tono e vi provocano contrazioni ritmiche automatiche.

La muscarina agisce in modo analogo, sebbene più intensamente: anch'essa eleva il tono del m. retrattore e vi provoca contrazioni ritmiche, anche se per molto tempo

di queste non si era osservata traccia (fig. 35), specialmente quando il muscolo all'inizio dell'esperimento si trova in stato di allungamento.

Se però il muscolo, al momento in cui si fa agire la muscarina, si trova in stato di forte contrattura, l'effetto che si osserva può essere un abbassamento del tono, come si vede nel tracciato della fig. 35 *a*, e come ho osservato in due altri esperimenti. Questo allungamento del muscolo, però, non segue immediatamente all'aggiunta della muscarina, e oltre a ciò è, per lo più, relativamente piccolo. Si noti poi, nel caso della fig. 35 *a*, come a misura che il misculo si venne distendendo, le sue contrazioni ritmiche automatiche diventarono sempre più ampie e regolari.



22 maggio 1914. — *M. retractor penis* di cane. Peso: 6 gr., tempo: 1', temper.: 33°. Il muscolo non eseguì per molto tempo contrazioni ritmiche spontanee. In 1, lo si stimola elettricamente, e risponde. Quindi si aggiunge, più volte di seguito, al liquido di Ringer (100 cm³), soluzione 5 °/₀₀ di muscarina, nelle seguenti proporzioni:

in 2,	3	gocce	della	soluzione
» 3,	3	»	»	»
» 4,	1	cm³	»	»
» 5,	1	»	»	»
» 6,	2	»	»	»

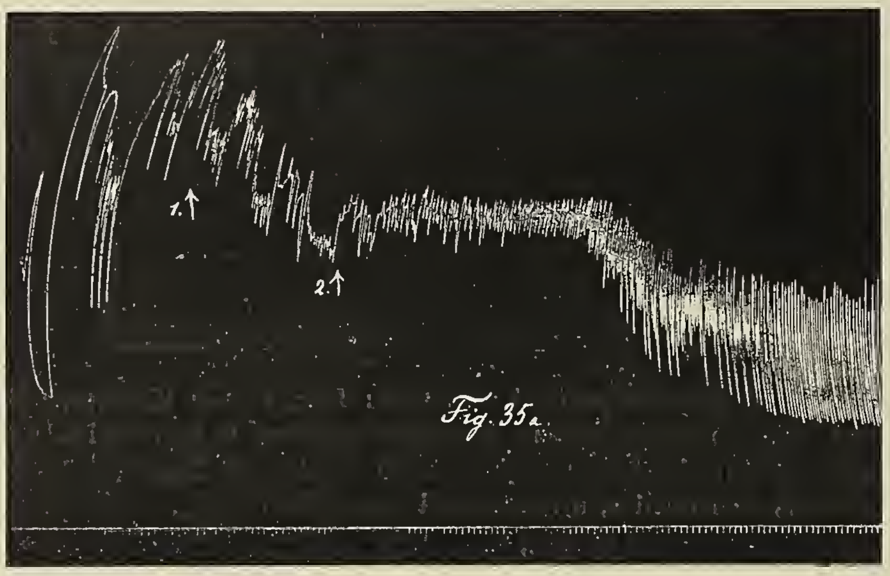
L'azione contrattoria e stimolante sull'attività ritmica è evidente. (Riduzione fotografica).

Parrebbe, dunque, che esistesse differenza fra i resultati circa l' azione della muscarina. Ma tale differenza potrebbe essere dovuta, verosimilmente, solo allo stato di tonicità in cui si trovava il m. retrattore al momento in cui si fece agire su esso la sostanza. Infatti, spesso si osserva un effetto diverso, anzi opposto, secondo che una data sostanza agisce su un muscolo liscio in stato di forte accorciamento o di allungamento. Io posso escludere altre cause, perchè la muscarina da me usata fu sempre muscarina artificialmente preparata, e perchè ho usato l'uno e l'altro preparato a mia disposizione in dosi piccole e grandi. Rimarrebbe, dunque, la causa sopra detta. Infatti, in tutti i casi nei quali osservai inibizione del tono, il m. retrattore si trovava in stato di cospicuo accorciamento tonico.

Circa l' azione dell' atropina e della muscarina sul m. retrattore, debbo citare anche le osservazioni del de Zilwa ([38]). Questi, in verità, confessa che risultati contradditori ottenne con l'atropina. Ma nel maggior numero dei casi afferma che l'effetto prodotto dall'atropina fu di diminuire il tono del muscolo, e in alcuni casi di abolire le contrazioni ritmiche spontanee; mentre la muscarina, egli aggiunge,

determinò in ogni caso un certo aumento del tono, che poteva essere di nuovo abolito facendo agire l'atropina.

Io debbo, però, a questo proposito osservare che il de Zilwa, non si sa perchè, usò l'atropina in soluzione 1 $^0/_0$ mescolata con sangue defibrinato, mentre la muscarina fu adoperata in soluzione 0.1 $^0/_0$ facendola cadere a gocce direttamente sul muscolo. Ora, io ho già detto sopra, che l'aggiunta di siero o di sangue defibrinato non è indifferente. Tuttavia il siero di sangue provoca sempre accorciamento del m. retrattore, e quindi tanto meno si comprende l'effetto inibitorio dell'atropina fatta agire da sola, descritto dal de Zilwa, che io, in molti esperimenti, non ho mai osservato.



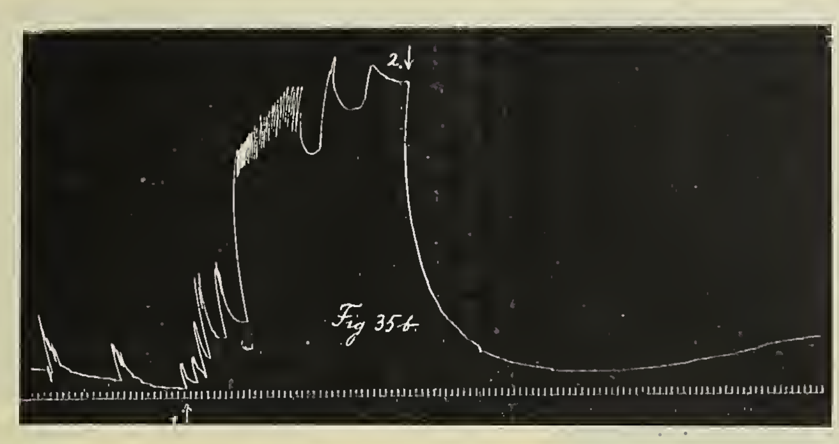
26 luglio 1914. — *M. retractor penis* di cane. Temper.: da 34,5° a 36° C. Tempo: 1'. In corrispondenza delle due frecce (↑), si aggiungono ai 100 cm³ di liquido di Ringer, prima 0,2 e poi 0,3 cm³ di soluzione 0,5 °/₀ di muscarina Grübler. Avanti la prima aggiunta, il muscolo si trovava in stato di cospicuo accorciamento. (Riduzione fotografica).

In un altro mio esperimento, l'antagonismo fra atropina e muscarina risultò evidentissimo. Il tracciato della figura 35 *b* dimostra, infatti, che l'atropina produsse (in 2.) un rapido e fortissimo allungamento del muscolo, in cui la muscarina aveva provocato (in 1.) uno stato di intensa contrattura. Prima dell'azione della muscarina, il preparato si trovava in stato di estrema distensione.

Pare quindi, che l'atropina sia capace di inibire il tono eccitato dalla muscarina, mentre agendo da sola, primariamente, provocherebbe contrattura nel m. retrattore isolato. Come sia da spiegarsi questa varia azione dell'atropina, io non so dire. Certo è, che in circa dieci esperimenti, non ho mai osservato che l'atropina provocasse diminuzione primaria del tono, nemmeno quando il muscolo si trovava in stato di cospicua contrattura spontanea (non dovuta all'azione della muscarina), al momento in cui l'alcaloide fu aggiunto.

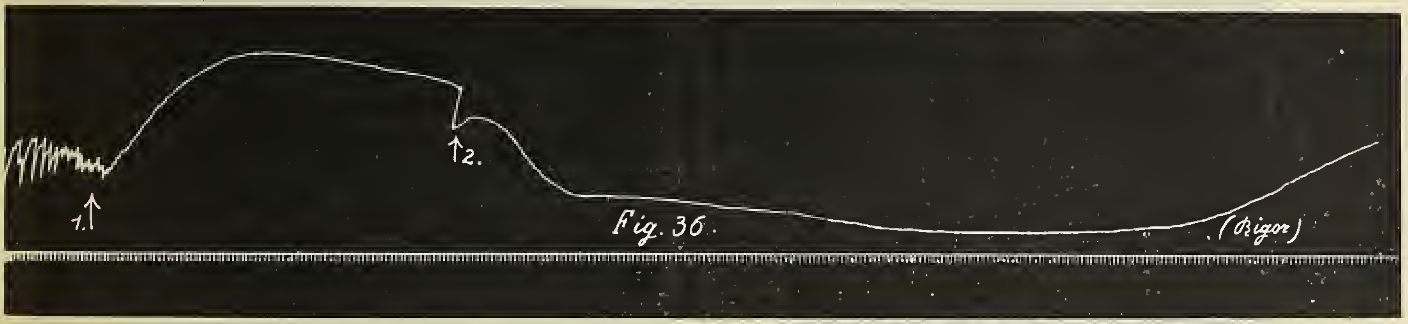
Degno di nota fu il fatto, da me osservato, che, reso il muscolo retrattore irresponsivo, per ripetute aggiunte, all'azione contratturante dell'atropina, nemmeno una dose generosa di veratrina fu poi capace di provocare in esso il minimo accorciamento.

Il cloridrato di pilocarpina provoca ordinariamente nel m. retrattore del pene, purchè questo non si trovi già in stato di contrattura, un forte accorciamento che dura un tempo considerevole, come nei due esperimenti delle figg. 36 e 37. In



28 luglio 1914. — *M. retractor penis* di cane, immerso in 100 cm³ di liquido di Ringer. Peso: gr. 3, tempo: 1′, temper.: 36° C. In corrispondenza dalla prima freccia (↑), a sinistra e in basso, aggiungo al Ringer cm³ 0,2 di soluz. 0,5 % di muscarina Grübler; in corrispondenza della seconda freccia (↑), a destra e in alto, aggiungo allo stesso liquido cm³ 0,2 di soluz. 1 % di solfato di atropina. (Riduzione fotografica).

questi due casi il muscolo tornò poi ad allungarsi; ma dopo un certo tempo intervenne un nuovo e forte accorciamento terminale, che ricorda il *rigor mortis* (figg. 36



5 giugno 1914. — *M. retractor penis* di cane piccolo. Peso: 1 gr., tempo: 1′, temper.: 33°-34° C. In 1, si aggiunge al liquido di Ringer (100 cm³) 1 cm³ di soluzione 1 % di cloruro di pilocarpina In 2, si lava il muscolo con liquido di Ringer fresco alla stessa temperatura. (Dopo la lavatura, il tono si abbassa, ma poi di nuovo il muscolo, dopo un certo tempo, si accorcia). (Riduzione fotografica).

e 37). Si direbbe che la pilocarpina sia capace d'indurre nel m. retrattore il fenomeno della rigidità cadaverica relativamente più presto delle altre sostanze finora sperimentate.

Se però il preparato muscolare, al momento dell'azione della pilocarpina, si trova già in stato di forte contrattura, come nel caso della figura 37 *a*, o presenta una spiccata tendenza a eseguire tetani di lunga durata, come nel caso della fig. 37 *b*,

allora la pilocarpina, con notevole ritardo, provoca un progressivo allungamento del muscolo, durante il quale appariscono sul tracciato contrazioni ritmiche automatiche più (fig. 37 *b*) o meno (fig. 37 *a*) ampie e regolari.

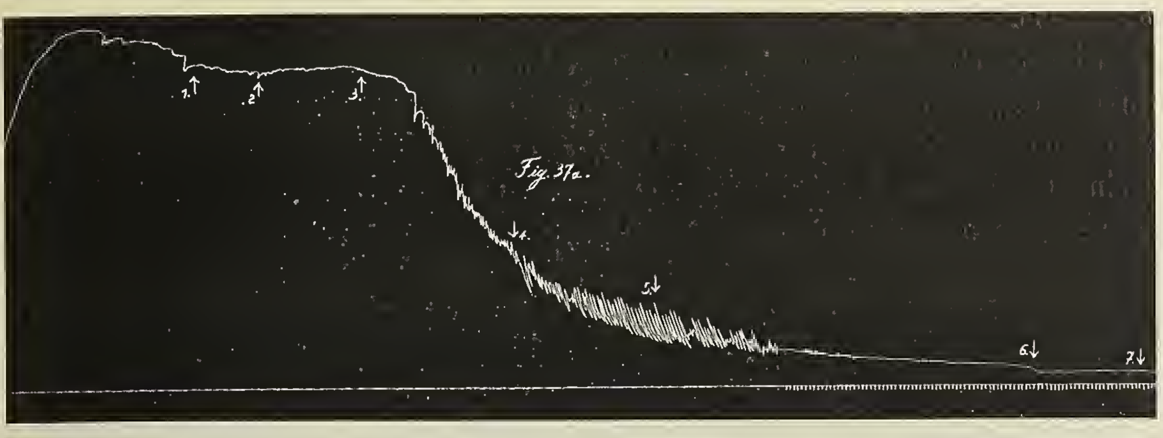
6 giugno 1914. — *M. retractor penis* di cane giovane. Peso: 1 gr., tempo: 1', temper.: 33°-35° C. In 1, si aggiungono al liquido di Ringer (100 cm³), 0,4 cm³ di soluzione 1 % di pilocarpina. (L'abbassamento del tono precedente l'aggiunta era avvenuto spontaneamente). In 2, si aggiungono altri cm³ 0,4 della stessa soluzione di pilocarpina. In 3, si dà uno strappo alla leva (stimolo tensivo). Il muscolo lentamente si allunga, ma da ultimo torna ad accorciarsi fortemente. (Riduzione fotografica).

Ma questo allungamento del muscolo non presenta affatto i caratteri di un fenomeno d'inibizione fisiologica. Infatti, come vidi nell'esperimento cui si riferisce la fig. 37 *a*, mentre il muscolo si allungava eseguendo piccole contrazioni ritmiche, non solo l'atropina (in 4. e 5.), ma anche l'adrenalina (in 6.) e persino da ultimo la digitalina (in 7.) si dimostrarono incapaci di provocare una contrazione tonica, sia pure debole, del muscolo. Il preparato, dunque, dopo aver subìto l'azione della pilocarpina e dell'atropina, non era inibito, era morto.

In conclusione, la pilocarpina provoca, nel m. retrattore che si trovi in stato di minima o mediocre contrazione tonica, forte contrattura primaria, che è seguìta da allungamento, durante il quale, se l'azione della pilocarpina non fu eccessivamente intensa, si presentano cospicue contrazioni ritmiche automatiche. Il detto allungamento corrisponde piuttosto a una progressiva paralisi, che a una inibizione fisiologica e transitoria del tono. Quando hanno agito dosi considerevoli di pilocarpina, all'allungamento segue, da ultimo, l'accorciamento da rigidità.

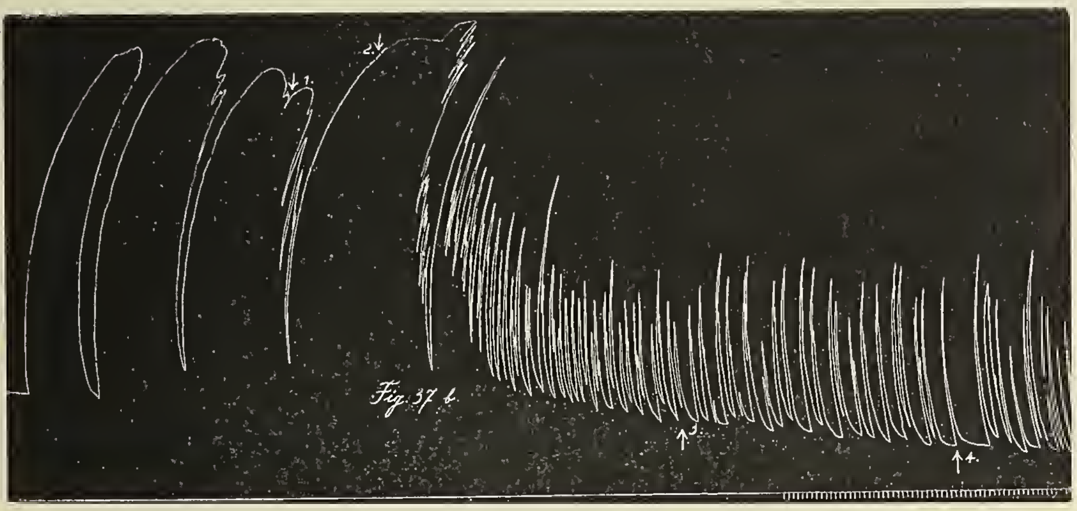
Ho voluto, infine, sperimentare anche l'azione del nitrito sodico, il quale, secondo Froehlich e Loewi ([48]), mette fuori d'azione in modo elettivo gl'impulsi nervosi correnti per i nervi inibitori del sistema autonomo. Come risulta dalla fig. 37 *c*, 1 cm³ di soluzione 1 % di nitrito sodico aggiunto (in 1.) ai 100 cm³ di liquido di Ringer, produsse immediato e fortissimo abbassamento del

tono del m. retrattore, che stava eseguendo piccole e rapide contrazioni ritmiche automatiche sopra una linea di tonicità altissima e ancòra crescente. L'azione inibitrice



25 luglio 1914. — *M. retractor penis* di cane immerso in 100 cm³ di liquido di Ringer. Peso: 3 gr., temper.: 29° C, tempo: 1'. Si aggiungono:

in 1, 0,1 cm³ di soluz. 1 °/₀ di cloridrato di pilocarpina
» 2, 0,2 » » » »
» 3, 0,1 » » » »
» 4, 0,2 cm³ di soluz. 2 °/₀ di solfato di atropina
» 5, 0,5 » » » »
» 6, 5 gocce di soluz. di adrenalina Clin.
» 7, 1 cm³ di soluz. 2 °/₀ di digitalina. (Riduzione fotografica).



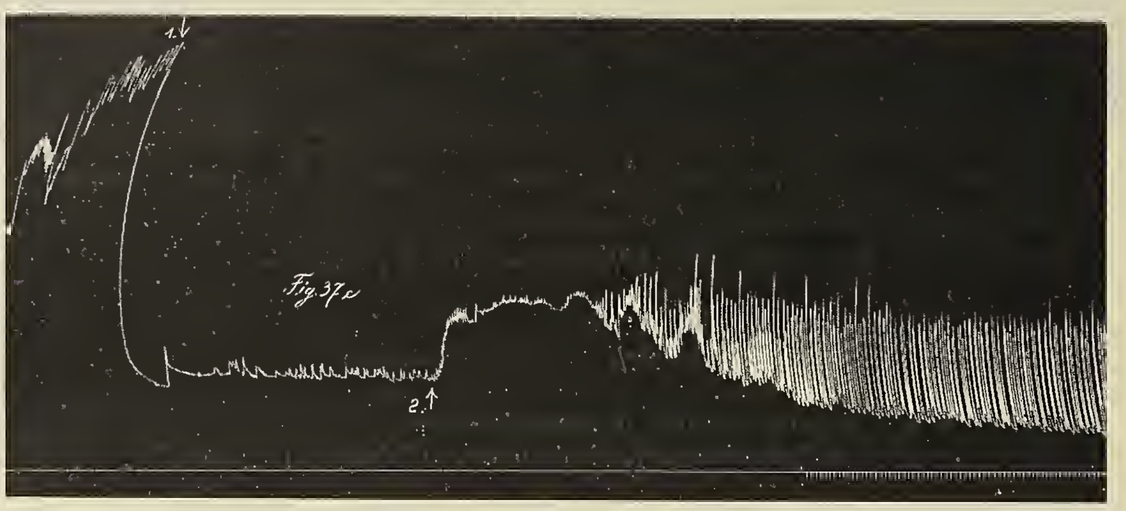
10 luglio 1914. — *M. retractor penis* di cane. Peso: gr. 3, temper.: 29-30° C., tempo: 1'. Si aggiungono agli 80 cm³ di liquido di Ringer:

in 1, 0,1 cm³ di soluz. 1 °/₀ di clorid. di pilocarpina
» 2, 0,1 » » » »
» 3, 0,1 » » » »
» 4, 1,0 » » » » (Riduzione fotografica).

del nitrito durò per molto tempo; il muscolo faceva contrazioni ritmiche a dirittura trascurabili. Ma il muscolo non aveva perduto la sua capacità funzionale. Infatti, aggiunta in corrispondenza della seconda freccia (in 2.) una piccola dose di pirocarpina

(0,3 cm^3 della soluzione 1 $^0/_0$), il tono del preparato tosto si elevò, e poi, dopo alcune oscillazioni, apparvero contrazioni ritmiche automatiche, le quali col tempo divennero sempre più cospicue e regolari, mentre il tono del preparato di nuovo si veniva abbassando.

Si noti, che sopra una stessa linea di tonicità, il muscolo non eseguì contrazioni ritmiche degne di nota per tutto il tempo che si trovò sotto l'azione del nitrito, mentre ne eseguì di cospicue dopo l'aggiunta della pilocarpina. L'azione della pilocarpina fu, dunque, in questo caso, analoga a quella già descritta nelle precedenti esperienze, non ostante che sul muscolo avesse già agito il nitrito di sodio.



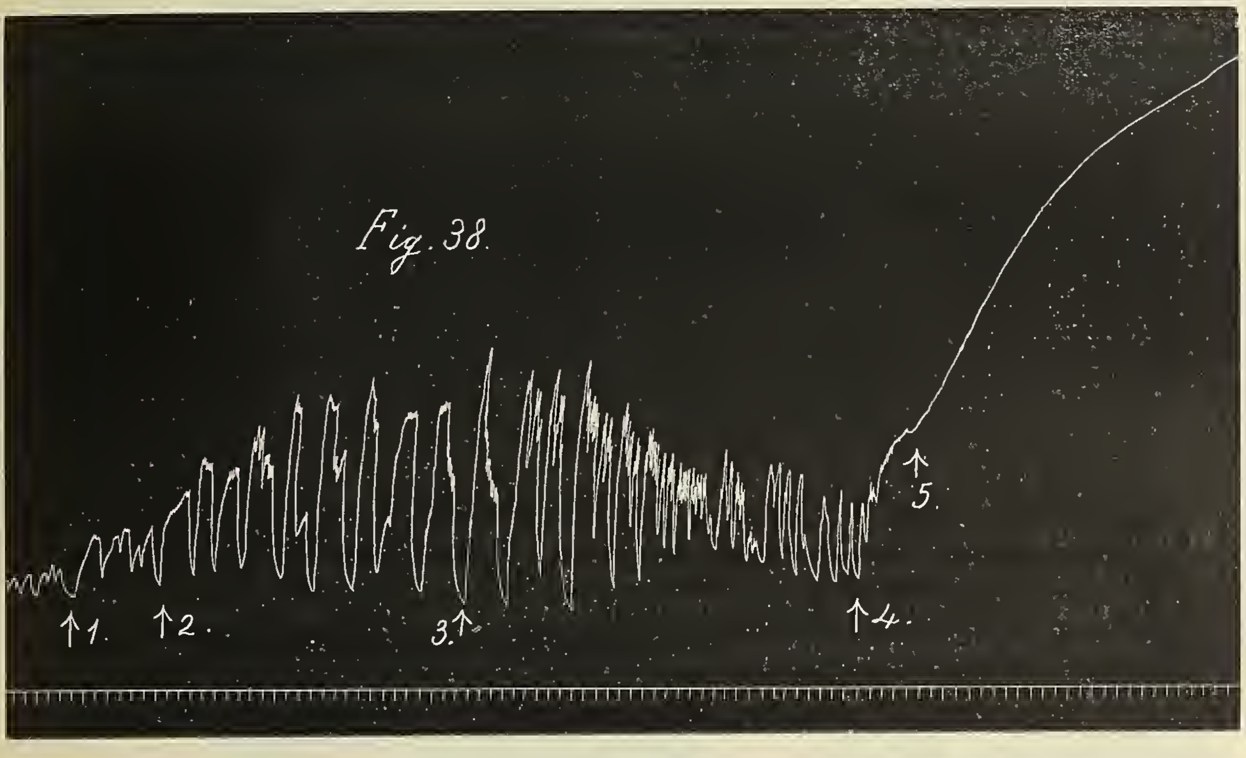
24 luglio 1914. — *M. retractor penis* di cane immerso in 100 cm^3 di liquido di Ringer. Temper.: 35° C, tempo: 1'. Azione del nitrito sodico, in corrispondenza della prima freccia (↑), a sinistra, e della pilocarpina, in corrispondenza della seconda freccia (↑), a destra. (Riduzione fotografica).

Secondo Froehlich e Loewi, i nitriti paralizzano l'innervazione autonoma inibitoria, compresa quella sacrale sul m. retrattore che interviene nel meccanismo della erezione, quando sono iniettati nel sangue. Se tale loro azione si esercitasse sulle giunzioni neuromuscolari delle fibre antonome sacrali, i nitriti, fatti agire sul muscolo isolato in stato di contrattura come nell' esperimento di cui parlo, dovrebbero non produrre alcun effetto, o al più produrre un ulteriore accorciamento del muscolo, perchè questo, paralizzato l'intrinseco apparecchio inibitorio, rimarrebbe sotto l'influenza preponderante dell' apparecchio innervativo contrattorio (giunzioni simpato-muscolari). Invece essi provocano fortissima inibizione del tono, analoga a quella che si avrebbe stimolando il nervo erigente.

Vuol dire, dunque, che *in vivo* i nitriti agiscono sopra apparati nervosi estrinsechi al muscolo, probabilmente sui gangli intercalati lungo il nervo erigente, e che questi gangli non rimangono compresi nel m. retrattore, quando questo è isolato e asportato dal corpo nel modo che io soglio fare.

Inoltre, se è così, bisogna ancòra ammettere che nel produrre l'enorme allungamento sopra descritto del muscolo isolato in stato di cospicua contrattura, i nitriti agiscono sugli stessi elementi muscolari, essendo esclusa la possibilità di una loro

azione eccitante sopra le giunzioni simpato-muscolari. La conclusione generale a cui si giunge, sulla base di questi e di altri esperimenti, è che, mediante l'uso dei veleni, non si riesce a dimostrare che nel m. retrattore del pene isolato esistano apparecchi nervosi gangliari inibitori. Essendo d'altro canto noto, che i rispettivi gangli simpatici per cui passano le fibre del sistema toraco-lombare si trovano fuori del muscolo, ne viene di conseguenza che questo verosimilmente è del tutto privo di cellule nervose gangliari.



9 marzo 1914. — *M. retractor penis*, porzione media della parte peniena. Peso: gr. 5, tempo: 1', temper.: 34° C. In **1**, **2** e **3**, si aggiungono al liquido di Ringer (100 cm^3) 0,2, 0,5 e 1 cm^3 di soluzione 1 °/₀ di cloruro d'idrastinina. In **4** e in **5**, si aggiungono 0,2 e 0,5 cm^3 di soluzione 1 °/₀ di digitalina. (Grandezza naturale).

4) A z i o n e d e l l a i d r a s t i n i n a, d e l l a d i g i t a l i n a, d e l l a c i m a r i n a e d e l l a p a p a v e r i n a (*). — Le prime tre sostanze provocano nel m. retrattore del pene più o meno forte accorciamento. A parità di dose, però, assai più attive sono la digitalina e la cimarina (figg. 38 e 39), che l'idrastinina.

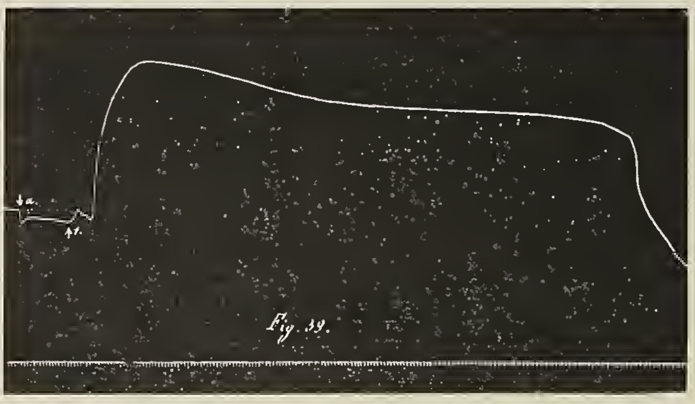
(*) La cimarina è la sostanza attiva dell'*Apocynum cannabinum*, che la Casa F. Bayer et C. ha isolato allo stato di purezza per la prima volta. Essa è stata finora, che io sappia, sperimentata solo sul cuore, rivelandosi ottimo cardiocinetico. Data la sua natura glicosidica, si comprende l'affinità che essa presenta con altri glicosidi, quali la digitalina, la strofantina ecc., nella sua azione fisiologica sia sul cuore, come sugli organi muscolari lisci.

La papaverina è un alcaloide complesso (C_{20} H_{21} NO_4), una tetrametossibenzilisochinolina. contenuta nell'oppio in piccola quantità (0,8 — 1 °/₀), donde fu separata nel 1848 da Merck. Iu acqua è quasi insolubile (ved. I. Schmidt, *Pflanzenalkaloide*, in: E. Abderhalden's, *Biochemisches Handlexikon*, 5, pag. 193, Berlin 1911).

Queste due sostanze, la cimarina e la papaverina, mi furono gentilmente fornite dalla Casa F. Bayer et C.

Sul tracciato della fig. 38, si vede prima (in 1., 2., 3.) l'effetto prodotto dalla idrastinina, e poi quello prodotto (in 4., 5.) dalla digitalina.

Il m. retrattore che scrisse il tracciato della fig. 40, dapprima eseguì un fortissimo accorciamento spontaneo di lunga durata. Quindi gli furono applicate, nei momenti corrispondenti ai numeri 1, 2, 3, 4, 5 e 6, altrettante brevissime stimolazioni elettriche di corrente indotta, le quali valsero a provocare allungamenti (inibizioni) transitori di brevissima durata. Un allungamento progressivo e duraturo produsse poi l'elevazione graduale della temperatura del liquido di Ringer (da 25° a 37° C). Mentre il muscolo si trovava in estensione, fu aggiunta ai 100 cm³ di liquido di Ringer 1 goccia



27 marzo 1914. — *M. retractor penis* di cane giovanissimo. Peso: gr. 2, tempo: 1′, temper.: 33,5° C. In *a*, si stimola elettricamente il muscolo, che non fa contrazioni ritmiche spontanee. In 1, si aggiunge al liquido di Ringer (50 cm³) 1 cm³ di soluzione 1 °/₀₀ di cimarina (della casa Bayer). (Riduzione fotografica).

di soluzione 2 °/₀ di digitalina, la quale produsse, come si vede (in 1.) a destra del tracciato, un accorciamento fortissimo e di lunga durata.

La papaverina che è pochissimo solubile in acqua, sciolta fino a saturazione in liquido di Ringer, uccide in breve tempo il m. retrattore, di cui deprime il tono e abolisce le contrazioni automatiche e l'eccitabilità. Essa è, dunque, un veleno potentissimo.

*
* *

Vediamo, ora, come le stesse sostanze agiscono sugli altri preparati muscolari lisci.

a) Atrio del cuore di Emys. — La colina è praticamente inattiva su esso (fig. 42, in *A*).

Invece si sa che essa determina, negli animali a sangue caldo, un abbassamento transitorio della pressione del sangue, principalmente dovuto, secondo Halliburton ([61]), a dilatazione dei vasi periferici, specie di quelli intestinali. (Per contro, la neurina produce, secondo lo stesso autore, costrizione dei vasi periferici).

La muscarina, invece, eleva il tono ed eccita le oscillazioni del tono (in 1.) del preparato atriale (fig. 41), anche dopo l'azione opposta dell'atropina. Questa deprime il tono e abolisce (in 2.). le oscillazioni del tono atriale (fig. 41), anche se già esaltate dalla muscarina.

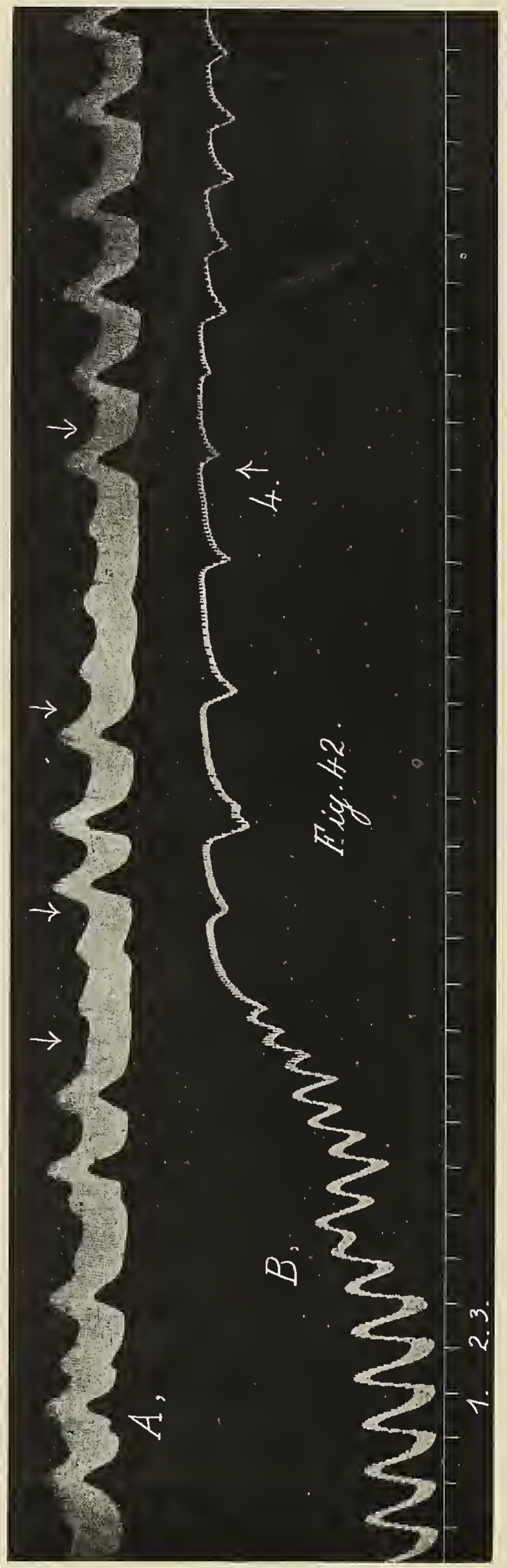
La cimarina (in 1., 2., 3.) è un veleno potentemente contratturante (fig. 42, in *B*). Invece la papaverina (in 3.) abolisce gradatamente il tono atriale (fig. 43). La sua

23 febbraio 1914. — *M. retractor penis* di cane. Peso: gr. 5, tempo: 5', temper.: variabile. Il muscolo eseguisce dapprima una forte contrattura spontanea, trovandosi immerso il liquido di Ringer a temperatura relativamente bassa: 25° C. In 1, 2, 3, 4, 5 e 6, si applicano al muscolo altrettante brevissime stimolazioni elettriche di corrente indotta, le quali hanno ogni volta per effetto un transitorio ma cospicuo abbassamento del tono. Quindi si comincia a riscaldare il liquido gradatamente, portandolo da 25° a 37° C, per cui il tono del preparato si abbassa di molto. In 1, si aggiunge al liquido di Ringer (100 cm³) 1 goccia di soluzione 2 % di digitalina: fortissima contrattura! (Riduzione fotografica).

azione è così potente, che forti dosi di muscarina (in 4. 5.) non valgono più ad elevare il tono di un atrio, che ha già subìto l'azione della papaverina, onde si limitano solo a diminuire la frequenza delle contrazioni sistoliche (fig. 43, *a* e *a'*).

La pilocarpina riduce l'intensità e la frequenza delle sistoli striali fin quasi ad abolirle, e tende a provocare nell'atrio una certa contrattura. L'antagonismo fra pi-

30 aprile 1914. — Atrio sinistro di *Emys europaea* sospeso in 30 cm³ di liquido di Ringer. In 1, si aggiungono al liquido 2 cm³ di soluzione 2 °/₀₀ di muscarina (Grübler). In 2, si aggiunge 1 cm³ di soluzione 2 °/₀ di solfato di atropina. Tempo: 1', temper.: 18°. (Grandezza naturale).

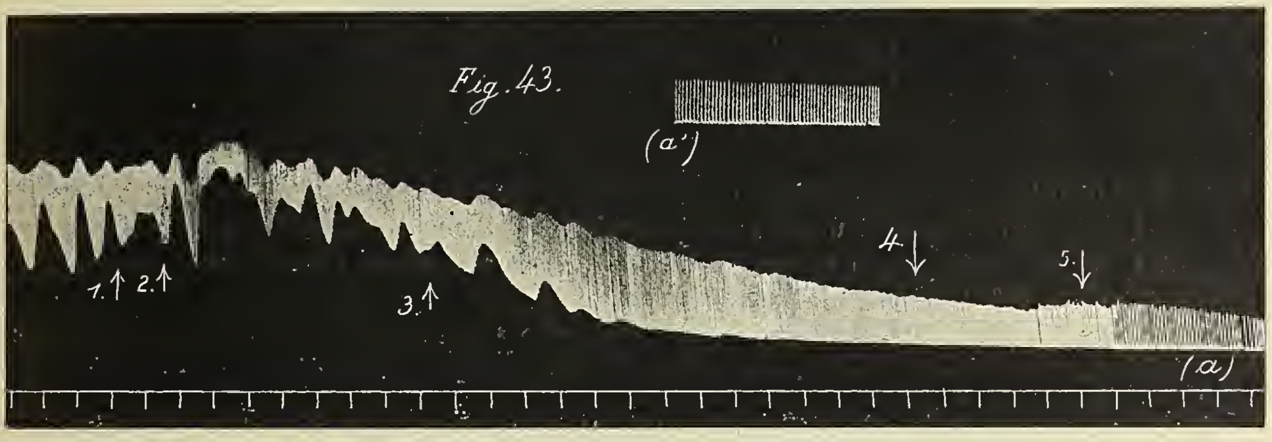


28 aprile 1914. — Atrio destro di *Emys europaea* sospeso in 30 cm³ di liquido di Ringer. Tempo: 1', temper.: 18,5° C. *B*. In 1, 2, 3, si aggiungono al liquido 4 cm³ di soluzione 1 °/₀₀ di cimarina. In 4, si cambia il liquido di Ringer. (Il tracciato superiore *A* dimostra che l'atrio non risente affatto l'influenza di forti dosi di colina aggiunte in corrispondenza delle frecce ↑). (Grandezza naturale).

locarpina e atropina è evidentissimo, sia per quanto riguarda il tono atriale, come rispetto alle contrazioni sistoliche.

b) Esofago di pulcino. — L'idrastinina deprime un poco il tono del preparato esofageo, senza alterare, anzi aumentando in seguito l'altezza delle contrazioni ritmiche automatiche. La colina e la muscarina invece elevano il tono, anzi provocano forte contrattura. L'atropina agisce in senso opposto alla muscarina e alla colina. La pilocarpina eleva il tono e sviluppa enormemente le contrazioni ritmiche automatiche. (I rispettivi tracciati non sono qui riprodotti, per economia di spazio).

c) Intestino tenue di cane. — La colina, e assai più fortemente la muscarina, provocano intensa contrattura del preparato intestinale; l'atropina, invece, alla concentrazione da me usata (*), deprime assai il tono senza alterare, anzi per un certo tempo intensificando le contrazioni ritmiche automatiche. Non solo la musca-



3 maggio 1914. — Atrio destro di *Emys europaea* sospeso in 30 cm^3 di liquido di Ringer. Tempo: 1', temper.: 19° C. In 1, 2 e 3, si aggiungono 2 cm^3 di soluzione satura di papaverina in liquido di Ringer. In 4 e 5, si aggiungono 2 cm^3 di soluzione 1 °/₀₀ di muscarina. (Grandezza naturale).

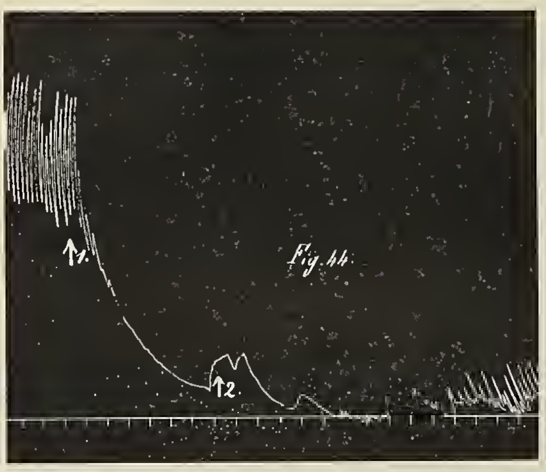
rina, ma anche la nicotina provoca forte contrattura dell'intestino, il cui tono era stato depresso dall'atropina. (I rispettivi tracciati non sono riprodotti).

La papaverina determina rapidissimamente un estremo allungamento del preparato intestinale (fig. 44), abolendo per parecchio tempo le contrazioni ritmiche automatiche. Lavando ripetutamente l'organo con liquido di Ringer, si riesce però a ripristinare, ma in grado assai limitato, sì il tono e sì le contrazioni ritmiche automatiche.

La cimarina esercita un'azione diametralmente opposta (fig. 45) a quella della papaverina; ma si dimostra inefficace, almeno in piccola dose, ad elevare il tono depresso dalla papaverina; ciò che invece è capace di fare, ma solo transitoriamente, la muscarina.

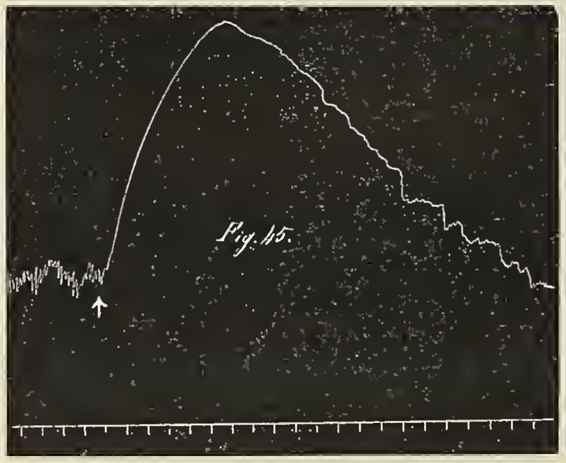
(*) Secondo Magnus [19 (5)] « Atropin in kleinen Dosen bewirkt vom Auerbach' schen Plexus aus Erregung der Darmbewegung, in mittleren Dosen, Regularisierung ; in grossen Dosen lähmt es die Nerven und Muskeln der Darmwand, welche *bei tiefem oder hohen Tonus* zum Stillstand kommen kann ». Io però, nell'intestino di cane, non ho mai potuto osservare che il tono, sotto l'influenza dell'atropina, si mantenesse *alto*. Similmente, non ho mai potuto constatare, alle dosi da me usate, un'azione inibitrice della nicotina.

La pilocarpina eleva notevolmente il tono e talora produce una vera contrattura nell'intestino, tenue e crasso, di gatto di cavia e di cane. L'adrenalina, fatta agire



22 maggio 1914. — Preparato d'intestino tenue di cane sospeso in 100 cm³ di liquido di Ringer. In 1, si aggiungono al liquido 2 cm³ di soluzione satura di papaverina in liquido di Ringer. In 2, si lava il preparato con liquido di Ringer alla stessa temperatura. Tempo: 1', temper.: 35° C. (Riduzione fotografica).

(in 2.) su un preparato già in stato di contrattura provocata (in 1.) dalla pilocarpina, produce immediatamente allungamento del preparato, che torna ad accorciarsi se si



22 maggio 1914. — Preparato d'intestino tenue di cane sospeso in 100 cm³ di liquido di Ringer. Tempo: 1', temper.: 35° C. In corrispondenza della freccia (↑) si aggiunge al liquido 1 cm³ di soluzione 1 °/₀₀ di cimarina (Bayer). (Riduzione fotografica).

cambia il liquido di Ringer e lo si lava con questo (fig. 46). L'antagonismo fra pilocarpina e atropina è evidentissimo.

Riassumendo tutti i dati raccolti, possiamo costruire il seguente diagramma, riguardante l'azione delle varie sostanze sopra studiate sull'atrio del cuore di *Emys*

europ., sull'esofago del pulcino, sull'intestino tenue di mammiferi e sul *m. retractor penis* di cane:

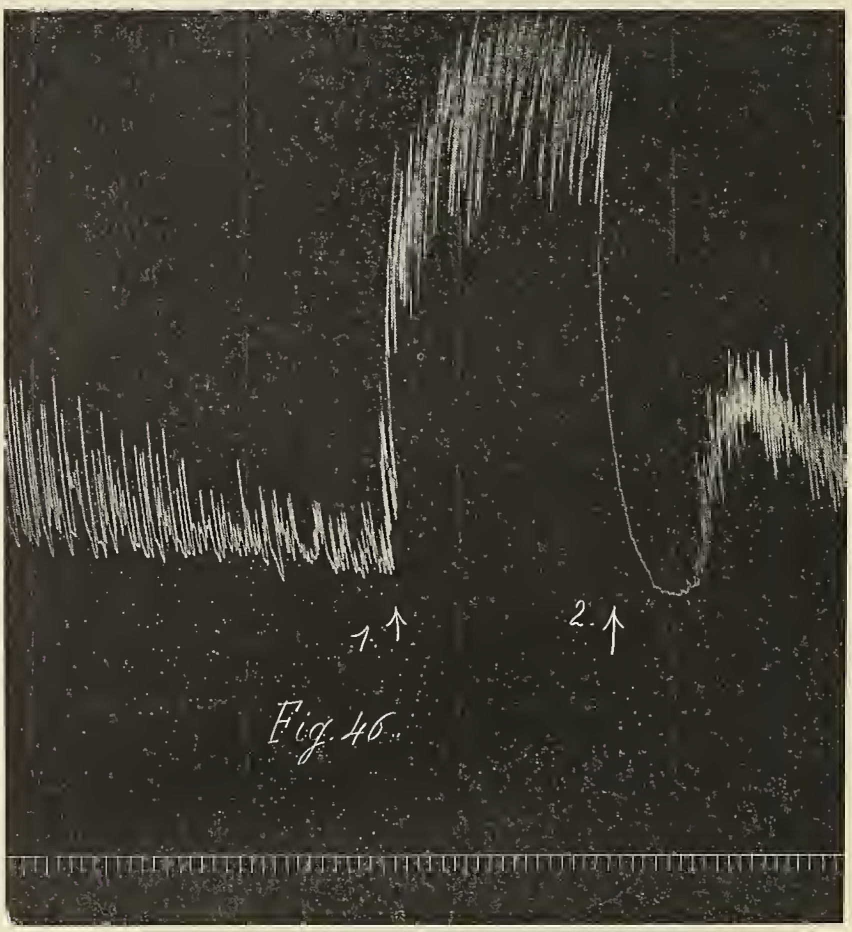
Sostanze sperimentate	Atrio del cuore di *Emys*	Esofago di Pulcino	Intestino di Mammiferi	*M. retractor penis*
Cambiamento del liquido Ringer	—	Inibiz.	Inibiz.	Inibiz.
Siero di sangue	—	Contraz.	Contraz.	Contraz.
Acido carbonico (poco) .	Inibiz.	Inibiz.	Inibiz.	Inibiz.
Adrenalina	Inibiz.	Inibiz.	Inibiz.	Contraz.
Ipofisina	Contraz.	—	Contraz.	Contraz.
Istamina	Contraz.	Contraz.	Contraz.	Contzaz.
Tiramina	Inibiz.	—	Inibiz.	Contraz.
Atropina	Inibiz.	Inibiz.	Inibiz.	Contraz.
Colina	Contraz.	Contraz.	Contraz.	Contraz.
Muscanina	Contraz.	Contraz.	Contraz.	Contraz.
Nicotina.	Contraz.	Contraz.	Contraz.	Contraz.
Cimarina	Contraz.	Contraz.	Contraz.	Contraz.
Papaverina.	Inibiz.	—	Inibiz.	Inibiz.
Idrastinina	—	Inibiz.	Inibiz.	—
Digitalina	Contraz.	Contraz.	Contraz.	Contraz.
Pilocarpina.	Contraz.	Contraz.	Contraz.	Contraz.
Nitrito di sodio	—	—	—	Inibiz.

Anche da queste ricerche sugli alcaloidi, come da quelle precedenti sugli ormoni e sulle basi organiche naturali, resulta dunque, che non esiste una sostanza capace di provocare inibizione del tono del m. retrattore del pene, isolato dal corpo dell'animale, come per es. l'atropina inibisce il tono dell'atrio cardiaco di *Emys* e dell'intestino. Fanno eccezione il nitrito sodico e la papaverina: ma l'effetto che produce questa ultima sostanza pare che sia, in generale, piuttosto una paralisi, che un'inibizione; mentre quello prodotto dai nitriti verosimilmente dipende da una loro azione diretta sugli elementi muscolari (o sul reticolo nervoso diffuso intramuscolare).

C'era da aspettarsi che un'azione inibitrice esercitasse sul m. retrattore la pilocarpina, sapendosi che questo alcaloide agisce sul cuore e sul tubo digerente come la stimolazione del vago. Ma l'azione inibitrice sul cuore riguarda le sistoli cardiache, cioè la funzione della muscolatura striata del cuore, non la funzione tonica della muscolatura liscia, che è, invece, dalla pilocarpina eccitata. Infatti, l'atrio del cuore di *Emys* reagisce alla pilocarpina, come alla muscarina, con un forte aumento del tono e con una rarefazione e un impiccolimento delle sistoli atriali.

Comunque sia, se la pilocarpina stimolasse le terminazioni delle fibre autonome sacrali o le rispettive giunzioni neuro-muscolari, dovrebbe produrre, come effetto, inibizione del tono del m. retrattore. Invece essa produce, come abbiamo visto, dapprima forte aumento del tono e sviluppo delle contrazioni ritmiche, il che dimostra

che la sostanza non esercita azione analoga a quella della stimolazione delle fibre sacrali, ma agisce piuttosto stimolando o le giunzioni simpato-muscolari o, che è più verosimile, le stesse cellule muscolari liscie. La pilocarpina produce anche allungamento del m. retrattore, ma solo in un secondo tempo e tardivamente, ed è un allungamento al quale fa seguito, quando la dose della pilocarpina aggiunta è grande, la



4 giugno 1914. — Preparato di colon di cavia immerso in 100 cm³ di liquido di Ringer. Tempo: 1', temper.: 35° C. In 1, si aggiungono al liquido 0,5 cm³ di soluzione 1 °/₀ di cloruro di pilocarpina. In 2, si aggiungono 2 gocce di soluzione 1 °/₀₀ di adrenalina (Clin). (Grandezza naturale).

rigidità, cioè la morte del preparato. Se l'azione della pilocarpina fosse primariamente di natura inibitoria e si esercitasse sopra apparati nervosi, l'allungamento del muscolo dovrebbe seguire immediatamente all'aggiunta della sostanza, e, ciò che più importa, non dovrebbe essere mai preceduto da accorciamento.

Fra le sostanze che sull'intestino di gatto agiscono perifericamente al plesso gangliare di Auerbach, Magnus [19 (5)] pone la pilocarpina. Ma se questa esercitasse la sua azione sugli apparati nervosi o neuromuscolari interposti fra le cellule nervose gangliari appartenenti al sistema autonomo sacrale e le cellule contrattili del m. retrattore, dovrebbe provocare inibizione primaria del tono e arrestare le contrazioni ritmiche automatiche, il che non si verifica.

V.

Considerazioni generali circa l'azione delle varie sostanze sperimentate.

Le sostanze di cui ho trattato nel Cap. precedente, al N. 7, e cioè: adrenalina, β-iminazoliletilamina, p-idrossifeniletilamina, « tenosina » (cioè il miscuglio di queste due ultime sostanze), e ipofisina, esercitano azione contrattoria sul m. retrattore del pene del cane adulto e del feto di bue.

Poichè l'azione depressoria, che esercita la soluzione di ipofisina contenente cloretone, non può essere attribuita all'ipofisina pura, ma è dovuta al cloretone, fra le sostanze sperimentate non ce n'è alcuna dotata della proprietà di esercitare un'azione depressoria (estensoria, inibitoria) sul detto muscolo.

Le dette sostanze non esercitano azione contrattoria sul preparato diaframmatico (muscoli striati), contrariamente alla veratrina e alla nicotina, le quali producono forte accorciamento tonico sia del preparato diaframmatico, fetale o di animale adulto, come del m. retrattore del pene.

L'adrenalina e la p-idrossifeniletilamina sono sostanze simpatomimetiche; delle altre due, invece, abbiamo detto, che forse agiscono direttamente sugli elementi muscolari lisci.

È lecito supporre, che le sostanze le quali sul m. retrattore del pene agiscono come la stimolazione dei nervi simpatici (sistema autonomo toracico-lombare), nel produrre l'effetto sopra descritto stimolino o le terminazioni intramuscolari delle fibre simpatiche, o costituenti speciali del protoplasma muscolare (« sostanze ricettive » di Langley) localizzati nelle giunzioni neuro-muscolari.

Poichè le sostanze simpatomimetiche non producono alcun effetto nei muscoli striati, anche se fetali, è lecito supporre che esse non agiscono mai sulle strutture contrattili propriamenle dette (nè sulle miofibrille, nè sul sarcoplasma).

Per risolvere il problema, se quelle sostanze agiscono sulle terminazioni simpatiche nel m. retrattore o sopra sostanze specifiche contenute nelle giunzioni neuromuscolari, bisognerebbe sperimentarle sopra muscoli retrattori, nei quali si fosse in antecedenza determinata la degenerazione delle terminazioni nervee intramuscolari mediante il taglio dei nervi pudendi.

Ma se è vero quel che resulta dalle osservazioni del Fletcher, che cioè non si ottiene degenerazione del reticolo nervoso intramuscolare dopo il taglio solamente dell'una o dell'altra specie di nervi che vanno al m. retrattore, è lecito dubitare che l'esperimento dianzi detto possa essere eseguito con risultato soddisfacente.

Anche il de Zilwa (l. c.) dice, che il taglio dei nervi pudendi ecc., fatto ventiquattro giorni prima, non alterò le proprietà generali del muscolo, il quale però non presentava più contrazioni spontanee. Esso si allungava quando era riscaldato, e si contraeva quando era raffreddato, e a 49° C. presentava un forte accorciamento,

L'A. non dice, però, se le sostanze da lui sperimentate (atropina, muscarina, nicotina curaro) esercitavano la loro azione, anche dopo il taglio dei nervi.

Comunque sia, ammettiamo per analogia che l'azione di quelle sostanze non si eserciti sulle terminazioni nervee. In tal caso, poichè non agiscono nemmeno sulle strutture contrattili propriamente dette, rimane la possibilità, che esse agiscano sopra radicali specificamente ricettori localizzati nelle giunzioni neuro-muscolari (vale a dire nel protoplasma amorfo che costituisce il substratum morfologico delle giunzioni), o diffusi per il sarcoplasma delle cellule muscolari.

Evidentemente, tali radicali specifici del protoplasma giunzionale, debbono chimicamente differenziarsi sotto l'influenza delle specifiche innervazioni del sistema autonomo.

La logica impone di credere, e l'esperimento conferma, che se le azioni specifiche degli ormoni si esercitano sopra costituenti specifici del protoplasma delle giunzioni neuro-muscolari, e se le dette azioni sono identiche, per qualità, a quelle che esercita la stimolazione del rispettivo nervo autonomo, dove manca l'innervazione autonoma non può esistere l'azione delle sostanze simpato-mimetiche (*), perchè non esistono i radicali ricettori con i quali queste sostanze possano reagire, radicali ricettori che, dunque, si differenziano nel protoplasma giunzionale sotto l'influenza combinata e della innervazione autonoma e delle sostanze simpatomimetiche.

Questo ragionamento non è infirmato dalla dimostrazione, che le dette sostanze sono capaci di esercitare la loro azione specifica anche sul m. retrattore fetale. È lecito infatti ammettere, che ai muscoli lisci sia trasmessa ereditariamente la proprietà di elaborare i radicali ricettori per le sostanze simpatomimetiche.

Nei muscoli striati, l'azione della nicotina (e della veratrina), si verifica anche dopo il taglio dei nervi, secondo Langley, il che potrebbe indurre ad ammettere che quegli alcaloidi agiscono, non sulle terminazioni nervee, nè sulle giunzioni neuro-muscolari, ma sulle strutture contrattili. Ebbene, io credo che questa conclusione non può aver valore generale, vale a dire non può essere senz'altro applicata al caso dei muscoli lisci e delle sostanze simpatomimetiche, pur ammesso che sia giusta relativamente ai muscoli striati e alla nicotina.

Per quanto riguarda i muscoli lisci, io credo che bisognerebbe aspettare, non la semplice degenerazione delle terminazioni nervee, ma un tempo molto maggiore, per veder scomparire l'azione, come è stata detta, simpatomimetica delle sostanze sopra ricordate. E ciò per le seguenti ragioni. Se l'ipotesi dei radicali ricettivi dovrà rimanere come un fatto acquisito alla fisiologia, questo non credo che potrà avvenire se non nel senso, che i detti radicali rappresentino il prodotto di una differen-

(*) L'inefficacia dell'adrenalina e della p-idrossifeniletilamina, sostanze eminentemente simpatomimetiche, sui muscoli striati starebbe contro l'ipotesi del Mosso (l. c.), che cioè le terminazioni di esilissime fibre amieliniche, recentemente scoperte nei muscoli striati, presiedano alla funzione tonica dei detti muscoli. Infatti se così fosse, se cioè esistesse una vera innervazione simpatica dei muscoli striati, questi dovrebbero mostrarsi ricettivi per le sostanze simpatomimetiche: il che non è confermato dagli esperimenti. Fino a prova in contrario, dunque, non possiamo identificare quelle fibre amieliniche e le loro terminazioni distinte nelle fibre muscolari striate con le fibre del sistema autonomo e le loro terminazioni nei muscoli lisci.

ziazione chimica locale, cioè della elaborazione di peculiari costituenti del sarcoplasma situato principalmente nella regione neurale, differenziazione che, come ho detto, avverrebbe sotto l'influenza degli eccitamenti nervei, o di questi e degli ormoni. Ora si comprende, come tali prodotti differenziazione chimica, se scompaiono affatto, scompaiono solo molto tempo dopo che le azioni nervee sul muscolo striato sono cessate, e, nel caso dei muscoli lisci, non possono scomparire mai interamente, perchè, se è venuta meno l'azione nervosa, persiste l'azione ormonica che, come sappiamo, è equivalente negli effetti.

Se, dunque, la nicotina agisce anche parecchi giorni dopo il taglio dei nervi, ciò potrebbe spiegarsi ammettendo, non che la nicotina agisca sulle sostanze contrattili, ma piuttosto che i radicali ricettori, con cui reagisce la nicotina, persistano nelle giunzioni neuro-muscolari anche dopo il taglio dei nervi, e finchè le fibre muscolari non siano profondamente degenerate. Abbiamo, infatti, diverse prove del fatto reciproco, che cioè con dosi mediocri successive si può esaurire la ricettività degli elementi muscolari per la nicotina, la veratrina, etc., mentre essi sono ancora capaci di contrarsi vigorosamente se eccitati altrimenti, p. es., con stimoli elettrici.

Non si può ammettere una sostanza ricettiva (un radicale ricettore) speciale per ogni sostanza che si dimostra attiva sui muscoli striati o lisci. Se così fosse, i muscoli dovrebbero contenere numerosi radicali ricettori, e dovrebbero contenerne per sostanze che, come la nicotina o la veratrina, in condizioni naturali non hanno occasione di agire. Tale ipotesi è resa per giunta inammissibile dal fatto, che sostanze di struttura chimica diversa sono egualmente attive, producendo analogo effetto. Ammetteremo, dunque, come cosa più verosimile, che il sarcoplasma, particolarmente quello ammassato nella regione neurale, è dotato di una ricettività generica per certi gruppi di sostanze, mentre per altre è assai meno o punto ricettivo.

Infatti, mentre i muscoli striati si dimostrano molto ricettivi per la veratrina e per la nicotina, lo sono assai meno per la muscarina, l'atropina, ia stricnina, la pilocarpina etc., e non lo sono punto, o quasi, per gli ormoni e le amine sopra studiate.

Stando ai miei risultati, non si comprende come mai il de Zilwa (loc. cit.) dica di avere osservato abolizione del tono in seguito all'azione della nicotina. Secondo lui, dopo tale azione, nemmeno il raffreddamento da 37° a 14° C. provocherebbe nel muscolo un aumento del tono degno di nota. Tuttavia l'eccitabilità a singoli stimoli era conservata. Ricordo che, secondo de Zilwa (loc. cit.), l'atropina deprimerebbe, mentre la muscarina eleverebbe il tono del muscolo, e che il tono aumentato mediante la muscarina potrebbe essere depresso o abolito mediante l'atropina. Ora anche questo risultato, per quanto riguarda l'atropina, è diametralmente opposto a quello da me ottenuto. Infatti, il m. retrattore del pene isolato dal corpo si comporta, rispetto alla muscarina e all'atropina, in modo eguale.

Io ho fatto ripetutamente il confronto dei risultati ottenuti sul m. retrattore con quelli che si riferiscono al preparato atriale e al preparato intestinale, perchè questi due ultimi preparati possono essere considerati come tipi della duplice innervazione autonoma: (*a*) bulbare, e (*b*) toracica (cioè simpatica); mentre il preparato m. retrattore può essere considerato come tipo della duplice innervazione autonoma: (*a*) sacrale e (*b*) toracico-lombare (cioè simpatica). Di più, nel preparato atriale,

che rappresenta la porzione prossimale della innervazione autonoma bulbare e toracica (o simpatica), possiamo distinguere l'innervazione autonoma della muscolatura liscia da quella della muscolatura striata. E mentre in esso sono egualmente sviluppate l'innervazione autonoma bulbare e la simpatica propriamente detta; nel preparato intestinale, che rappresenta una porzione relativamente più distale della stessa innervazione autonoma bulbare, si sa che è la innervazione toracica o simpatica, quella che prevale.

Ebbene: mentre la muscarina eleva il tono dei preparati atriali e intestinali e del m. retrattore, l'atropina inveve deprime il tono del preparato atriale e del preparato intestinale, ma eleva anche il tono del m. retrattore e ne sviluppa l'attività contrattile.

Per quanto riguarda la pilocarpina, è noto che questa, sugli organi che si trovano sotto il dominio dell'innervazione autonoma bulbare, agisce come la stimolazione dei rispettivi nervi, e che l'atropina paralizza l'effetto prodotto dalla pilocarpina. Sul colon la pilocarpina agisce come la stimolazione dei nervi del sistema autonomo sacrale. C'era dunque da aspettarsi che sul m. retrattore del pene la pilocarpina producesse inibizione del tono e delle contrazioni ritmiche, come fa la stimolazione del nervo erigente. Invece, oome abbiamo visto, non solo produce contrazioni, ma accelera anche l'avvento della rigidità cadaverica.

Le mie ricerche sul m. retrattrore del pene hanno dato dunque un risultato sopra tutti importante. ed è questo, che mi *è stato impossibile di scoprire un ormone o un alcaloide* (eccetto la papaverina), *il quale agisca su esso come l'eccitamento delle fibre del sistema autonomo sacrale, cioè inibendo il muscolo isolato dal corpo.*

L'antagonismo fra atropina e muscarina, e fra pilocarpina e atropina, è stato da me pienamente constatato sull'atrio del cuore di *Emys*, sull'esofago di pulcino e sull'intestino dei mammiferi, tutti organi che si trovano nell'ambito dell'innervazione autonoma bulbare; ma è stato impossibile osservarne traccia sul m. retrattore del pene.

Varie supposizioni potrebbero farsi, volendo tentare di spiegare il fatto tanto singolare, che per il m. retrattore isolato dal corpo non esista nè un ormone nè alcuna altra delle sostanze organiche da me sperimentate, la quale sia capace di produrre in esso un effetto analogo a quello che sul muscolo *in situ* produce la stimolazione del nervo erigente. Ma finchè ci fa difetto la conoscenza, se il muscolo isolato dal corpo, così come noi l' abbiamo usato nei nostri esperimenti, contiene o no cellule nervose gangliari omologhe a quelle che si trovano nel cuore, nell'esofago e nell'intestino (cioè, cellule intercalate sulle fibre dei nervi autonomi sacrali), è prudente sospendere ogni discussione, che sarebbe intempestiva. Alcuni dei risultati sperimentali sopra esposti, però, potrebbero conciliarsi, piuttosto che con la presenza delle dette cellule gangliari, con l'assenza di esse, ammettendo che gli effetti osservati siano dovuti ad una azione diretta sugli elementi muscolari lisci delle sostanze sperimentate.

VI.

Azione degli stimoli di corrente elettrica, continua e indotta, sul m. retrattore del pene.

L'azione degli stimoli elettrici su preparati muscolari lisci diversi dal m. retrattore è stata studiata da varii autori.

Fra le pubblicazioni che si riferiscono a tale argomento, mi limito a rammentare qui, oltre alle mie ricerche sull'esofago dell'aplisia etc. (loc cit.), quelle del Treves (loc. cit.), del Woodsworth ([62]) e del Winkler ([63]). Per le altre, si può consultare l'opera del Biedermann (loc. cit.), e l'articolo del Grützner negli « Ergebnisse der physiologie » (loc. cit.).

Anche le correnti d'azione che si generano nei muscoli lisci durante la loro attività sono state osservate e registrate. A Fiek ([64]) cercò invano di constatare l'esistenza di correnti d'azione nel muscolo adduttore delle valve di Anodonta. Le osservazioni di Fano e Fayod ([65]) sulla muscolatura liscia degli atri del cuore di *Emys* non pare che fossero condotte in modo tale, da escludere il dubbio che le oscillazioni elettriche osservate non dipendessero da spostamento degli elettrodi (ved. von Brücke, appresso). Le osservazioni di Reid ([66]) sulla muscolatura iridea non sono state confermate da von Brücke e Orbeli (ved. appresso). Fuchs ([67]) ha registrato correnti d'azione mono- e difasiche nei muscoli retrattori della proboscide di *Sipunculus nudus*, ma questi muscoli non hanno stretta analogia coi muscoli lisci dei mammiferi. Di recente, il Fano ([68]) è tornato a studiare le variazioni elettriche dell'atrio di *Emys eur.*, che qui rammento per quanto riguardano le contrazioni lente della muscolatura liscia atriale.

A me importa però sopra tutto d'indagare gli effetti delle stimolazioni elettriche applicate al m. retrattore del pene, che anche per tali ricerche dev'essere considerato come un preparato di gran lunga superiore a tutti gli altri, e di considerare i resultati delle ricerche di von Brücke (ved. appresso) per quanto riguarda le correnti d'azione che il muscolo presenta quando si contrae automaticamente.

Il Sertoli (loc. cit.) fece uno studio abbastanza accurato degli effetti della stimolazione elettrica del muscolo con corrente sia continua che indotta.

Per quanto riguarda la corrente indotta, pare che egli non ottenesse alcun effetto contrattorio dagli stimoli unici; e del resto le contrazioni ottenute da De Zylwa (loc. cit.) in condizioni simili sono così piccole da potersi quasi trascurare; onde si potrebbe, in base a tali risultati, affermare che gli stimoli unici di corrente indotta di chiusura o di apertura siano inefficaci su quel muscolo. Gli effetti dell'azione della corrente indotta ottenuti dal Sertoli sono dovuti propriamente a stimolazioni faradiche, o tetanizzanti che si voglia dire; e là dove egli parla di stimoli ripetuti a certi intervalli etc., deve sempre intendersi, stimoli faradici ripetuti, ossia gruppi di un certo numero di scosse di corrente indotta di chiusura o apertura, ripetuti ad intervalli. Di conseguenza, le contrazioni da lui osservate sono da considerarsi come tetani unici o ripetuti, distinti o sovrapposti secondo la frequenza dei gruppi di stimoli faradici. Si comprende, quindi, come gli effetti da lui ottenuti non siano comparabili con quelli delle stimolazioni uniche di corrente indotta.

La corrente continua usata dal Sertoli fu quella di venti pile Daniell, con elettrodi di platino. L'applicazione diretta sul muscolo d'una corrente costante debole, data da sei pile Daniell, non produce contrazioni del muscolo retrattore, secondo l'autore, ma anzi rilassamento con arresto dei movimenti spontanei, qualunque sia la direzione della corrente. Con corrente più forte, invece, osservò, alla chiusura contrazione al catodo, che insorge con un periodo di latenza di 2-3″, pro-

cede lentamente e dura per tutto il tempo del passaggio della corrente; all'apertura, rilassamento del muscolo in toto, ma anche piccola contrazione in corrispondenza dell'anodo. Il Sertoli ammise che gli effetti dell'applicazione della corrente costante fossero molto più deboli di quelli che producono gli stimoli di corrente indotta; ma ciò è vero solo per le stimolazioni faradiche, perchè gli stimoli unici di corrente indotta sono, secondo lo stesso Sertoli, inefficaci.

De Zylwa (loc. cit.) applicò sul muscolo una corrente di 2 e di 4 volta, mediante elettrodi di Burdon-Sanderson. Nel muscolo rilassato per riscaldamento osservò contrazione più forte alla chiusura, meno forte all' apertura; nel muscolo in stato tonico, osservò talora rilassamento. Egli dice, che la regione anodica e la regione catodica si contraggono e rilassano simultaneamente; che la parte perineale si contrae e rilassa più fortemente dalla parte prepuziale.

Nei miei esperimenti sull'azione della corrente continua, io mi sono servito, come recipiente per tenere immerso il muscolo, della vaschetta rettangolare descritta e figurata in altro mio lavoro ([69]), introdotta nella camera-termostato in sostituzione e al posto del tubo cilindrico, entro la quale il muscolo era fissato nel mezzo in posizione orizzontale mediante una pinza di avorio, mentre le due estremità di esso, per mezzo di due fili passanti sotto due carrucole d'oro, erano congiunte con due leve scriventi sullo stesso cilindro affumato. Ovvero il muscolo era fissato per una estremità a un uncino d'avorio, mentre per l'altra era congiunto con una sola leva scrivente. La corrente continua, di cui mi sono servito, era quella stradale di 110 volta, di cui abbassavo a volontà il voltaggio, mediante un reostato, avendo poi sempre cura di leggere in ogni esperimento su un voltametro il valore della corrente usata.

La corrente era ordinariamente portata al muscolo (a una o alle due estremità), mediante una coppia di elettrodi impolarizzabili di Oker-Blom, introdotti nella camera-termostato e posti accanto alla vaschetta rettangolare. I lucignoli imbevuti di soluzione di cloruro sodico rimanevano sempre adagiati sul muscolo, sia negli intervalli fra le stimolazioni, cioè mentre la bacinella era piena di liquido di Ringer (per il quale gorgogliava incessantemente l'ossigeno), come durante la stimolazione, quando, il liquido essendo stato aspirato, muscolo e lucignoli rimanevano bagnati ma sospesi nell'aria ricca di ossigeno che continuava a passare.

Qualche volta, ho fatto giungere la corrente continua a una o alle due estremità del muscolo per fili metallici: di oro e per le due estremità del muscolo, quando questo era tenuto immerso in posizione verticale nel cilindro; di platino e per una o per le due estremità, quando il muscolo era fissato nella vaschetta in posizione orizzontale.

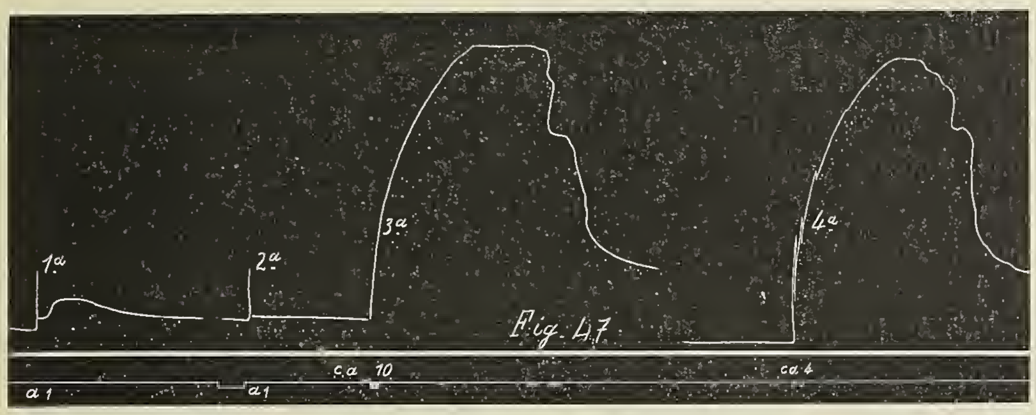
Negli esperimenti sull'azione della corrente indotta, generata da due o quattro accumulatori, il muscolo, fissato in posizione verticale o orizzontale, era stimolato con elettrodi di oro o di platino, per una o per tutte e due le estremità.

Riassumo qui brevemente i resultati dei miei esperimenti.

1. — *Stimolazione con corrente indotta.*

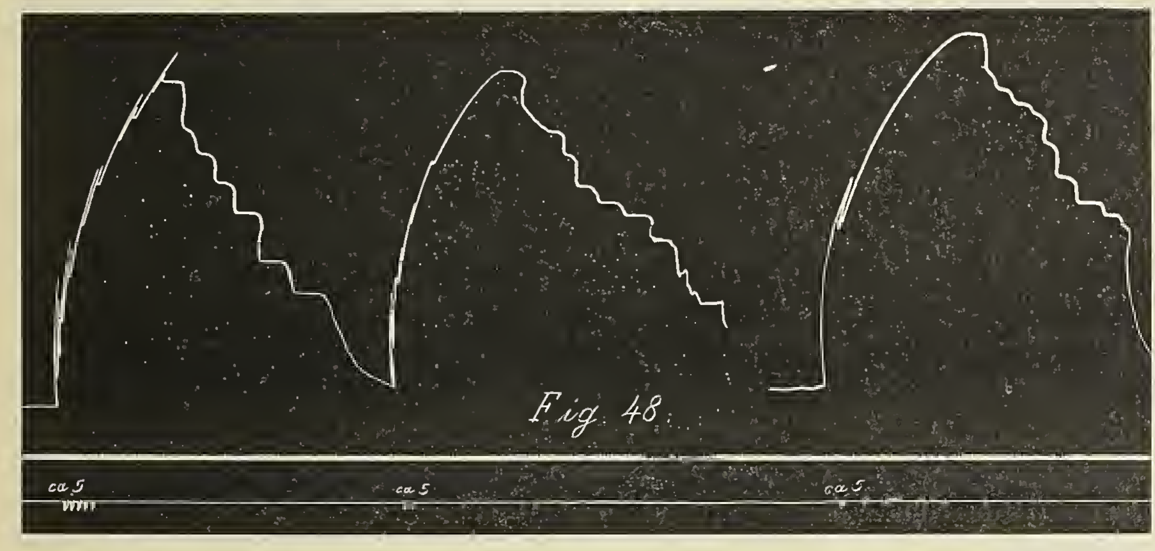
Applicando una corrente generata da quattro accumulatori, i rocchetti della slitta essendo del tutto sovrapposti, ottenni (fig. 47) alla prima stimolazione (incominciando a contare da sinistra) una contrazione rapida seguita dopo un certo in-

tervallo da una debole contrazione lenta; alla seconda stimolazione, la contrazione rapida sola. La terza stimolazione, fatta con dieci scosse successive di chiusura e di apertura, produsse un accorciamento fortissimo (una specie di tetano prima in-



16 luglio 1913. — *M. retractor penis* di grosso cane. Peso: 5 gr., tempo: 1/5″ (nella figura, che è ridotta fotograficamente, il tempo non si distingue più). Temper.: 31° C. Si applicano al muscolo quattro (1°, 2°, 3° e 4°) stimolazioni elettriche di corrente indotta (4 accumulatori, DR = 0). *a*: stimolo unico d'apertura (1ª e 2ª); *ca* 10: dieci stimoli doppi di chiusura e apertura; *ca* 4: quattro stimoli doppi di chiusura e apertura. (Riduzione fotografica).

completo poi completo), che durò molto tempo dopo la stimolazione. (Il tratto orizzontale superiore della curva corrisponde al tempo, durante il quale la leva rimase



16 luglio 1914. — Lo stesso muscolo della figura precedente. *ca* 5: cinque stimoli doppi di chiusura e apertura di corrente indotta. (Per il resto, ved. figura precedente). (Riduzione fotografica).

a contatto della vite di arresto). La porzione di curva corrispondente all'allungamento del muscolo è a gradini; l'allungamento è abbastanza rapido.

Un effetto analogo si osserva in seguito alla quarta stimolazione faradica della stessa figura 47, e in tutte e tre le stimolazioni, pure faradiche, della figura 48.

In questa ultima figura si vede, che quanto meno frequenti sono le scosse, tanto meno completo è il tetano nella porzione ascendente della rispettiva curva. La frequenza degli stimoli (sempre 5) di chiusura e apertura aumentando dalla 1ª alla 3ª contrazione, il tetano diventa sempre meno incompleto. Su queste curve, specie sulla 1ª e 2ª, si distinguono benissimo le contrazioni rapide corrispondenti ai singoli stimoli di chiusura e apertura, e si vede nettamente che le contrazioni di apertura sono più deboli di quelle di chiusura. Si vede ancora che, dopo l'ultima contrazione rapida provocata dall'ultima apertura, il muscolo non si allunga, ma anzi continua ad accorciarsi (specie nella 2ª e 3ª curva, corrispondenti alle stimolazioni fatte con maggior frequenza), descrivendo una curva non eccessivamente lenta, cui segue la distensione foggiata nettamente a gradini. Questa contrazione lenta si ha anche in seguito a una sola stimolazione doppia di chiusura e apertura, e segue alle rispettive due contrazioni rapide, ma in generale è meno alta. Si ha pure in seguito a sole scosse di apertura (come nelle prime curve a sinistra delle figg. 47 e 49), ma allora è ancòra più bassa.

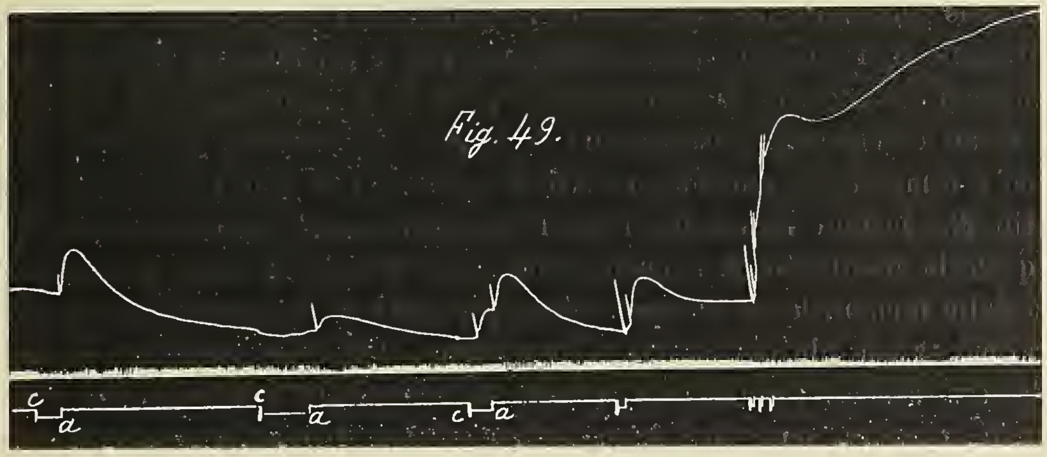
L'esperimento, cui corrispondono i tracciati ora descritti, dette dunque risultati importanti. Il muscolo conteneva evidentemente un numero considerevole di fibre muscolari striate, alle quali senza dubbio eran dovute le contrazioni rapide. Era dunque, per così dire, un preparato doppio, composto di scarsa muscolatura striata e di abbondante muscolatura liscia. Sui tracciati, possiamo benissimo distinguere le contrazioni dell'una e dell'altra muscolatura. In seguito alle stimolazioni uniche e alla stimolazione doppia di chiusura e apertura, le contrazioni rapide sono dovute alla muscolatura striata, le contrazioni lente alla muscolatura liscia. Rimane quindi accertato, contrariamente a quanto afferma il Sertoli, che la muscolatura liscia del m. retrattore reagisce con una contrazione lenta, per quanto debole essa sia, agli stimoli anche unici di corrente indotta (d'apertura), purchè questa sia abbastanza forte (4 accumulatori).

Nelle contrazioni provocate da stimoli faradici (fig. 47 3ª e 4ª, 48, 49 ultima a destra), le dentellature del tratto ascendente di ciascuna curva, tanto più distinte quanto minore era la frequenza degli stimoli, corrispondono senza dubbio alle contrazioni della muscolatura striata, che si sovrappongono dando alla curva l'aspetto d'un tetano incompleto. Le curve presentano inoltre una cupola, che si sviluppa lentamente, elevandosi sull'ultima dentellatura e poi declinando a gradini: essa è certamente l'espressione grafica di contrazione della muscolatura liscia, che dura oltre il periodo delle stimolazioni e delle corrispondenti contrazioni rapide della muscolatura striata.

Confrontando queste curve e le corrispondenti stimolazioni, si vede:

1°) Che la contrazione lenta sembra essere tanto più alta e ampia, quanto più frequenti e numerose furono le stimolazioni doppie di corrente indotta. 2° Che, per contro, il tratto dentellato ascendente delle curve, costituito dalla sovrapposizione delle contrazioni rapide, sembra essere tanto più alto quanto minore fu la frequenza, a parità di numero, delle dette stimolazioni. Se si confrontano infatti, le tre curve successive della figura 48, si vede che, andando dalla prima di sinistra alla terza, pur elevandosi esse presso a poco alla stessa altezza totale, l'inizio della

contrazione lenta sul tratto ascendente di ogni curva trovasi più in basso nella terza che nella seconda, e più in basso nella seconda che nella prima. In questa si può dire che una contrazione lenta indipendente, o seguente alle contrazioni rapide, manca del tutto; il breve tratto orizzontale superiore della curva trovasi a una distanza minore dagli apici delle ultime contrazioni rapide, e pure la curva totale raggiunge presso a poco la stessa altezza delle due curve successive, nelle quali il tratto ascendente dentellato è meno alto di tanto, di quanto più alto è il tratto successivo ascendente spettante alla contrazione lenta. Evidentemente, quindi, nella prima curva della figura 48, il tratto ascendente è dovuto non solo alle contrazioni rapide della muscolatura striata, ma anche alla contrazione lenta della muscolatura



16 luglio 1914. — Lo stesso muscolo della figura precedente.
c: chiusura, *a*: apertura della corrente indotta. (Riduzione fotografica).

liscia; e lo stesso deve dirsi per le curve successive. Se in queste la contrazione lenta ha una espressione grafica distinta, è solo perchè le contrazioni rapide, causa la maggior frequenza degli stimoli, cessano prima, permettendo così che meglio si manifesti sul tratto ascendente della curva la porzione corrispondente di contrazione lenta; il che non avviene nella prima curva, perchè qui le contrazioni rapide durano quasi per tutto il periodo di accorciamento del muscolo. Fin dall'inizio, dunque, delle stimolazioni muscolatura striata e liscia entrano in stato di eccitamento e di contrazione, la seconda tuttavia meno rapidamente della prima; ed è evidente, sopra tutto nella prima e seconda curva, che la contrazione lenta della muscolatura liscia fa da sostenimento interno alle contrazioni rapide della muscolatura striata, le quali perciò riescono a sovrapporsi, nel modo che dimostrano le dette curve, nonostante la piccolissima frequenza degli stimoli. Qui si dimostra evidente l'influenza che esercita il sostenimento interno dovuto alla contrazione lenta della muscolatura liscia sul fenomeno della sovrapposizione delle contrazioni rapide.

Ciò io affermai già ([70]) a riguardo dell'atrio del cuore di *Emys europaea*, la cui parete è anche composta di muscolatura striata e liscia. Sarebbe un errore, infatti, credere che le altezze delle curve, alle quali qui si accenna (ved. per es. anche le curve delle figg. 22 e 24 di questa Memoria), siano dovute alla sola muscolatura

striata del preparato atriale; evidentemente esse sono invece principalmente dovute alla muscolatura liscia. Similmente, le poche e brevi fibre striate di un muscolo retrattore del pene non potrebbero mai da sole generare un accorciamento così gagliardo di esso.

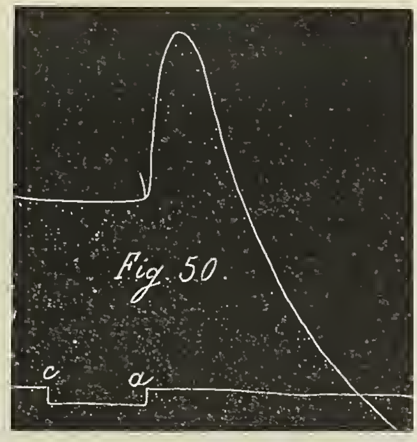
Frammiste, come sono, alle cellule muscolari liscie, esse sono sostenute dalla contrazione lenta di queste nella loro sovrapposizione, e perciò producono un accorciamento così forte con sole 5 stimolazioni doppie di corrente indotta.

Ora io non posso lasciar passare questa occasione senza ricordare, che fra i tetani che possono compiere, a parità delle altre condizioni, un muscolo gastrocnemio di *Rana esculenta* e uno di *Bufo viridis* o *vulgaris* ([71]), esistono differenze analoghe a quelle che esistono fra i tetani di un muscolo striato qualsiasi e quelli di un muscolo retrattore del pene; e che la somiglianza fra i tetani di un muscolo gastrocnemio di rospo e di un muscolo retrattore è grandissima. Ebbene, poichè i due muscoli gastrocnemi sopra detti sono privi di muscolatura liscia, la somiglianza fra i tetani del muscolo gastrocnemio di rospo e del muscolo retrattore del pene, quando è composto di muscolatura striata e liscia, non può essere dovuta se non al fatto, che le fibre striate del muscolo gastrocnemio di rospo contengono (in maggior quantità relativamente a quelle dello stesso muscolo di rana) quel materiale distinto dalle miofibrille, la cui contrazione più lenta fa da sostenimento interno alle contrazioni rapide fibrillari, come la muscolatura liscia del retrattore, distinta dalla striata, contraendosi lentamente, sostiene le contrazioni relativamente più rapide di questa, e genera una più efficace sovrapposizione di esse. Il materiale contrattile, al quale accenno, è il sarcoplasma.

Egualmente evidenti sono gli effetti delle stimolazioni uniche di corrente indotta nella figura 49. La prima e la seconda contrazione, provocate da scosse di sola apertura (nella seconda, la chiusura produce lieve inibizione del muscolo), e le successive provocate da scosse doppie di chiusura e apertura, sembrano contrazioni di muscolo striato veratrinizzato, poichè in esse, per ogni stimolo unico, alla concentrazione rapida segue una netta contrazione lenta. Senza dubbio, anche nel m. retrattore in esame le contrazioni rapide erano eseguite dalle fibre striate e le contrazioni lente dalla muscolatura liscia. La somiglianza di queste curve di contrazione con quelle dei muscoli avvelenati con veratrina suggerisce l'idea, che alla contrazione lenta della muscolatura liscia (che è essenzialmente costituita di sarcoplasma) del muscolo retrattore corrisponde la contrazione lenta del sarcoplasma del muscolo striato di cui la veratrina ha esaltato la eccitabilità e la contrattilità.

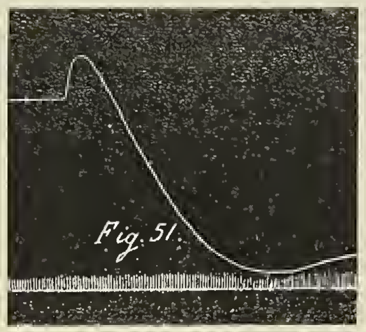
Nella prima curva della fig. 49 il muscolo, terminata la sua distensione, discende al di sotto dell'ascissa, cioè diventa più lungo di quanto era prima che fosse stimolato. Lo stesso fatto si osserva nella fig. 50, che rappresenta pure una contrazione provocata da una scossa unica d'apertura di corrente indotta, contrazione somigliante più delle precedenti alla contrazione veratrinica di un muscolo striato. Questi sono gli effetti inibitori, che io ho osservato, delle stimolazioni elettriche con corrente indotta, nel muscolo retrattore. L'azione inibitrice, che gli stimoli unici di apertura esercitano sul tono del m. retrattore, si rileva benissimo anche dalla fig. 51.

Nei casi finora descritti il muscolo retrattore conteneva certamente fibre striate. Ma si dànno altri casi, nei quali le stimolazioni di corrente indotta non provocano contrazioni rapide, bensì sole contrazioni lente. Ciò avviene perchè la porzione del muscolo su cui si esperimenta non contiene fibre striate, o forse anche quando si stimola un muscolo in cui, per lunga sopravvivenza, l'eccitabilità delle fibre striate



Lo stesso muscolo. Effetto inibitorio, sul tono, di uno stimolo unico d'apertura di corrente indotta, seguente alla contrazione unica. (Riduzione fotografica).

è cessata, rimanendo, sebbene depressa, quella della muscolatura liscia. In tali casi si ottengono curve (ved. per es. la fig 53), nelle quali non si scorgono tracce di contrazioni rapide. In un esperimento si ottennero così due contrazioni lentissime,



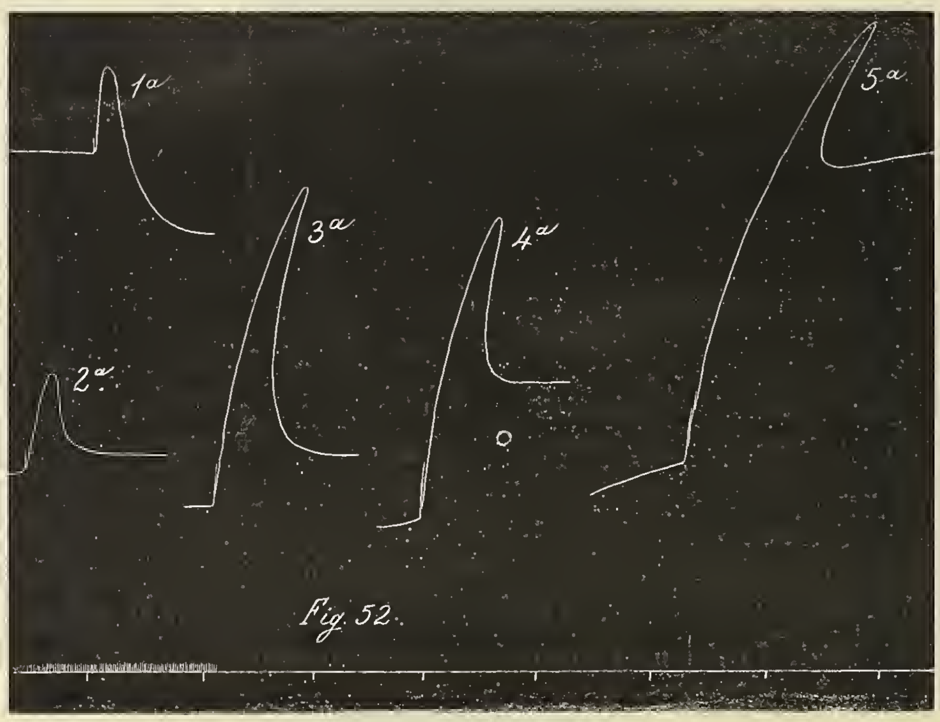
Lo stesso muscolo. Effetto inibitorio di uno stimolo unico d'apertura di corrente indotta, seguente alla contrazione unica. Tempo: 1/5″. (Grandezza naturale).

una di chiusura e l'altra di apertura (4 accumulatori; DR = 0). Siccome in questo caso la velocità del cilindro era abbastanza grande, si potette comodamente misurare il tempo di latenza, che fu, tanto nella contrazione di chiusura, quanto in quella di apertura, di circa 4/5 di secondo.

Finalmente, mediante stimolazione faradica più o meno frequente, da un muscolo retrattore che non reagisce con contrazioni rapide perchè privo di fibre striate, si possono ottenere contratture (ved. appresso) complete. Queste io ottenni con sti-

moli (chiusura e apertura) di corrente indotta seguentisi con frequenza anche piccolissima. Nei casi ai quali accenno, il tratto ascendente delle curve non presentò dentellature, le quali appariscono solo quando il muscolo contiene fibre striate.

L'altezza delle contrazioni provocate con stimoli doppî (chiusura e apertura) di corrente indotta, varia, come era da aspettarsi, col variare dell'intensità di essi, come risulta per es. dalla fig. 52, dove si vede tuttavia che la quarta contrazione (DR = 0 mm.) è meno alta della terza, forse perchè il muscolo già presentava segni di



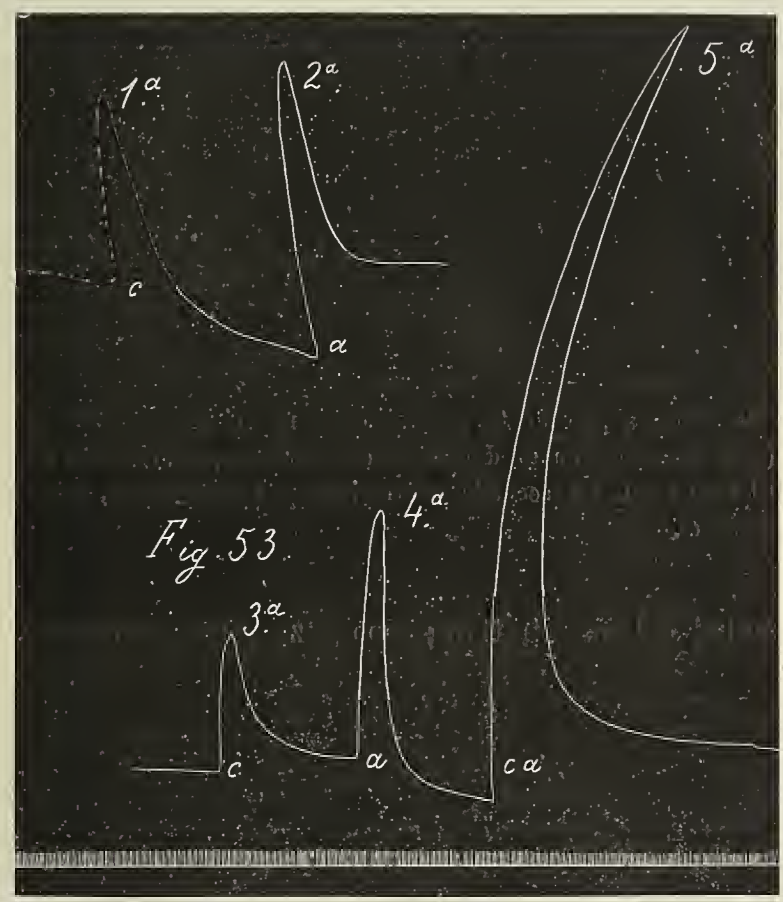
24 febbraio 1914. — *M. retractor penis* di cane giovanissimo. Peso: gr. 2, tempo: prima 1″ e poi 1′, temper.: 30° C. Stimolazioni elettriche di corrente indotta di varia intensità (1 accumulatore, DR = variabile):

1°: stimolo unico d'apertura, DR = 100 mm.
2°: » doppio di chiusura e apertura, DR = 100 mm.
3°: » » » » DR = 50 »
4°: » » » » DR = 0 »
5°: due stimoli doppi di chiusura e apertura, DR = 0 mm.

Durante le stimolazioni, il muscolo si trova all'asciutto, essendo stato aspirato il liquido di Ringer dal tubo cilindrico. (Grandezza naturale).

fatica, e che la quinta contrazione è più alta di tutte perchè provocata da due stimoli doppî. Gli stimoli usati in questo caso, come ho detto, erano doppî, cioè di chiusura e apertura. Ma il confronto fra le curve 1ª e 2ª della figura dimostra, che quando la corrente non è molto intensa (DR = 100 mm.), la contrazione provocata dal solo stimolo di apertura (curva 1ª) non è molto più bassa di quella provocata (curva 2ª) dallo stimolo doppio (di chiusura e apertura), probabilmente perchè nelle dette condizioni lo stimolo di chiusura è poco efficace.

Ma in altre condizioni, la differenza fra le contrazioni di chiusura e apertura è evidente, come dimostra appunto la fig. 53. Si confrontino le curve 1ª (contrazione di chiusura) e 2ª (contrazione di apertura); le curve 3ª (chiusura) e 4ª (apertura): le contrazioni di apertura sono notevolmente più alte. La curva 5ª, molto più alta di tutte le altre, dimostra quale effetto potente produce l'addizione dei due stimoli



25 febbraio 1914. — *M. retractor penis* di cane giovane. Peso: gr. 3, tempo: 1″, temper.: 31° C. Stimoli di chiusura (*c*) e d'apertura (*a*) unici di corrente indotta (1 accumulatore, DR = 0 mm). La sola contrazione 5ª fu provocata da uno stimolo doppio di chiusura e apertura (*ca*). (Grandezza naturale).

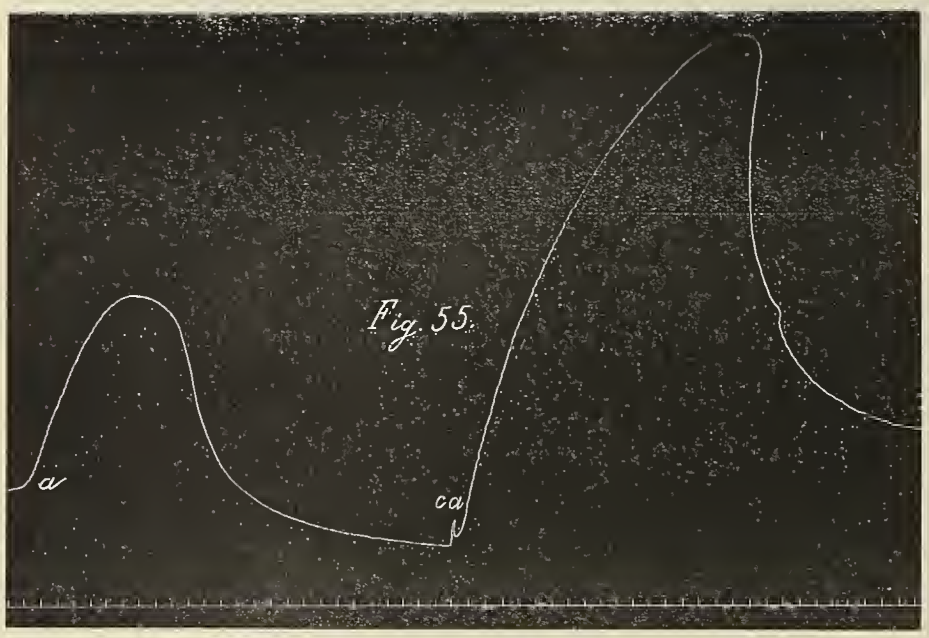
di chiusura e apertura in questo muscolo, ossia quanto è sviluppato in esso la proprietà di addizionare gli eccitamenti e di sovrapporre le rispettive contrazioni.

Tipiche forme di contrazioni uniche della muscolatura liscia del m. retrattore del pene, provocate da uniche scosse d'apertura, sono le curve *a* delle figg. 54 e 55. La dentellatura che si scorge all'inizio delle due contrazioni *ca* delle stesse figure, provocate da stimoli doppî di chiusura e apertura, e che manca quasi del tutto nelle due contrazioni precedenti, svela l'esistenza nel preparato di fibre striate, che hanno reagito mediocremente agli stimoli doppî, ma quasi punto alle scosse uniche di apertura. Le curve sono più ampie perchè registrate sopra un cilindro rotante con velocità maggiore.

Le contrazioni *a* delle figure 54 e 55 somigliano più di tutte le altre dianzi riprodotte alle curve di piccole contrazioni spontanee, e corrispondono senza dubbio

Lo stesso muscolo della figura precedente. Contrazioni semplici provocate da uno stimolo unico di apertura (*a*) e da uno stimolo doppio di chiusura e apertura (*c a*) di corrente indotta (1 accum., DR = 0 mm). La seconda contrazione è, naturalmente, più alta della prima. (Grandezza naturale).

a contrazioni semplici del m. retrattore; sono anzi, potrei aggiungere, le uniche vere



Come nella figura precedente. (Grandezza naturale).

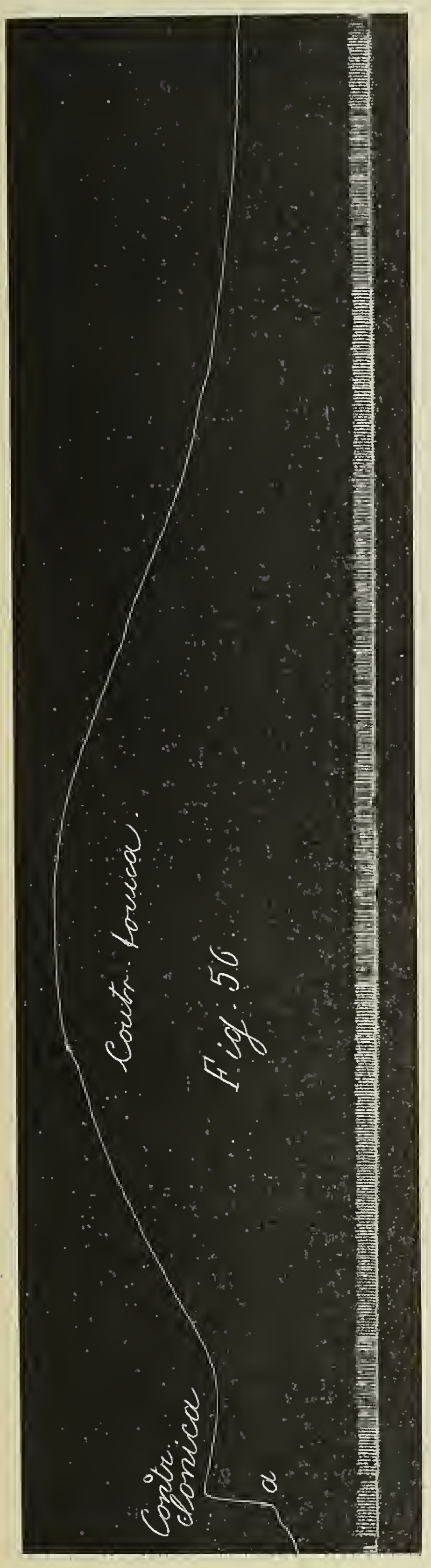
contrazioni semplici, provocate da stimoli unici di corrente indotta, che finora siano state registrate.

Io, però, ho potuto ottenere dal mio preparato muscolare liscio anche « contrazioni doppie » in risposta a stimoli unici di corrente indotta, vale a dire contrazioni

che fanno riscontro alle « contrazioni doppie » che i muscoli striati sono capaci di eseguire anche in risposta a stimoli unici di corrente indotta ([72]). Il fenomeno non è frequente, e quindi si comprende che finora non sia stato mai osservato, e che io l'abbia potuto registrare solo in pochi casi fra centinaia di esperimenti.

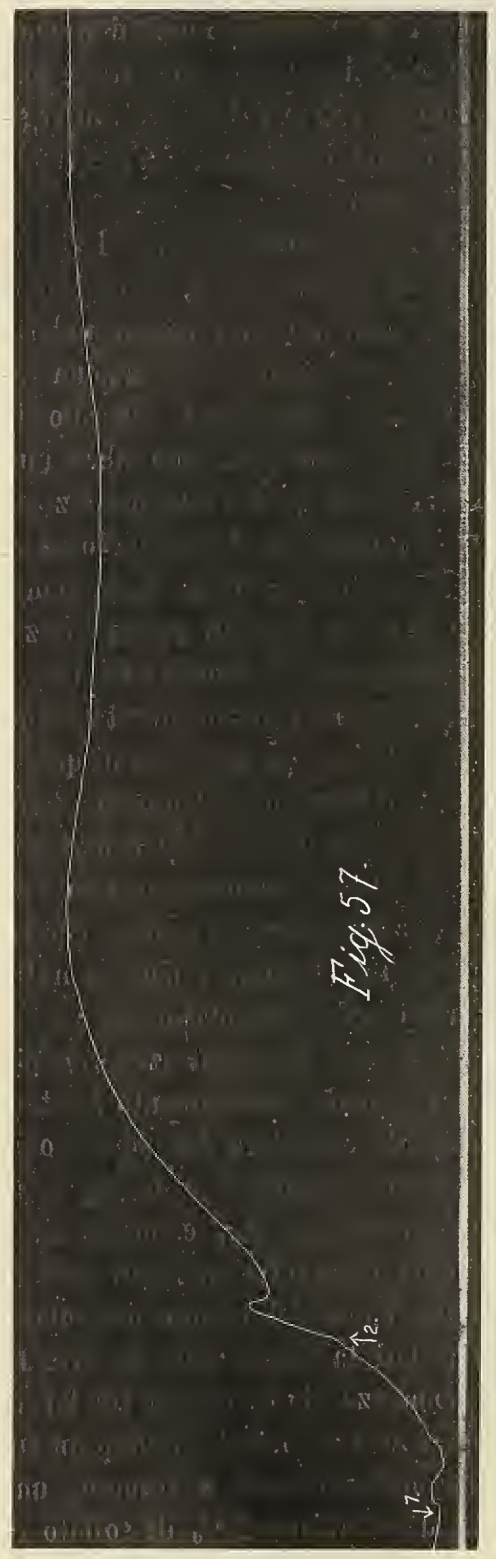
La fig. 56 dimostra in che cosa consiste il fenomeno. A uno stimolo unico di apertura di corrente indotta segue una piccolissima contrazione rapida (quando, come nel muscolo in esame, il preparato contiene fibre muscolari striate), quindi una contrazione lenta, che è propria della muscolatura liscia, e finalmente a un certo punto del tratto discendente di questa s'inizia e poi lentamente si svolge una contrazione ancòra più lenta, di durata variabile, ma in generale maggiore di quella della contrazione precedente. La contrazione doppia, di cui parlo, comprende quindi le due contrazioni lente; da essa è esclusa la contrazione rapida, che riguarda le fibre striate, e non ha nulla che fare con la muscolatura liscia.

Il fenomeno della contrazione doppia può essere, però, enormemente esaltato nel muscolo retrattore del pene, come nel muscolo striato, facendo agire su esso la veratrina che, come si sa, è l'alcaloide sopra tutti capace di eccitare l'attività tonica del tessuto muscolare. Si consideri la curva della fig. 57. In corrispondenza della freccia (in 1.) si aggiunge ai 100 cm^3 di liquido, in cui il muscolo retrattore è sospeso, una goccia di soluzione 2 $^0/_0$ di solfato di veratrina. Il muscolo reagisce subito, prima con un piccolo e poco dopo con un più grande accorciamento. Mentre questo procede, in corrispondenza della seconda freccia (in 2.), si colpisce il muscolo con una scossa di apertura di corrente indotta assai forte (DR = 0). Subito il muscolo eseguisce una contrazione di notevole al-



25 febbraio 1914. — *M. retractor penis* di cane giovane. Peso: gr. 5, tempo: 1'', temper.: 27° C. *a*, stimolo unico d'apertura di corrente indotta, che provoca una *contrazione clonica*, seguita da una lunga *contrazione tonica*. (La temperatura relativamente bassa deve aver molto contribuito ad accentuare la contrazione tonica). (Riduzione fotografica).

tezza, ma poco dopo l'apice di questa contrazione, esso invece di continuare ad allungarsi, ecco che ricomincia ad accorciarsi e ad eseguire una lentissima contrazione, molto più alta della prima e di durata tanto grande che nel tracciato non apparisce nemmeno l'inizio dell'allungamento definitivo.



Lo stesso muscolo. In 1, si aggiunge al liquido di Ringer (100 cm^3) 1 goccia di soluzione 2 °/₀ di solfato di veratrina. Il muscolo si accorcia. A un certo punto del progressivo accorciamento provocato dalla veratrina, in 2, si stimola il muscolo con una scossa unica di apertura di corrente indotta (1 accum., DR = 0 mm). Lo stimolo provoca una contrazione rapida (clonica) seguita da una lentissima e lunghissima contrazione tonica, che sorpassa di molto l'apice della prima. Tempo: 1″, temper.: 17° C. (Riduzione fotografica).

Noi abbiamo, dunque, da fare con vere contrazioni doppie: la prima meno e la seconda più lenta, che si eleva al disopra della prima e dura molto tempo; contrazioni doppie provocate da una stimolazione elettrica unica, che somigliano alle contrazioni doppie dei muscoli striati normali o veratrinizzati, dalle quali differiscono essenzialmznte solo per la durata maggiore delle due contrazioni componenti ciascuna contrazioni doppia, come si conviene a contrazioni di muscoli lisci.

Io sono, dunque, riescito a sdoppiare anche in questi muscoli il fenomeno della contrazione, comunemente detta semplice, nei due componenti: contrazione primaria o rapida o clonica, e contrazione secondaria lenta o tonica, che segue alla prima. Non è facile osservare o provocare tale sdoppiamento, ma è possibile.

Se però, invece di uno stimolo unico di apertura, si applica al m. retrattore uno stimolo doppio (di chiusura e apertura), o due o più stimoli doppî somiglianti, allora il fenomeno della contrazione doppia si presenta con maggior frequenza e senza bisogno di esaltare l'attività tonica con veratrina.

Si osservi per es. la fig. 58: vi si trovano registrate 5 contrazioni, provocate da stimoli della stessa intensità. Ma la prima è in risposta a una sola scossa di apertura: essa presenta la contrazione rapida delle fibre striate, e la sola contrazione meno lenta delle cellule muscolari liscie; non c'è traccia di contrazione se-

condaria più lenta. La seconda e la terza curva, invece, provocate ciascuna da uno stimolo doppio (di chiusura e apertura), presentano (dopo la contrazione rapida delle fibre striate) una cospicua contrazione secondaria tonica, che nella seconda

16 marzo 1914. — *M. retractor penis* di cane giovane. Peso: 3 gr., tempo: 1″, temper.: 30° C. Cinque successive contrazioni provocate:

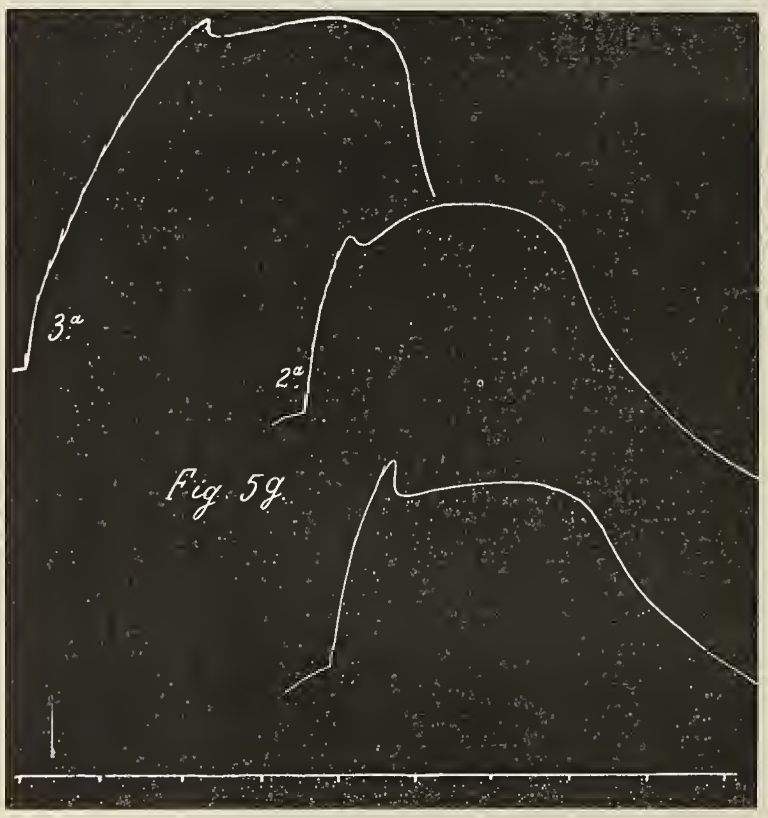
la 1ª da 1 stimolo unico d'apertura (1 acc., DR = 0 mm)
„ 2ª „ 1 stimolo doppio (chius. e apert.) „ „ „
„ 3ª „ 1 stimolo doppio „ „ „ „
„ 4ª „ 2 stimoli doppi „ „ „ „
„ 5ª „ 3 stimoli doppi „ „ „ „

(Grandezza **naturale**).

s'inizia prima ancora che il muscolo incominci ad allungarsi, mentre nella terza s'inizia poco dopo l'apice della contrazione primaria clonica. La 4ª e la 5ª curva rappresentano contrazioni provocate rispettivamente da due e da tre stimoli doppî (di chiusura e apertura). Ma, come si vede, coll' aumentare del numero degli stimoli

è specialmente la contrazione primaria o clonica che aumenta di altezza, tanto che la contrazione secondaria o tonica non riesce più ad elevarsi al di sopra dell'apice della rispettiva contrazione clonica, come avviene nelle curve 2ª e 3ª, ma anzi rimane notevolmente al di sotto di esso.

I due e i tre stimoli si succedono con tale rapidità, come dimostrano le contrazioni delle fibre striate che possono essere utilizzate in tutti questi tracciati



24 febbraio 1914. — *M. retractor penis* di cane. Peso: gr. 3, tempo: 1', temper.: 28° C. Tre contrazioni provocate:

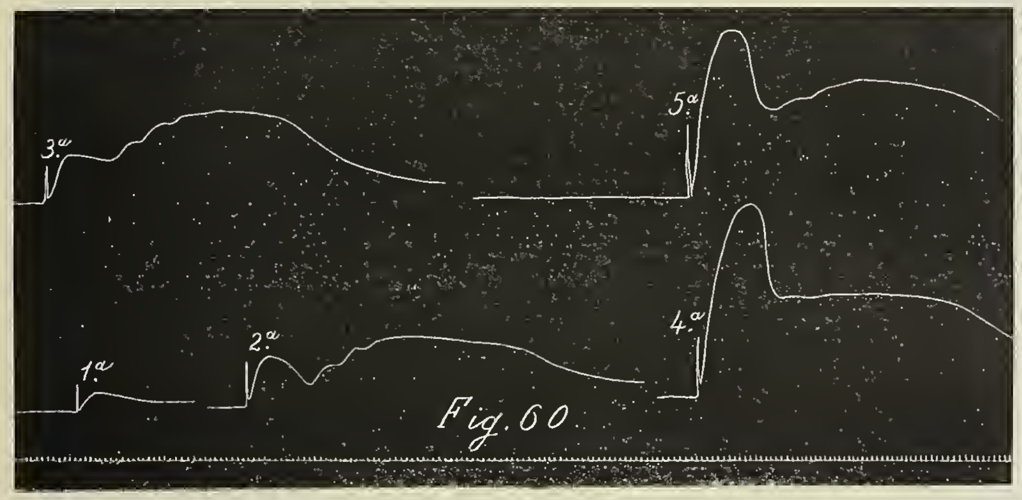
la 1ª da 3 stimoli unici d'apertura (1 acc., DR = 0 mm)
» 2ª » 7 » » » » »
» 3ª » 11 » » » » »

seguentisi con frequenza diversa nei tre casi. Si noti la contrattura (tonica), che segue al tetano incompleto, e che oltrepassa in altezza la cima della curva tetanica. (Riduzione fotografica).

come segnali, da poter con sicurezza affermare che la contrazione più alta delle curve 4ª e 5ª è certamente causata da almeno due, e rispettivamente tre, eccitamenti successivi, fusi perfettamente e sovrapposti nell'effetto meccanico; vale a dire, che essa contrazione equivale a un tetano completo di brevissima durata delle fibre striate. Similmente, come tetano della muscolatura liscia deve ritenersi la contrazione meno lenta che segue alla rapida, e che s'inizia senza dubbio prima del suo cominciamento apparente, come effetto delle stimolazioni; ma il suo tratto iniziale (ascendente) manca nella curva, perchè in corrispondenza di esso il muscolo è occupato

a eseguire contrazione tetanica delle fibre striate. Si può tuttavia completare idealmente la curva del tetano della muscolatura liscia, tracciando una linea che dal punto in cui essa apparentemente s'inizia discende fin presso il punto corrispondente all'inizio della contrazione tetanica delle fibre striate.

L'effetto è lo stesso, se invece di usare stimoli doppî di chiusura e apertura, si usano stimoli di sola apertura meno frequenti. Nella fig. 59 sono registrate tre curve di contrazione dello stesso muscolo retrattore: la 1ª provocata da tre soli stimoli d'apertura, la 2ª da sette, e la 3ª da undici stimoli successivi di apertura di corrente indotta. In questo esperimento la frequenza degli stimoli fu sempre assai



16 marzo 1914. — *M. retractor penis* di cane giovane. Peso: 3 gr., tempo: 1″, temper.: 28° C. Cinque contrazioni provocate:

la 1ª	da	1	stimolo unico d'apertura	(1 acc.,	DR = 0 mm)			
» 2ª	»	1	stimolo doppio	(chius. e apert.)	»	»		
» 3ª	»	1	»	»	»	»	»	»
» 4ª	»	2	stimoli doppi	»	»	»	»	
» 5ª	»	2	»	»	»	»	»	»

Si noti la contrazione tonica ondulata, che segue alla contrazione clonica. (Riduzione fotografica).

piccola, tanto che si scorgono, in forma di dentellature, le singole contrazioni rapide delle fibre striate. Le contrazioni sono sovrapposte e formano quindi un tetano quasi completo non ostante la piccolissima frequenza degli stimoli. Ogni volta, però, dopo questo tetano primario, il muscolo ha appena incominciato ad allungarsi, che incomincia ad eseguire un'ampia contrazione lenta, la quale nelle curve 2ª e 3ª si eleva anche sopra la cima del tetano. Tutte queste curve di contrazione presentano una decisa rassomiglianza con quelle dei muscoli striati sottoposti all'azione della veratrina.

In alcune delle curve precedenti (fig. 58), si può facilmente rilevare, che la contrazione tonica è un poco ondulata. Ora questo fenomeno si presenta in grado maggiore accentuato nelle curve delle seguenti figure 60 e 61.

Qui si vede, che qualunque sia la forma complessiva che presenta la contrazione totale: esista, cioè, come nel maggior numero dei casi, una contrazione rapida della muscolatura liscia che precede la contrazione lenta, o apparisca solamente quest'ultima, come nella 1ª curva della fig. 61 che fu registrata dal muscolo in

risposta ad un solo stimolo d'apertura; sia la detta contrazione lenta più o meno alta della contrazione rapida; siano le due contrazioni nettamente distinte l'una dall'altra, o invece fuse, nel senso che la contrazione rapida si continua indistintamente nella lenta: certo è che sempre la contrazzione lenta si presenta, in queste figure, sotto forma di una curva ondulata, la quale svela un fenomeno di contrazione ritmica. E anche questo fenomeno di contrazione lenta ritmica, seguente a uno stimolo unico o doppio, e oltrepassante di molto il momento della stimolazione, ha il suo riscontro in un fenomeno analogo che presenta il mio preparato diaframmatico. Anche in questo preparato, talora la contrazione tonica si presenta sotto forma, non di una curva omogenea, ma di una curva ondulata, in altre parole, essa è una contrazione ritmica; e la causa del ritmo non può essere se non autonoma, cioè risiedere in uno stato d'eccitamento ritmico suscitato nella sostanza muscolare dall'unico stimolo che l'ha colpita.

Lo stesso muscolo. Tre contrazioni provocate:
la 1ª da 1 stimolo unico d'apertura (1 acc., DR = 0 mm)
„ 2ª „ 1 stimolo doppio (chius. e apert.) „ „ „
„ 3ª „ 2 stimoli doppi „ „ „
Si noti che nella 1ª non si scorge traccia di contrazione clonica della muscolatura liscia, mentre c'è una ampia contrazione tonica ondulata; e che nella 2ª e 3ª l'inizio della contrazione tonica si confonde coll'apice della contrazione clonica.
(Riduzione fotografica).

Da quanto abbiamo esposto risulta, mi sembra, evidente *l'analogia che esiste fra muscoli striati e lisci nel modo di reagire alle stimolazioni uniche di corrente indotta. Queste provocano spesso « contrazioni doppie », cioè composte di una contrazione primaria rapida o clonica, e di una contrazione secondaria lenta o tonica, che talora è ritmica. La dissociazione delle due contrazioni non sempre ha luogo in modo tale da permettere che esse si manifestino pienamente distinte. Le due contrazioni possono essere attribuite rispettivamente alle miofibrille e al sarcoplasma delle cellule muscolari lisce, onde è costituito il m. retrattore, precisamente come, nei muscoli striati, abbiamo attribuito alle miofibrille la contrazione rapida e al sarcoplasma la contrazione lenta.*

2. — *Azione della corrente costante.*

Della corrente costante ho studiato l'azione stimolante generale, e l'azione polare particolarmente.

a) Azione stimolante generale. — Siccome si trattava di fare poche stimolazioni brevi, cioè brevi passaggi della corrente costante per il muscolo, mi sono anche servito qualche volta di elettrodi metallici: di oro, quando essi venivano a contatto coi due estremi del muscolo tenuto in posizione verticale; di platino, quando con essi si stimolava una porzione del muscolo tenuto in posizione orizzontale. La fig. 62 contiene due curve di contrazione di un lungo muscolo retrattore, le due estremità del quale erano a contatto con elettrodi di oro, in guisa che la corrente investiva il muscolo per tutta la sua lunghezza in direzione ascendente, cioè dall'estre-

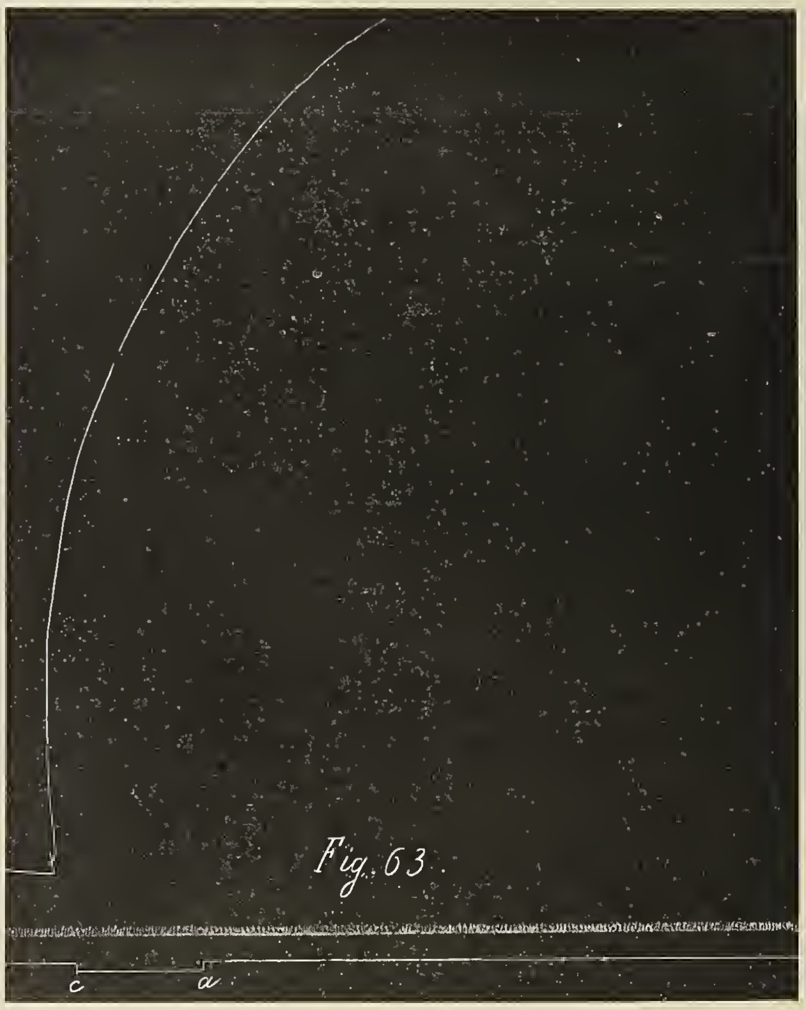
M. retractor penis di cane, sospeso longitudinalmente. Due contrazioni, provocate da stimolazione del muscolo con corrente costante (35 Volta). Nella contrazione inferiore, l'anodo (+) corrispondeva all'estremità perineale del muscolo; nella superiore, vi corrispondeva il catodo (—). Tutte e due sono contrazioni di chiusura; l'apertura avviene in un momento, nel quale il muscolo, non può quasi più accorciarsi. Peso: gr. 6, tempo: 1/5″, temper.: 36° C. (Riduzione fotografica).

mità perineale alla prepuziale, o discendente, cioè nella direzione opposta. La curva inferiore fu registrata quando l'estremità perineale era a contatto col polo positivo, la superiore, quando essa era a contatto col polo negativo. (Corrente = 35 Volta. Peso che carica la penna = 6 gr. Temperatura = 36°. Muscolo immobile. Tempo: 1/5″).

Come si vede, le due curve di contrazione sono presso che eguali. Alla chiusura (*c*), il muscolo, che contiene fibre striate, fa una piccola contrazione rapida, e poi si accorcia fortemente, descrivendo un'ampia contrazione lenta, lungo il tratto ascendente della quale si scorgono piccolissime dentellature. All'apertura non corrisponde un allungamento del muscolo, che si verifica solo più tardi, ma una contrazione, la quale sulla curva è sì poco manifesta perchè il muscolo non può accorciarsi più di quanto è già accorciato prima dell'apertura. In altri esperimenti, che per

brevità non riferisco, si vide nettamente che la contrazione di apertura si sovrapponeva a quella di chiusura, il che avviene quando al momento dell'apertura il muscolo non si trova in stato di massimo accorciamento.

Ho detto che il tratto ascendente della curva inferiore della fig. 62 è seghettato. Ma quello della curva superiore della stessa figura non lo è affatto; nè seghet-



M. retractor penis di cane, lo stesso della fig. precedente. Contrazione di chiusura (*c*) provocata da corrente elettrica costante (30 Volta). (Le condizioni sono identiche a quelle delle contrazioni della figura precedente). (Riduzione fotografica).

tata è la curva della fig. 63, registrata da un altro retrattore, che fu stimolato come il precedente (corrente ascendente di 30 Volta). (Su questa curva l'effetto dell'apertura della corrente non è distinguibile).

Nella fig. 64 sono riprodotte varie curve di contrazioni provocate da chiusura di corrente costante più o meno forte (da 20 a 40 Volta), registrate a grande velocità del cilindro al fine di determinare il tempo di latenza. Come si vede, questo oscilla intorno ai tre quinti di secondo. Per quanto riguarda l'aspetto delle curve, è evidente che queste non sono uniformi, ma presentano ampie ondulazioni, pochissimo

accentuate, ma tuttavia distinguibili. La parte ascendente è presso che eguale in tutte le curve; l'ascensione è sempre relativamente assai lenta.

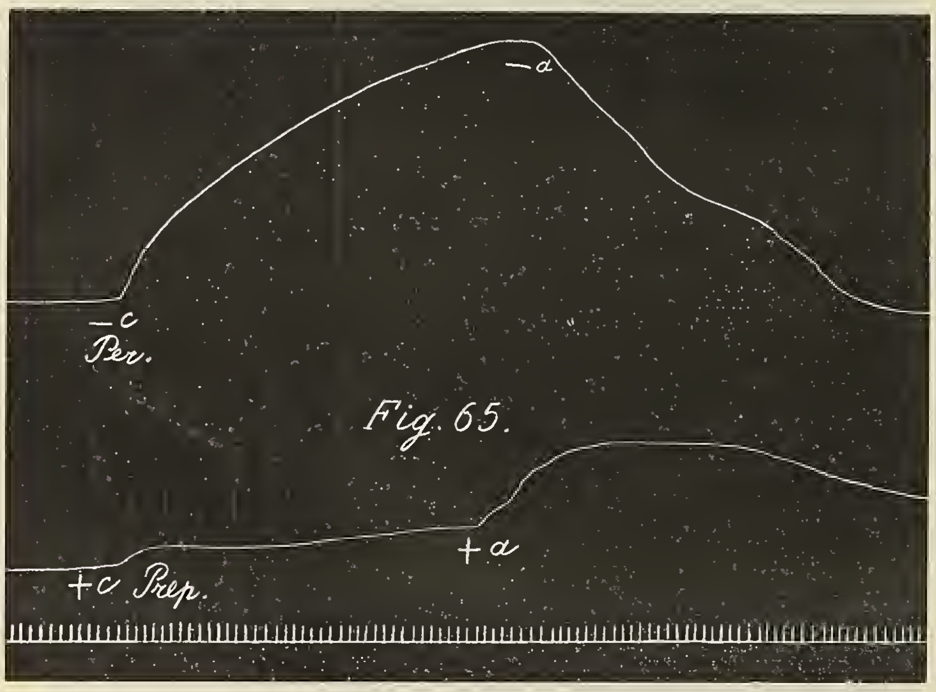
23 luglio 1913. — *M. retractor penis* di cane. Varie contrazioni provocate da stimolazioni di corrente costante:

1: estrem. perineale — corr. 20 Volta
2: " prepuziale — " 20 "
3: " perineale — " 30 "
4: " perineale — " 40 "
1^s, 2^s, 3^s e 4^s: i rispettivi stimoli di chiusura.

Peso: gr. 5, tempo: 1/5", temper.: 36° C. (Riduzione fotografica).

b) Azioni polari della corrente costante. — Effetti dell'applicazione della corrente costante su preparati muscolari lisci sono stati osservati e descritti da diversi autori, come sopra ho detto.

Perchè gli esperimenti diano risultati netti e concordi, è necessario che il muscolo sia ben fissato nel mezzo, affinchè la contrazione di una metà di esso non eserciti trazione meccanica sull'altra metà e quindi sulla leva corrispondente; ma la fissazione non deve essere tale da impedire il propagarsi degli eccitamenti da un'estremità all'altra del muscolo. Se la fissazione del muscolo è perfetta, lo si vede subito dalle curve registrate: quando le due metà del muscolo si contraggono su per giù con eguale energia e si rilassano egualmente, vuol dire che esse non funzionano indi-



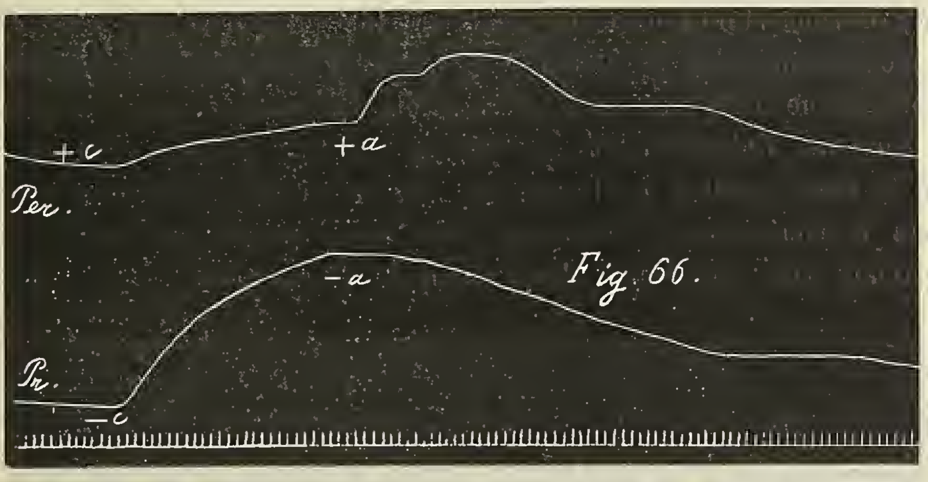
M. retractor penis di cane. Azione polare della corrente costante (35 Volta, 6×10^{-4} Ampère): + anodo; — catodo; *c*, chiusura; *a*, apertura. Peso: gr. 5, tempo: 1″, temper.: 31° C. *Per.*: estremità perineale; *Prep.*: estremità prepuziale del preparato. (Riduzione fotografica).

pendentemente per quante riguarda l'azione meccanica che esercitano sulle rispettive leve, con cui sono connesse.

La figure 65, 66, 67 e 68 riproducono alcune delle curve da me registrate. Adagiati i due elettrodi impolarizzabili sulle due estremità, perineale e prepuziale, del muscolo, e constatato quale è l'anodo e quale il catodo, si chiudeva il circuito della corrente, si aspettava che l'azione polare fosse ben manifesta, e quindi si apriva il circuito, osservando anche l'effetto dell'apertura. Subito veniva rimesso il liquido di Ringer nella bacinella, si aspettava qualche minuto, s'invertiva mediante un commutatore la direzione della corrente, si tornava ad aspirare il liquido, e quindi si chiudeva e poi si apriva di nuovo il circuito. In questo modo, l'estremità perineale del muscolo, una volta era positiva (+) o negativa (—), rispetto all'estremità prepuziale, e la volta successiva era connessa col polo di segno opposto.

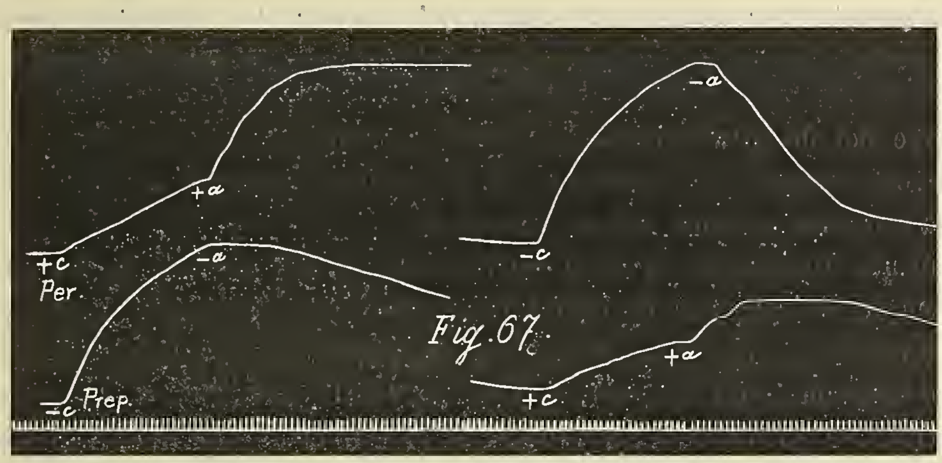
Costantemente osservai contrazione tonica di chiusura nella metà del preparato connessa col polo negativo (—), fosse essa la estremità perineale o la prepuziale, e contrazione di apertura nella metà connessa col polo positivo (+). Dalle figure resulta evi-

dente, che mentre alla contrazione catodica di chiusura corrisponde una curva quasi del tutto priva di ondulazioni, la contrazione anodica di apertura, invece, è rappresentata da una curva sempre ondulata; il che sta a dimostrare che l'eccitamento catodico di chiusura è più forte e si propaga con maggior velocità, in confronto



Lo stesso muscolo. Condizioni simili. Corrente costante: 35 Volta, 5×10^{-4} Ampère. (Riduzione fotografica).

con l'eccitamento anodico di apertura (vedi appresso, circa questa affermazione). Inoltre, si vede che la contrazione catodica di chiusura ascende tanto più rapidamente quanto maggiore è la forza della corrente.

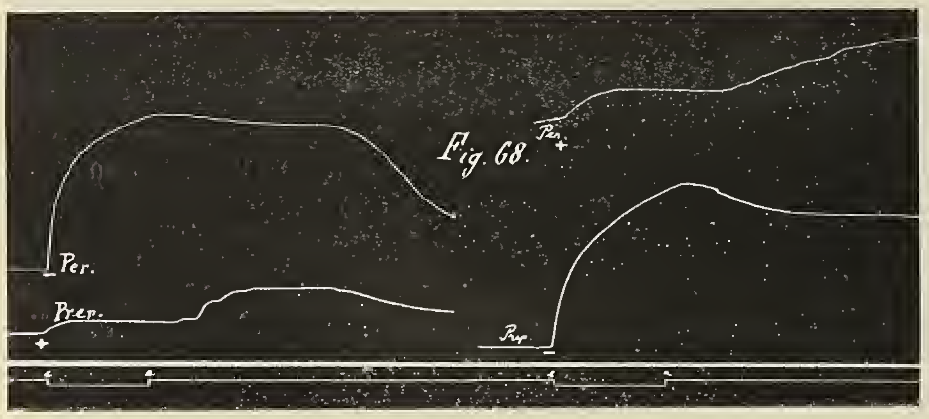


Lo stesso muscolo. Per le due curve a sinistra, corrente: 40 Volta. Per le due curve a destra, corrente: 30 Volta. Le altre condizioni, identiche. (Riduzione fotografica).

Mentre la metà catodica del muscolo si contrae, durante la chiusura (*c*) del circuito, la metà anodica presenta anche un debole accorciamento. Questo però non credo che, nei miei esperimenti, fosse dovuto a trazione esercitata sulla metà anodica del muscolo dalla metà catodica; ma piuttosto a parziale propagazione dell'eccitamento di chiusura oltre la linea di fissazione del muscolo per un certo tratto della metà anodica in prossimità della detta linea. All'apertura del circuito (*a*), la

metà catodica del muscolo sempre si allunga, più o meno presto e più o meno rapidamente: la curva corrispondente non presenta mai traccia di elevazione della penna; il che dimostra che la contrazione anodica di apertura non esercita trazione sulla metà catodica del muscolo, la quale si allunga liberamente.

L'osservazione del de Zilwa (l. c.), secondo cui le due metà del muscolo si contraggono e rilassano simultaneamente, è la miglior prova che egli sperimentava su muscoli imperfettamente fissati nel mezzo. La fig. 11 del lavoro di de Zilwa mostra, per. es., contrazione delle due metà del muscolo, tanto alla chiusura quanto all'apertura della corrente. Evidentemente, durante la chiusura la metà catodica contraendosi tirava la metà anodica, e all'apertura, questa tirava quella. Non altrimenti si può spiegare il rilassamento simultaneo delle due metà di un muscolo già tonicamente accorciato alla chiusura, e l'accorciamento all'apertura.



Lo stesso muscolo. Corrente: 35 Volta, tempo: 1/5″, temper.: 34° C. (Riduzione fotografica).

Le curve del de Zilwa rivelando, dunque, una disposizione imperfetta dell'esperimento, devesi ritenere che le mie sono le prime che dimostrano all'evidenza l'azione polare della corrente costante sul m. retrattore.

Egualmente dimostrative sono le curve della fig. 68 ottenute in un altro esperimento. Sempre si vede che la contrazione catodica di chiusura è molto più forte di quella amodica di apertura, e che questa ultima è contrassegnata da ondulazioni più o meno cospicue. Nell'esperimento della fig. 67, la decontrazione della metà catodica all'apertura è pochissimo accentuata; il che dipende verosimilmente dal fatto che, data l'intensità della corrente, l'eccitamento anodico di apertura, propagandosi alla metà catodica del muscolo, interferisce col processo di rilassamento che in questa metà s'era già iniziato.

Per ottenere effetti evidenti, io ho dovuto servirmi di correnti molto forti. I primi esperimeati fatti con correnti di 8-10 Volta mi dettero risultati assai meschini. Non comprendo come il de Zilwa abbia trovato sufficienti le correnti di 2-4 Volta. Ciò non può spiegarsi altrimenti, se non ammettendo che gli elettrodi da lui usati presentassero piccolissima resistenza. La resistenza di quelli che ho usato io, invece, è grandissima, come resulta dal fatto che, con una corrente di 35 Volta, passavano solamente in un caso 6×10^{-4} Ampère, e in un altro caso 5×10^{-4} Ampère.

VII.

Natura delle contrazioni automatiche del m. retrattore del pene.

1. — *Opinioni di varii autori.*

Il Sertoli (l. c.) fu il primo che osservò le contrazioui automatiche del m. retrattore del pene di varî mammiferi (cavallo, asino, cane). Egli vide che le curve non hanno la medesima forma e le stesse dimensioni, ciò che dimostra che le rispettive contrazioni non sono eguali. Ciò è stato confemato dai successivi osservatori. I miei tracciati sopra riportati e tutte le altre curve qui appresso riprodotte, dimostrano all'evidenza una grande varietà dell'attività motoria automatica del muscolo, tale che ben a ragione può dirsi, che non esistono due soli tracciati che si somiglino interamente. Secondo il Sertoli, le contrazioni del muscolo di cavallo avrebbero la durata di due a quattro a sei e più minuti, mentre quelle del muscolo di cane durerebbero in media 75″ o poco più. In alcuni rarissimi casi, il muscolo non faceva contrazioni di sorta, pur essendo eccitabile. L'accorciamento che il muscolo raggiunge quando si contrae è eguale a circa un sesto o un quinto della sua lunghezza allo stato di estensione. Nei tracciati di muscolo canino, « dans la plus grande partio des cas on voit des courbes grandes étendues, principales, et parmi celles-ci, ou snr les mêmes d'autres secondaires plus petites, correspondantes à des courtes contractions du muscle » (Sertoli).

Secondo Sertoli, le contrazioni spontanee hanno una durata minore di quelle provocate, nelle quali più lungo si presenta il tratto corrispondente all' estensione. Ma, secondo Winkler (l. c.) e de Zilwa (l. c.), tale differenza sarebbe dovuta all'avere il Sertoli stimolato il muscolo con correnti troppo forti.

Non avendo visto il Sertoli « entre les faisceaux musculaires et dans le tissu conjonctif environnant, aucun ganglion nerveux... », ammise che le contrazioni automatiche fossero di natura miogena.

Secondo de Zilwa (l. c., pag. 202), le contrazioni spontanee sono talora piccole e frequenti, otto o dieci al minuto; altre volte sono grandi e meno frequenti, della durata di due minuti o più, e allora la porzione ascendente di ciascuna curva è segnata da piccole dentellature o ondulazioni, specialmente in prossimità dell'apice (fig. 1 dell'A.). La grande diversità di frequenza, di grandezza ecc. che si osserva fra le curve di contrazioni spontanee di diversi muscoli in condizioni apparentemente simili, è interpetrata dall'A. in un modo, che non è qui il caso di discutere.

Nelle conclusioni del suo lavoro, de Zilwa afferma (pag. 223), che le grandi e le piccole contrazioni del muscolo sono dovute, non alla funzione contrattile di un costituente speciale delle cellule muscolari lisce (cioè del sarcoplasma, secondo la mia teoria), ma alla maggiore o minore fusione delle contrazioni ritmiche delle *singole cellule* (?). Secondo de Zilwa (l. c.), ciascuna ondulazione della curva è dovuta

alla contrazione di una fibra distinta (?) o di una serie di fibre (pag. 223). Se si aggiunge, che ciascuna metà del muscolo può contrarsi con ritmo diverso, si comprende agevolmente, egli aggiunge, la grande varietà di curve di contrazione automatica, che il muscolo presenta.

Nel suo primo lavoro sul *m. retractor penis*, von Brücke (l. c.), confermato il fatto che questo muscolo, quando è isolato (per 4-5 cm) nella sua estremità prepuziale e lasciato in situ, entra in contrazione tonica, osservò che in questo stato il muscolo è percorso da onde di eccitamento, aventi direzioni dall'estremità anale alla prepuziale, le quali si manifestano all'esterno con tipiche correnti d'azione difasiche, che egli mise in evidenza col galvanometro a filo (adagiando gli elettrodi sul muscolo alla distanza di circa 1 cm.), e che si seguono o in ritmo frequente (3-9 al minuto), o irregolarmente con intensità diversa e ad intervalli differenti. Riscaldando il muscolo, mentre il tono diminuisce, anche le ritmiche correnti d'azione diventano più deboli o più lente, o cessano del tutto. In un muscolo atonico, si possono provocare singole onde d'eccitamento o serie di tali onde ritmiche mediante stimoli tensivi o raffreddamento.

Secondo l'A., le ordinarie contrazioni spontanee di quel muscolo registrate dagli autori precedenti (Sertoli, de Zilwa, Bottazzi), non sarebbero contrazioni semplici, ma oscillazioni del tono (Tonusschwankungen), cioè tetani; e ciò egli deduce dalla durata di esse. Le correnti d'azione constatate da von Brücke, quando sono regolari, si seguono infatti con la frequenza di 3-9 al minuto (in media, 7); e la velocità di propagazione oscilla fra 0,9 e 7 mm. sec^{-1}, vale a dire è piccolissima (100 volte circa minore che nel m. retrattore della proboscide del *Sipunculus*).

Il von Brücke ha osservato pure che nelle curve di contrazione del m. retrattore (che però non riproduce), e specialmente nel tratto ascendente, si osservano ondulazioni le quali, per durata, corrispondono alle singole correnti d'azione da lui stesso registrate mediante il galvanometro a filo.

Siccome Sertoli parla di una durata di 75 secondi, e de Zilwa di una durata di 2 o più minuti, le corrispondenti contrazioni non possono essere contrazioni semplici, ma tetani, secondo von Brücke. Solo quelle contrazioni piccole e più frequenti, di cui parla de Zilwa, quelle cioè che si seguono con una frequenza di 8-9 al minuto, sarebbero contrazioni semplici, perchè tale è anche, approssimativamente, la frequenza delle correnti d'azione registrate dal von Brücke.

Come si vede, regna una grande confusione nelle opinioni espresse dai diversi autori, circa la natura delle contrazioni automatiche del m. retrattore del pene. Vedremo appresso, se sarà possibile coordinare e chiarire le diverse osservazioni.

2. — *Influenza delle condizioni esteriori sul m. retrattore del pene.*

Per quanto riguarda le condizioni esteriori di sopravvivenza, ecco quel che si può dire brevemente.

a) La sopravvivenza è maggiore nelle stagioni fredde, che nelle calde, perchè il *freddo* conserva a lungo, il *caldo* esaurisce relativamente presto l'eccitabilità del muscolo.

b) Il Sertoli conservava il preparato di cavallo in siero di sangue dello stesso animale. Ma il liquido di Ringer o di Locke o di Tyrode costituisce per il muscolo un ambiente ottimo sotto ogni rispetto, sia per conservarlo a freddo, come per tenerlo immerso durante gli esperimenti. Mosso, von Brücke e tutti gli altri autori che hanno sperimentato sul muscolo in situ, lo hanno esposto all'aria.

c) Sertoli osservò (in vivo) che nell'*asfissia* il muscolo si contrae, e si allunga quando si ripristina la respirazione.

Io ho osservato in un esperimento che, arrestando il gorgogliamento dell'*ossigeno* per il liquido di Ringer, in cui era immerso il muscolo asportato dal corpo, questo man mano si accorciò, mentre diminuirono d'ampiezza e finalmente cessarono le contrazioni automatiche; e che somministrando l'ossigeno, dopo poco (circa 3 minuti) il muscolo incominciò di nuovo ad allungarsi, e solo dopo un tempo maggiore (circa 45 minuti) ricominciò ad eseguire contrazioni spontanee.

In un altro esperimento, la sottrazione dell'ossigeno anche produsse, col tempo, accorciamento del muscolo e cessazione delle contrazioni automatiche. Ma la nuova somministrazione dell'ossigeno, invece di produrre allungamento del muscolo, come nel caso precedente, provocò sùbito una notevole contrattura. Più tardi incominciarono ad apparire piccole contrazioni spontanee ritmiche.

È difficile spiegare la differenza fra i due resultati, che forse dipendono dalla grande sensibilità del preparato per le variazioni di concentrazione degli $H^{\bullet}$

d) La *temperatura* esercita un'influenza grandissima sul m. retrattore del pene, come sui muscoli lisci in generale.

Secondo Sertoli, il muscolo isolato e moderatamente caricato rimane allungato, tanto se la temperatura dell'ambiente è bassa (2°-5° C.), quanto se la si eleva fino a raggiungere i limiti fisiologici (35°-37° C.). Ma riscaldando il muscolo, se era freddo, come anche raffreddandolo, se era caldo, esso si contrae, sia la variazione termica brusca o lenta. Dopo l'accorciamento, però, il muscolo torna ad allungarsi: in altre parole, l'accorciamento per stimolazione termica dura poco tempo. Agli stimoli termici il muscolo reagisce più energicamente che agli stimoli elettrici: il che dimostra, secondo Sertoli, che l'eccitabilità termica di esso è squisita.

Secondo de Zilwa (l. c.), un aumento graduale della temperatura fino a 40° C. provoca completo allungamento del muscolo, che però si accorcia quando la temperatura raggiunge circa 47° C., per tornare a distendersi verso i 52° C. Pochi gradi più sù, il muscolo si presenta massimamente disteso, ma è già ineccitabile.

Secondo von Brücke, a basse temperature il muscolo entra facilmente in tetano, mentre a temperature superiori (fisiologiche) il suo tono diminuisce, e si indeboliscono le contrazioni automatiche, fino a cessare del tutto.

Dalle mie ricerche resulta, in generale, quanto segue.

Immediatamente dopo l'asportazione, il muscolo si presenta molto, talora massimamente contratto. Ciò è effetto, principalmente, delle stimolazioni meccaniche esercitate sui nervi e sugli elementi muscolari, ossia del trauma operatorio, e anche dell'esposizione all'aria, e quindi a una temperatura inferiore a quella del corpo (l'accorciamento è maggiore nell'inverno ecc.), dell'arresto dell'irrigazione sanguigna, di un parziale essiccamento alla superficie, della mancanza di tensione ecc. Come il mu-

scolo viene sospeso fra i due uncini nel liquido di Ringer già ossigenato e riscaldato a 22°-25° C, ed è sottoposto all'azione tensiva della leva scrivente caricata del peso, esso incomincia ad allungarsi, e l'allungamento continua coll'elevarsi della temperatura. Si può dire che il detto allungamento sia dovuto esclusivamente o principalmente al riscaldamento del muscolo? Mi pare di no; anzi credo fermamente che il riscaldamento sia solo uno dei fattori della distensione del muscolo, la quale è causata senza dubbio anche dal peso della leva e dall'azione benefica del liquido ossigenato.

Non v'ha dubbio che le temperature basse determinano nel preparato una tendenza alla contrattura, e che a temperatura molto alta, sebbene non eccedente di troppo i limiti fisiologici, esso si presenta per lo più allungato ed inerte. Per immobilizzare il muscolo in stato di estensione, senza alternarne l'eccitabilità, come occorre fare negli esperimenti sull'azione della corrente elettrica, il miglior mezzo è appunto quello di elevare la temperatura del bagno, in cui è immerso, fino a 38°-39° C. Non sempre, però, la cessazione delle contrazioni automatiche coincide con uno stato di massimo allungamento del muscolo. In uno dei miei esperimenti, il muscolo fu riscaldato gradatamente da 30° fino a 40° C, e poi di nuovo gradatamente riportato alla temperatura iniziale. Ora si osservò, che mentre a 30° e 31° C. le due estremità (prepuziale e perineale) del muscolo eseguivano forti contrazioni automatiche, verso i 35° C le contrazioni cessarono, e il muscolo si contrasse un poco, in tale stato rimanendo fino a 40° C. Abbassata la temperatura del liquido a 33° C, ricomparvero le contrazioni automatiche, ma nella sola estremità perineale (nella estremità prepuziale apparvero solo più tardi, e furono sempre piccolissime), e continuarono per molto tempo; simultaneamente il muscolo si allungò.

La temperatura *optimum*, per quanto riguarda l'attività motoria automatica del m. retrattore del pene, è quella che sta fra i 29° e i 32° C. A temperatura inferiore, la tendenza alla contrattura ostacola o impedisce l'effettuarsi di un ritmo regolare; a temperature superiori l'attività automatica s'indebolisce o cessa del tutto, dopo che, in alcuni casi, il muscolo ha eventualmente eseguito per qualche tempo contrazioni più frequenti delle ordinarie.

Per quanto riguarda il tono del preparato muscolare, ossia il suo stato medio di accorciamento durevole o continuo, esso, in generale. aumenta a temperature inferiori ai 30° C., diminuisce a temperature superiori.

I salti improvvisi di temperatura, e però l'immersione del muscolo, già raffreddatosi all'aria durante la preparazione, in liquido di Ringer già caldo (35°-36° C), provocano sempre contratture, di lunghissima durata. È necessario, quindi, per evitare tali contratture, che il liquido di Ringer, al momento dell'immersione, abbia una temperatura non troppo differente da quella dell'aria, e che sia poi gradatamente riscaldato.

Se il m. retrattore normale immerso in liquido di Ringer ossigenato trovasi in stato di accorciamento durevole, si può esser certi che la causa di tale contrattura è la bassa temperatura del bagno. In tale stato, le stimolazioni elettriche possono provocare un allungamento del muscolo, ma esso è di breve durata: persistendo la causa della contrattura, il muscolo subito torna ad accorciarsi, come dimostra il tracciato della figura 40.

In tali condizioni, l'unico mezzo per far allungare il preparato è il riscaldamonto graduale del bagno, come si vede nella figura dianzi citata.

e) Proprietà delle varie porzioni del muscolo. — Io ho fatto varii esperimenti per vedere se, divisa la porzione peniena del m. retrattore in due o tre parti, queste presentano le stesse proprietà, o proprietà diverse.

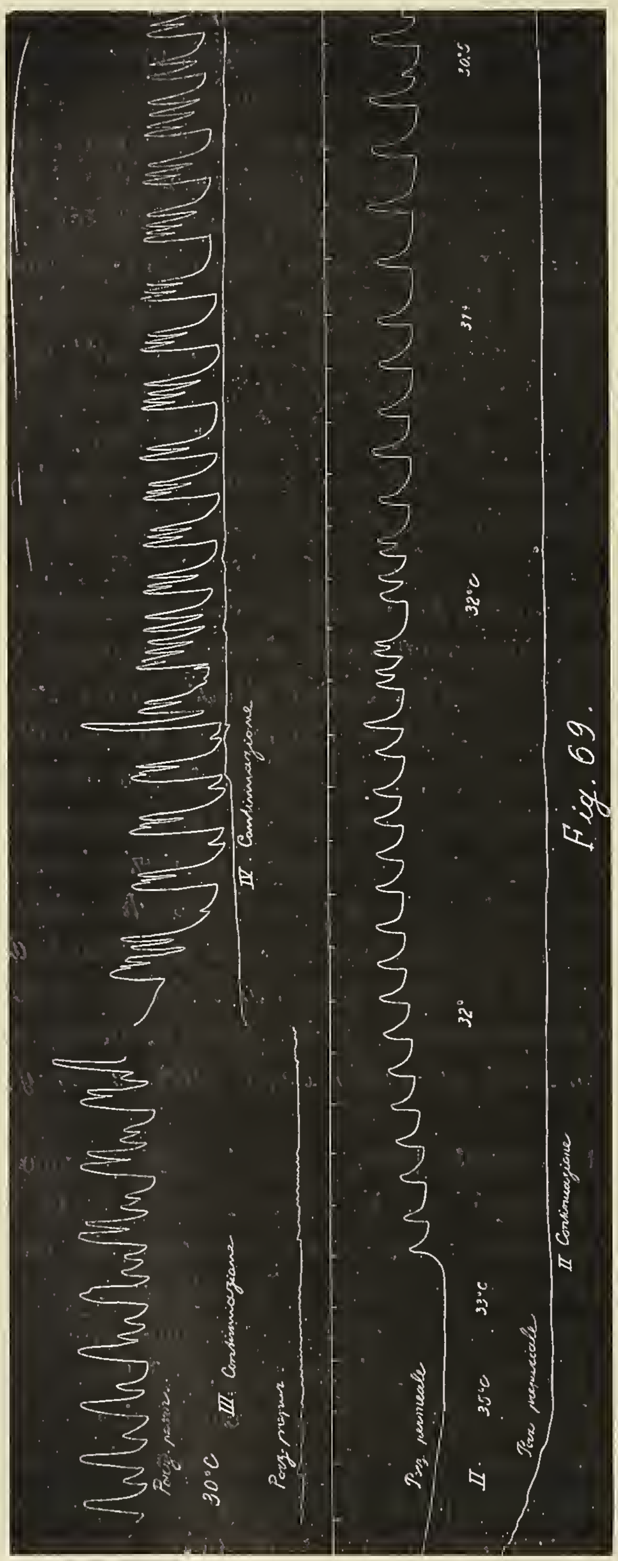
Per quanto riguarda l'influenza della temperatura, degli agenti chimici ecc., non esistono differenze degne di nota e costanti fra le diverse parti. Due sole differenze credo, a questo proposito, di poter rilevare. La prima è, che l'estremità perineale sembra dotata di maggiore attività automatica, come resulta dai tracciati della figura 69, dove l'estremità prepuziale per molto tempo non fece movimenti di sorta e dopo li fece, ma piccolissimi. Ma questa non è regola generale.

In un altro esperimento, registrai pure i movimenti delle due estremità, prepuziale e perineale, della porzione peniena di un m. retrattore, e osservai che, se da principio parve che la estremità prepuziale rimanesse inerte, da ultimo invece si verificò precisamente il contrario, che cioè, per molto tempo, l'estremità perineale rimase quasi del tutto immobile, mentre la prepuziale eseguiva cospicue contrazioni automatiche.

Osservando molto attentamente un lungo m. retrattore mentre si contrae ritmicamente, meglio se è disposto orizzontalmente, si acquista presto la convinzione che ciascuna delle contrazioni più ampie e durevoli s'inizia nella estremità perineale, donde procede verso l'estremità prepuziale. Ciò resulta anche dalle osservazioni di von Brücke. Ebbene, poichè tutti i segmenti, in cui si può dividere la porzione peniena del muscolo (io l'ho divisa una volta perfino in 4 segmenti, in un esperimento del 10 luglio 1913), sono capaci di eseguire contrazioni automatiche registrabili graficamente, *rimane con ciò assolutamente escluso che esista un solo centro automatico, situato nella porzione perineale, dove si generino le dette contrazioni*; al contrario, bisogna ammettere che *ogni segmento è dotato di potere motorio automatico*, a simiglianza del tubo cardiale, e che, come in questo, *normalmente l'automatismo d'un segmento prevale su quello degli altri, e ne governa l'attività motoria.*

Nell'esperimento del 19 febbraio 1914, i cui risultati possono essere osservati nei tracciati successivi della figura 70, il preparato eseguì, in un certo periodo della sua sopravvivenza, contrazioni ritmiche caratterizzate da una regolarità sorprendente (vedi tracciato inferiore, da *e* fino ad *i* della figura). (I tracciati precedenti, meno regolari, non sono stati riprodotti, perchè non presentano nulla di speciale). Fra *g* ed *h*, recisi il terzo distale (prepuziale) del preparato. Dopo pochi minuti il moncone residuale incominciò di nuovo a contrarsi, ed eseguì le contrazioni molto regolari comprese fra i punti *h* ed *i*. Quindi asportai il terzo medio del preparato, sì che rimase sospeso nel liquido il solo terzo prossimale della porzione peniena del muscolo, cioè l'estremità perineale della detta porzione. Ebbene, anche questo piccolo moncone ricominciò a contrarsi dopo qualche tempo. sebbene con ritmo piuttosto lento. Le contrazioni diminuiscono inoltre sempre di altezza col diminuire della lunghezza del pezzo di preparato.

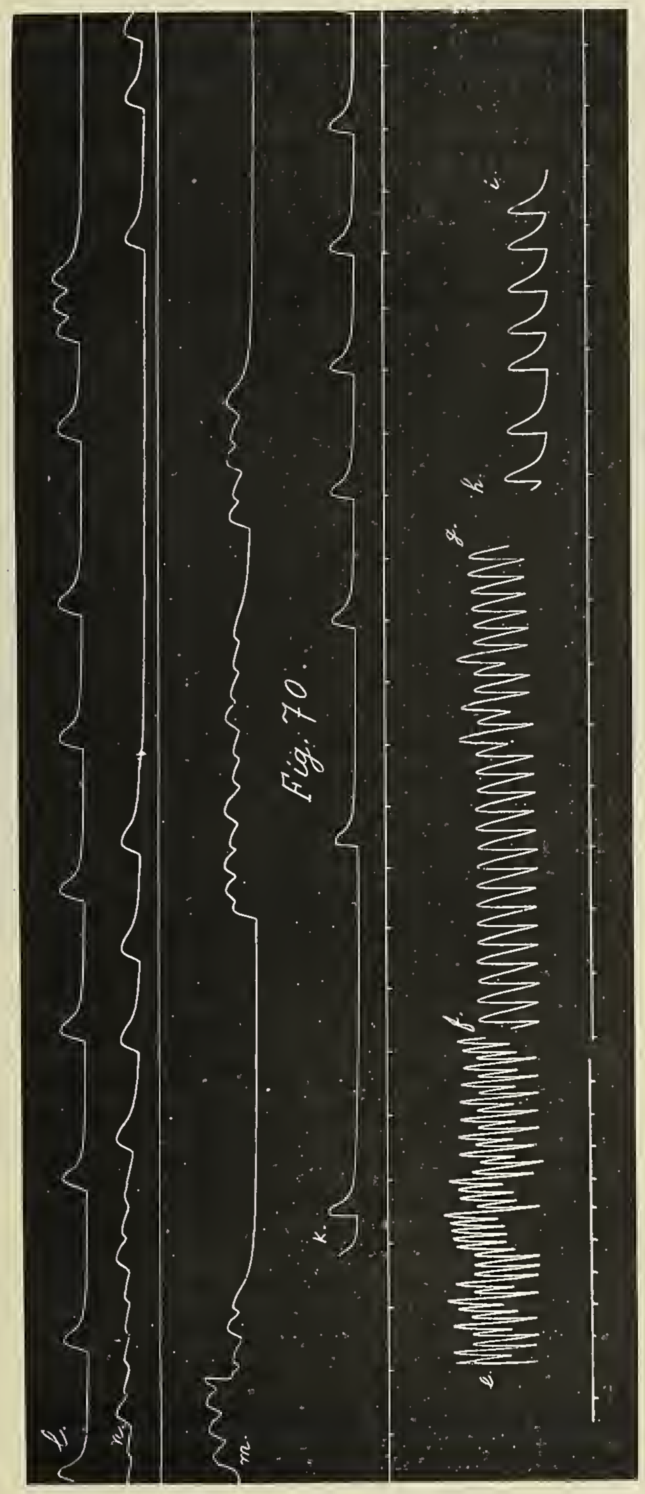
L'esperimento dimostra, che quando il preparato originale viene ridotto in lunghezza per successive amputazioni, si facciano queste procedendo dall'estremità pre-



11 luglio 1913. — *M. retractor penis* di cane. Peso: gr. 5, tempo: 5', temper.: da 30° a 35° C. Contrazioni ritmiche automatiche delle due parti, prepuziale e perineale, separate della porzione peniena del muscolo. II, III e IV: tre diverse parti del tracciato. (Riduzione fotografica).

puziale verso l'estremità perineale o nella direzione opposta, il pezzo che rimane si dimostra sempre dotato di attività automatica, per quanto possano variare la frequenza del ritmo e l'altezza delle contrazioni spontanee.

Le differenze che dipendono dallo spessore maggiore della estremità perineale e dalla maggiore sottigliezza della estremità prepuziale ecc. non sono da tenersi in considerazione.



19 febbraio 1914. — *M. retractor penis* di cane. Peso: gr. 5, tempo: 1', temper.: 32° C. Contrazioni automatiche del muscolo, prima intero (parte peniena) fra *e* e *g* (il tratto *f g* di tracciato fu registrato con velocità maggiore del cilindro), poi dopo la recisione del pezzo più distale fra *h* ed *i*, quindi dopo la recisione del terzo medio fra *i* e *k*; i tratti *k*, *l*, *m* ed *n* furono registrati dal terzo prossimale (perineale) della parte peniena del muscolo. Si noti la regolarità delle singole contrazioni, e la variazione della frequenza del ritmo dopo ogni mutilazione. (Riduzione fotografica).

L'altra differenza, che si rileva solo quando si fanno stimolazioni elettriche del muscolo, o meglio dei varii segmenti di esso, consiste nel fatto, che la sola estremità perineale dà contrazioni rapide in risposta a stimoli unici di corrente indotta, contrazioni le quali rivelano la presenza nel detto segmento di fibre muscolari striate,

che non sono dimostrabili fisiologicamente negli altri segmenti della porzione peniena. Anche questa differenza, però, come ben si comprende, non riguarda il muscolo retrattore in quanto è muscolo liscio, ma solamente la presenza in esso di fibre striate.

Come ho detto sopra, tale presenza di fibre striate è utile a svelare i momenti nei quali il preparato è colpito dagli stimoli unici di corrente indotta, perchè le rispettive contrazioni rapide fanno da segnali delle stimolazioni.

f) Muscoli retrattori di varii mammiferi. — Il Sertoli sperimentò su muscoli retrattori di cavallo, di asino e di cane.

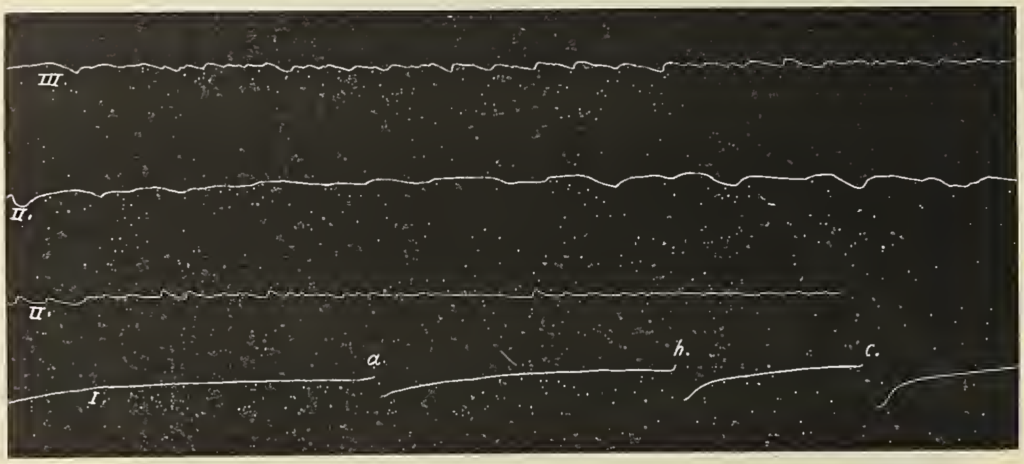


Fig. 71. — 17 febbraio 1914. — *M. retractor penis* di grosso gatto. (Contrazioni automatiche. Peso: gr. 2, temper.: 30° C. I, II, III e IV: tratti successivi del tracciato; *a*, *b*, *c*: effetti inibitori sul tono, di stimolazioni elettriche applicate al muscolo. (Riduzione fotografica).

Il maggior numero di esperimenti, compresi i miei, sono stati fatti sul m. retrattore di cane, che meglio degli altri si presta alle ricerche fisiologiche per le sue dimensioni, che non sono nè eccessivamente grandi nè eccessivamante piccole.

Ma anche il m. retrattore di grossi gatti può servire a tale scopo, come dimostrano i tracciati della figura 71. Esso è però un po' troppo corto, e quindi le contrazioni ritmiche automatiche che eseguisce sono troppo piccole.

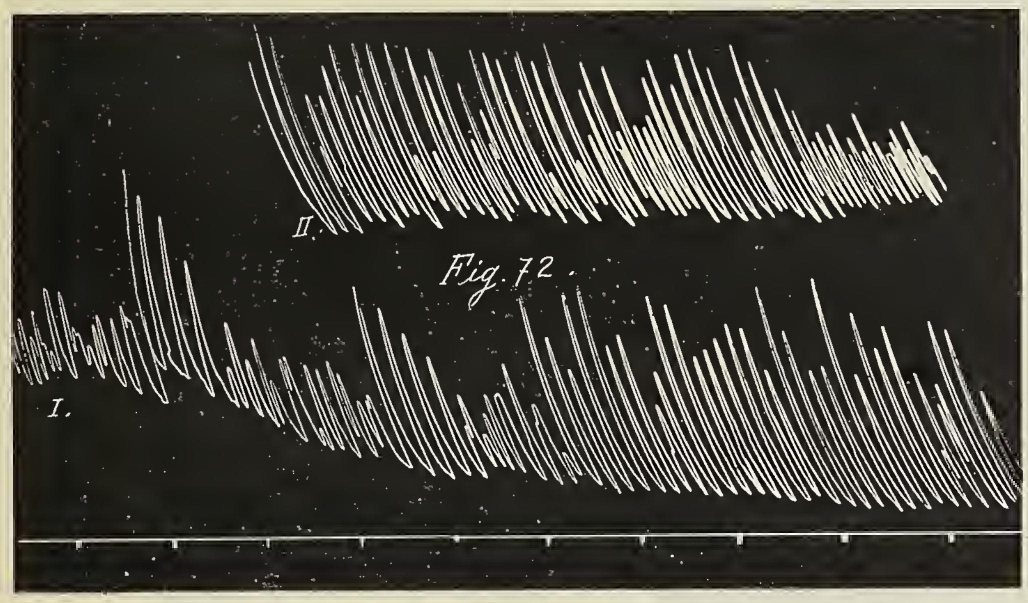
Sulla curva inferiore della detta figura si veggono in *a*, *b* e *c* gli effetti inibitorî delle stimolazioni elettriche (corrente indotta) sul tono del preparato muscolare (nella fig. 71, la curva I apparisce interrotta nei punti *a*, *b* e *c*, e mancano i tratti verticali, che corrispondono agli allungamenti del muscolo; ma ciò è dovuto a difetto di riproduzione del tracciato originale), mentre esso non aveva ancora incominciato a contrarsi ritmicamente.

Finalmente, ottime ricerche possono farsi anche sul m. retrattore del pene di feti di bue. Questo preparato è da preferirsi all'esofago o all'intestino ecc. di embrione di pollo, quando si vogliono fare ricerche di fisiologia su muscoli lisci fetali, per le stesse ragioni, altrove dette a proposito dei preparati muscolari lisci di animali adulti.

3. — *Natura delle contrazioni automatiche.*

Sappiamo che il m. retrattore eseguisce contrazioni ritmiche automatiche, tanto se è lasciato in situ, quanto se è asportato dal corpo e conservato in condizioni opportune di sopravvivenza.

Da varî autori queste contrazioni sono state registrate con l'ordinario metodo grafico. Recentemente, E. von Brücke (l. c.) ha esplorato mediante il galvanometro a corda e registrato fotograficamente le correnti d'azione della porzione prepuziale del muscolo, lasciato per il resto della sua lunghezza in situ.



21 luglio 1913. — *M. retractor penis* di cane. Peso: gr. 5, tempo: 5', temper.: 33° C. Contrazioni semplici automatiche. I, II: due tratti successivi del tracciato. (Riduzione fotografica).

Dal confronto dei resultati ottenuti coi due metodi può derivare un po' di luce, che chiarisca i problemi, che ora mi accingo a discutere. Questi sono: 1°. Che cosa debba intendersi per contrazione, contrattura, tetano di un muscolo della natura e struttura del muscolo retrattore; 2°. Come debbano interpretarsi le varie curve da noi registrate; 3°. Se le presenti ricerche possono almeno chiarire il problema della natura (neurogena o miogena) dell'automatismo motorio del m. retrattore del pene.

Ciò che noi intendiamo per contrazione, contrattura, e tetano di un muscolo striato, è superfluo ripetere qui, avendolo io dichiarato in un altro mio lavoro ([54]). Solo credo opportuno rammentare, che in un' altra mia pubblicazione (Nota V, in: Rend. d. R. Accad. d. Lincei [5], vol. XXIV, 1° sem., p. 172, a. 1915) io ho dimostrato come, nella grande maggioranza dei muscoli striati, l' ordinaria contrazione, provocata da uno stimolo elettrico unico, risulta composta di una contrazione rapida o clonica, operata dalle miofibrille striate, e da una contrazione lenta o tonica, operata dal sarcoplasma, onde le contrazioni comunemente dette « semplici » in realtà sono

« doppie ». Quando la contrazione tonica si intensifica e si prolunga considerevolmente prende, anche quando il fenomeno riguarda i muscoli striati, il nome di contrattura (accorciamento tonico e prolungato). Questa, in alcuni casi, risulta visibilmente composta di contrazioni lente o toniche sovrapposte, onde essa, è rispetto alla contrazione tonica del sarcoplasma, approssimativamente quello che è il tetano rispetto alla contrazione clonica delle miofibrille.

16 giugno 1913. — *M. retractor penis* di cane. Peso: gr. 5, tempo: 5', temper.: 32° C. Contrazioni ritmiche automatiche molto alte e regolari, specialmente quelle verso destra. (Il muscolo aveva subito l'azione di una soluzione diluita di ipofisina). (Riduzione fotografica).

Il primo quesito che ci si presenta è: si può distinguere nell'attività motoria dei muscoli lisci qualche cosa che corrisponda alla contrazione rapida o clonica, e alla contrazione lenta o tonica dei muscoli striati?

Rispondo subito, che nel capitolo precedente credo di avere sufficientemente dimostrato, come *anche per il m. retrattore del pene le contrazioni provocate da stimoli unici risultano talora evidentemente composte di una contrazione primaria rapida o clonica, e di una contrazione secondaria lenta o tonica.*

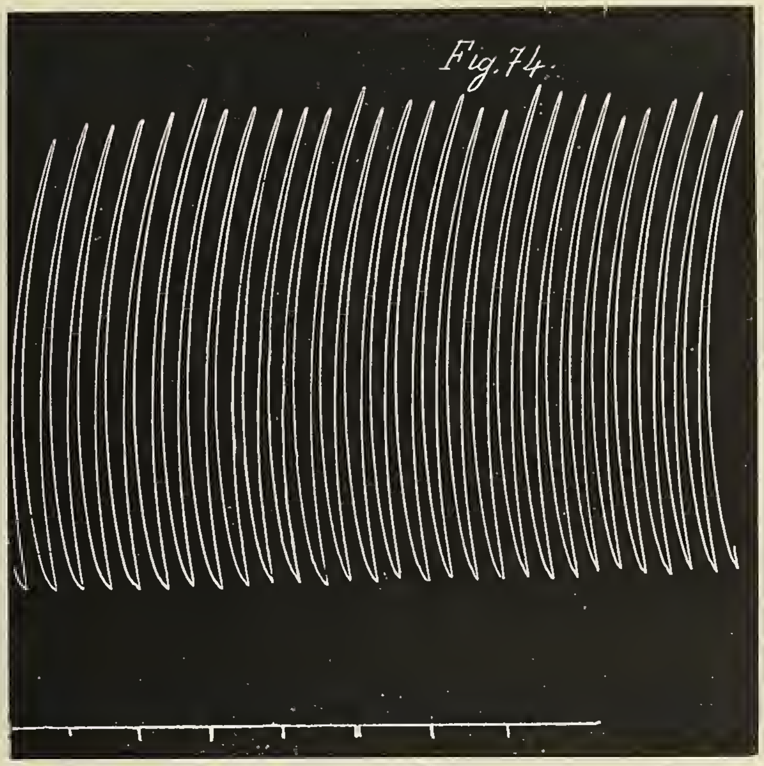
Dobbiamo ritenere, quindi, che gli accorciamenti automatici o provocati dei muscoli lisci in generale, e particolarmente del m. retrattore del pene, risultano composti di contrazioni rapide fibrillari e di contrazioni lente sarcoplasmiche.

Mentre, però, nei muscoli striati prevale l'azione contrattoria delle miofibrille, nei muscoli lisci, invece, prevale quella tonica del sarcoplasma; onde più difficile è in quelli scoprire la parte che spetta alla contrazione tonica del sarcoplasma, in questi la parte che spetta alla contrazione clonica delle miofibrille lisce, nel complessivo fenomeno motorio.

Di conseguenza, difficilissimo sarebbe scoprire nelle varie curve di contrazione, che in questo lavoro sono state riprodotte, quanto, nell'accorciamento muscolare, è dovuto a contrazione delle miofibrille e quanto a contrazione del sarcoplasma. Tale

dissociazione abbiamo potuto fare nelle contrazioni sperimentalmente provocate con stimoli unici o doppi, ma sarebbe impossibile farla nei movimenti automatici del muscolo, o in quelli provocati da stimolazioni chimiche o termiche ecc., i quali sono nel tempo stesso, come vedremo, tetani o contratture di durata variabile, cioè fenomeni motori in cui contrazioni rapide e lente sono fuse e sovrapposte.

Venendo ora al caso speciale dei preparati muscolari lisci piuttosto lunghi del genere di quelli del muscolo retrattore del pene o dell'esofago di pulcino, o anche della striscia longitudinale di parete intestinale, vediamo che i loro movimenti auto-

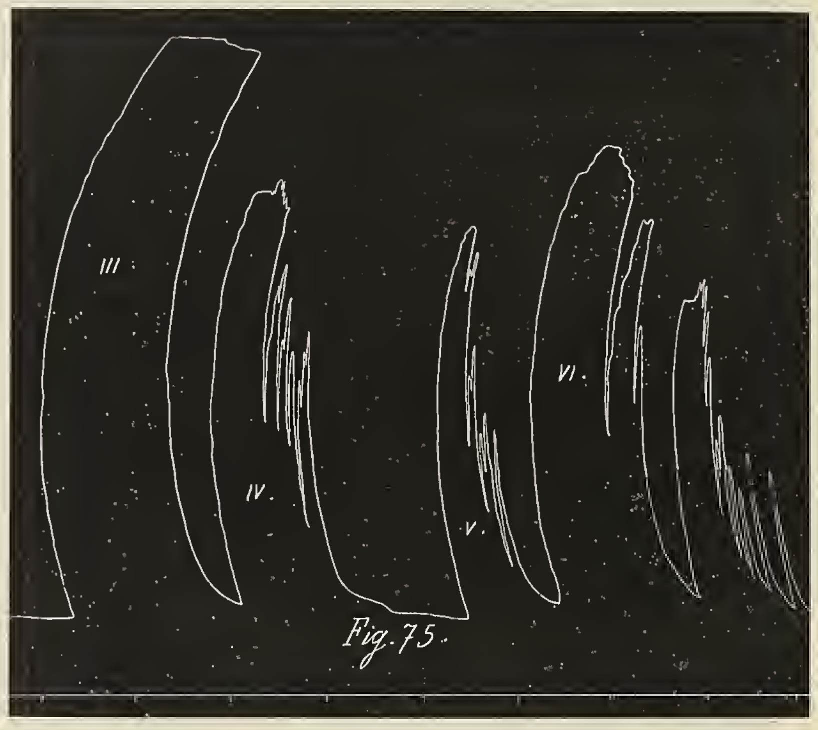


13 maggio 1913. — Preparato di colon di gatto: muscolatura longitudinale. Peso: gr. 10, tempo: 5′, temper.: 37,8° C. Contrazioni ritmiche automatiche regolarissime dopo l'azione di una piccola dose di « tenosina ». (Riduzione fotografica).

matici presentano, per lo più, grande irregolarità. I nostri tracciati riferentisi al muscolo retrattore del pene presentano: 1°. Contrazioni piuttosto basse e relativamente rapide, seguentisi con ritmo per lo più regolare come quelle delle figg. 69, 70, 72 etc. 2°. Contrazioni molto alte e relativamente più lente, ma regolari anch'esse e apparentemente non dentellate o seghettate, come quelle tipiche delle figg. 73 e 74. 3.° E finalmente lunghi e forti accorciamenti, come quelli delle figg. 75, 77 etc., i quali rappresentano la forma più frequente di attività motoria dei preparati muscolari lisci in condizioni di sopravvivenza, e anche la reazione motoria ordinaria di essi all'azione dei veleni e degli ormoni contrattori.

Si potrebbe supporre, data la piccolezza delle contrazioni della prima specie, che queste non siano contrazioni uniche dell'intero muscolo, ma piuttosto di qualche segmento più o meno lungo di esso, che siano quindi *contrazioni segmentali*. Ciò non

può escludersi, e quando il fenomeno occorre, sarà probabilmente dovuto al fatto che l'onda d'eccitamento non si propaga per tutto il m. retrattore, ma è bloccata a un certo punto. Verosimilmente, contrazioni segmentali sono le più piccole fra quelle che ora consideriamo; ma non c'è ragione di non ritenere le altre come contrazioni dell'intero muscolo. La loro relativa piccolezza non esclude che ad esse partecipino tutte o la maggioranza delle cellule che compongono il m. retrattore. Anche le contrazioni provocate da un solo stimolo di corrente indotta d'apertura, per quanto forte, sono sempre relativamente piccole, sebbene non possa dubitarsi che tutto il muscolo



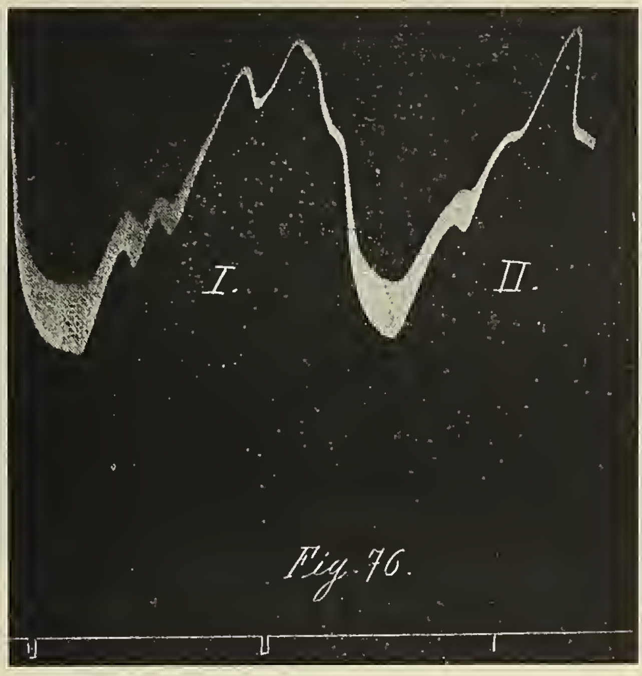
14 luglio 1913. — *M. retractor penis* di cane. Peso: gr. 5, tempo: 5′, temper.: 30,5° C. Fortissimi tetani (III, IV, V e VI) automatici. (Riduzione fotografica).

si contragga. E se tali esse sono, ciò dimostra come l'accorciamento che subisce l'intero muscolo per ogni singolo eccitamento è assai piccolo, e quindi di molto minore dev'essere l'accorciamento di ciascuna delle cellule muscolari onde il muscolo è composto.

Non è forse superfluo, a questo proposito, rammentare che il m. retrattore, considerato nella sua lunghezza, è composto di un numero grandissimo di brevi cellule sovrapposte, contrariamente ai comuni muscoli striati sui quali siamo soliti di sperimentare, che sono costituiti di fibre che si estendono da un capo all'altro di essi, che cioè sono lunghe quanto è lungo il muscolo in esame. Da ciò segue:

1°. Che niuna contrazione del m. retrattore, nemmeno la più piccola, può essere considerata come contrazione di una sola cellula o di un solo strato di cellule giustapposte nel senso dello spessore del muscolo, perchè le contrazioni elementari delle singole cellule debbono essere tanto piccole e deboli da non potersi rilevare graficamente.

2°. Che, dovendo ciascun eccitamento automatico o artificiale investire tutto il muscolo o la maggior parte di esso, questo deve contenere un sistema conduttore per cui l'eccitamento si propaghi, e sì velocemente da investire quasi simultaneamente tutte le cellule componenti il muscolo. È verosimile che tale sistema conduttore sia rappresentato dal reticolo di fibrille nervee che dal Fletcher è stato osservato nel m. retrattore, come da altri autori in altri preparati muscolari lisci. L'ipotesi che le cellule muscolari lisce siano connesse fra loro per mezzo di ponti sarcoplasmatici potrebbe far credere che la conduzione degli eccitamenti si compia per gli stessi elementi muscolari, indipendentemente dagli elementi nervosi. Ma gli autori non sono



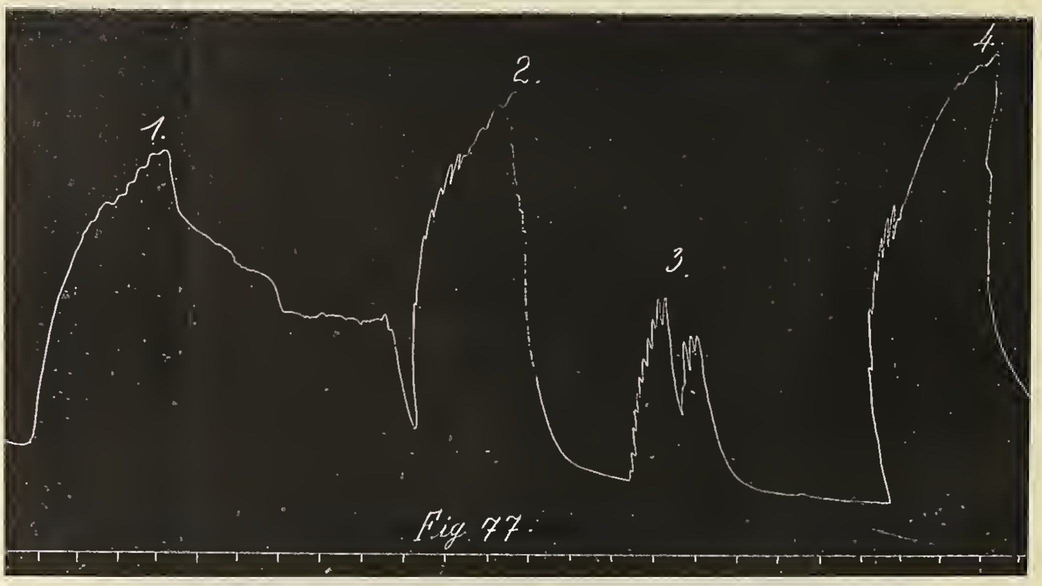
Atrio destro del cuore di una *Emys europaea*, separato dal resto del cuore e sospeso in liquido di Ringer, alla temperatura dell'ambiente (circa 13° C). Le « oscillazioni del tono », che sono contrazioni semplici della muscolatura liscia dell'atrio, si sovrappongono formando specie di tetani incompleti (I. II.). (Grandezza naturale).

d'accordo sulla presenza dei detti ponti sarcoplasmatici in ogni preparato muscolare liscio, e per quanto riguarda particolarmente il m. rettrattore, nessuno finora li ha descritti. Inoltre, tale propagazione muscolare sarebbe forse troppo lenta. Noi ammettiamo, quindi, almeno fino a prova contraria, che la propagazione degli eccitamenti per il m. retrattore del pene avvenga per il reticolo nervoso che avvolge tutte la cellule di esso.

I fortissimi accorciamenti della terza specie sono, senza dubbio, tetani, o contratture spontanee o provocate da veleni contrattori, cioè derivano da sovrapposizione di contrazioni più piccole. La sovrapposizione e la fusione di queste sono più o meno complete, secondo che le contrazioni sono più o meno vigorose e si succedono con una frequenza più o meno grande. Alcune contratture spontanee dell'atrio del cuore di *Emys* (fig. 76), ed altre che seguono l'azione della muscarina o della forte sti-

molazione del vago hanno un'origine analoga, sono cioè dovute a sovrapposizione e fusione più o meno completa di singole « oscillazioni del tono ». Similmente, le curve di terz'ordine della pressione endoarteriosa sono contratture della muscolatura delle arterie, che nascono per sovrapposizione di curve di second'ordine, le quali corrispondono a singole contrazioni della stessa muscolatura (mentre le curve di prim'ordine non rappresentano contrazioni arteriose, ma espansioni della parete arteriosa causate dalle pulsazioni cardiache).

Queste curve contratturali presentano un carattere grafico singolare. Rapide e poco o punto accidentate nel tratto ascendente, incominciano poi presso la cima o



12 marzo 1914. — *M. retractor penis* di cane. Peso: gr. 5, tempo 1', temper.: 33°. Quattro (1. 2. 3. e 4.) successive curve di tetani incompleti di diversa altezza ed ampiezza. Le curve delle contrazioni semplici che compongono ciascuna curva tetanica sono perfettamente distinguibili. (Riduzione fotografica).

l'inizio dell'altipiano a presentarsi dentellate, e le dentellature si accentuano per lo più verso la fine dell'altipiano e lungo il tratto discendente. Tale carattere presentano in modo cospicuo le quattro curve di contrattura della fig. 16, sottostanti alla linea orizzontale mediana. Esaminiamo, per es., la III. L'intera contrattura dura da *a* fino a *c*: il tratto *ab* corrisponde all'accorciamento rapido ed è quasi omogeneo; il tratto *bc* corrisponde all'altipiano inclinato verso destra, ed è dentellato; il tratte *cd* corrisponde al completo rilassamento di tutto il muscolo. Mentre nel periodo *ab* le singole contrazioni automatiche si seguono rapidamente e perciò si sovrappongono e fondono quasi completamente, nel periodo *bc*, invece, gli eccitamenti automatici, generandosi e propagandosi con minore frequenza e velocità, determinano contrazioni distinguibili sulla curva, in cui corrispondono alle dentellature. Nel momento *c*, essendosi esauriti gli eccitamenti del gruppo rispettivo, e non essendo ancora sorto il nuovo gruppo di eccitamenti automatici, che s'inizia in *e*, l'intero muscolo viene a trovarsi in stato d'inattività contrattoria, onde si allunga, prima rapidamente e poi lentamente.

Si osservino anche le curve della fig. 77. In alcune contratture, contrazioni distinte appariscono fino al punto di massimo allungamento del muscolo, e il nuovo tetano s'inizia subito dopo l'ultima contrazione del tetano precedente.

In conclusione, l'aspetto diverso di queste contratture (o di questi tetani) dipende essenzialmente dalla frequenza degli eccitamenti automatici e dalla velocità della loro propagazione per il muscolo. Gli eccitamenti automatici nascono non continuamente, ma a gruppi separati da intervalli più o meno lunghi. Se gli eccitamenti costituenti ciascun gruppo sono forti e frequenti, e la conduttività del preparato è ben conservata, i tetani appariscono completi, cioè le rispettive curve sono omogenee, prive di dentellature, perchè le contrazioni elementari, onde resultano costituiti, possono fondersi e sovrapporsi completamente. Ma più spesso la frequenza e la forza degli eccitamenti automatici decrescono col tempo in ciascun gruppo, e forse anche la conduttività del preparato diminuisce; di conseguenza le contratture corrispondenti sono fin dal principio, o diventano poco dopo l'inizio, incomplete; le curve si presentano più o meno seghettate, e le dentellature loro non sono altro che le contrazioni elementari del muscolo incompletamente fuse.

Ma le curve della seconda specie, sono quelle alle quali si riferisce particolarmente la critica del von Brücke. Questi dice, che non possono essere curve di contrazioni uniche, perchè sono troppo lente; e se sembrano tali, ciò è dovuto all'incapacità del metodo grafico di mettere in rilievo le contrazioni singole che lo compongono; che, quindi, esse sono tetani. Il von Brücke si basa, per qualificare quelle contrazioni come tetani, sul fatto che la frequenza minima delle correnti d'azione da lui registrate è sempre molto maggiore di quella delle contrazioni graficamente registrate da de Zilwa e da me.

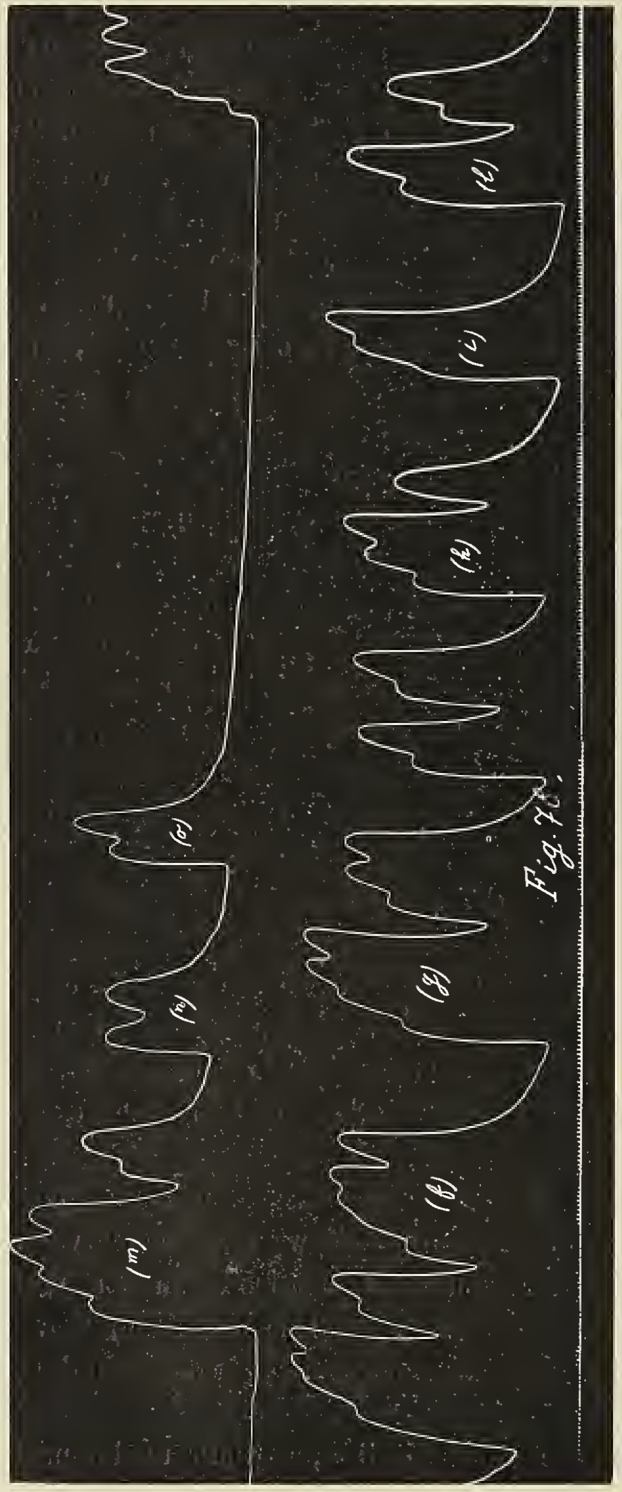
Non posso rifiutarmi di ammettere, che se le contrazioni delle figg. 73 e 74 fossero state registrate a una velocità maggiore del chimografo, per es. alla stessa velocità alla quale furono registrate le curve delle figg. 78 e 79, esse avrebbero presentato l'aspetto di queste, le quali sono evidentemente composte di più curve elementari sovrapposte e incompletamente fuse. In tal caso bisognerebbe convenire che le contrazioni delle figg. 73, 74 e altre simili sono anche esse vere contratture. Il von Brücke ha quindi perfettamente ragione.

Anzi, un nuovo argomento può essere ora allegato a sostegno della ipotesi, che le curve più alte registrate da me e da de Zilwa non sono curve di contrazioni semplici, ma di contratture, ed è a punto la loro altezza. Infatti abbiamo veduto, che l'altezza delle contrazioni rapide o lente (cloniche o toniche) provocate da forti stimoli unici d'apertura è sempre assai minore, per quanto eccitabile sia il preparato e forte lo stimolo.

Rimane così stabilito, che i muscoli lisci, a giudicare dal modo di comportarsi del m. retrattore del pene, funzionano in tutto e per tutto, salvo le relazioni di tempo, come i muscoli striati.

La contrazione artificiale provocata da un solo stimolo forte è, in condizioni opportune di eccitabilità, doppia, cioè costituita di un accorciamento rapido o clonico e di uno lento o tonico, tanto nei muscoli striati, quanto nei muscoli lisci. E se, per comodità di espressione, chiamiamo l'uno primario e l'altro secondario, non è perchè

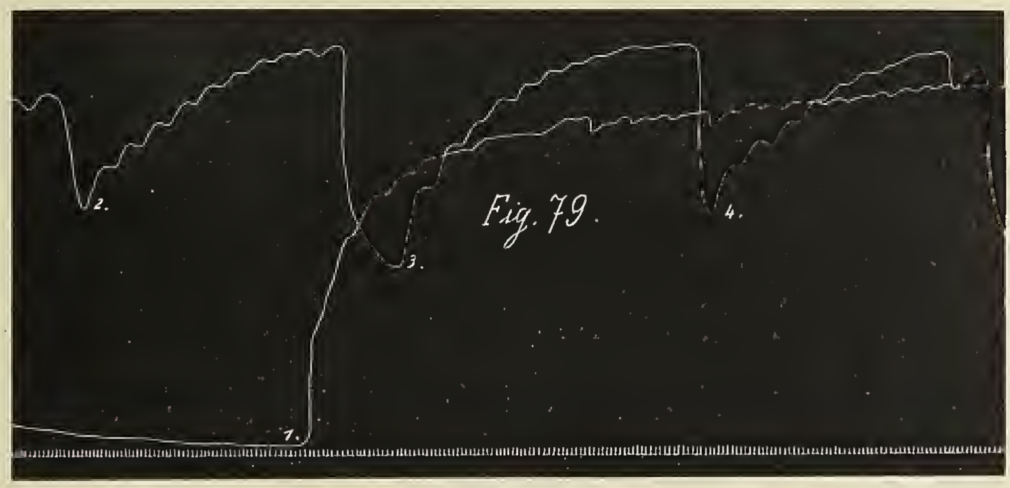
realmente l'uno succeda all'altro, ma solo perchè, nelle rispettive curve grafiche, lo accorciamento tonico, più lento, dura oltre il clonico, dal quale spessissimo si pre-



M. retractor penis di cane. Peso: gr. 5, tempo: 1″, temper.: 33° C. Contrazioni ritmiche automatiche a grande velocità del cilindro, e che perciò lasciano distinguere nettamente le contrazioni semplici di cui sono composte. (Riduzione fotografica).

senta nettamente distinto. In realtà, però, *l'uno e l'altro sono provocati dall'unico stimolo nei due componenti contrattili della fibra o della cellula muscolare, nelle miofibrille e nel sarcoplasma, dopo tempi di latenza diversi, maggiore per la contrazione tonica che per la clonica.* Per un certo tempo, cioè per un

certo tratto del miogramma, i due accorciamenti sono insieme fusi; e il distacco delle rispettive curve, a un certo punto del complessivo miogramma, avviene perchè la contrazione tonica spessissimo oltrepassa in durata, e talora anche in altezza, la contrazione clonica. Ma alcune volte accade che, o per aumentata velocità della contrazione tonica o per diminuita velocità della contrazione clonica, le due contrazioni siano siffattamente fuse nel miogramma, da non potersi distinguere l'una dall'altra le rispettive curve, onde il miogramma apparisce non più doppio, ma unico. E finalmente può accadere che manchi del tutto o la contrazione clonica o la tonica, nel qual caso il miogramma non solamente apparisce, ma è di fatto unico, perchè unica è la contrazione ([72]).



18 luglio 1913. — *M. retractor penis* di cane. Peso: gr. 5, tempo: 1'', temper.: 31° C. Quattro (1. 2. 3. e 4.), contrazioni automatiche più alte composte da contrazioni semplici minori. (Riduzione fotografica).

La contrazione naturale o fisiologica, vale a dire l'attività motoria normale presenta anche una stretta analogia nei muscoli striati e lisci, perchè negli uni e negli altri consiste praticamente sempre, non in contrazioni uniche o doppie isolate o seguentisi ritmicamente, ma in gruppi di contrazioni sovrapposte e più o meno completamente fuse, separati da intervalli più o meno lunghi di riposo. *Vogliamo chiamare tetani i gruppi di contrazioni singole sovrapposte e fuse, quando riguardano i muscoli striati*; *contratture quando ci riferiamo a muscoli lisci.* In ambo i casi, gruppi di eccitamenti distinti sorgono nei centri cerebro-spinali o in centri automatici periferici o locali; sono essi che provocano i gruppi di contrazioni sopra detti, cioè ciascun eccitamento d'ogni gruppo provoca una contrazione. Secondo che gli eccitamenti sono più o meno frequenti e forti, e secondo che si propagano più o meno velocemente (nei muscoli striati, per la sostanza stessa delle fibre muscolari, che di regola vanno da un capo all'altro del muscolo; nei muscoli lisci, forse per reticoli di fibrille nervee abbraccianti le brevi cellule muscolari), la curva grafica del tetano o della contrattura, che ne segue, è più o meno alta e più o meno completa, cioè omogenea o dentellata. Talora i gruppi degli eccitamenti automatici si accavallano

nei muscoli lisci in guisa da provocare uno stato d'accorciamento di questi che è capace di durare un tempo relativamente assai lungo. Per converso, frequenti sono, in condizioni naturali, le inattività motorie prolungatissime dei muscoli lisci.

Tanto nei muscoli striati, quanto nei lisci, la sovrapposizione delle contrazioni singole, nel tetano e rispettivamente nella contrattura, è effettuata principalmente dalla contrazione tonica del sarcoplasma. La partecipazione della funzione motoria del sarcoplasma è però relativamente minore nei muscoli striati, i tetani dei quali vanno perciò considerati essenzialmente come sovrapposizioni di contrazioni cloniche o fibrillari; è relativamente maggiore nei muscoli lisci, le contratture dei quali sono da considerarsi piuttosto come sovrapposizioni di contrazioni toniche o sarcoplasmiche.

4. — *Genesi degli eccitamenti automatici.*

Per quanto riguarda la genesi degli eccitamenti automatici che provocano i movimenti del m. retrattore del pene, poichè non vi può esser dubbio che essi sono d'origine periferica, la questione è analoga a quella che si pone per il cuore e per gli altri preparati muscolari lisci: *se cioè essi siano di natura neurogena o miogena.*

In condizioni fisiologiche, pare che gli eccitamenti procedano dall'estremità perineale del muscolo retrattore, come nel cuore procedono dal seno venoso. Ma, come nel cuore, di potere automatico sono dotati anche gli altri segmenti oltre quello del seno, così io ho dimostrato, che suddividendo la porzione peniena del muscolo retrattore in tre e perfino in quattro segmenti, questi, compreso il più distale, presentano la capacità di eseguire contrazioni automatiche.

Si deve ammetere l'esistenza di cellule nervose gangliari nella estremità prepuziale del muscolo retrattore del pene? Bisogna dimostrarle in preparati microscopici che non lascino alcun dubbio circa la natura degli elementi cellulari in questione, giacchè essi dovrebbero trovarsi annidati nell'interno del muscolo, forse lungo il setto connettivale che congiunge i due muscoli simmetrici, non vedendosi nè potendo esistere gangli, per quanto piccoli, sulla superficie del preparato, dopo che lo si è liberato dal tessuto connettivo che lo circonda. Se l'automatismo è neurogeno, le cellule nervose gangliari debbono inoltre trovarsi sparse per tutta la lunghezza del muscolo, e debbono possedere capacità funzionale già durante la vita fetale, avendo io osservato contrazioni automatiche in muscoli retrattori del pene di feti di bue nei primi mesi dello sviluppo.

Con le sole ricerche fisiologiche non si può risolvere il problema. Bisogna sottoporre a un esame microscopico accurato un pezzo di retrattore che, dopo aver presentato contrazioni automatiche, sia stato fissato e colorato secondo i migliori metodi atti a svelare la presenza di cellule nervose gangliari, e quindi affettato per tutta la sua lunghezza. Siccome anche pezzi relativamente piccoli presentano contrazioni automatiche, non sarà difficile ridurli in serie complete di fette microtomiche. Solo quando si potesse dimostrare che pezzi di m. retrattori privi di cellule nervose sono dotati di automatismo motorio ritmico, sarebbe lecito concludere che tale automatismo è di natura miogena.

Tali ricerche microscopiche sono presentemente in corso di esecuzione sopra piccoli pezzi di m. retrattori di cane, dei quali è stata già registrata graficamente l'attività automatica. A suo tempo sarà reso conto dei risultati di tali ricerche.

Ma intanto le ricerche fisiologiche già fatte, specialmente quelle circa l'azione dei veleni, hanno dato qualche risultato che stia piuttosto in favore della natura neurogena o della miogena dell'automatismo motorio del m. retrattore?

Secondo me, il *comportamento di questo preparato di fronte a quei veleni i quali, per analogia con l'azione che esercitano sugli organi innervati dal sistema autonomo bulbare, avrebbero dovuto produrre inibizione del tono, mentre producono l'effetto opposto, sta in favore dell'ipotesi che nel muscolo non esistono apparati nervosi gangliari omologhi a quelli del cuore e dell'intestino, e che quindi la genesi dei movimenti automatici non è da cercarsi in tali apparati. Essi sarebbero quindi di natura miogena.*

Ma con ciò non si vuol dire che essi debbano sorgere esclusivamente nelle strutture muscolari propriamente dette. Ormai sappiamo che, sia nei muscoli striati, come nei muscoli lisci, quando sono privi di gangli, oltre alle strutture contrattili propriamente dette e ai monconi periferici delle fibre nervee mieliniche o amieliniche, esiste un apparato speciale, costituito dalle giunzioni neuromuscolari alle quali io mi sono sforzato, in un mio lavoro di recente pubblicazione ([72]), di dare un'importanza fisiologica superiore a quella che gli è stata finora attribuita. Non è improbabile che, come nei muscoli striati, così nel m. retrattore del pene, i processi, di cui manifestazione esteriore sono le contrazioni ritmiche dette automatiche e il tono, si svolgano appunto nel *substratum* di queste giunzioni neuromuscolari. *Tali contrazioni automatiche non sarebbero, quindi, nè prettamente neurogene nè prettamente miogene, ma si genererebbero nell'apparato giunzionale, che ha proprietà sui generis, diverse in certo senso sì da quelle dei nervi e sì da quelle delle strutture contrattili*

Abbiamo visto, che spesso si hanno preparati di m. retrattore che per intere ore rimangono immobili e atonici, genza fare contrazioni ritmiche; mentre di regola incominciano a eseguirle poco dopo che sono stati sospesi nel liquido di Ringer. In quei casi, l'aggiunta di sostanze contratturanti, quali la colina, la muscarina, l'istamina etc., insieme con una elevazione del tono, provoca contrazioni ritmiche simili a quelle automatiche propriamente dette. E perfino sostanze che, come l'atropina, paralizzano gli apparati gangliari, o che, come la muscarina o la pilocarpina, dovrebbero inibire il tono e le contrazioni automatiche, le eccitano invece nei preparati che non le presentano.

Similmente, il preparato frenico-diaframmatico, che per lo più non fa contrazioni ritmiche automatiche, in alcuni casi le fa spontaneamente, e sono simili a quelle dei preparati muscolari lisci, e in altri le fa quando vi si fa agire certe sostanze che, come la veratrina, la nicotina etc., eccitano la funzione tonica del preparato diaframmatico.

Ebbene, in tutti i casi in cui contrazioni automatiche sono eseguite da muscoli striati o da preparati muscolari lisci privi di apparati gangliari, la genesi di tali contrazioni può darsi che risieda nelle giunzioni neuromuscolari, le quali posseggono,

come ho dimostrato per il preparato frenico-diaframmatico, attività ritmica automatica.

Evidentemente, perchè tale attività si manifesti occorrono certe condizioni di eccitabilità, che per ora ignoriamo. Ma è certo che noi possiamo artificialmente realizzarle, mediante l'uso di alcune sostanze chimiche, per le quali i costituenti delle giunzioni neuromuscolari contongono, forse, specifici radicali ricettori (nel senso di Langley).

Lascio, per ora, senza nemmeno discuterla, la questione, se in preparati intestinali alla Magnus privati dell'apparato gangliare, non sia possibile eccitare un ritmo motorio con quelle sostanze che sono capaci di eccitarlo in un m. retrattore rimasto per parecchio tempo immobile (*). Ma è certo che, con l'ipotesi da me formulata, *che cioè sede di origine di eccitamenti automatici possano essere, oltre ai gangli periferici, anche gli apparati giunzionali*, si potrebbe benissimo spiegare il ritmo motorio automatico sì del cuore embrionale al primissimo stadio di sviluppo, e sì delle arterie e delle vene e di altri preparati muscolari lisci, i quali, secondo le più recenti e autoreveli ricerche, cellule nervose gangliari vere non contengono. Infatti, come si può dimostrare che nelle giunzioni neuromuscolari esistono fin dal loro primo formarsi i radicali ricettori per gli ormoni e per altre sostanze attive, radicali che non scompaiono per parecchio tempo dopo che le rispettive fibre nervee sono fatte degenerare; così si può ammettere che esse posseggano fin dall'inizio una attività ritmica automatica, anche se dopo, vale a dire col progredire dello sviluppo fetale, esse debbano poi trasmettere ad altri apparecchi (gangliari) il potere di generare eccitamenti ritmici.

VIII.

Sunto dei principali risultati.

1. Per lo studio della fisiologia del tessuto muscolare liscio il *m. retractor penis* di cane e di feto di bue è da preferirsi a tutti gli altri preparati finora usati per le seguenti ragioni:

a) per la sua lunga sopravvivenza;

b) perchè è costituito di cellule muscolari disposte parallelamente in una medesima direzione;

c) perchè esso non contiene tessuti estranei, eccetto una quantità considerevole di tessuto connettivo interstiziale, oltre all'intrinseco reticolo nervoso;

d) perchè è nettamente e completamente isolabile, senza che subisca lesioni degne di nota.

(*) Magnus, a proposito, per es., della pilocarpina 19, n. 5, dice (pag. 96): *Pilocarpin ruft an plexushaltigen und plexusfreien Präparaten starke Erregung hervor.*

2. Su questo preparato ho fatto numerosi esperimenti, riguardanti non solo l'influenza che su esso esercitano la *temperatura*, l'*ossigeno* etc. (ved., per i risultati, nel testo), ma anche:

a) l'azione del *siero di sangue* dello stesso o di altri animali, *che provoca nel muscolo contratture*;

b) l'influenza del *cambiamento del liquido di Ringer*, in cui il preparato era rimasto per qualche tempo, con liquido di Ringer fresco alla stessa temperatura, cambiamento *che provoca inibizione del tono*;

c) l'azione degli *acidi*, compreso l'acido carbonico, i quali *in piccole dosi provocano allungamento del muscolo*, mentre *in dosi forti determinano accorciamento duraturo di esso per imbibizione*; e degli *alcali*, che provocano sempre accorciamento;

d) l'azione dell'*acqua distillata* e delle *soluzioni ipertoniche* (per i risultati, ved. nel testo).

3. Sullo stesso muscolo ho sperimentato l'azione di due ormoni: l'adrenalina e l'ipofisina, e di due basi semplici naturali: la β-iminazoliletilamina o istamina, e la p-idrossifeniletilamina o tiramina; di varii alcaloidi: veratrina, nicotina, pilocarpina, atropina, papaverina; della colina e della muscarina; e finalmente di due glicosidi: digitalina e cimarina, e del nitrito sodico.

Il risultato principale di queste esperienze fu, che nessuna delle sostanze sperimentate è capace di provocare nel *m. retractor penis* isolato dal corpo un effetto simile a quello che provoca sul muscolo *in situ* la stimolazione elettrica del n. erigente (appartenente al sistema nervoso autonomo sacrale), cioè inibizione del tono e diminuzione o arresto delle contrazioni ritmiche automatiche. (Fanno eccezione il nitrito sodico e la papaverina, che determinano allungamento primario del muscolo e arresto delle contrazioni ritmiche; ma si ha ragione di credere che tale allungamento, per quanto riguarda la papaverina, piuttosto che di natura inibitoria, analoga a quella della stimolazione del n. erigente, sia di natura paralitica).

In altre parole, è impossibile coi detti ormoni, alcaloidi etc. determinare nel m. retrattore isolato effetti inibitori analoghi a quelli che si determinano negli organi che si trovano sotto il dominio innervativo del sistema autonomo bulbare (atrio del cuore di *Emys europaea*, intestino tenue di mammiferi). Si noti però, che mentre in questi organi l'effetto inibitorio è prodotto dalla stimolazione del simpatico (sistema nervoso autonomo toraco-lombare), nel m. retrattore del pene è prodotto, in condizioni naturali, dalla stimolazione del sistema autonomo sacrale (nervo erigente).

Inibizione del tono io ho ottenuto nel m. retrattore, oltre che col nitrito sodico, anche mediante le stimolazioni elettriche dirette, l'aumento graduale della temperatura e l'azione di acidi in dosi piccolissime.

Le molte sostanze che elevano il tono del m. retrattore ordinariamente eccitano anche l'attività ritmica automatica del preparato, e provocano contrazioni ritmiche anche in muscoli rimasti per molto tempo in stato di estremo allungamento e inattivi.

Le più cospicue contrazioni ritmiche automatiche, per altro, si osservano solo quando il muscolo si trova in uno stato medio, che può considerarsi come optimum,

di tonicità. Si comprende, quindi, che esse appariscono o s'intensificano tutte le volte che un agente fisico o chimico determina aumento del tono in un preparato estremamente allungato o diminuzione del tono in un preparato estremamente contratturato.

4. Basandomi sui risultati da me ottenuti negli esperimenti sull'azione di varie sostanze chimiche e in quelli fatti sopra piccoli segmenti del m. retrattore, ho formulato l'ipotesi, che le contrazioni ritmiche automatiche di esso non siano di natura neurogena (gangliare).

Poichè comunemente si esclude, che le fibre nervee o le strutture contrattili propriamente dette siano sede di origine di eccitamenti automatici; se, come sembra assai probabile, il m. retrattore isolato dal corpo non contiene gangli nervosi nè cellule nervose gangliari disseminate; avendo io, d'altro canto, reso molto probabile, coi miei esperimenti sul preparato frenico-diaframmatico, che le giunzioni neuromuscolari posseggono la capacità di generare eccitamenti automatici ritmici; ho formulato anche l'ipotesi, che gli eccitamenti ritmici automatici, i quali provocano le contrazioni del m. retrattore del pene, e forse di altri preparati dotati di automatismo motorio (per es., del cuore embrionale di pollo ai primissimi stadî di sviluppo, dei preparati arteriosi e venosi isolati dal corpo ecc.), si generino nel *substratum* sarcoplasmico delle giunzioni neuromuscolari.

5. Le mie ricerche sull'azione degli stimoli elettrici di corrente indotta e di corrente continua, e sull'azione polare della corrente continua, hanno dato i seguenti risultati:

a) Con singoli stimoli di corrente indotta d'apertura si può provocare nel m. retrattore o una contrazione semplice relativamente rapida (seguìta o no da inibizione del tono), ovvero una *contrazione doppia*, cioè composta (come le contrazioni doppie del mio preparato diaframmatico) da una contrazione primaria relativamente rapida o clonica, e da una contrazione secondaria relativamente più lenta o tonica. Quest'ultima si presenta talora ondulata (specialmente quando la funzione tonica del muscolo è molto accentuata). Come nei muscoli striati, la contrazione tonica è notevolmente rinforzata da piccole dosi di veratrina.

Di conseguenza, io ammetto che nei muscoli lisci, come negli striati, esistono due materie o strutture contrattili: le miofibrille e il mioplasma (sarcoplasma), e che le prime eseguiscono le contrazioni cloniche, mentre al secondo sono dovute le contrazioni toniche e la funzione tonica in generale.

Non esistono quindi essenziali differenze fra muscoli lisci e striati, quanto alla genesi e alla composizione della loro contrazione elementare; l'unica differenza riguarda le relazioni temporali, perchè tanto la contrazione clonica quanto la tonica nei muscoli lisci si compiono assai più lentamente che negli striati.

b) Nelle contratture dei muscoli lisci (che equivalgono ai tetani dei muscoli striati) si ha più o meno completa addizione delle contrazioni toniche (e anche delle cloniche) elementari. L'addizione delle contrazioni toniche si manifesta con una curva tonica duratura, che oltrepassa di molto la durata della stimolazione e talora anche sorpassa l'altezza della curva che corrisponde all'addizione delle singole contrazioni cloniche. La distinzione fra funzione clonica e tonica del tessuto muscolare si manifesta quindi anche nelle contratture dei muscoli lisci, come nei

tetani (incompleti) dei muscoli striati, oltre che nelle singole contrazioni provocate da stimoli unici.

c) I singoli stimoli di corrente indotta provocano inibizione del tono del m. retrattore, quando questo si trova in stato di contrattura; quando invece il muscolo si trova in stato di mediocre allungamento, provocano contrazioni, che spesso sono seguite da inibizione del tono.

d) L'azione polare dalla corrente continua sul m. retrattore segue le ben note regole (per i particolari, ved. nel testo).

6. Le contrazioni ritmiche automatiche del m. retrattore del pene (lasciato *in situ* o asportato dal corpo) sono o piccole contrazioni più frequenti, o spesso contratture, cioè forti accorciamenti di durata più o meno grande, le cui curve grafiche appariscono omogenee o dentellate, secondo che gli eccitamenti ritmici automatici, che provocano le singole contrazioni elementari, si succedono con una frequenza più o meno grande e sono più o meno intensi. Quando la frequenza e la intensità degli eccitamenti e la conduttività del preparato raggiungono il grado *optimum*, le contratture periodiche del muscolo si presentano con curve omogenee, non dentellate, e la loro durata è relativamente grande.

BIBLIOGRAFIA

(1) F. Bottazzi, *Nuove ricerche sui muscoli lisci.* Zeit. f. allg. Physiol., 9, pag. 368, a. 1909.

(2) Vedi a questo proposito, e per tutte le questioni qui accennate, oltre alle più recenti opere d'Istologia (Schaefer, Prenant-Bouin-Maillard, Gurwitsch, etc.), particolarmente: B. Henneberg, *Ruhende und thaetige Muskelzellen in der Arterienwand.* Anat. Hefte 17, H. 2, pp. 427-465, a. 1901; M. Heidenhain, *Die kontraktile Substanz,* etc. Plasma und Zelle, II. Abt. Jena, a. 1911 (ved. spec. pp. 519, 597, etc.); Idem, *Ergebn. der Anat. und Entwickelungs.* 10, pag. 115, a. 1900; W. Flemming, *Ueber Formen und Bedeutung der organischen Muskelzellen.* Zeit. f. wiss. Zoolog., 30 Suppl., pag. 466, a. 1878; S. de Boer, *Ueber das Elektromyogramm der veratrinisierten Muskeln. Erster Teil.* Zeit. f. Biolog. 61, pag. 143, a. 1913 (ved. spec. pag. 154); C. Mc Gill, *The structure of smooth muscle in the resting and the contracted condition.* Amer. Journ. of. Anat. 9, pag. 493, a. 1909; Idem, *The histogenesis of smooth muscle in the alimentary canal and respiration tract of the pig.* Intern. Monatsschr. f. Anatom. u. Physiol. 24, pag. 209, a. 1907; Idem, *The structure of smooth muscle of the intestine in the contracted condition.* (Prelimin. paper). Anat. Anz. 30, pag. 426, a. 1907; Idem, *The syncytial structure of smooth muscle.* Anat. Record 1, pag. 91, a. 1906-8 (1907); U. Soli, *Sulla struttura delle fibre muscolari liscie dello stomaco degli uccelli.* Bibliogr. anat., fasc. 1°, pag. 25, a. 1906; Idem, *Sulla struttura delle fibre muscolari liscie dello stomaco degli uccelli.* Anat. Anz. 29, pag. 586, a. 1906.

(3) Ved.: O. von Fuerth, *Zur Gewebschemie des Muskels.* Ergebn. d. Physiol. 1 Jahrg., 2. Teil, pag. 110, a. 1902; Idem, *Chemie des Muskelsgewebes.* In: C. Oppenheimer's, Handb. der Biochemie, 2, 2 Haelfte, pag. 244. Jena, a. 1908; T. Saiki, *A chemical study of non striated mammalian muscle.* Journ. of biolog. chem. 4, pag. 483, a. 1908 (Letteratura); A. Costantino, *Ueber den Gehalt der (weissen und roten) quergestreiften und glatten Muskeln verschiedener Tiere an Kalium, Natrium und Chlor.* Bioch. Zeit. 37, pag. 52, a. 1911. (Vedi inoltre molti altri lavori di Costantino, Buglia, Buglia e Costantino, sullo stesso argomento, fatti per mio consiglio e sotto la mia direzione, mentre furono miei assistenti in Napoli, e alcuni altri pochi fatti dopo altrove, ma sempre in continuazione e svolgimento dell'argomento da me loro dato a studiare); F. Bottazzi e G. Quagliariello, *Recherches sur la constitution physique et les propriétés chimico-physiques du suc des muscles lisses et striés.* Arch. intern. de Physiol. 12, pp. 224-236, 289-317, 409-448, a. 1912; Idem, idem, *Propriétés chimiques et chimico-physiques du suc des muscles striés et des muscles lisses. 2. Contenu en protéines du suc et rapport entre granules (myosine) suspendus et myoprotéine dissoute.* Arch. ital. de Biol. 60, pag. 265, a. 1913; F. Bottazzi et E. d'Agostino, *Viscosité et tension superficielle de suspensions et de solutions de protéines musculaires sous l'influence d'acides et d'alcalis.* Ibidem, pag. 232; etc.

(4) Ved. la Letteratura a questo riguardo. fino al 1914, in: P. Gruetzner, *Die glatten Muskeln.* Ergebn. d. Physiol. 3 Jahrg., 2 Abt.; pp. 12-88. Wiesbaden, 1904.

(5) F. Bottazzi, *Recherches sur les mouvements de l'oesophage de l'Aplysia depilans.* Arch. ital. de Biol. 28, pag. 81, a. 1897; Idem, *Contributions to the Physiology of unstriated muscular tissue.* P. 4. *The action of electrical stimuli upon the oesophagus of A. depilans and A. limacina.* Journ. of Physiol. 22, pag. 481, a. 1898; Idem, *Ricerche fisiologiche sul sistema nervoso viscerale delle Aplisie e di alcuni Cefalopodi.* Riv. di Scienze biol. 1, a. 1889.

(6) F. Bottazzi, *Sullo sviluppo embrionale della funzione motoria negli organi a cellule muscolari.* Firenze, a. 1897; Idem, *Contributi alla fisiologia del tessuto di cellule muscolari.* Parti I-III. Firenze, 1897; Idem e O. F. F. Gruenbaum, *On plain muscle.* Journ. of Physiol. 24, pag. 51,

a. 1899; Idem, *The action of the vagus and the sympathetic on the oesophagus of the toad.* Ibidem 25, pag. 157, a. 1889.

(7) F. Bottazzi, *Zwei Beitraege zur Physiologie der glatten Muskeln.* Pflüger's Arch. 113, pag. 136, a. 1906; Idem. *Nuove ricerche sui muscoli lisci.* Zeit. f. allg. Physiol. 9, pag. 368, a. 1909.

(8) E. Th. von Bruecke, *Zur Physiologie der Kropfmuskulatur von Aplysia depilans.* Pflüger's Arch. 108, pag. 192, a. 1905.

(9) P. G. Stiles, *On the rhythmic activity of the Oesophagus and the influence upon it of various media.* Amer. Journ of Physiol. 5, pag. 338, a. 1901.

(10) C. Beck, *Zur Physiologie der glatten Muskeln. Ueber spontane Bewegungen, die am unvergifteten und vergifteten Oesophagus Ranae esculentae beobachtet werden.* Zeit. f. allg. Physiol. 6, pag. 457, a. 1907.

(11) Z. Treves, *Osservazioni sulla azione della corrente costante sull'esofago degli Anfibi.* Volume giubilare pubbl. in onore di L. Luciani. Milano, 1900.

(12) G. D'Errico, *Wirkung der Galle und der gallensauren Salze auf den Tonus und die automatische Bewegungen des Darmrohrs.* Zeit. f. Biol. 54, pag. 286, a. 1910.

(13) G. Fienga, *Neue Untersuchungen über die glatten Muskeln. II. Wirkung der Kationen auf die glatten Muskeln (Huehnenoesophagus).* Zeit. f. Biol. 54, pag. 230, 1910.

(14) G. Buglia, *Neue Untersuchungen*, etc. III. *Ueber die Ersetzbarkeit des Kalziums in den sog. physiologischen Fluessigkeiten. (Experimente an glatten Muskeln. Huehnenoesophagus).* Zeit. f. Biol., 54, p. 249, a. 1910; Idem, Idem, 5. *Untersuchungen über des optimale. Temperatur fuer die Funktion des glatten Muskelgewebes. (Exp. am Huehnenoesophagus).* Zeit. f. Biol. 55, pag. 377, a. 1911.

(15) Th. W. Engelmann, *Zur Physiologie des Ureters.* Pflüger's Arch. 2, pag. 248, a. 1869.

(16) D. R. Lucas, *Studies of the peristalsis of the Ureter of dogs by the graphic method.* Amer. Journ. of Physiol. 17, pag. 392, a. 1906.

(17) N. Beresnegowsky, *Zur Frage über die physiologische Faehigkeit der Ureteren.* Zentr. f. Physiol. 22, pag. 461, a. 1909.

(18) L. Orbeli und E. Th. von Bruecke, *Beiträge zur Phisiologie der autonom innervierten Muskulatur. 2. Die Aktionsstroeme der Uretermuskulatur waerend des Ablaufes spontaner Wellen.* Pflüger's Archiv 133, pag. 341, a. 1910.

(19) R. Magnus, *Versuche am ueberlebenden Duenndarm von Saeugetieren.* 1. Pflüger's Arch. 102, pag. 123, a. 1904; Idem, 2. *Die Beziehungen des Darmnervensystems zur automatischen Darmbewegungen.* Ibidem pag. 349; Idem, 3. *Die Erregungsleitung.* Ibidem 103, pag. 515, a. 1904; Idem, 4. *Rhythmizitaet und refraktaere Periode.* Ibidem, pag. 525; Idem. 5. *Wirkungsweise und Angriffspunkt einiger Gifte am Katzendarm.* Ibidem 108, pag. 1, a. 1905; Idem, 6. Ibidem 111, pag. 152, a. 1906; Idem, 7. *Zur Wirkung kleinsten Atropinmengen auf den Darm.* Ibidem 123, pag. 95, a. 1908. Vedi anche: F. Bottazzi e F. Costanzi, *Nuove ricerche sull'azione dell'Adrenalina (Clin) e della Paraganglina (Vassale) sui muscoli lisci.* Il Tommasi, 1905; G. D'Errico, *Wirkung der Galle und der gallensauren Salze auf den Tonus und die automatische Bewegungen des Darmrohrs.* Zeit. f. Biol. 54, pag. 230, a. 1910.

(20) F. Bottazzi, *Zur Genese der Blutdruckschwankungen dritter Ordnung.* Zeit. f. Biol. 47, pag. 487, a. 1906 (ved. inoltre la letteratura sulle arterie e i capillari in P. Gruetzner, loc. cit., e in G. Quagliariello, loc. cit., appresso); riscontra anche: O. B. Meyer, *Ueber einige Eigenschaften der Gefaessmuskulatur mit besonderer Beruecksichtigung der Adrenalinwirkung.* Zeit. f. Biol. 48, pag. 352, a. 1906; Idem, *Versuche mit Kokainadrenalin und Andolin an ueberlebenden Blutgefaessen.* Zeit. f. Biol. 50, pag. 93, a. 1907; Idem, *Rhythmische Kontraktionen an ausgeschnittenen Arterien.* Zentr. f. Physiol. 23, pag. 685, a. 1909; V. de Bonis und V. Susanna, *Ueber die Wirkung des Hypophysenextraktes auf isolierte Blutgefaesse.* Zentr. f. Physiol. 23, pag. 169, a. 1909; E. Steinach und R. H. Kahn, *Echte Contractilitaet und motorische Innervation der Blutcapillaren.* Pflüger's Arch. 97, pag. 105, a. 1903. (Non citato da Gruetzner); L. Asher, *Studien über antagonistische Nerven.* 6. (1). *Ueber die Abhaengingkeit der Gefaessnervenwirkung vom Spannungszustand der Gefaesswand.* (2). *Ueber die Unabhaengigkeit der Gefaesserweiterung von spezifischen*

Stoffwechselprodukten nebst Bemerkungen über die Lymphbildung. Pflüger's Arch. 136, pag. 411, a. 1910.

([21]) F. Bottazzi, *The oscillations of the auricular tonus in the batriachian heart, with a theory on the function of sarcoplasma in muscular tissues.* Journ. of Physiol. 21, pag. 1, a. 1897. (Lavoro pubblicato anche in italiano sul Morgagni 39, n. 8, 1897); Idem and O. F. F. Gruenbaum, *On plain muscle.* Ibidem 24, pag. 51, a. 1899; Idem, *Azione del vago e del simpatico sugli atri del cuore dell' Emys europaea.* Rivista di Scienze biologiche, a. 1900, fasc. 1-2. (Arch. ital. de Biolog. 34, pag. 17, a. 1900); Idem, *Ancora dell' azione del vago e del simpatico sugli atri del cuore dell' Emys europaea.* Ibidem, fasc. 11-12. (Arch. ital. de Biol. 36, pag. 277, a. 1901); Idem, *Ricerche sulla muscolatura cardiale dell' Emys europaea.* Zeit. f. allg. Physiolog. 6, pag. 140, a. 1906.

([22]) G. Fano, *Sulle cause e sul significato delle oscillazioni del tono atriale nel cuore dell' Emys europaea.* Vol. giubilare pubbl. in onore di L. Luciani. Milano, a. 1900; Idem, *Sopra un contributo del sig. Elias Rosenzweig alla conoscenza delle oscillazioni del tono atriale nell' Emys europaea.* Arch. di Fisiol. 1, pag. 247, a. 1904; Idem, *Di una nuova teoria del professor Angelo Mosso sulla tonicità muscolare fondata sulla doppia innervazione dei muscoli striati.* Ibidem, pag. 550; Idem e I. Spadolini, *Sull' elettrocardiogramma durante le oscillazioni del tono negli atri dell' Emys europaea.* Ibidem 11, pag. 467 (ved. pag. 475), a. 1913.

([23]) S. Oinuma, *Beitraege zur Physiologie der autonom innervierten Muskulatur. 3. Ueber den Einfluss des Vagus und des Sympathicus auf die Tonusschwankungen der Vorhoefe des Schildkroetenherzens.* Pflüger's Arch. 133, pag. 500, a. 1910.

([24]) G. Buglia, *Ueber die Ersetzbarkeit des Kalziums in den sogen. physiologischen Fluessigkeiten. (Experimente über die Erregbarkeit des quergestreiften Muskelgewebes der Warmblueter und die Tonusschwankungen des Atriums bei Emys europaea).* Zeit. f. Biol. 55, pag. 377, a. 1911.

([25]) I. Spadolini, *Sulla fine struttura della fibra miocardica colorata col metodo Bielschowsky.* Arch. di fisol. 11, pag. 434, a. 1913. Vedi anche: Joh. Dogiel, *Die Anordnung und Funktion der Nervenzellen des Herzens des Menschen und der Tiere und ihre Verbindungen mit dem sympathischen, den cerebralen und spinalen Nerven.* Pflüger's Arch. 155, pag. 351, a. 1914.

([26]) E. Rosenzweig, *Beitraege zur Kenntnis der Tonusschwankungen des Herzens von Emys europaea.* Arch. f. (Anat. u.) Physiol., a. 1903. Suppl.. pag. 192.

([27]) P. Trendelenburg, *Versuche an der isolierten Bronchialmuskulatur.* Zentr. f. Physiol. 26, pag. 1, a. 1912.

([28]) G. Quagliariello, *Ueber die Wirkung des β-Imidoazolylaethylamins und des p-Oxyphenylaethylamins auf die glatten Muskeln.* Zeit. f. Biol. 64, pag. 263, a. 1914.

([29]) Ved. la letteratura in P. Gruetzner, loc. cit.

([30]) Ved. la letteratura in P. Gruetzner, loc. cit., e il lavoro: G. H. Cooke, *The action of various stimuli on non striped muskeln.* Studies from the Laboratory of Owen's College Manchester 1, pag. 178, a. 1891, non citato dal Gruetzner; e anche: A. Pugliese, *Contributo alla Fisiologia dei Muscoli lisci. Azione dei ioni metallici sul tono e sulla funzione motoria dei muscoli lisci.* Bullett. d. Sc. med. di Bologna (8), ann. 77, a. 1906.

([31]) Ved. la letteratura in P. Gruetzner, loc. cit., e il lavoro: P. W. Reid, *Electrical phenomena during movements of the iris.* Journ. of Physiol. 17, pag. 433, a. 1895.

([32]) Ved. la letteratura in P. Gruetzner, loc. cit., e il mio lavoro: F. Bottazzi, *Untersuchungen über das viscerale Nervensystem der Selachier.* Zeit. f. Biol. 43, pag. 372, a. 1902.

([33]) Ved. la letteratura in P. Gruetzner, loc. cit., e inoltre: R. F. Fuchs, *Die elektrischen Erscheinungen am glatten Muskel.* Sitzungsber. d. phys.-med. Soc. in Erlangen 40, p. 201, a. 1908; O. Polimanti, *Studi sulla contrazione del muscolo adduttore di Ostrea edulis L. e sul movimento di alcuni Lamellibranchi.* Festschr. z. sechz. Geburtst. von J. W. Spengel 3, pag. 269. Jena, 1912; F. Capobianco, *Della influenza di agenti fisico-chimici sovra la eccitabilità dei nervi e dei muscoli lisci negl'invertebrati.* Atti della R. Accad. d. Scienze fis. e matem. di Napoli (2) 10, n. 12, a. 1900; V. Henri e S. Lalou, *Physiologie des muscles et des reflexes chez le Sticopus regalis.*

C. R. Soc. d. Biol. 55, pag. 1194, a. 1913; Idem, Idem, *Contractions rythmiques de differents organes internes chez les Oursins et les Holoturies.* Ibidem, pag. 1242; W. Straub, *Zur Muskelphysiologie des Regenwurmes.* Pflügers's Arch. 79 pag. 379, a. 1900; F. Bottazzi, *Ricerche fisiologiche sul sistema nervoso viscerale delle Aplisie e di alcuni Cefalopodi.* Riv. d. Sc. biol. 1, fasc. 11-12, a. 1899; Idem, *Zur Physiologie der perioesophagealen Ganglien von Aphysia limacina.* (*Erwiderung*). Zeit. f. Biol. 41, pag. 493, a. 1902; Idem, *Untersuchungen über das viscerale Nervensystem der decapoden Crustaceen.* Zeit. f Biol. 43, pag. 341, a. 1903; E. Foster, *Die Kontraktion der glatten Muskelzellen und der Herzmuskelzellen. Eine anatomisch-physiologische Untersuchung.* Anatom. Anz. 25, pag. 338, a. 1904.

(34) F. Bottazzi, *Recherches sur les mouvements automatiques de diverses muscles striés.* Journ. de Physiol. et de Path. genér. pag. 193, a. 1906; Idem, *Zwei Beitraege zur Physiologie der glatten Muskeln.* Pflüger's Arch. 113, pag. 136, a. 1906.

(35) W. Ellenberger und H. Baum, *Systematische und topographische Anatomie des Hundes.* Berlin 1891, pag. 348, fig. 130.

(36) J. N. Langley, *The sympathetic and other related systems of nerves.* In: Schaefer's Textbook of physiology 2, pag. 635. London & Edinburgh, 1910.

(37) J. N. Langley and H. K. Anderson, *The innervation of the pelvic and adjoining viscera.* Journ. of Physiol. 19, P. 3, pag. 85, a. 1895-96.

(38) L. A. E. de Zilva, *Some contributions to the Physiology of unstriated muscles.* Journ. of Physiol. 27, pag. 200, a. 1901.

(39) E. Th. von Bruecke, *Beitraege zur Physiologie der autonom innervierten Muskulatur. 1. Die elektromotorischen Wirkungen des M. retractor penis im Zustande tonischer Kontraktion.* Pflüger's Arch. 133, pag. 313, a. 1910.

(40) E. Th. von Bruecke und S. Oinuma, *Beitraege*, etc. 4. *Ueber die Wirkungsweise der foerdernden und hemmenden Nerven.* (*Nach Versuchen am M. retractor penis*). Ibidem 136, pag. 502, a. 1910.

(41) J. N. Langley and H. K. Anderson, *The innervation of the pelvic and adjoining viscera. 5. Position of the nerve cells on the course of the efferent nerve fibres.* Journ. of Physiol. 19, pag. 131, a. 1895-96.

(42) W. M. Fletcher, *Preliminary note on the motor and inhibitory nerveendings in smooth muscle.* Proc. of the Physiol. Soc., in: Journ. of Physiol. 22, pag. XXXVII a. 1908.

(43) N. Mislavsky et D. Poloumordinov, *La localisation des phénomènes d'inhibition des muscles lisses.* Journ. de physiol. et de Path. génér. 12, pag. 17, a. 1910; N. Mislavsky, *Une expérience de sur les muscles lisses.* Arch. intern. de Physiol. 3, pag. 152, a. 1905.

(44) A. S. Dogiel, *Ueber den Bau der Ganglien in den Geflechten des Darmes und der Gallenblase des Menschen und der Saeugethiere.* Arch. f. Anat. und Entwickl. pag. 130, a. 1899.

(45) E. Sertoli, *Contribuzione alla fisiologia generale dei muscoli lisci.* Rendic. del R. Istituto lombardo 15, a. 1882; Idem, *Sur la physiologie du tissu musculaire lisse.* Arch. ital. de Biolog. 2, pag. 291, a. 1883.

(46) A. Mosso, *Contributo alla fisiologia dei muscoli lisci.* Rendic. d. R. Accad. d. Lincei (5), Classe d. Scienze fis., num. del 3 dec. a. 1905.

(47) E. H. Starling, *Elements of human Physiology.* London, pag. 156, 1907; Idem, *Principles of human Physiology.* London, pag. 276, a. 1912.

(48) A. Froehlich und O. Loewi, *Untersuchungen zur Physiologie und Pharmakologie des autonomen Nervensystems.* Arch. f. exper. Path. und Pharm. 59, pag. 34, a. 1908.

(48a) F. Bottazzi, *Ein Warmblütermuskelpräparat, das sich für Untersuchungen allgemeiner Muskelphysiologie besonders eignet.* Zeit. f. Biol. 48, pp. 437-438 (figg. 1*a* e 1*b*).

(49) Th. Birnbacher, *Ueber das Verhalten des Muskels im Muskelpressaft.* Pflüger's Arch. 154, pag. 401, a. 1913.

(50) F. Bottazzi, *Das Cytoplasma und die Koerpersaefte.* In: H. Winterstein's Handb. der vergl. Physiologie 1, pag. 339 e segg. Jena, 1911.

(51) E. B. Meigs, *The structure of the elements of cross striated muscle, and the changes of*

form which it undergoes during contraction. Zeit. f. allg. Physiol. 8, pag. 81, a. 1908; Idem, *The application of Mc Dougall's theory of contraction to smooth muscle.* Amer. Journ. of Physiol. 22, pag. 477, a. 1908.

(52) C. Mc Gill, *Studies on smooth muscle.* Quart. Journ. of exper. Physiol. 3, pag. 241, a. 1910.

(53) E. B. Meigs, *The structure of smooth muscle and its responses to distilled water and hypertonic salt solution: an answer to C. Mc Gill.* Quart. Journ. of exper. Physiol. 4, pag. 55, a. 1912.

(54) I rispettivi tracciati sono riprodotti nella mia prima Memoria cit. a pag. 62.

(55) W. Biedermann, *Elektrophysiologie.* Jena, 1895.

(56) J. Demoor et M. Philippson, *Influence de la pression osmotique sur la viscosité du muscle et sur l'allure de sa contraction.* Bull. de l'Acad. Roy. de Médec. de Belgique. Séance du 30 Novembre, a. 1907.

(57) Idem, Idem, *Influence de la pression osmotique sur l'allure de la contraction musculaire.* Ibidem. Séance du 31 Octobre, a. 1908.

(58) G. Buglia, *Action de la chaleur sur les colloïdes protéiques, 2. Variations de poids du muscle plongé à différentes températures dans des solutions de chlorure de sodium pures ou addictionnées de HCl ou de NaOH en proportions variables.* Arch. intern. de Physiol. 8, pag. 273, a. 1909.

(59) Circa l'azione di queste semplici basi naturali sopra altri preparati muscolari lisci, ved.: G. Barger, *The simpler natural bases.* London, 1914.

(60) Circa l'azione degli estratti d'ipofisi e dei vari ormoni in generale sui preparati muscolari lisci, ved.: A. Biedl, *Innere Sekretion.* 2. Aufl. Berlin-Wien, a. 1913.

(61) W. D. Halliburton, *Chemical side of nervous activity.* (*Croonian Lecture*). Pag. 51. London, a. 1901.

(62) R. S. Woodsworth, *Studies in the contraction of smooth muscles.* Amer. Journ. of Physiol. 3, pag. 26, a. 1899.

(63) H. Winkler, *Ein Beitrag zur Physiologie der glatten Muskeln.* Pflüger's Arch. 71, pag. 357, a. 1898.

(64) A. Fick, *Beitraege zur vergleichenden Physiologie der irritablen Substanzen.* Braunschweig, a. 1863.

(65) G. Fano et V. Fayod, *De quelques rapports entre les propriétés contractiles et les propriétés électriques des oreillettes du coeur.* Arch. ital. de Biol. 9, pag. 143, a. 1888.

(66) P. W. Reid, *Electrical phenomena during movements of the iris.* Journ. of Physiol. 17, pag. 433, a. 1895.

(67) R. F. Fuchs, *Die elektrischen Erscheinungen am glatten Muskel.* Sitz.-Ber. d. phys.-med. Soc. zu Erlangen 40, pag. 201, a. 1908.

(68) G. Fano e I. Spadolini, *Sull'elettrocardiogramma durante le oscillazioni del tono negli atri dell'Emys europaea.* Arch. di Fisiol. 11, pag. 467, a. 1913.

(69) F. Bottazzi, *Nuove ricerche sui muscoli lisci.* Zeit. f. allg. Physiol. 9, pag. 368 (pag. 376, fig. 2), a. 1909.

(70) F. Bottazzi, *Ricerche sulla muscolatura cardiale dell'Emys europaea.* Zeit. f. allg. Physiol. 6, pag. 140, a. 1906.

(71) F. Bottazzi, *Ricerche sulla genesi del tetano muscolare.* Atti d. Soc. lig. d. Scienze natur. 15, a. 1904. (Arch. ital. d. Biol. 53, fasc. 2, a. 1904).

(72) A proposito di quanto è qui affermato, ved. particolarmente il mio lavoro: F. Bottazzi, *Les activités physiologiques fondamentales.* I. *L'activité nerveuse et les processus élémentaires qui lui servent de base.* Scientia 15, n. xxxv-3, a. 1914.

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76) Parte 1ª Transunti.
2ª Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — Transunti. Vol. I-VIII. (1876-84).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — Rendiconti. Vol. I-VII. (1884-91).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — Rendiconti *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XXIV. (1892-1915). Fasc. 11°. Sem. 1°.
Rendiconti *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XXIII. (1892-1914).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XI. Fasc. 2.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XII.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI
DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia è di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

Ermanno Loescher & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*
Ulrico Hoepli. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

3

MEMORIE DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

ANNO CCCXII

Serie Quinta — Volume XI — Fascicolo III.

A. BORZÌ e G. CATALANO

LA DOTTRINA DEI MOTI

DELLE SENSITIVE

Smithsonian Institution
SEP 25 1924
National Museum

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1915

La dottrina dei moti delle sensitive.

Note anatomo-fisiologiche del Socio A. BORZÌ e del dott. G. CATALANO

(Presentata nella seduta del 16 maggio 1915)

(con una tavola)

Le moderne osservazioni ed esperienze dirette ad investigare i fondamenti fisiologici per mezzo dei quali si compiono i fenomeni di senso nel Regno vegetale, tendono, come è noto, ad una concezione fisico-meccanica del processo sensorio, senza cioè che al compimento delle sue varie manifestazioni intervengano azioni vitali, più o meno oscure e complesse. Così, ad es., nelle Mimose, che rappresentano certamente il più cospicuo esempio della sensibilità vegetale, molte ricerche ed esperienze hanno dimostrato la possibilità che gli stimoli capaci di provocare le ben note rezioni motorie delle foglie si trasmettono attraverso regioni del corpo della pianta dove non esistono tessuti vivi o sono stati artificialmente uccisi. Così pure si è potuto ricondurre a un semplice fenomeno fisico, riferibile principalmente alle variazioni dell'equilibrio idrostatico che si verificano in seno ai tessuti, anche il meccanismo del movimento fogliare propriamente detto, che ha luogo nei tessuti dei cuscinetti. Tutto ciò, allontanando vieppiù la necessità di ammettere, come si è detto, il concorso di azioni vitali nella spiegazione di siffatti fenomeni, ha servito di base per una interpretazione fisico-meccanica dei fenomeni di movimento delle sensitive, e di essa, come è noto, abbiamo la migliore sintesi nel classico lavoro dell'Haberlandt (1).

(1) L'idea che il fenomeno di trasmissione degli stimoli consista fondamentalmente nelle Mimose, in un fenomeno fisico e più precisamente idrodinamico, trova riscontro nelle ipotesi degli antichi fisiologi, i quali supposero l'esistenza, nel corpo vegetante delle Mimose, di un misterioso fluido *liquido-aereo*, sprigionantesi tutte le volte che la pianta esegue i suoi caratteristici movimenti. Ricordiamo in proposito le opere del Ray, del Parent, del Lamark e degli italiani Bellardi e Comparetti. Secondo quest'ultimo, la causa dei moti delle Mimose risiede nel movimento del contenuto delle trachee, che sarebbe appunto un liquido acqueo-aereo, dotato di grande espansibilità e mobilità. Il modo come l'azione degli stimoli si trasmette a distanza viene spiegato dall'A. ammettendo una rapida e copiosa emissione di bolle di detto fluido, provocata dalla più leggera compressione esercitata all'estremità dei fasci vascolari, così che, secondo l'A., in conclusione la causa dei moti sarebbe puramente idrodinamica, esplicantesi secondo le leggi della fisica. Secondo il Bellardi la causa del ripiegamento dei cuscinetti della Mimosa è attribuita ad una variazione delle

Senonchè la diffusione dei fenomeni di senso, dei quali si può dire ogni giorno si raccolgono sempre prove e documenti indiscutibili in quasi ogni classe del Regno vegetale, lascia un campo tutt'ora aperto alla indagine della fisiologia; e molto ancora resta nel dominio dei fenomeni biotici propriamente detti, la cui natura resta oscura e misteriosa. Sicchè quanto, allo stato attuale, si conosce sui processi fisico-meccanici che intervengono nel compimento dei fenomeni di senso, è ben piccola cosa di fronte alla vastità del problema della sensibilità vegetale. Anche per ciò che riguarda le Mimose in particolare, sebbene, come si è detto, esse siano state studiate meglio e più di qualunque altro gruppo di piante sensibili, molti fatti restano tutt'ora inspiegati od addirittura in contraddizione con le ipotesi fin qui ammesse.

Noi, che da lunghi anni ci siamo occupati di studii ed osservazioni sulle sensitive, siamo ben persuasi che le spiegazioni, fin qui acquisite dalla fisiologia vegetale moderna sull'argomento, non possono che essere provvisorie, principalmente perchè i fatti provano l'erroneità del concetto secondo cui cotesti importantissimi fenomeni si compiono esclusivamente al di fuori di qualsiasi concorso attivo dei tessuti vitali delle piante.

La presente breve esposizione di tali studii tende appunto a porgerne la dimostrazione.

Qualunque sia la natura intima del processo sensorio, sia cioè essa meccanica o biotica, nessuno può disconoscere che in esso si possono distinguere tre momenti fondamentali, cioè la *ricezione* dello stimolo, la *trasmissione* di esso, e la esecuzione del movimento che costituisce la *reazione*. Fosse pure — cotesta — una distinzione affatto artificiale, quand'anche cioè questi tre momenti, almeno nel Regno vegetale, fossero in realtà fusi in un processo fondamentale unico, la loro distinzione è sempre utile, perchè obbliga a portare la indagine fisiologica separatamente ai processi coi quali rispettivamente s'*inizia*, si *elabora* e si *compie* il fenomeno. Ed è appunto necessario di rilevare quali energie, meccaniche o biotiche, si sviluppano nell'organismo vegetale durante le varie fasi attraverso le quali si compie il fenomeno di senso.

Ricezione dello stimolo. — Non possiamo senza meraviglia rilevare il fatto che il più illustre sostenitore della teoria idrodinamica della trasmissione degli stimoli nelle Mimose — l'Haberlandt — sia stato pure un autorevole assertore della funzione protoplasmatica per ciò che riguarda la recezione degli stimoli. Infatti, per non parlare dei numerosi lavori dell'Haberlandt sugli organi di senso nei

---

condizioni di equilibrio in cui trovasi il succo entro l'organo. Riteniamo interessante riportare testualmente il passo relativo: « Pone interdiu, dum planta viget, ac plane vigilat proportionata pediculi, vel succussione, vel pressione (folia enim et pediculi caute leviter tangi possunt, quin contractio sequatur ulla) partem aliquam succi copiosiorem adigi in superiorem substantiae partem, vel partem aliquam succi disjici ex parte inferiore, vel fieri simul utrumque, contrahetur erectus pediculus. At, perspiratione excessum succi hauriente jam a parte superiore et haustionem succi alterius promovente, iterum erigetur pediculus... ». In queste parole troviamo riassunta nè più nè meno che la concezione moderna del meccanismo del movimento dei pulvini motori, e può ben dirsi, quindi, che il Bellardi abbia precorso i moderni fisiologi, i quali ci sembra lo abbiano superato soltanto nella conoscenza dei dettagli.

vegetali per gli stimoli della luce, per quelli meccanici ecc., dobbiamo pure a lui la concezione dell'esistenza, nelle stesse Mimose, di speciali organi di percezione — in senso largo — per gli stimoli di contatto. Detti organi sarebbero i peli setolosi che, come è noto, si trovano distribuiti un po' da per tutto nel corpo della pianta; ma in modo speciale sarebbero adatti alla detta funzione quelli situati nella metà inferiore del cuscinetto fogliare. Secondo l'Haberlandt dunque, la prima parte del fenomeno di senso nelle Mimose si compie in seno a cellule parenchimatiche speciali provviste di protoplasma vivo.

Ma, come è noto, non soltanto gli stimoli meccanici possono produrre le ben note reazioni motorie; parecchi altri stimoli di differente natura possono produrre il medesimo effetto sulla pianta, ed ha quindi una particolare importanza lo studio della maniera di agire di ciascuno di essi e del modo come vengono ricevuti o percepiti. Ad es., si ha sempre una reazione tutte le volte che si taglia con una forbice un frammento non più largo di 1 mm. all'estremità apicale di una foglietta, o si fa in essa una brevissima intaccatura; oppure si brucia con ago rovente un punto qualunque della foglietta, o vi si accosta semplicemente l'ago arroventato, o infine vi si concentrano i raggi solari con una lente.

Nelle reazioni provocate da stimoli di siffatta natura è sempre possibile rilevare un fatto, non sempre segnalato dagli autori: che cioè la velocità, con la quale i singoli membri della foglia eccitata rispondono allo stimolo cresce quanto più essi si vanno allontanando dal punto stimolato. Così le foglioline della coppia successiva a quella alla quale si è applicato lo stimolo, si chiudono solo dopo qualche secondo dalla chiusura della prima; ma la chiusura della terza segue con rapidità sensibilmente maggiore, e tutte le altre dello stesso giogo parimenti si chiudono con velocità vieppiù crescente.

Se invece si tratta di uno stimolo avente un raggio di azione più esteso, come nel caso di urti o scosse comunicati con la mano, la chiusura avviene quasi contemporaneamente per tutte le foglietto della stessa rachide ed anche di quelle immediatamente vicine. La reazione è poi *simultanea* in tutte le rachidi e in tutte le foglie di uno stesso ramo quando questo viene, con opportune disposizioni, esposto ad uno stimolo di natura diffusa, come sarebbero i vapori venefici o narcotici di varie sostanze raccolti entro una campana.

Nel caso di stimoli applicati ai fusti o ai rami o alle radici in generale, occorre che essi abbiano una intensità notevole affinchè possano produrre la reazione. Così nella *Mimosa pudica*, come è stato anche osservato da Meyer, Sachs, Pfeffer, ecc. il ripiegamento delle foglie per mezzo di una eccitazione praticata nel fusto non si ha se non quando lo stimolo (ordinariamente una intaccatura praticata con un coltello) arriva ad una certa profondità del tessuto. I lievi stimoli di contatto che provocano la reazione quando sono applicati sulle fogliette, rimangono senza effetto sulle radici, ed occorre invece un'azione più energica e profonda, come la recisione brusca con le forbici o l'azione prolungata di qualche energico agente chimico [1].

[1] Non crediamo di insistere maggiormente su questo fatto, che cioè la maggiore intensità o la maggiore durata dell'applicazione degli stimoli sulle radici, occorrente alla produzione della reazione delle foglie, dipende appunto dalla necessità che essi oltrepassino i tessuti di rivestimento

Tutte queste osservazioni, per quanto elementarissime, vanno opportunamente interpretate, giacchè portano a conclusioni particolarmente importanti. Anzitutto esse dimostrano che *vi è un solo e determinato tessuto capace di ricevere lo stimolo e di trasformarlo in fenomeno di movimento*, e che lo stimolo per agire su di esso, deve sorpassare le barriere frapposte dai rivestimenti esterni della pianta; epperò i varî stimoli si comportano diversamente, a seconda che interessano direttamente ed immediatamente l'organizzazione del corpo vegetale della Mimosa, oppure debbono estendere la loro azione fino alla determinata profondità degli organi. Quindi tutti i tessuti superficiali delle Mimose, cioè l'epidermide ed il tessuto assimilatore nelle foglie e il periderma e la corteccia nei fusti e nelle radici, costituiscono delle barriere che gli stimoli superano soltanto quando hanno sufficiente intensità ed attraversano in maniera affatto meccanica. Per tal modo detti tessuti esercitano, come del resto nella generalità dei casi, un'azione protettiva; e per le Mimose in particolare, un'azione moderatrice della intensità degli stimoli. Vi è quindi un tessuto interno nel corpo delle Mimose specificatamente destinato a ricevere gli stimoli, ed è il solo capace di produrre quella corrente di azione che mette capo infine al movimento dei varî membri della foglia; è, in altri termini, il tessuto *recettore* per eccellenza degli stimoli.

Com'era naturale, abbiamo diretto i nostri sforzi ad individualizzare tale tessuto sotto il triplice aspetto dei caratteri fisiologici, istologici e topografici. Così abbiamo anzitutto voluto determinarne la natura fisiologica con la seguente esperienza:

Abbiamo ucciso una intera lamina fogliare di *Mimosa pudica* per mezzo dell'acqua bollente, lasciandola attaccata al resto della pianta per mezzo del picciuolo primario vivo. Applicati poscia su questo corpo morto tutti gli stimoli di varia natura e di ogni possibile intensità che sogliono produrre la reazione, non abbiamo mai avuto alcun risultato positivo. Ciò dimostra immediatamente la necessità della presenza integrale delle condizioni fisiologiche normali nel tessuto recettore, perchè abbia luogo la recezione.

In quanto a determinare la condizione istologica necessaria perchè il tessuto in questione possa ricevere gli stimoli, abbiamo istituito quest'altra esperienza:

Abbiamo interrotto con un taglio netto la continuità organica di una foglia in un punto qualunque del picciuolo, ripristinandone, subito dopo, la *perfetta continuità*

---

dell'organo per agire sul tessuto specialmente sensibile, e non già dal fatto che essi debbano gradatamente e lentamente risalire lungo la radice per esplicare la loro azione di là dal colletto della pianta, come sostiene l'Haberlandt. Infatti la reazione è *immediata* quando si tagliano bruscamente le radici, opportunamente messe a nudo; ed è parimenti pronta, benchè in grado minore, nel caso dell'azione dell'acido solforico. Rileviamo a tal proposito la differenza, veramente sostanziale, fra le espressioni usate per indicare la prontezza della reazione dal Dutrochet (*sur le champ*) e dall'Haberlandt (*nach einigen Stunden*). Se le cose stessero come sostiene l'Haberlandt, si avrebbe una graduale distruzione dei tessuti radicali a mano a mano che vengono in contatto con l'acido solforico, cosicchè in definitiva la pianta intera ne verrebbe uccisa; mentre invece, se dopo l'esperimento si lavano le radici rimettendole in condizioni normali, la pianta seguita a vegetare normalmente. Ciò dimostra che l'acido solforico esercita soltanto un'azione locale, e non viene per nulla assorbito dalle radici.

fisica, accostando a completo contatto le due superfici di taglio e tenendo il tutto a posto per mezzo di un adatto tubetto di vetro riempito d'acqua, entro cui vennero adattati come in una guaina i due monconi del picciuolo da una parte e dall'altra. Riavutasi la foglia dal grave trauma, si riaprirono le fogliette, mantenendosi fresche per alcuni giorni, perchè alimentate dai succhi attraversanti la parte tagliata. Allora abbiamo applicato su di essa uno stimolo; si ebbe la chiusura delle fogliette, ma la reazione non si comunicò al cuscinetto primario attraverso la parte tagliata. Ciò significa che la foglia tagliata non è capace, per rispetto al resto della pianta, di percepire gli stimoli, comportandosi come un corpo del tutto estraneo dal punto di vista della sensibilità; epperò si deve concludere che il tessuto recettore degli stimoli deve essere organicamente, e non solo fisicamente, continuo.

Infine, per quel riguarda la posizione anatomica del tessuto recettore, ci è stato possibile di accertare, mediante esperienze di incisione, che come la trasmissione, anche la recezione degli stimoli ha luogo in un tessuto appartenente al sistema vascolare.

Riassumendo, quindi, la prima fase del fenomeno sensorio avviene in un tessuto il quale, per l'esercizio della speciale funzione di trasformare l'azione degli stimoli in modo che attraverso le fasi successive il fenomeno stesso si compia, deve essere in condizioni fisiologiche normali ed integralmente collegato col resto della pianta viva. Siffatte condizioni escludono che si tratti di un fenomeno meccanico, perchè implicano la necessità della presenza integrale delle qualità vitali dell'organismo; epperò possiamo concludere che la recezione degli stimoli è una funzione del protoplasma.

Trasmissione degli stimoli. — Le osservazioni e gli esperimenti, così degli antichi come dei moderni autori, hanno quasi concordemente dimostrato che nelle sensitive gli stimoli si trasmettono attraverso le vie dei fasci. Quale tessuto quindi, appartenente ai fasci, può essere adatto a siffatto ufficio?

Dutrochet ha attribuito senz'altro alla parte legnosa dei fasci, ed in particolare ai tubi conduttori della linfa ascendente, l'ufficio della trasmissione degli stimoli; così pure Meyer, Sachs, Hofmeister, Pfeffer, ecc. hanno dato la medesima indicazione considerando il fenomeno di trasmissione come dipendente da un movimento del succo circolante negli elementi legnosi.

L'Oliver considera invece il fenomeno di trasmissione come una funzione delle cellule vive del fascio (del floema), che si compie per mezzo dei plasmodesmi, non escludendo tuttavia la possibilità di un fenomeno idrostatico.

L'Haberlandt ritiene che il fenomeno di trasmissione sia un fatto di pura fisica idrostatica, indicando, come vie dove avviene lo spostamento delle masee acquee le cellule otricolari (*Schlauchzellen*) del libro delle Mimose, omologhe dei tubi albumiboso-tannici di molte altre Leguminose.

Mac Dougal ha potuto però accertare che la trasmissione può aver luogo in porzioni della pianta dove non si trovano cellule turgide e nelle quali per conseguenza, non è possibile una variazione idrostatica; tale variazione quindi non può costituire un impulso.

Fitting ritiene che la trasmissione avvenga nelle cellule vive, pur non considerando verisimile che il protoplasma vi prenda parte attiva; ritiene poi non dimo-

strata l'ipotesi dell'Haberlandt sopratutto per la comparazione dei fenomeni di trasmissione della Mimosa con quelli di altri organi sensibili sprovvisti delle speciali cellule dell'Haberlandt (cirri delle Cucurbitacee, ecc.).

Montemartini, studiando i fenomeni elettrici che si destano negli organi per la azione degli stimoli, conclude che la trasmissione di essi non può avere una base esclusivamente idrodinamica, come vuole l'Haberlandt, ma sia piuttosto legata alla struttura e alla disposizione degli elementi vivi.

Buscalioni e Muscatello confermano che gli stimoli percorrono le vie del libro, mentre Linsbauer, in un recentissimo lavoro, ritorna, colla scorta di nuove esperienze, all'ipotesi degli antichi autori, che cioè gli stimoli percorrano le vie dei vasi legnosi.

Non ci è possibile di riferire e discutere le ingegnose esperienze sulle quali si fondano queste diverse ipotesi. Esse si possono tuttavia ricondurre a due categorie: esperienze di *incisione*, dirette ad escludere questo o quel tessuto dalla possibilità di partecipare al fenomeno di trasmissione; ed esperienze di *uccisione* di una parte degli organi. Noi abbiamo ripetuto ed esteso le une e le altre, e possiamo confermare che gli stimoli passano anche attraverso porzioni di organi destituite di protoplasma o state artificialmente uccise; epperò concludiamo che per il fenomeno di trasmissione non è necessaria la continuità degli elementi vivi lungo il cammino che segue lo stimolo, e che la trasmissione di esso *attraverso la parte non viva* può quindi consistere in un processo del tutto meccanico.

Tuttavia le dette esperienze di trasmissione degli stimoli attraverso porzioni di organi uccise mettono in rilievo un fatto di notevole importanza, che è stato già rilevato dallo stesso Haberlandt: e cioè che la esecuzione della reazione in tali condizioni subisce sempre un certo ritardo, tanto più notevole, quanto più i mezzi adoperati per uccidere la parte hanno influito ad alterarne la organizzazione istologica. Noi siamo riusciti, p. es., a trasmettere un impulso al cuscinetto principale di una foglia il cui picciuolo primario era stato previamente scorticato per un tratto di circa $^1/_2$ cm. nel suo punto mediano, ed il tessuto così messo a nudo era stato trattato per oltre 5 minuti con l'acqua bollente, cosicchè, dopo l'operazione, l'intera foglia si era ripiegata quasi ad angolo retto nella parte operata. La reazione, ossia il movimento del cuscinetto primario, ha avuto bensì luogo, ma *con un ritardo ed una lentezza* che non hanno riscontro nei casi normali.

Per questo fatto noi inclinìamo a considerare, come gli autori antichi, che le vie dove si compie il fenomeno meccanico della trasmissione nel tratto ucciso siano i vasi legnosi, come gli elementi che più e meglio di qualunque altro possono conservare la loro integrità istologica non ostante i più svariati trattamenti diretti ad escludere il concorso degli altri tessuti. Qualunque sia, del resto, il meccanismo fisico che si compie in questi vasi durante la trasmissione, non si può negare che nei casi normali la presenza integrale degli altri tessuti del fascio, in condizioni fisiologiche normali, contribuisce per qualche cosa al compimento del fenomeno di trasmissione, anche semplicemente a renderlo più pronto e rapido.

Epperò la trasmissione, che nel tratto ucciso si esplica fondamentalmente in un fenomeno fisico e più propriamente idrostatico, di cui sarebbero sede più adatta

i vasi legnosi, deve almeno *iniziarsi* in una parte dell'organo (ossia del fascio) perfettamente intatta dal punto di vista istologico e quindi anche biologico, come provano le stesse esperienze esposte a proposito della recezione degli stimoli. Anche dunque nella trasmissione ha una parte importantissima la vitalità dei tessuti, la quale è poi condizione indispensabile perchè detto fenomeno abbia il suo inizio.

Esecuzione dei movimenti. — Si considera ormai come completamente assodato che il meccanismo del movimento dei pulvini motori, non solo nelle Mimose, ma in tutte le altre piante che eseguono movimenti nictitropici, si esplichi nelle sue linee generali mediante variazioni della tensione dei tessuti di determinate regioni del parenchima pulvinare, in opposizione a quelle che si verificano contemporaneamente in altre parti, a causa o col semplice concorso di disposizioni morfologiche esterne, delle differenze istologiche dei tessuti stessi e delle disposizioni anatomiche dello intero organo. È certo infatti che le qualità fisico-chimiche delle membrane cellulari non sono identiche in tutte le regioni del cuscinetto; nella metà superiore di questo esse presentano una più spiccata permeabilità in confronto a quella delle cellule della metà inferiore, come ne fanno fede le reazioni al ferrocianuro potassico e solfato di ferro eseguite da Buscalioni e Muscatello. Queste particolarità citologiche sono certamente collegate con gli speciali processi che intervengono nella esecuzione dei movimenti, ossia l'uscita dell'acqua dalle cellule della metà superiore del cuscinetto e l'afflusso di essa in quella inferiore.

In quanto poi alla forma particolare del movimento, non occorre insistere più che tanto sulle disposizioni anatomiche che la rendono materialmente possibile (quali la forma schiacciata del plesso vascolare del cuscinetto, che è disposto con l'asse maggiore perpendicolare alla direzione del movimento, la presenza di rughe trasversali ecc.): ai quali caratteri si aggiunge, naturalmente, anche il peso stesso della lamina e dei picciuoli.

Nondimeno, il fenomeno della esecuzione del movimento resta sempre in dipendenza dagli altri fattori che provocano le variazioni di tensione interna, e più precisamente dal fenomeno di trasmissione degli stimoli; e vanno anche ripetute a questo proposito le stesse conclusioni esposte a proposito di quest'ultimo fenomeno.

Le esposte osservazioni, mentre confermano che i mezzi strumentali della trasmissione degli stimoli e della esecuzione dei movimenti riposano su cause fisico-meccaniche, obbligano altresì ad ammettere il concorso del protoplasma vivente per ciò che riguarda la trasformazione degli stimoli in corrente di azione idrostatica, ossia per ciò che riguarda la *recezione* di essi.

Ci resta ora da esaminare se tale concezione generale sia in armonia con i dati anatomici offerti dallo studio delle Mimose.

Tale studio, da noi esteso anche ad altre specie di Mimose immobili e ad altre Leguminose sensibili, come l'*Aeschynomene* e la *Neptunia*, conferma quanto già le esperienze fisiologiche dei numerosissimi autori hanno assodato, che cioè il fenomeno di recezione e di trasmissione non può essere una funzione di elementi esclusivamente meccanici. E prima fra tutte l'ipotesi dell'Haberlandt cade di fronte ai fatti che ci rivela l'anatomia comparata delle Mimose. Infatti gli elementi otricolari in-

dicati dall' Haberlandt *non si trovano* alle estremità delle fogliette, dove tuttavia una brevissima intaccatura può costituire uno stimolo capace di essere trasmesso. Essi inoltre *mancano nelle radici*, che pure ricevono e trasmettono gli stimoli; *mancano nei cotiledoni*, anch'essi mobili sotto lievissime eccitazioni, e *mancano* nella *Neptunia* e nell'*Aeschynomene*, per non citare, fra le piante dotate di movimenti, se non due Leguminose molto affini alle Mimose. Viceversa essi esistono molto ben conformati nella *Mimosa sensitiva*, che è una specie pochissimo mobile, e meglio ancora nella *M. dystachya* e nella *M. Lyndheimeri*, che sono totalmente destituite di movimenti. Infine i detti elementi non sono adatti a percepire una eccitazione, cioè non possono da soli provocare l'inizio del fenomeno di senso, massime quando si tratta di stimoli di natura chimica, applicati per via aerea (vapori venefici o narcotici), perchè ciò non può che essere una funzione di elementi dotati di protoplasma attivo.

Per le stesse ragioni siamo costretti a rifiutare ogni altra ipotesi che attribuisce esclusivamente ai vasi legnosi la facoltà di ricevere e trasmettere gli stimoli.

Ma nel fascio vascolare delle Mimose, accanto ai vasi legnosi e floematici e alle cellule dell' Haberlandt, esiste altresì un tessuto vivo, che è il parenchima fascicolare accompagnante libro e legno. Epperò abbiamo creduto di rivolgere la massima attenzione a quosto tessuto, sembrandoci che, in armonia con i risultati delle osservazioni fisiologiche, la vitalità di questo tessuto dovesse avere indiscutibili rapporti col compimento dei fenomeni di senso in generale. Tale tessuto è stato bensì ricordato dal Meyen a proposito degli elementi trasmettitori degli stimoli, mentre l' Haberlandt non vi dedica che fugacissimi accenni; inoltre Fitting, e gli altri autori che hanno considerato il fenomeno di trasmissione come una funzione delle cellule parenchimatiche del fascio, non hanno dato su di esso alcuna notizia precisa. Eppure la sua importanza risalta evidentissima, per ciò che riguarda le accennate relazioni coi fenomeni di senso, soprattutto se se ne considerano i caratteri istologici e citologici, nonchè la distribuzione e i rapporti che esso ha col parenchima motore propriamente detto dei cuscinetti. Si tratta infatti di un tessuto a cellule strette ed allungate nella direzione dell'asse degli organi, con membrane sottilissime, ricche di protoplasma, caratteristiche sopratutto per la vistosità dei loro nuclei, che sono anch'essi stretti ed allungati secondo la maggiore direzione delle cellule (fig. 1). Nei nervi delle fogliette queste cellule costituiscono la massa preponderante della parte floematica, insieme con gli elementi dell' Haberlandt che circondano intimamente da tutti i lati (tav. fig 1).

Non esistono d'altronde in tali organi tubi cribrosi tipicamente costituiti. Tra la regione floematica ed il legno costituiscono una sorta di cambio (cellule cambiformi) ed infine si trovano sviluppatissime nella stessa parte legnosa, intercalandosi tra i vasi stessi (figg. 1, 2, 3 della tavola). Le medesime cellule a grossi nuclei, cogli stessi caratteri, si rinvengono alle estremità delle nervature come nelle più sottili ramificazioni di queste (figg. 2 e 4-5 della tavola), mentre spiccano distintamente coi loro nuclei nelle sezioni trasversali dei picciuoli primarî e secondarî (fig. 3 e 6 della tavola), e costituiscono infine una fascia unica continua all'esterno del cordone fascicolare dei cuscinetti, fondendosi, per i loro caratteri, intimamente col collenchima periferico che cinge tale cordone (tav., fig. 7). Infine, anche i fasci

dei fusti (tav., fig. 8) e delle radici sono provvisti abbondantemente di questi ele-

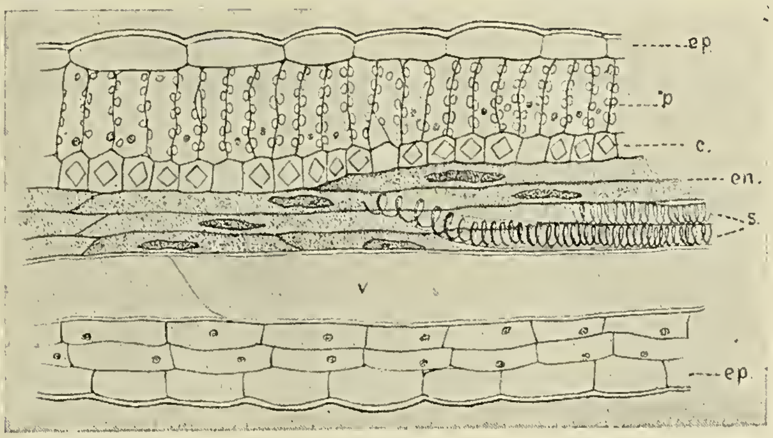


Fig. 1. — Sezione longitudinale del nervo mediano di una foglietta di *Mimosa Spegazzini*; *ep*, epidermide, *p*, palizzata, *c*, guaina cristallifera, *s*, vasi, *v*, cellule otricolari dell'Haberlandt, *en*, cellule nucleate (un po' schematizzata).

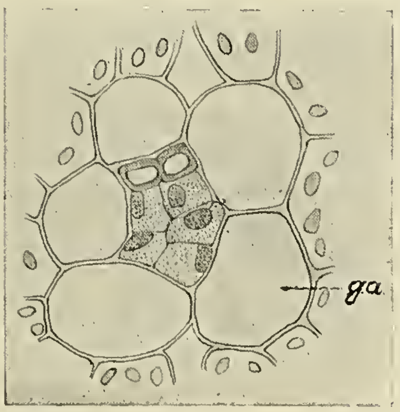


Fig. 2. — Sezione trasversale di un ramuscolo vascolare della foglietta di *Neptunia natans* con due trachee e un gruppo di cellule nucleate; *g. a*, guaina acquifera.

Fig. 3. — Porzione di una sezione trasversale del picciuolo primario di *Neptunia natans*, nella regione floematica; *c*, tubi cribrosi, *p*, parenchina, *en*, cellule nucleate.

menti attivi; e nelle esili nervature dei cotiledoni costituiscono, insieme con poche trachee, l'intero plesso istologico.

In questo tessuto, eminentemente vitale, che si trova dunque in tutti gli organi capaci di ricevere e di trasmettere gli stimoli e in quelli che eseguono la reazione, s'inizia, secondo noi, il processo sensorio, ossia ha luogo quel particolare fenomeno di trasformazione degli stimoli che in ultimo si traduce in un fenomeno idrodinamico, mettendo capo alle variazioni di tensione dei varî ordini di cuscinetti. Durante il percorso la corrente di azione si moltiplica e si intensifica perchè lungo di esso gli elementi, che sono sede del fenomeno iniziale, aumentano sempre più di numero; e ciò spiega la velocità gradatamente crescente colla quale i singoli membri di una foglia rispondono allo stimolo iniziale: ed essa evidentemente dovrà rallentarsi se in qualche punto del percorso si trova una zona in cui siffatti elementi più non sono in condizione di partecipare al fenomeno. Allora la corrente di azione può prendere la via dei vasi legnosi, coi quali le dette cellule vive sono in diretto contatto; ma la perturbazione idrostatica, in essi destatasi, torna a trasmettersi alle cellule vive della zona successiva, agendo quasi come un nuovo stimolo. Infatti, nelle esperienze esposte a proposito della recezione degli stimoli, abbiamo sempre verificato che i monconi dei piccinoli rimasti attaccati alla pianta sono per sè stessi eccitabili e si abbassano sui loro cuscinetti, sempre che, naturalmente, vengano eccitati con uno stimolo di intensità tale che arrivi ad influire sulle cellule vive del fascio (p. es. toccandoli con un ago rovente). La perturbazione idrostatica delle cellule vive si trasmette infine immediatamente al parenchima del cuscinetto motore, col quale comunicano attraverso il collenchima; ma quand'anche siffatta perturbazione idrostatica arrivasse al cuscinetto per le vie del legno, è necessario, per le rilevate disposizioni topografiche dei varî tessuti, che essa si trasmetta attraverso il tessuto dotato di protoplasma che, come s'è detto, separa il cordone dei fasci dal parenchima motore.

Possiamo quindi concludere che i famosi esperimenti di uccisione di una parte degli organi, attraverso cui nondimeno si trasmettono le eccitazioni, non escludono la funzione dei tessuti vitali nei fenomeni di trasmissione in particolare e tanto meno in quelli, più generali, della recezione degli stimoli; anzi, per le circostanze rilevate, confermano che vi hanno una parte attiva importantissima. Epperò il considerare i tessuti vivi dei fasci come essenzialmente deputati alla esecuzione dei fenomeni di senso non urta contro alcuno dei dati di fatto sperimentali fin qui accertati, riguardanti il meccanismo fisiologico delle varie fasi onde essi si svolgono, ma spiega invece molti particolari dei fenomeni stessi sui quali la fisiologia moderna ha dovuto fin'ora tacere. Tali sono, ad es., le reazioni provocate dagli stimoli chimici, come sostanze eteree o venefiche, l'azione degli stricnici (Borzì), gli esperimenti di anestesia, e molti altri fatti di carattere prettamente vitale, ripetutamente verificati nelle Mimose, quali l'*abitudine* (Desfontaines, Link), la *stanchezza* (De Candolle), la *periodicità* dei fenomeni di senso, ecc.

Resta tuttavia alla fisiologia moderna il cómpito di investigare le leggi fisicochimiche che regolano le modificazioni che subisce il protoplasma, tutte le volte che esso entra in azione nel compimento dei fenomeni di senso, alla parte nella quale è impegnato.

BIBLIOGRAFIA

Bellardi C. L., *Sensitivae motus*: dissertazione fatta nel R. Ateneo delle scienze in *Augustae Taurinorum* il 29 dicembre 1764. *Excudebat Jac. Joseph Avondus, archiepisc. ac illustris civitatis impressor.*

Borzì A., *L'apparato di moto delle Sensitive.* Rivista di scienze biologiche, Milano, anno I, 1899.

Buscalioni e Muscatello, *Sopra un nuovo processo di tecnica istologica* ecc. Malpighia. vol. XXIV, pag. 289.

Comparetti A., *Nouvelles recherches sur la structure organique rélativament à la cause des mouvements de la Sénsitive commune,* nelle Mem. de l'Ac. des sc.; Turin, 1793, pag. 209-244.

De Candolle, *Physiologie végétale,* Paris 1832.

Dutrochet, *Mémoires pour servir à l'histoire anatomique et physiologique des végétaux et des animaux,* Bruxelles 1837.

Fitting H., *Weitere Untersuchungen zur Physiologie der Ranken, nebst einigen neuen Versuchen über d. Reizleitung bei Mimosa,* Jahrb. f. wiss. Botanik, Bd XXXIX, Heft 3, a. 1903 ; idem, *Die Reizleitungvorgänge bei den Pflanzen* (I, Teil, *Das Vorkommen von Reizleitungvorgängen bei den Pflanzen und die Methoden zu ihrem Nachweise*; u. II, Teil, *Der Ablauf der Rezleitungvorgänge*), Asker's u. Spiro's Ergebn. d. Physiol., Wiesbaden, 1905, Jahr. IV, e 1906, Jahr. V; idem, *Die Leitung tropistischer Reize in parallelotropen Pflanzenteilen,* Pringsheim's Jahrb. f. w. Botanik, Bd. XLIV, an. 1907.

Haberlandt G., *Das Reizleitende Gewebesysthem des Sinnpflanze,* Leipzig 1890; idem, *Physiologische Pflanzenanatomie,* Leipzig 1896, II Aufl.; idem, *Ueber die Reizbewegungen und die Reizfortpflanzung bei « Biophytum sensitivum »,* Annales du Jardin Bot. de Buitenzorg, suppl. II, pag. 33, a. 1898; id., *Sinnesorgane im Pflanzenreich zur perception mechanischer Reize,* Leipzig, a. 1901; id., *Ueber Reizleitung im Pflanzenreich,* Biol. Centralblatt, Bd. XXI, 1901, pag. 369; id., *Ueber die Fühlhaare von Mimosa und Biophytum,* Flora, Bd. 99, Heft 3, a. 1909.

Lamark, *Dyct. encyclopedique de botanique,* vol. I, pag. 17 seg.

Link D. H. F., *Grundlehren der Anatomie und Physiologie der Pflanzen,* Göttingen, a. 1807.

Linsbauer K., *Zur Kenntnis der Reizleitungsbahnen bei Mimosa pudica,* Berichte der deutschen Bot. Gesell., Bd. XXXII, Heft, 9, a. 1914.

Mac Dougal, *The mechanism of movement and trasmission of impulses in Mimosa and other sensitive plants,* Botanical Gazette, vol. XXII, n. 4, a. 1896; id., *Trasmission of impulses in Biophytum,* Bot. Centralblatt, Bd. LXXVII, n. 9, a. 1899.

Meyen, *Neues System der Pflanzenphysiologie,* 1839, Bd., pag. 516 e segg.

Montemartini L., *Sulla trasmissione degli stimoli nelle foglie e in modo particolare nelle foglie delle Leguminose,* negli Atti dell'Ist. Bot. dell'Univ. di Pavia, serie II, vol. XIII, a. 1907.

Hofmeister, *Die Lehre von der Pflanzenzelle,* Leipzig 1867.

Oliver F. W., *Ueber Fortleitung des Reizes bei reizbaren Narben.* Ber. d. deut. bot. Gesellschaft, a. 1887, pag. 162.

Pfeffer, *Phsiologische Untersuchungen,* Leipzig 1873; id., *Zur Kenntnis der Contactreize,* Untersuchungen aus dem Bot. Inst. zu Tübingen, I Bd., pag. 527; id., *Ueber Fortpflanzung des Reizes bei « Mimosa pudica »,* Pringsheim's Jahrbücher f. wiss. Botanik, Bd. IX, 1873, pag. 308.

Sachs, *Experimentalphysiologie der Pflanzen,* Leipzig 1865.

Schwendener S., *Die Gelenkpolster der Mimosa,* Sitzb. d. Berl. Akademie, a. 1897.

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA

Fig. 1. — Sezione trasversale del nervo principale di una foglietta di *Mimosa Spegazzini*. Ingrandimento 1/289.

Fig. 2. — Sezione longitudinale del medesimo. Ingr. 1/333.

Fig. 3. — Sezione longitudinale del nervo principale di una foglietta di *Mimosa pudica*. Ingrandimento 1/333.

Fig. 4. — Sezione tangenziale di una foglietta di *Mimosa Spegazzini*, con porzione del nervo principale (a sinistra). Ingr. 1/246.

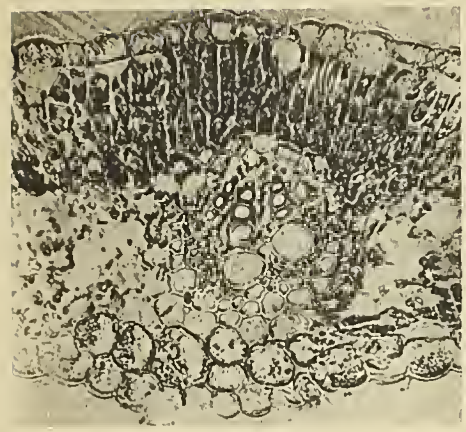
Fig. 5. — Sezione tangenziale di una foglietta di *Neptunia oleracea* nella regione del nervo mediano. Ingr. 1/262.

Fig. 6. — Porzione di una sezione trasversale di una rachide secondaria di *Mimosa Spegazzini*. Ingr. 1/288.

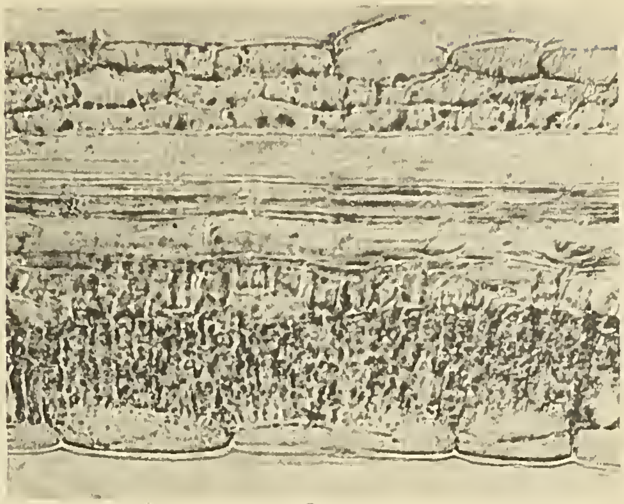
Fig. 7. — Porzione di una sezione trasversale del cuscinetto primario di *Mimosa pudica*. Ingrandimento 1/292.

Fig. 8. — Porzione di una sezione trasversale del fusto di *Mimosa pudica*. Ingr. 1/270.

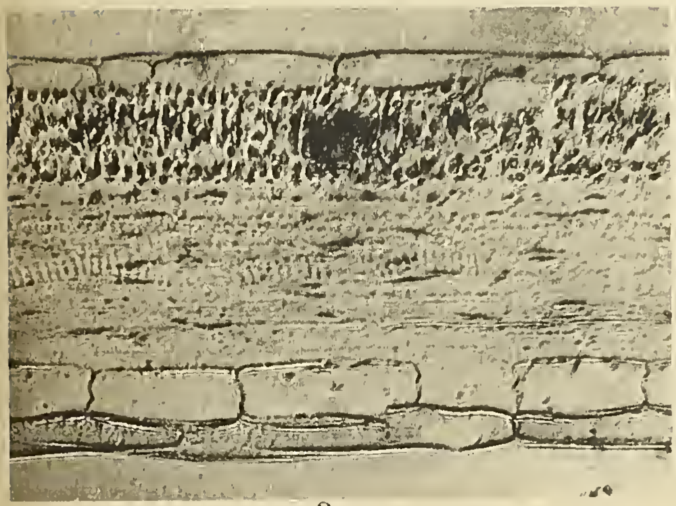
BORZÌ e CATALANO. — La dottrina dei moti ecc.



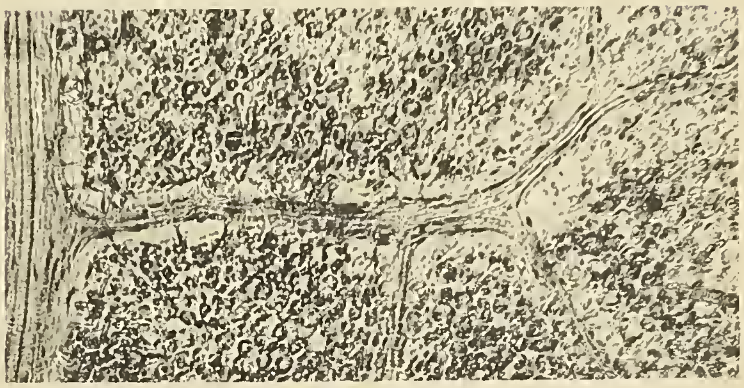
1



2

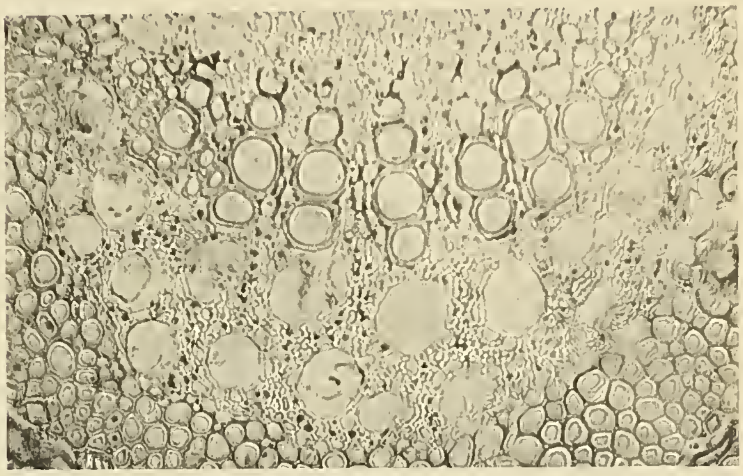


3

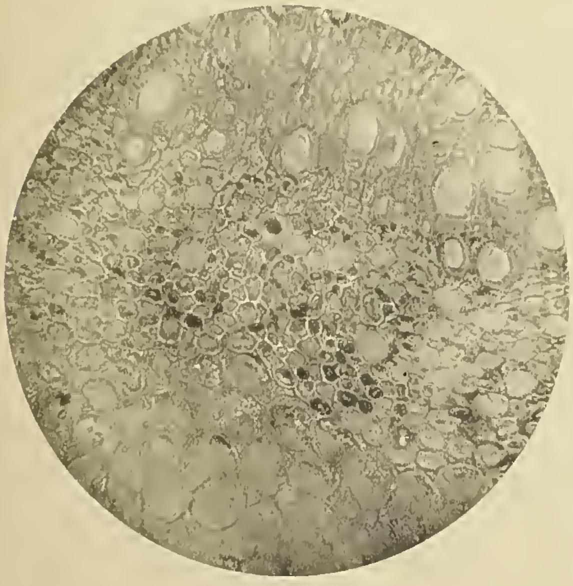


4

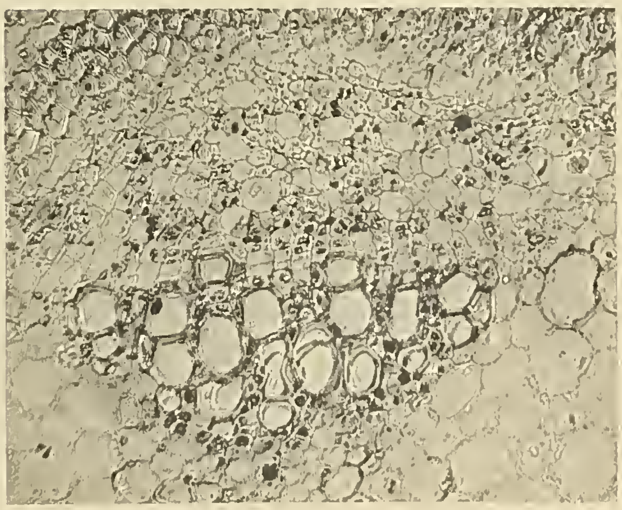
5



6



7



8

ISTITUTO MICROGRAFICO ITALIANO - FIRENZE

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76) Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI. Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche* Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XXIV. (1892-1915) Fasc. 12°. Sem. 1°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XXIII. (1892-1914).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XI. Fasc. 2.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XII.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia è di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*

ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

MEMORIE DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

(ANNO CCCXIII 1916)

SERIE QUINTA — VOLUME XI — FASCICOLO 4.

VITO VOLTERRA

TEORIA DELLE POTENZE DEI LOGARITMI

E

DELLE FUNZIONI DI COMPOSIZIONE

Smithsonian Institution
SEP 25 1924

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1916

Teoria delle potenze, dei logaritmi e delle funzioni di composizione.

Memoria del Socio VITO VOLTERRA

INTRODUZIONE.

Nella mia Nota del 1910: *Questioni generali sulle equazioni integrali ed integro-differenziali* (¹), ho introdotto il concetto di *composizione* e di *permutabilità* delle funzioni, ed ho stabilito le basi della teoria, che ho poi continuato in successivi lavori e riassunta nelle lezioni tenute alla Sorbona nel 1912 (²). La composizione e la permutabilità possono essere di *1ª* e di *2ª specie*; ma, poichè nella presente Memoria mi occupo solo della composizione e della permutabilità di 1ª specie, così mi riferisco ad esse soltanto.

Varii altri autori hanno in seguito portato notevoli contributi a queste ricerche, e fra essi citerò i professori Evans e Pérès, i quali hanno compiuto in questo campo lavori sistematici. Il primo ha svolto specialmente l'*algebra delle funzioni permutabili*, ed il secondo ha approfondito lo studio delle *funzioni permutabili analitiche*.

Tuttavia è manifesto che la teoria generale dei gruppi di funzioni permutabili è ben lungi dall'essere completa, e che sono necessarî nuovi sviluppi in varii sensi per compierla. Scopo dell'attuale scritto è di dare l'indirizzo di uno di tali sviluppi.

Perciò, dopo aver ricordato nel 1° capitolo alcuni resultati sulle *potenze intere di composizione* ed averne esposti altri sui *gruppi di funzioni permutabili*, nel capitolo successivo procedo a svolgere in maniera sistematica la *teoria generale* delle *potenze fratte ed incommensurabili di composizione*, delle *funzioni di ordine fratto ed incommensurabile* e delle *loro operazioni*. È questo il primo passo che conviene far seguire allo studio delle potenze intere, per iniziare le ricerche contenute in questa Memoria. In tal modo vengo ad estendere il campo delle equazioni integrali a cui sono applicabili i risultati esposti nel cap. XI delle mie citate lezioni. Debbo osservare che nella mia Nota del 1910: *Sopra le funzioni permutabili* (³), avevo già mostrato come potesse ottenersi, mediante una funzione che diviene infinita, la potenza $\frac{1}{2}$ di una funzione del 1° ordine. Questo resultato, sebbene costituisse nel

(¹) Rendiconti della R. Accademia dei Lincei. Seduta del 20 febbraio 1910.

(²) *Leçons sur les fonctions de lignes*, professées à la Sorbonne. Paris, Gauthier-Villars, 1913.

(³) § 4, n. 17. Rendiconti della R. Accademia dei Lincei. Seduta del 17 aprile 1910.

suddetto lavoro un esempio isolato, conteneva in germe il procedimento da seguire per lo studio generale delle potenze fratte di composizione.

La composizione di due funzioni f e φ consiste nella operazione

$$\int_x^y f(x,\xi)\,\varphi(\xi,y)d\xi\,,$$

ed essa è simile, sotto molti aspetti, alla ordinaria moltiplicazione, come è diffusamente mostrato nei miei precedenti lavori. La operazione inversa, quella cioè di ricavare una delle due funzioni componenti, quando si conosca l'altra e la resultante, cioè la funzione che nasce dalla precedente integrazione, è analoga alla divisione.

Di qui scaturisce il concetto di *frazione di composizione* e, quindi, di *potenze negative di composizione*. Già avevo accennato, per la prima volta, all'idea di frazioni di composizione nelle mie lezioni del 1912 alla Università di Princeton N. J. ([1]). In esse avevo dato, per esempio, la regola per sommare più frazioni di composizione mediante la loro riduzione allo stesso denominatore. Ma uno svolgimento sistematico di questo argomento si trova nel cap. III della presente Memoria, ove il concetto stesso viene sviluppato coordinandolo alla teoria generale delle potenze di composizione.

Nel corso di questa trattazione ho potuto colmare una notevole lacuna con la introduzione della potenza di composizione di esponente zero. È ben vero che io stesso con una speciale definizione e, più tardi, il prof. Evans con una opportuna scelta di unità, avevamo cercato sopperire alla mancata introduzione della potenza nulla; ma, non vi ha dubbio, che la considerazione esplicita di questa potenza, introdotta per la prima volta nella presente Memoria, rende molto più semplici le formule e più spedito ed uniforme tutto il calcolo sulle funzioni permutabili. Le potenze negative e nulle e le frazioni di composizione costituiscono il secondo passo, dopo quello delle potenze fratte ed incommensurabili, lungo la via da percorrere per stabilire una teoria uniforme delle potenze nel campo della composizione.

Gli ultimi elementi introdotti sono effettivamente delle espressioni formali; tuttavia ho molto insistito in questo capitolo sulla assenza completa di formalismo in tutti i resultati raggiunti nel presente scritto, giacchè ho mostrato che quelle formule che possono sembrare formali perdono subito questo loro apparente carattere mediante la loro composizione con una opportuna funzione.

Ho dato nello stesso cap. III, come esempio suggerito da questo speciale punto di vista, una trattazione della teoria dei limiti nel campo delle funzioni permutabili. Osservo, però, che si tratta solo di una preliminare trattazione di questo argomento, giacchè esso avrebbe meritato un più largo e completo sviluppo. Ma un tale svolgimento mi avrebbe condotto molto lontano dal principale scopo che avevo dinanzi.

Il quale viene ripreso nel capitolo successivo, ove incomincio lo studio dei *logaritmi di composizione*. Siccome dalle considerazioni precedenti discende l'esistenza di un sèguito indefinito di potenze di composizione di una funzione procedenti per

([1]) *The Theory of permutable Functions* by Vito Volterra, Lectures Dolivered at Princeton University, October 1912.

esponenti che vanno da $-\infty$ a $+\infty$, così questi esponenti possono riguardarsi come i logaritmi di composizione, quando si prenda come base la funzione stessa. Tale idea si presenta naturalmente e non offre difficoltà, allorchè si è in possesso dei precedenti risultati; ma essa è ben lungi dall'esaurire la questione e dal mostrare la portata della teoria. Invece la costituzione completa di questa è cosa molto più difficile. Ho dovuto introdurre nel campo della composizione un concetto analogo al fecondo concetto, escogitato 300 anni fa da Nepero, della base dei logaritmi naturali, ed ho dovuto in seguito definire le potenze di composizione aventi per esponenti le funzioni appartenenti al gruppo per potere, senza ostacoli, estendere i limiti della teoria ed allargare il campo di ricerche a cui guida l'idea dei logaritmi di composizione. Ciò vien fatto nel cap. V nel quale giungo ad ottenere il logaritmo di composizione di una funzione prendendo per base un'altra funzione qualsiasi appartenente allo stesso gruppo di funzioni permutabili.

Quest'ultima questione conduce a nuovi problemi sulle equazioni integrali di 1ª specie del mio tipo il cui nucleo contiene dei termini logaritmici. Ho dedicato il cap. VI alla risoluzione di questi problemi. Le soluzioni ottenute, che spero potranno offrire interesse anche indipendentemente dall'oggetto di questa Memoria, sono un complemento necessario alle ricerche, fatte nel cap. V, sulla teoria dei logaritmi di composizione.

La parte più generale dei presenti studii è costituita dal successivo cap. VII il quale tratta della *derivazione* e della *integrazione di composizione* e delle *funzioni di composizione*. È facile il mostrare che, per giungere a queste operazioni ed a questi enti, si può seguire una via che muova dal concetto dei logaritmi di composizione. Infatti, nella ordinaria analisi si passa dalle funzioni razionali alle logaritmiche mediante la integrazione del differenziale razionale $\frac{dx}{x}$. Esiste una operazione analoga che possa portarci dalle potenze razionali di composizione ai logaritmi di composizione? Una volta posta questa questione, si è condotti ad immaginare il calcolo differenziale ed integrale di composizione, e per far ciò, conviene operare sulle funzioni di composizione, delle quali bisogna stabilire il concetto generale e definire le proprietà. Tutto questo rende necessario risalire ai principii generali della teoria delle funzioni di linee, ai quali i precedenti elementi sono intimamente connessi. Si comprende quindi che si è così guidati da un campo più ristretto ad un altro più vasto e più generale di ricerche.

A questo punto mi permetto osservare che già un primo cenno delle funzioni di composizione e del loro legame colle funzioni di linee si trova in una delle mie prime Memorie del 1896 sulle equazioni integrali [1]. La funzione particolare ivi considerata corrispondeva ad uno dei casi più semplici, cioè ad una *funzione di composizione lineare fratta*, ed essa compariva nel suo sviluppo in serie; ma l'essenziale, per lo spirito delle presenti ricerche, sta nell'averla allora riguardata alla luce delle idee, già da me, in precedenza [2] esposte, sulle *funzioni dipendenti da altre fun-*

[1] *Sulla inversione degli integrali definiti*, § 3. Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, seduta del 15 marzo 1896.

[2] Nel 1887.

zioni (funzioni di linee). D'altra parte, nelle mie citate lezioni della Sorbona sono considerate spesso particolari funzioni di composizione, senza designarle con una speciale denominazione [1].

Una completa teoria delle funzioni di composizione esige però un lungo sviluppo, e conviene dapprima procedere ad una loro definizione generale. Ciò si raggiunge, come è indicato nella presente Memoria, mediante due condizioni fondamentali, una delle quali rivela che la teoria stessa deve svolgersi, sotto un certo riguardo, parallelamente a quella delle funzioni di variabili complesse. Ed infatti la condizione stessa compie un ufficio analogo a quello della condizione di monogeneità. D'altra parte, fra i teoremi fondamentali se ne presenta fin da principio uno che, in questo campo, ha una portata analoga al teorema di Cauchy.

La parte trattata di questa teoria, insieme con lo studio delle operazioni di derivazione e d'integrazione di composizione, è limitata nella presente Memoria ai punti fondamentali e a quanto è necessario per le applicazioni che se ne fanno nel capitolo successivo. Ma io mi auguro che essa possa preludere ad un lavoro sistematico sull'argomento, in cui sarà sviluppato il *calcolo infinitesimale delle funzioni permutabili*, come ne è già stata svolta l'algebra.

Le applicazioni che vengono fatte nell'VIII ed ultimo capitolo si riferiscono al calcolo effettivo dei logaritmi di composizione mediante operazioni di quadratura ordinaria. In questo capitolo è stabilita la convergenza di un integrale che permette il detto calcolo. Essa è fondata sullo studio di una serie che spero possa presentare interesse. Infine dò il modo di ottenere in generale la potenza di composizione di una funzione espressa mediante una serie di potenze dell'esponente.

In queste pagine dunque, movendo dalle potenze intere di composizione, si passa alle potenze fratte e negative, quindi ai logaritmi di composizione, d'onde si risale alle funzioni generali di composizione ed al loro calcolo differenziale ed integrale. Il processo logico che mi ha guidato può riassumersi dicendo che esso riproduce in iscorcio l'evoluzione dei concetti fondamentali che hanno condotto dall'ordinaria analisi finita a quella dell'infinito.

(1) Cap. IX.

Ariccia, novembre 1914.

CAPO I.

Composizione - Permutabilità - Potenze intere di composizione - Gruppo del ciclo chiuso.

1. Composizione di due funzioni integrabili $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$ è l'operazione

$$\int_x^y f(x, \xi)\, \varphi(\xi, y)\, d\xi .$$

Supporremo sempre di essere nel campo delle variabili reali e supporremo $y > x$ Se il resultato si chiama $\psi(x, y)$, si scrive

$$\psi = \overset{*}{f}\overset{*}{\varphi} .$$

Se f e φ sono eguali, si scrive

$$\overset{*}{f}{}^2 = \overset{*}{f}\overset{*}{f}$$

$$\overset{*}{f}{}^3 = \overset{*}{f}{}^2\overset{*}{f} = \overset{*}{f}\overset{*}{f}{}^2$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

In generale m ed n essendo interi

$$\overset{*}{f}{}^{m+n} = \overset{*}{f}{}^m \overset{*}{f}{}^n .$$

$\overset{*}{f}{}^m$ si chiama la *potenza intera di composizione di grado* m.

2. Se $a, b, c, ..$ sono costanti

$$af ,\ b\varphi ,\ c\psi ,\ ...$$

sono i prodotti delle costanti per le funzioni $f, \varphi, \psi, ...$ e

$$(a\overset{*}{f})\,(b\overset{*}{\varphi})\,(c\overset{*}{\psi}) ... = abc ... \overset{*}{f}\overset{*}{\varphi}\overset{*}{\psi} ...$$

3. La composizione gode della *proprietà associativa.* Se le funzioni sono permutabili gode anche della *proprietà commutativa.* La composizione gode della *proprietà distributiva* (¹).

4. Se si ha la serie

$$a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots$$

(¹) Vedi V. Volterra, *Leçons sur les fonctions de lignes.* Paris, Gauthier-Villars, 1913, Chap. IX, §§ 1-5.

convergente per $|z| < R$, la serie

$$a_1 f + a_2 \overset{*}{f}{}^2 + a_3 \overset{*}{f}{}^3 + \cdots$$

è uniformemente convergente comunque sia il modulo della funzione f, purchè questa funzione sia finita, e la sua somma è permutabile con f. Il teorema si estende al caso di serie di potenze di più variabili (¹).

5 Supponiamo m intero

$$\psi(x, y) = (y - x)^m f(x, y),$$

ove $f(x, y)$ è finita e continua, e

$$f(x, x) \gtrless 0$$

si dice di *ordine* $m + 1$.

La resultante di due funzioni di ordini m *ed* n *è di ordine* $m + n$, *e la potenza di composizione di grado* m *di una funzione di ordine* n *è di ordine* mn.

6. Conoscendo una funzione φ di ordine 1 permutabile con ψ di ordine m, potremo calcolare una funzione θ di ordine 1, la cui potenza di composizione m è eguale a ψ ammesso che f e φ siano derivabili m volte e le derivate siano finite. Scriveremo

$$\theta = \overset{*}{\psi}{}^{\frac{1}{m}} \quad (^2).$$

7. Siano $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ due funzioni finite e continue che non si annullano. Poniamo

$$\frac{dx}{\alpha(x)\,\beta(x)} = dx_1,$$

da cui si ricavi

$$x_1 = \lambda(x) \quad , \quad x = \mu(x_1).$$

Formiamo quindi la funzione

$$\alpha(x)\,\beta(y)\,f(x, y),$$

ed in essa sostituiamo ad x e y respettivamente $\mu(x_1)$ e $\mu(y_1)$ ottenendo

$$f_1(x_1, y_1) = \alpha(x)\,\beta(y)\,f(x, y).$$

Se in $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ e $\dfrac{1}{\beta(x)}$ sostituiamo $\mu(x_1)$ ad x. ottengansi respettivamente $\alpha_1(x_1)$ e $\beta_1(x_1)$. Avremo

$$\frac{dx_1}{\alpha_1(x_1)\,\beta_1(x_1)} = dx$$

$$f(x, y) = \alpha_1(x_1)\,\beta_1(y_1)\,f_1(x_1, y_1).$$

(¹) Vedi V. Volterra, *Leçons sur les fonctions de lignes*. Paris, Gauthier-Villars, 1913, Chap. IX, § 10.

(²) Ibid., Chap. XI, § 8.

Supponiamo ora che la stessa trasformazione applicata a $f(x, y)$ si applichi a $\varphi(x, y)$ ricavandone $\varphi_1(x_1, y_1)$ e che $\xi = \mu(\xi_1)$. Avremo

$$\alpha(x)\,\beta(y)\int_x^y f(x, \xi)\,\varphi(\xi, y)\,d\xi = \int_{x_1}^{y_1} \alpha(x)\,\beta(y)\,f(x, \xi)\,\varphi(\xi, y)\,\alpha(\xi)\,\beta(\xi)\,d\xi_1$$

$$= \int_{x_1}^{y_1} f_1(x_1, \xi_1)\,\varphi_1(\xi_1, y_1)\,d\xi_1\,.$$

Ne segue che *la resultante di due trasformate è la trasformata della resultante*, e per conseguenza *una potenza di composizione di una trasformata è la trasformata della potenza di composizione della primitiva*, e finalmente che la *trasformazione indicata precedentemente non altera la permutabilità*, ossia *trasforma un gruppo di funzioni permutabili in un nuovo gruppo di funzioni permutabili.*

8. Data una funzione $F(x, y)$ di grado 1 si possono trovare tutte le funzioni permutabili con essa. A tal fine si può dapprima ricondurre la questione al caso in cui

$$F(x, x) = 1\,, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{x=y} = \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{x=y} = 0\,. \tag{1}$$

Infatti, se $\mathbf{F}(x, y)$ non soddisfacesse a queste condizioni, per mezzo di una trasformaziono del tipo di quelle considerate precedentemente, si potrebbe sempre ridurla a verificare le condizioni stesse scegliendo convenientemente $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ [1]. Diremo che una funzione F che soddisfa le (1) è ridotta *alla forma canonica.* La soluzione viene poi data (supponendo f e le sue derivate di 1° e di 2° ordine finite e continue) mediante la formula

$$\lambda(y - x) + \int_0^{y-x} \lambda(\xi)\,\Phi(\xi \mid x, y)\,d\xi\,. \tag{2}$$

ove λ è una funzione arbitraria e Φ si calcola dalla F e dalle sue derivate prime e seconde [2].

Prendendo λ finita e continua la (2) ci fornisce una funzione finita e continua.

La funzione $\Phi(\xi \mid x, y)$ gode della proprietà

$$\Phi(y - x \mid x, y) = 0\,. \tag{3}$$

[1] Op. cit., Chap. XI, §§ 1, 2.

[2] La funzione $\Phi(\xi \mid x, y)$ si ottiene nel modo seguente. Si comincia dal calcolare la funzione

$$\Theta(\eta \mid x, y) = \sum_1^\infty {}_n \Psi_n(\eta \mid x, y)$$

della pag. 164 dell'opera citata: *Leçons sur les fonctions de lignes*, quindi si ha

$$\Phi(\xi \mid x, y) = \frac{\partial \Theta(\xi \mid x, y)}{\partial y} - f_2(x + \xi, y) - \int_{x+\xi}^{y} \frac{\partial \Theta(\xi \mid x, \eta)}{\partial \eta} f_2(\eta, y)\,d\eta\,,$$

ove $f_2(x, y)$ ha lo stesso significato che si è dato a questa funzione nella pag. 162 dell'op. citata.

9. Due funzioni finite permutabili con F sono permutabili fra loro [1]. Infatti, se F è una funzione analitica di x e y e λ pure, dalle (2) si ricava una funzione analitica di x, y. Ma le funzioni analitiche permutabili con una terza sono permutabili fra loro [2], quindi tutte le funzioni ricavate dalla (2) saranno permutabili fra loro quando λ sia analitica. Ora qualunque funzione finita e continua λ può ottenersi come limite di un polinomio il quale tende a λ in modo uniforme. Segue da ciò che, se si prendono le λ continue e finite, si trovano, applicando la formula (2). delle funzioni permutabili fra loro. Ne viene quindi che Φ deve soddisfare la condizione

$$(4) \qquad \Phi(\xi_1 | x, y - \xi_2) + \Phi(\xi_2 | \xi_1 + x, y) + \int_{x+\xi_1}^{y-\xi_2} \Phi(\xi_2 | \eta, y)\, \Phi(\xi_1 | x, \eta)\, d\eta$$

$$= \Phi(\xi_2 | x, y - \xi_1) + \Phi(\xi_1 | \xi_2 + x, y) + \int_{x+\xi_2}^{y-\xi_1} \Phi(\xi_1 | \eta, y)\, \Phi(\xi_2 | x, \eta)\, d\eta .$$

Se F è finita e continua senza essere analitica basta che possa ottenersi insieme alle sue derivate dei primi due ordini respettivamente come limite uniforme di un polinomio e delle sue derivate, perchè la corrispondente (4) debba esser verificata e per conseguenza la (2) ci fornisce delle funzioni che sono fra loro permutabili.

10. Dalle (2) e (3) segue, se $\psi(x, y)$ è permutabile con $F(x, y)$ e λ è derivabile,

$$\psi(x, y)_{x=y} = \text{cost} \quad . \quad \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_{x=y} = -\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)_{x=y} = \text{cost} .$$

11. Un gruppo di funzioni permutabili è individuato da una funzione di 1° ordine avente le derivate prime e seconde determinate e finite. Per conseguenza quando noi considereremo un gruppo di funzioni permutabili, noi *ammetteremo sempre che ci sia nota una funzione del 1° ordine appartenente al gruppo avente le derivate 1e e 2e determinate e finite.* Chiameremo questa funzione una *funzione fondamentale del gruppo*. Allorchè una funzione fondamentale del gruppo ha la forma canonica, il gruppo si dice *gruppo canonico*.

12. Un gruppo notevole di funzioni permutabili è il *gruppo del ciclo chiuso* [3] formato dalle funzioni della forma

$$f(y - x) .$$

L'unità appartiene al gruppo del ciclo chiuso e si riconosce immediatamente che

$$\overset{*}{1}{}^m = \frac{1}{(m-1)!}(y - x)^{m-1} .$$

[1] Questo teorema è stato dimostrato dal sig. Vessiot in modo diverso da quello che qui segue. Cfr. op. cit., Chap. XI, § 5.

[2] Questa proprietà resulta facilmente dai resultati ottenuti dal sig. Pérès per le funzioni permutabili analitiche.

[3] Cfr. op. cit., Chap. VII.

CAP. II.

Potenze fratte di composizione – Potenze incommensurabili – Ordine fratto ed incommensurabile delle funzioni di un gruppo.

1. Se φ è del primo ordine e ci proponiamo il problema di trovare f tale che

$$\overset{*}{f}{}^{n} = \varphi\,, \tag{1}$$

non si potrà ottenere nessuna soluzione finita. Però il problema potrà risolversi mediante funzioni che divengono infinite mantenendosi integrabili.

Perciò dimostriamo che se $\psi_1(x\,,y)$ è una funzione di primo ordine e

$$\theta(x\,,y) = \frac{\psi_1(x\,.\,y)}{(y-x)^{\frac{n-1}{n}}}$$

$\overset{*}{\theta}{}^{n}$ è di primo ordine.

Infatti avremo

$$\overset{*}{\theta}{}^{2} = \frac{\psi_2(x\,,y)}{(y-x)^{\frac{n-2}{n}}}\,,$$

ove

$$\psi_2(x\,,y) = \int_0^1 \frac{\psi_1(x\,,x+(y-x)\eta)\,\psi_1(x+(y-x)\eta\,,y)\,d\eta}{\eta^{\frac{n-1}{n}}(1-\eta)^{\frac{n-1}{n}}}\,,$$

per conseguenza ψ_2 è finita e continua al pari di ψ_1, e quindi è di 1° ordine. Analogamente si riconosce che

$$\overset{*}{\theta}{}^{3} = \frac{\psi_3(x\,,y)}{(y-x)^{\frac{n-3}{n}}}\,,$$

ove $\psi_3(x\,,y)$ è una funzione di 1° ordine, e così di seguito, onde

$$\overset{*}{\theta}{}^{n} = \psi_n(x\,,y)$$

è una funzione di 1° ordine.

Si vede facilmente che, se ψ_1 ammette le derivate finite e continue fino ad un certo ordine, lo stesso avviene per $\psi_2\,,\psi_3\,,\dots,\psi_n$.

2. Supponiamo che θ sia permutabile con φ, e φ e ψ ammettano le derivate prime finite e continue. In tal caso il calcolo di f che verifica la (1) si eseguisce facilmente.

Osserviamo dapprima che ψ_n deve essere permutabile con φ, giacchè

$$\overset{*}{\theta}{}^{n}\overset{*}{\varphi} = \overset{*}{\theta}{}^{n-1}\overset{*}{\varphi}\overset{*}{\theta} = \overset{*}{\theta}{}^{n-2}\overset{*}{\varphi}\overset{*}{\theta}{}^{2} = \cdots = \overset{*}{\varphi}\overset{*}{\theta}{}^{n}\,.$$

Ne segue che

$$\varphi(x, x) = C\psi_n(x, x),$$

essendo C una costante ([1]), quindi, poichè $\varphi(x, y)$ e $\psi_n(x, y)$ hanno le derivate prime finite e continue

$$\varphi(x, y) - C\psi_n(x, y),$$

per $x = y$ diviene infinitesimo dello stesso ordine o di ordine superiore a $y - x$.

Risolviamo ora l'equazione integrale

$$(2) \qquad \varphi(x, y) - C\psi_n(x, y) = \int_x^y C\psi_n(x, \xi)\, g(\xi, y)\, d\xi,$$

considerando g come incognita, il che è possibile, e la soluzione resulterà finita e continua. Ciò fatto avremo

$$(3) \qquad f(x, y) = \sqrt[n]{C}\left\{\theta + \frac{1}{n}\overset{*}{\theta}\overset{*}{g} + \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} - 1\right)}{1 \cdot 2}\overset{*}{\theta}\overset{*}{g^2} + \cdots\right\}.$$

Si vede immediatamente che resulterà

$$f(x, y) = \frac{G(x, y)}{(y - x)^{\frac{n-1}{n}}},$$

con $G(x, y)$ del 1° ordine e tale che $G(x, x) = \dfrac{\sqrt[n]{\varphi(x, x)}}{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}$. Poichè $\sqrt[n]{C}$ ha n valori, noi possiamo in questo modo ottenere n soluzioni.

3. Supponiamo che φ sia ridotta alla forma canonica F (Cap. prec. § 8), allora potremo ricavare θ dalla (2) del Cap. I, prendendo

$$(4) \qquad \lambda = \eta^{\frac{1}{n} - 1}.$$

Avremo infatti

$$(5) \qquad \theta = \frac{1 + (y - x)\int_0^1 u^{\frac{1}{n} - 1}\,\Phi((y - x)\,u \,|\, x, y)\, du}{(y - x)^{\frac{n-1}{n}}},$$

in cui il numeratore è di 1° ordine. Esso sarà derivabile se lo sarà Φ, e quindi avrà le derivate determinate e finite se F avrà tali le derivate terze. In questo caso sarà $C = \Gamma^{-n}\left(\frac{1}{n}\right)$.

Se prendiamo invece della (4)

$$\lambda = \eta^{\frac{1}{n} - 1}\mu(\eta),$$

([1]) Op. cit., Chap. XI, § 3.

ove $\mu(\eta)$ è una funzione analitica che non si annulla per $\eta = 0$, otterremo un'altra espressione per θ di cui ci si può pure valere nelle formule (5) e (3); e così pure si può in altri infiniti modi cambiare λ. Ci si può chiedere se si giunge sempre alle stesse soluzioni date dalla (3), o se possono ottenersene delle nuove.

Noi osserveremo per ora che tutte le soluzioni che così si ottengono sono, in virtù della relazione (4) del Cap. I, permutabili fra loro.

4. Le formule, che abbiamo date, ci conducono necessariamente ad estendere la nozione di ordine (vedi Cap. I, § 5).

Se $\varphi(x, y)$ è di primo ordine e

$$f(x, y) = (y - x)^{\alpha} \varphi(x, y),$$

f si dirà di *ordine determinato* $\alpha + 1$. Le funzioni θ e f dei §§ precedenti di questo Capitolo sono quindi di ordini $\frac{1}{n}$. La funzione $\varphi(x, y)$ si dirà la *caratteristica* di $f(x, y)$, e $\varphi(x, x)$ si dirà la sua *diagonale*.

Se una funzione

$$f(x, y) = (y - x)^{\alpha} \varphi(x, y),$$

e $\varphi(x, y)$ è finita e continua, mentre

$$\varphi(x, x) = 0,$$

f si dirà *di ordine superiore ad* $\alpha + 1$. In tal modo tutte le funzioni di ordine determinato β sono di ordine superiore ad ogni numero inferiore a β, ma possono esistere delle funzioni di ordine superiore a γ e che non hanno alcun ordine determinato. Per esempio, la funzione

$$(y - x)^{n-1} \log (y - x)\, \varphi(x, y),$$

ove $\varphi(x, y)$ è di primo ordine, non ha alcun ordine determinato, ma è di ordine superiore a $n - \varepsilon$, essendo ε un numero positivo qualsiasi.

Se $\psi(x, y)$ e $\varphi(x, y)$ non hanno ordini determinati, ma

$$\frac{\psi(x, y)}{(y - x)^{\alpha} \varphi(x, y)}$$

è sempre inferiore ad un numero finito, essendo α positivo, si dirà che $\psi(x, y)$ per rapporto a $\varphi(x, y)$ è di ordine non inferiore ad α.

Le operazioni di composizione saranno evidentemente applicabili alle funzioni il cui ordine è maggiore di un numero positivo, e tali saranno le funzioni che passeremo a considerare.

Per ottenere una funzione di ordine determinato r appartenente ad un gruppo di funzioni permutabili basterà, nella formula (2) del Cap. I, porre

$$\lambda(\eta) = \eta^{r-1} \mu(\eta),$$

ove μ è determinata e finita, e non si annulla per $\eta = 0$.

Se due funzioni sono di ordini determinati α e β, *la loro resultante sarà di ordine* $\alpha+\beta$. Infatti, se φ_1 e φ_2 sono di 1° ordine

$$f_1=(y-x)^{\alpha-1}\varphi_1(x,y)$$

$$f_2=(y-x)^{\beta-1}\varphi_2(x,y)$$

$$\overset{*}{f_1}\overset{*}{f_2}=(y-x)^{\alpha+\beta-1}\int_0^1\eta^{\alpha-1}(1-\eta)^{\beta-1}\varphi_1(x,x+(y-x)\eta)\,\varphi_2(x+(y-x)\eta,y)\,d\eta,$$

onde posto

$$\psi(x,y)=\int_0^1\eta^{\alpha-1}(1-\eta)^{\beta-1}\varphi_1(x,x+(y-x)\eta)\,\varphi_2(x+(y-x)\eta,y)\,d\eta,$$

sarà

$$\overset{*}{f_1}\overset{*}{f_2}=(y-x)^{\alpha+\beta-1}\psi(x,y).$$

E avremo

$$\psi(x,x)=\varphi_1(x,x)\,\varphi_2(x,x)\frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)},$$

quindi ψ sarà di 1° ordine. Collo stesso procedimento si dimostra che *se una delle due funzioni è di ordine superiore ad* α, *e l'altra di ordine eguale o superiore a* β, la loro *resultante sarà di ordine superiore ad* $\alpha+\beta$.

La funzione ψ potrà derivarsi fino all'ordine a cui possono derivarsi φ_1 e φ_2.

È evidente che la proposizione non esige che f_1 e f_2 siano permutabili.

Se una funzione è di ordine r, *la sua potenza* n^{esima} *sarà di ordine* nr; e se chiamiamo $G(x,y)$ e $L(x,y)$ le loro caratteristiche avremo

$$L(x,x)=\frac{\Gamma^n(r)}{\Gamma(nr)}G^n(x,x).$$

Se la funzione fosse di ordine superiore ad r, *la potenza* n^{esima} *sarebbe di ordine superiore a* nr.

5. Dimostriamo il teorema: *Se due funzioni di ordini determinati a caratteristiche derivabili sono permutabili, il rapporto delle diagonali elevate a potenze di grado eguale all'inversa del respettivo ordine di ciascuna funzione è costante.*

Abbiansi infatti le funzioni permutabili

$$(y-x)^{\alpha-1}f(x,y)\quad,\quad(y-x)^{\beta-1}\varphi(x,y)$$

degli ordini positivi α e β.

Sarà

$$\int_x^y(\xi-x)^{\alpha-1}f(x,\xi)\,(y-\xi)^{\beta-1}\varphi(\xi,y)\,d\xi=$$

$$=(y-x)^{\alpha+\beta-1}\int_0^1 f(x,x+(y-x)\eta)\,\varphi(x+(y-x)\eta,y)\,\eta^{\alpha-1}(1-\eta)^{\beta-1}d\eta,$$

e in virtù della permutabilità

$$\int_0^1 f(x\,,x+(y-x)\,\eta)\,\varphi(x+(y-x)\,\eta\,,y)\,\eta^{\alpha-1}(1-\eta)^{\beta-1}\,d\eta =$$

$$= \int_0^1 \varphi(x\,,x+(y-x)\,\eta)\,f(x+(y-x)\,\eta\,,y)\,\eta^{\beta-1}(1-\eta)^{\alpha-1}\,d\eta\,.$$

Supponendo f e φ derivabili, deriviamo rispetto ad y, e facciamo quindi $y=x$. Resulterà

$$(\mathrm{F}_2\Phi + \mathrm{F}\Phi_1)\,\frac{\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \mathrm{F}\Phi_2\,\frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} =$$

$$= (\Phi_2\mathrm{F} + \Phi\mathrm{F}_1)\,\frac{\Gamma(\beta+1)\,\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \Phi\mathrm{F}_2\,\frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\,,$$

ove

$$\mathrm{F}(x) = f(x\,,x) \;,\; \Phi(x) = \varphi(x\,,x) \;,\; \mathrm{F}_1 = \left(\frac{\partial f(x\,,y)}{\partial x}\right)_{x=y} \;,\; \mathrm{F}_2 = \left(\frac{\partial f(x\,,y)}{\partial y}\right)_{x=y}$$

$$\Phi_1 = \left(\frac{\partial \varphi(x\,,y)}{\partial x}\right)_{x=y} \;,\; \Phi_2 = \left(\frac{\partial \varphi(x\,,y)}{\partial y}\right)_{x=y}.$$

Dalla eguaglianza precedente si deduce

$$\alpha(\mathrm{F}_2\Phi + \mathrm{F}\Phi_1) + (\alpha+\beta)\,\mathrm{F}\Phi_2 = \beta(\Phi_2\mathrm{F} + \Phi\mathrm{F}_1) + (\alpha+\beta)\,\Phi\mathrm{F}_2\,,$$

ossia

$$\alpha\mathrm{F}(\Phi_1+\Phi_2) = \beta\Phi(\mathrm{F}_1+\mathrm{F}_2)\,.$$

Ma

$$\mathrm{F}_1+\mathrm{F}_2 = \frac{d\mathrm{F}}{dx} \quad,\quad \Phi_1+\Phi_2 = \frac{d\Phi}{dx}\,,$$

quindi

$$\frac{\frac{1}{\alpha}\frac{d\mathrm{F}}{dx}}{\mathrm{F}} = \frac{\frac{1}{\beta}\frac{d\Phi}{dx}}{\Phi}\,,$$

e per conseguenza

$$\frac{\mathrm{F}^{\frac{1}{\alpha}}}{\Phi^{\frac{1}{\beta}}} = \mathrm{cost}\,.$$

Da questa proposizione segue che *in un gruppo canonico le diagonali di tutte le funzioni del gruppo saranno costanti.*

6. Se

$$\varphi(x\,,y) = f(x\,,y)\,(y-x)^{\alpha-1}\,,$$

con

$$|f(x\,,y)| < \mathrm{M} \qquad\qquad \text{e} \quad \alpha > 0\,,$$

avremo, essendo m intero,

$$|\overset{*}{\varphi}{}^m| < \mathrm{M}^m \frac{\Gamma^m(\alpha)}{\Gamma(m\alpha)} (y-x)^{m\alpha-1}\,.$$

Se ne ricava come conseguenza che *se la serie*

$$\sum_1^\infty a_m z^m\,,$$

sarà convergente, allorchè $|z|$ *è inferiore ad un certo valore, la serie*

$$\sum_1^\infty a_m \overset{*}{\varphi}{}^m\,,$$

sarà convergente qualunque sia il modulo di $f(x,y)$ *purchè sia inferiore ad un numero finito* (¹).

7. Dato f di ordine $n+\alpha$ con $1>\alpha>0$, e n intero e positivo, e ψ di ordine eguale o superiore $n+\alpha+\beta$ con $\beta>0$ si tratta di calcolare φ in modo tale che

$$(5) \qquad \overset{*}{f}\overset{*}{\varphi} = \psi\,.$$

Questo problema si può risolvere con metodo analogo a quello che ho dato nelle *Leçons sur les équations intégrales et intégro-différentielles*, Chap. II, § 3, pag 60 (²).

Infatti, posto

$$(y-x)^{-\alpha} = \theta(x,y)\,,$$

avremo

$$\overset{*}{\theta}\overset{*}{f}\overset{*}{\varphi} = \overset{*}{\theta}\overset{*}{\psi}\,.$$

Ora θ è di ordine $1-\alpha$, quindi $\overset{*}{\theta}\overset{*}{f} = g$ sarà di ordine $n+1$. e $\mathrm{K} = \overset{*}{\theta}\overset{*}{\psi}$ sarà di ordine $n+1+\beta$ o di ordine superiore.

L'equazione

$$\overset{*}{g}\overset{*}{\varphi} = \mathrm{K}\,,$$

si risolve subito derivando $n+1$ volte rispetto ad x, e riducendola così ad una equazione di 2ª specie. Evidentemente φ resulterà di ordine β o inferiore a β, e per l'applicazione del metodo bisognerà ammettere quando f e ψ sono di ordine determinato che le caratteristiche di f e ψ siano derivabili $n+1$ volte, e le derivate siano finite.

La permutabilità delle funzioni date f *e* ψ *non è necessaria.* Se però esse saranno permutabili fra loro anche φ resulterà permutabile con esse. Data la non permutabilità di f e ψ l'equazione

$$(5') \qquad \overset{*}{\varphi}\overset{*}{f} = \psi$$

(¹) Cfr. Cap. I, § 4.

(²) Paris, Gauthier-Villars, 1913.

e distinta dalle (5) e si risolverà formando l'equazione integrale

$$\overset{*}{\varphi} \overset{*}{f} \overset{*}{\theta} = \overset{*}{\psi} \overset{*}{\theta} ,$$

in cui $\overset{*}{f} \overset{*}{\theta}$ sarà di ordine $n+1$. Con $n+1$ derivazioni rispetto ad y la ridurremo di seconda specie.

Le equazioni (5) e (5′) ammettono ciascuna *una sola soluzione*.

Supponiamo di avere l'equazione

$$(6) \qquad \overset{*}{f_1} \overset{*}{\varphi_1} = \psi_1 ,$$

ove

$$f_1 = f + \overset{*}{f} \overset{*}{\chi} \quad , \quad \psi_1 = \psi + \overset{*}{\psi} \overset{*}{\varrho} ,$$

e ammettiamo che f e ψ abbiano le stesse proprietà attribuite loro precedentemente, mentre χ e ϱ siano funzioni di ordine superiore ad un numero positivo.

La soluzione della (6) nella quale si suppongono f_1 e ψ_1 date, e φ_1 incognita si potrà ottenere risolvendo dapprima la (5) quindi prendendo

$$\varphi_1 = \varphi + \overset{*}{\varphi} \overset{*}{\varrho} - (\overset{*}{\varphi} + \overset{*}{\varphi} \overset{*}{\varrho}) \overset{*}{\chi} + (\overset{*}{\varphi} + \overset{*}{\varphi} \overset{*}{\varrho}) \overset{*}{\chi}^2 - \cdots$$

e la serie sarà sempre uniformemente convergente. *Anche in questo caso la soluzione della* (6) *sarà unica.*

Le funzioni f_1 e ψ_1 sono degli stessi ordini respettivamente di f e ψ, ma non è necessario che esse soddisfino alle condizioni poste precedentemente per f e ψ riguardo alla derivabilità delle loro caratteristiche.

Così f_1 e ψ_1 possono essere respettivamente somme di più funzioni degli ordini

$$n+\alpha' , n+\alpha'' , n+\alpha''' , \ldots \qquad (0 < \alpha' < \alpha'' < \alpha''' \cdots < 1) ,$$

e degli ordini

$$n+\beta'+\alpha' , n+\beta''+\alpha'' , n+\beta'''+\alpha''' \qquad (\beta' > 0 , \beta'' > 0 , \ldots) ,$$

mentre le loro caratteristiche hanno le derivate degli ordini $n+1$ determinate e finite.

8. Abbiasi una funzione di un ordine determinato α

$$(7) \qquad (y-x)^{\alpha-1} \psi(x, y) = \varphi(x, y) ,$$

e si voglia calcolare f tale che

$$(8) \qquad \overset{*}{f^n} = \varphi .$$

In virtù delle precedenti considerazioni si potrà estendere a questo caso il procedimento impiegato (§ 2) per risolvere l'analoga equazione (1) allorchè φ è di 1° ordine.

Infatti, supponiamo dapprima di ridurre alla forma canonica il gruppo a cui appartiene φ, e calcoliamo

$$\theta = \frac{1 + (y-x)\int_0^1 u^{\frac{\alpha}{n}-1}\,\Phi((y-x)u|x,y)\,du}{(y-x)^{1-\frac{\alpha}{n}}}\,,$$

$\overset{*}{\theta}{}^n$ sarà di ordine α e la sua diagonale sarà $\dfrac{\Gamma^n\left(\frac{\alpha}{n}\right)}{\Gamma(\alpha)}$.

Risolviamo ora l'equazione

$$\varphi - \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma^n\left(\frac{\alpha}{n}\right)}\overset{*}{\theta}{}^n = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma^n\left(\frac{\alpha}{n}\right)}\overset{*}{\theta}{}^n\overset{*}{g}\,,$$

prendendo g come incognita e ammessa la derivabilità di φ e Φ fino all'ordine voluto dai precedenti teoremi. Sarà

$$f = \frac{\sqrt[n]{\Gamma(\alpha)}}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{n}\right)}\left(\theta + \frac{1}{n}\overset{*}{\theta}\overset{*}{g} + \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)}{1\,.\,2}\overset{*}{\theta}\overset{*}{g}{}^2 + \cdots\right).$$

Così otterremo n soluzioni, giacchè $\sqrt[n]{\Gamma(\alpha)}$ contiene un fattore indeterminato radice n^{esima} dell'unità.

Queste sono tutte permutabili fra loro e con φ. Si tratta anche qui come nel § 3, di sapere se altre soluzioni permutabili con queste possono trovarsi.

9. Se f_1 e f_2 sono due funzioni permutabili di ordine determinato le cui caratteristiche hanno le derivate determinate e finite dell'ordine eguale al minimo intero superiore all'ordine delle funzioni stesse, tali che

$$\overset{*}{f}{}_1^n = \overset{*}{f}{}_2^n\,,$$

avremo

$$f_1 = \varepsilon f_2\,,$$

ove ε è una radice n^{esima} dell'unità. Infatti, f_1 e f_2 dovranno essere dello stesso ordine, e chiamate φ_1 e φ_2 le loro caratteristiche dovremo avere

$$\varphi_1^n(x\,,x) = \varphi_2^n(x\,.\,x)\,,$$

quindi

$$\varphi_1(x\,,x) = \varepsilon\,\varphi_2(x\,.\,x)\,.$$

Ma

$$0 = \overset{*}{f}{}_1^n - \overset{*}{f}{}_2^n = (\overset{*}{f}_1 - \varepsilon_1\overset{*}{f}_2)(\overset{*}{f}_1 - \varepsilon_2\overset{*}{f}_2)\,.\,.\,(\overset{*}{f}_1 - \varepsilon_n\overset{*}{f}_2)\,,$$

ove $\varepsilon_1\,,\varepsilon_2\,,\ldots,\varepsilon_n$ sono le n radici dell'unità.

Se supponiamo $\varepsilon = \varepsilon_1$, i binomî $f - \varepsilon_2 f_2, \ldots, f_1 - \varepsilon_n f_2$ saranno dello stesso ordine di f_1 e f_2, e per conseguenza in virtù di quanto si è stabilito nel § 7, dovrà resultare

$$f_1 = \varepsilon f_2 .$$

10. La questione che ci eravamo proposta precedentemente (§§ 3, 8) resta risoluta in virtù di questa proposizione, cioè che col cambiare nella maniera indicata $\lambda(\eta)$ si giunge sempre alle stesse soluzioni delle (1), giacchè esse resultano sempre funzioni di ordine determinato $\frac{1}{n}$ con le caratteristiche derivabili e le loro potenze n^{esime} di composizione sono eguali fra loro. Lo stesso si dica per le soluzioni di (8).

11. Se f_1 e f_2 sono due funzioni permutabili di ordine determinato e

$$\overset{*}{f}{}_1^{m} = \overset{*}{f}{}_2^{n} ,$$

avremo

$$\overset{*}{f}{}_1^{mq} = \overset{*}{f}{}_2^{nq} ,$$

q essendo un numero intero qualunque. Reciprocamente se questa eguaglianza è soddisfatta sarà verificata l'eguaglianza

$$\overset{*}{f}{}_1^{m} = \varepsilon \overset{*}{f}{}_2^{n} .$$

ove ε è una radice q^{esima} dell'unità. Noi scriveremo

$$f_1 = \overset{*}{f}{}_2^{\frac{n}{m}} ,$$

e evidentemente scrivendo questa eguaglianza noi includeremo in f_1 un fattore indeterminato radice dell'unità.

Dato f_2, per calcolare f_1 basterà calcolare dapprima con le regole date (§§ 2, 3 e 8)

$$\overset{*}{f}{}_2^{\frac{1}{n}} ,$$

quindi

$$\left(\overset{*}{f}{}_2^{\frac{1}{n}}\right)^m .$$

Tutto il calcolo algebrico ordinario delle potenze frazionarie si può senz'altro applicare alle potenze fratte di composizione.

12. Nella espressione

$$\overset{*}{f}{}^{\frac{m}{n}} ,$$

supponiamo f di ordine determinato α, cioè

$$f = (y - x)^{\alpha - 1} \mathrm{G}(x, y),$$

avremo allora che $\overset{*}{f}{}^{\frac{m}{n}}$ sarà di ordine $\frac{\alpha m}{n}$, cioè

$$\overset{*}{f}{}^{\frac{m}{n}} = (y - x)^{\frac{\alpha m}{n} - 1} \mathrm{L}(x, y),$$

con

$$\mathrm{L}(x, x) = (\mathrm{G}(x, x))^{\frac{m}{n}} \frac{\Gamma^{\frac{m}{n}}(\alpha)}{\Gamma\left(\frac{m\alpha}{n}\right)}.$$

La potenza fratta di composizione $\overset{*}{f}{}^{\frac{m}{n}}$ è determinata a meno di un fattore eguale ad una radice dell'unità. Noi potremo far scomparire questa indeterminazione allorchè le diagonali saranno tutte positive.

Sia f una funzione di un ordine determinato α la cui diagonale sia positiva

$$\overset{*}{f}{}^{\frac{m}{n}} = (y - x)^{\frac{m\alpha}{n} - 1} \mathrm{L}\left(x, y \middle| \frac{m}{n}\right),$$

prendendo positiva la diagonale di questa funzione.

Supponiamo che facendo tendere il numero $\frac{m}{n}$ verso un numero positivo razionale β, $\mathrm{L}\left(x, y \middle| \frac{m}{n}\right)$ tenda uniformemente verso $\mathrm{L}(x, y | \beta)$, e facendolo tendere verso un numero qualunque irrazionale $z > 0$, tenda uniformemente verso un limite determinato e finito $\mathrm{L}(x, y | z)$.

Scriveremo

$$\overset{*}{f}{}^{z} = (y - x)^{\alpha z - 1} \mathrm{L}(x, y | z),$$

e lo designeremo col nome di *potenza irrazionale di composizione d'ordine* z.

Sarà

$$\mathrm{L}(x, x | z) = \mathrm{G}(x, x)^{z} \frac{\Gamma^{z}(\alpha)}{\Gamma(\alpha z)}.$$

Se $|\mathrm{G}(x, y)| < \mathrm{M}$ sarà

$$|\mathrm{L}(x, y | z)| < \mathrm{M}^{z} \frac{\Gamma^{z}(\alpha)}{\Gamma(z\alpha)}.$$

Tutto il calcolo algebrico delle potenze con esponenti commensurabili o incommensurabili positivi è estensibile al caso delle potenze di composizione, e per conseguenza

$$\overset{*}{f}{}^{z} \overset{*}{f}{}^{z_1} = \overset{*}{f}{}^{z + z_1}$$

$$\left(\overset{*}{f}{}^{z}\right)^{z_1} = \overset{*}{f}{}^{z z_1}$$

allorchè i numeri z e z_1 sono numeri positivi qualsiasi [1].

[1] Il calcolo effettivo di $\overset{*}{f}{}^{z}$ non può farsi se non ricorrendo alla teoria dei *logaritmi di composizione*. Esso è effettivamente eseguito nel Cap. VII, § 8.

13. Allorchè noi conosciamo

$$\overset{*}{f}{}^z = (y - x)^{\alpha z - 1}\, \mathrm{L}(x, y \mid z),$$

qualunque sia il numero positivo z, noi siamo in grado di calcolare $\overset{*}{\varphi}{}^z$, essendo

$$\varphi = \overset{*}{f} + \overset{*}{f}\overset{*}{\psi},$$

ove ψ è una funzione qualsiasi di ordine superiore ad un numero positivo.

Avremo infatti

$$\overset{*}{\varphi}{}^z = \overset{*}{f}{}^z + z\overset{*}{f}{}^z\,\overset{*}{\psi} + \frac{z(z-1)}{1 \, . \, 2}\,\overset{*}{f}{}^z\,\overset{*}{\psi}{}^2 + \cdots$$

e la serie è sempre uniformemente convergente (§ 6).

Si riconosce immediatamente che dall'essere $\overset{*}{f}{}^z$ una funzione analitica di z, segue che tale è ancora $\overset{*}{\varphi}{}^z$, e, dall'essere $\overset{*}{f}{}^z$ intera che tale è $\overset{*}{\varphi}{}^z$.

14. Come esempio trattiamo il caso di funzioni appartenenti al gruppo del ciclo chiuso.

L'unità appartiene al gruppo del ciclo chiuso e avremo se z è positivo

$$\overset{*}{1}{}^z = \frac{(y-x)^{z-1}}{\Gamma(z)},$$

onde $\overset{*}{1}{}^z$ *sarà una funzione intera di* z.

Sia ora $\varphi(y - x)$ una funzione di primo grado derivabile. Se $\varphi(0) = 1$, sarà

$$\varphi(y - x) = 1 + \overset{*}{1}\,\overset{*}{\varphi}{}',$$

ove $\overset{*}{\varphi}{}'$ denota la derivata di φ. Per conseguenza

$$\overset{*}{\varphi}{}^z = \overset{*}{1}{}^z + z\overset{*}{1}{}^z\,\overset{*}{\varphi}{}' + \frac{z(z-1)}{1 \, . \, 2}\,\overset{*}{1}{}^z\,\overset{*}{\varphi}{}'^2 + \cdots$$

$\overset{*}{\varphi}{}^z$ resulterà quindi una funzione intera di z.

15. Nel § 11 del Chap. 11 dell'opera citata (*Leçons sur les fonctions de lignes*) abbiamo mostrato come dalla risoluzione dell'equazione binomia

$$\overset{*}{\mathrm{F}}{}^n = \Phi \tag{9}$$

si possa passare alla risoluzione di una equazione

$$\mathrm{F}(\overset{*}{\mathrm{F}}_1, \overset{*}{\mathrm{F}}_2) = 0 \tag{10}$$

dedotta da una equazione

$$\mathrm{F}(z_1, z_2) = 0,$$

tale che la funzione implicita $z_2(z_1)$ abbia un punto critico in $z_1 = 0$. Ora nella trattazione era sempre supposto che Φ fosse una funzione di ordine tale che la soluzione della (9) fosse finita, cioè F resultasse di 1° ordine o di ordine superiore, e lo stesso si dica per la soluzione della (10). Tali limitazioni possono adesso togliersi, giacchè abbiamo imparato a calcolare soluzioni delle (9) di ordine fratto.

Analoga osservazione può farsi per la risoluzione di equazioni integro-differenziali ottenuta mediante l'applicazione del teorema del § 2 del Cap. X dell'opera ora citata. Il campo di applicazione del teorema stesso viene quindi esteso al caso in cui resultino soluzioni di ordine fratto.

CAP. III.

Potenze nulle e negative di composizione – Frazioni di composizione – Limiti di funzioni permutabili.

1. Come in aritmetica si introducono le frazioni, e le potenze negative dei numeri interi, così nel campo delle presenti ricerche conviene introdurre le frazioni di composizione e le potenze negative di composizione. Per giungere ad esse si possono seguire varii procedimenti prendendo per guida quelli che si sogliano usare in aritmetica per ottenere le frazioni.

Fissiamo le idee: In aritmetica (nel campo dei numeri interi) si può passare dalla moltiplicazione per 2 alla divisione per 2, chiamando questa operazione la ricerca (quando è possibile) di un numero che, moltiplicato per 2, riproduce il numero dato. Ma la operazione di divisione per 2 si può intendere come una moltiplicazione introducendo l'ente $\frac{1}{2}$, e chiamando divisione per 2 la moltiplicazione per $\frac{1}{2}$. L'ente $\frac{1}{2}$ ha così un senso formale, ma tosto che lo moltiplichiamo per un numero pari qualsiasi $2n$ il resultato n cessa di essere formale.

In modo analogo si può introdurre un ente la cui composizione con $\overset{*}{f}\overset{*}{\varphi}$ dia per resultato φ. È evidente che esso avrà un carattere formale analogo a quello della frazione precedentemente considerata, ma tale carattere si perde allorchè lo componiamo con una funzione qualsiasi di tipo $\overset{*}{f}\overset{*}{\psi}$, ottenendosi per resultato ψ.

In questa maniera però, come in aritmetica non si otterrebbero che le inverse dei numeri interi, così nel campo della composizione si avrebbero soltanto frazioni speciali. Per conseguenza onde ottenere subito quelle più generali seguiremo un'altra via. Precisiamone senz'altro il principio.

In aritmetica si può ancora giungere alle frazioni con una estensione del campo dei numeri introducendole, dopo i numeri interi, come nuovi enti dei quali si definiscono l'equivalenza e tutte le operazioni che si eseguiscono tra di loro e coi numeri interi. Se non usciamo dal campo dei numeri interi questi enti sono formali, ma tutti i calcoli e tutte le proposizioni in cui essi figurano perdono, quando si voglia, il carattere puramente formale, purchè si moltiplichino per un conveniente numero intero e rappresentano effettive relazioni tra numeri interi.

Noi opereremo precisamente nello stesso modo per introdurre le frazioni di composizione, e se hanno un carattere formale, può anche per esse ripetersi quello che sopra si è detto, cioè si possono comporre queste frazioni con una conveniente funzione in modo da far perdere a tutti i resultati il carattere formale, ottenendo relazioni tra funzioni.

2. Ma prima ancora noi dobbiamo introdurre l'elemento corrispondente a quello che in aritmetica costituisce l'unità di cui, nel campo della composizione, non siamo ancora in possesso.

Sia $f(x, y)$ una funzione appartenente ad un gruppo di funzioni permutabili. È ben noto che cosa si intende per comporre una funzione del gruppo con f [1]. Comporla con $\overset{*}{f}{}^{-1}$ si intenderà fare l'operazione inversa, cioè trovare una funzione che composta con f riproduca la funzione data. Se ora componiamo la funzione prima con f e poi con $\overset{*}{f}{}^{-1}$ ciò equivale a mantenere la funzione inalterata. Ora

$$\overset{*}{f}\overset{*}{f}{}^{-1} = \overset{*}{f}{}^{0}$$

sarà un nuovo ente che noi introdurremo nel gruppo definendolo in modo che *composto con qualsiasi funzione del gruppo la mantiene inalterata.* È questo l'elemento che corrisponde all'unità.

La proprietà di $\overset{*}{f}{}^{0}$ sono date da

$$\overset{*}{f}\overset{*}{f}{}^{0} = f \quad , \quad (\overset{*}{f}{}^{0})^{m} = \overset{*}{f}{}^{0} \quad , \quad (\overset{*}{f}{}^{0})^{-1} = \overset{*}{f}{}^{0} \quad , \quad \overset{*}{f}{}^{0} = \overset{*}{\varphi}{}^{0} ,$$

essendo f e φ funzioni appartenenti al gruppo, ed essendo a una costante

$$(a\overset{*}{f}{}^{0})(\overset{*}{f}) = af$$

$$(a\overset{*}{f}{}^{0} + b\overset{*}{f})(c\overset{*}{f}{}^{0} + d\overset{*}{\varphi}) = ac\overset{*}{f}{}^{0} + ad\varphi + bcf + bd\overset{*}{f}\overset{*}{\varphi} .$$

Di qui si ricava che $a\overset{*}{f}{}^{0} + b\overset{*}{f}$ non ha che un senso formale, ma esso lo perde acquistandone uno effettivo, purchè venga composto con una funzione qualunque del gruppo.

L'introduzione della $\overset{*}{f}{}^{0}$ semplifica molto le formule che abbiamo dato nei lavori pubblicati fin qui sulla teoria delle funzioni permutabili (cfr. op. cit., pag. 138). Inoltre permette di considerare, per esempio, una serie

$$F|[\overset{*}{f}]| = \overset{*}{f}{}^{0} + f + \frac{\overset{*}{f}{}^{2}}{2!} + \frac{\overset{*}{f}{}^{3}}{3!} + \cdots$$

per cui si ha il teorema d'addizione integrale

$$F|[\overset{*}{f} + \overset{*}{\varphi}]| = \overset{*}{F}|[\overset{*}{f}]|\,\overset{*}{F}|[\overset{*}{\varphi}]| ,$$

che ha una forma più semplice di quella data a pag. 159 dell'opera citata.

(1) Cfr. Cap. I, § 1

Inoltre si può mettere in luce il periodo di $F|[\overset{*}{f}]|$, giacchè si ha

$$F|[\overset{*}{f} + 2\pi i \overset{*}{f}{}^0]| = F|[\overset{*}{f}]|,$$

cioè $F|[\overset{*}{f}]|$ ha il periodo $2\pi i \overset{*}{f}{}^0$.

3. Passiamo adesso alle vere e proprie frazioni di composizione. Consideriamo un insieme di funzioni permutabili di ordini determinati. Denoteremo queste funzioni con $f, \varphi, \psi, \ldots, f_1, \varphi_1, \psi_1, \ldots, f_2, \varphi_2, \psi_2, \ldots$ tali che le loro combinazioni lineari siano pure di ordini determinati, ed inoltre tali che presa una qualunque di esse il cui ordine superi quello di un'altra, si possa trovare sempre una ed una sola funzione del gruppo che composta con questa riproduca la prima.

Per esempio un insieme di funzioni di questa natura sarà quello che potrà formarsi partendo da una funzione del 1° ordine e facendone le potenze intere e frazionarie e componendole e sommandole fra loro dopo averle moltiplicate per delle costanti.

Noi diremo che $\dfrac{\overset{*}{f}}{\overset{*}{\varphi}}$ *è la frazione di composizione appartenente al gruppo, avente per numeratore* f *e per denominatore* φ.

Stabiliremo poi

$$\frac{\overset{*}{f}}{\overset{*}{f}{}^0} = f.$$

e

$$\frac{\overset{*}{f_1}}{\overset{*}{\varphi_1}} = \frac{\overset{*}{f_2}}{\overset{*}{\varphi_2}},$$

quando

$$\overset{*}{f_1}\overset{*}{\varphi_2} = \overset{*}{\varphi_1}\overset{*}{f_2}.$$

Si può di qui ricavare la proposizione che *due frazioni di composizione eguali ad una terza sono eguali fra loro.*

Infatti se

$$\frac{\overset{*}{f_1}}{\overset{*}{\varphi_1}} = \frac{\overset{*}{f_2}}{\overset{*}{\varphi_2}}, \quad \frac{\overset{*}{f_1}}{\overset{*}{\varphi_1}} = \frac{\overset{*}{f_3}}{\overset{*}{\varphi_3}},$$

sarà

(1) $\overset{*}{f_1}\overset{*}{\varphi_2} = \overset{*}{f_2}\overset{*}{\varphi_1}$, (2) $\overset{*}{f_1}\overset{*}{\varphi_3} = \overset{*}{f_3}\overset{*}{\varphi_1}$,

d'onde componendo ambo i membri della (1) con φ_3

$$\overset{*}{f_1}\overset{*}{\varphi_2}\overset{*}{\varphi_3} = \overset{*}{f_2}\overset{*}{\varphi_1}\overset{*}{\varphi_3} = \overset{*}{f_2}\overset{*}{\varphi_3}\overset{*}{\varphi_1}.$$

Ma in virtù della (2)

$$\overset{*}{f_1}\overset{*}{\varphi_2}\overset{*}{\varphi_3} = \overset{*}{\varphi_2}\overset{*}{f_1}\overset{*}{\varphi_3} = \overset{*}{\varphi_2}\overset{*}{f_3}\overset{*}{\varphi_1},$$

quindi

$$\overset{*}{f_2}\overset{*}{\varphi_3}\overset{*}{\varphi_1} = \overset{*}{\varphi_2}\overset{*}{f_3}\overset{*}{\varphi_1}$$

da cui segue per la ipotesi generale che abbiamo fatta precedentemente

$$\overset{*}{\varphi}_2 \overset{*}{f}_3 = \overset{*}{f}_2 \overset{*}{\varphi}_3 ,$$

cioè

$$\frac{\overset{*}{f}_2}{\overset{*}{\varphi}_2} = \frac{\overset{*}{f}_3}{\overset{*}{\varphi}_3} ,$$

Dalla definizione data si riconosce facilmente che $\dfrac{\overset{*}{f}}{\overset{*}{\varphi}} = \dfrac{\overset{*}{f}\overset{*}{\psi}}{\overset{*}{\varphi}\overset{*}{\psi}}$.

4. Abbiamo adesso tre casi da distinguere. 1°) Supponiamo in $\dfrac{\overset{*}{f}}{\overset{*}{\varphi}}$ f di ordine superiore a φ. Allora, supposte soddisfatte le condizioni stabilite, noi potremo (v. § 3) calcolare ψ tale che

$$\overset{*}{f} = \overset{*}{\varphi}\overset{*}{\psi} ,$$

e siccome questa eguaglianza potrà scriversi

$$\overset{*}{f}\overset{*}{\varphi}{}^0 = \overset{*}{\varphi}\overset{*}{\psi}$$

così sarà

$$\frac{\overset{*}{f}}{\overset{*}{\varphi}} = \frac{\overset{*}{\psi}}{\overset{*}{\varphi}{}^0} = \psi .$$

2°) Se invece f è di ordine inferiore a φ sarà (sempre supponendo soddisfatte le anzidette condizioni)

$$\varphi = \overset{*}{f}\overset{*}{\psi} .$$

e quindi

$$\overset{*}{\varphi}\overset{*}{\psi}{}^0 = \overset{*}{f}\overset{*}{\psi} ,$$

onde

$$\frac{\overset{*}{f}}{\overset{*}{\varphi}} = \frac{\overset{*}{\psi}{}^0}{\overset{*}{\psi}} .$$

3°) Finalmente supponiamo f e φ dello stesso ordine. Il rapporto delle loro caratteristiche sarà costante, e denotandolo con a,

$$f - a\varphi = \psi ,$$

sarà di ordine determinato superiore a φ. Allora

$$\psi = \overset{*}{\varphi}\overset{*}{\theta} ,$$

e quindi

$$f = a\varphi + \overset{*}{\varphi}\overset{*}{\theta} .$$

Ne segue

$$\overset{*}{f}\overset{*}{\varphi}{}^0 = (a\overset{*}{\varphi}{}^0 + \overset{*}{\theta})\,\overset{*}{\varphi},$$

e finalmente

$$\frac{\overset{*}{f}}{\overset{*}{\varphi}} = a\overset{*}{\varphi}{}^0 + \theta .$$

5. *Più frazioni di composizione si possono sempre ridurre ad avere per denominatore comune una funzione di ordine non inferiore ai loro denominatori.*

Infatti se si hanno

$$\frac{\overset{*}{f}_1}{\overset{*}{\varphi}_1}\,,\quad \frac{\overset{*}{f}_2}{\overset{*}{\varphi}_2}\,,$$

e φ è di ordine superiore a φ_1 e φ_2, sarà

$$\varphi = \overset{*}{\varphi}_1\overset{*}{\psi}_1 = \overset{*}{\varphi}_2\overset{*}{\psi}_2\,,$$

quindi

$$\frac{\overset{*}{f}_1}{\overset{*}{\varphi}_1} = \frac{\overset{*}{f}_1\overset{*}{\psi}_1}{\overset{*}{\varphi}}\quad,\quad \frac{\overset{*}{f}_2}{\overset{*}{\varphi}_2} = \frac{\overset{*}{f}_2\overset{*}{\psi}_2}{\overset{*}{\varphi}}\,.$$

Se φ fosse di ordine eguale ad uno o ad ambedue i denominatori si avrebbe

$$\varphi = \overset{*}{\varphi}_1(a\overset{*}{\varphi}{}^0 + \overset{*}{\psi}_1)$$

$$\varphi = \overset{*}{\varphi}_2(b\overset{*}{\varphi}{}^0 + \overset{*}{\psi}_2)$$

con a e b costanti, una delle quali potrebbe essere nulla. Quindi

$$\frac{\overset{*}{f}_1}{\overset{*}{\varphi}_1} = \frac{a\overset{*}{f}_1 + \overset{*}{f}_1\overset{*}{\psi}_1}{\overset{*}{\varphi}}$$

$$\frac{\overset{*}{f}_2}{\overset{*}{\varphi}_2} = \frac{b\overset{*}{f}_2 + \overset{*}{f}_2\overset{*}{\psi}_2}{\overset{*}{\varphi}}\,.$$

Un modo di ridurre più frazioni di composizione

$$\frac{\overset{*}{f}_1}{\overset{*}{\varphi}_1}\,,\ \frac{\overset{*}{f}_2}{\overset{*}{\varphi}_2}\,,\ \frac{\overset{*}{f}_3}{\overset{*}{\varphi}_3}\,,\ \ldots$$

allo stesso denominatore è di scrivere le loro equivalenti

$$\frac{\overset{*}{f}_1\overset{*}{\varphi}_2\overset{*}{\varphi}_3\cdots}{\overset{*}{\varphi}_1\overset{*}{\varphi}_2\overset{*}{\varphi}_3\cdots}\,,\quad \frac{\overset{*}{f}_2\overset{*}{\varphi}_1\overset{*}{\varphi}_3\cdots}{\overset{*}{\varphi}_1\overset{*}{\varphi}_2\overset{*}{\varphi}_3\cdots}\,,\quad \frac{\overset{*}{f}_3\overset{*}{\varphi}_1\overset{*}{\varphi}_2\cdots}{\overset{*}{\varphi}_1\overset{*}{\varphi}_2\overset{*}{\varphi}_3\cdots}\,.$$

6. Se riduciamo più frazioni di composizione ad un denominatore comune, e costruiamo una frazione di composizione che ha il denominatore comune e il numeratore è ottenuto con la somma o sottrazione dei varî numeratori, la frazione ottenuta è indipendente dal denominatore scelto, *secondo la definizione data precedentemente di equivalenza.*

Infatti se si ha

$$\frac{\overset{*}{f}_1}{\overset{*}{\varphi}_1}=\frac{\overset{*}{f}_2}{\overset{*}{\varphi}_2}\,,\quad \frac{\overset{*}{\psi}_1}{\overset{*}{\varphi}_1}=\frac{\overset{*}{\psi}_2}{\overset{*}{\varphi}_2}\,,$$

sarà

$$\frac{\overset{*}{f}_1 \pm \overset{*}{\psi}_1}{\overset{*}{\varphi}_1}=\frac{\overset{*}{f}_2 \pm \overset{*}{\psi}_2}{\overset{*}{\varphi}_2}\quad \text{giacchè}\quad \overset{*}{f}_1\overset{*}{\varphi}_2 \pm \overset{*}{\psi}_1\overset{*}{\varphi}_2=\overset{*}{f}_2\overset{*}{\varphi}_1 \pm \overset{*}{\psi}_2\overset{*}{\varphi}_1\,.$$

L'operazione indicata precedentemente si chiama sommare o sottrarre le frazioni di composizione.

Si vede di qui che tutte le regole dell'aritmetica relative alla somma o alla sottrazione delle frazioni sono estendibili a quelle di composizione.

7. *Moltiplicare una frazione di composizione per una costante consiste nel moltiplicare il numeratore per quella costante, lasciando inalterato il denominatore.*

Comporre più frazioni di composizione significa formare una frazione di composizione che ha per numeratore la resultante dei numeratori e per denominatore la resultante dei denominatori.

Le proprietà associativa e commutativa si estendono al caso di composizione di frazioni, e si riconosce che il resultato si mantiene equivalente sostituendo alle frazioni componenti, frazioni equivalenti.

Una funzione f è equivalente alla frazione

$$\frac{\overset{*}{f}}{\overset{*}{f^0}}\,.$$

quindi

$$f\,\frac{\overset{*}{\psi}}{\overset{*}{\varphi}}=\frac{\overset{*}{f}}{\overset{*}{f^0}}\,\frac{\overset{*}{\psi}}{\overset{*}{\varphi}}=\frac{\overset{*}{f}\overset{*}{\psi}}{\overset{*}{f^0}\overset{*}{\varphi}}=\frac{\overset{*}{f}\overset{*}{\psi}}{\overset{*}{\varphi}}\,. \tag{3}$$

otteniamo in tal modo la composizione di una funzione con una frazione di composizione e si riconosce subito che anche per tale composizione sussiste la proprietà commutativa.

8. Se componiamo m frazioni equivalenti $\frac{\overset{*}{f}}{\overset{*}{\varphi}}$, il resultato si scriverà

$$\left(\frac{\overset{*}{f}}{\overset{*}{\varphi}}\right)^m \quad \text{e si avrà evidentemente}\quad \left(\frac{\overset{*}{f}}{\overset{*}{\varphi}}\right)^m=\frac{\overset{*}{f^m}}{\overset{*}{\varphi^m}}\,.$$

La stessa formula si estenderà per definizione al caso di m eguale ad una frazione o ad un numero incommensurabile.

9. Dalle (3) si ricava

$$\overset{*}{f}\frac{\overset{*}{\psi}}{\overset{*}{f}} = \frac{\overset{*}{f}\overset{*}{\psi}}{\overset{*}{f}} = \frac{\overset{*}{\psi}}{\overset{*}{f}{}^{0}} = \psi .$$

Quindi componendo una frazione di composizione col suo denominatore si trova il numeratore, ossia *ogni frazione di composizione si può considerare come il resultato della operazione inversa della composizione compiuta sul numeratore mediante il denominatore*, e se adoperiamo l'esponente -1 per indicare, come precedentemente una l'operazione inversa, avremo

$$\frac{\overset{*}{\psi}}{\overset{*}{f}} = \overset{*}{\psi}\overset{*}{f}{}^{-1} .$$

Così anche

$$\frac{\overset{*}{f}{}^{0}}{\overset{*}{f}} = \overset{*}{f}{}^{0}\overset{*}{f}{}^{-1} ,$$

e estendendo la proprietà che la composizione con $\overset{*}{f}{}^{0}$ non altera l'elemento su cui si opera, potremo scrivere

$$\frac{\overset{*}{f}{}^{0}}{\overset{*}{f}} = \overset{*}{f}{}^{-1} .$$

Ora (vedi § 8)

$$(\overset{*}{f}{}^{-1})^{m} = \left(\frac{\overset{*}{f}{}^{0}}{\overset{*}{f}}\right)^{m} = \frac{\overset{*}{f}{}^{0}}{\overset{*}{f}{}^{m}} = (\overset{*}{f}{}^{m})^{-1}$$

che potremo anche scrivere

$$\overset{*}{f}{}^{-m} .$$

In generale $(\overset{*}{f}{}^{h})^{m} = \overset{*}{f}{}^{hm}$ qualunque siano h ed m positivi, negativi o nulli.

10. Vogliasi ora trovare la frazione di composizione che composta con $\frac{\overset{*}{\psi}}{\overset{*}{\theta}}$ produce $\frac{\overset{*}{f}}{\overset{*}{\varphi}}$. Avremo evidentemente per soluzione

$$\frac{\overset{*}{f}\overset{*}{\theta}}{\overset{*}{\varphi}\overset{*}{\psi}} ;$$

ossia

$$\left(\frac{\overset{*}{f}}{\overset{*}{\varphi}}\right)\left(\frac{\overset{*}{\psi}}{\overset{*}{\theta}}\right)^{-1} = \frac{\overset{*}{f}}{\overset{*}{\varphi}}\,\frac{\overset{*}{\theta}}{\overset{*}{\psi}} .$$

e anche

$$\frac{\left(\dfrac{\overset{*}{f}}{\overset{*}{\varphi}}\right)}{\left(\dfrac{\overset{*}{\psi}}{\overset{*}{\theta}}\right)} = \frac{\overset{*}{f}\overset{*}{\theta}}{\overset{*}{\varphi}\overset{*}{\psi}}.$$

11. Riassumendo, la teoria aritmetica delle frazioni può trasportarsi nel campo della composizione.

Gli elementi

$$\frac{\overset{*}{f}}{\overset{*}{\psi}} \;,\quad \overset{*}{f}{}^{-1} \;,\quad \overset{*}{f}{}^{0}$$

possono includersi nel campo di un gruppo di funzioni permutabili. *Essi non hanno più il significato di funzioni nel senso ordinario, ma tutte le operazioni colle loro proprietà associative, commutative, distributive possono estendersi agli elementi stessi.* Perciò possono chiamarsi essi pure *funzioni appartenenti al gruppo delle funzioni permutabili date*, e ad essi possiamo estendere il concetto di ordine, cioè se $\overset{*}{f}$ è di ordine m, e

$$\overset{*}{\varphi}\overset{*}{f}$$

è di ordine $n < m$ si dirà che φ è dell'ordine negativo

$$n - m\,.$$

Evidentemente se φ è di ordine positivo m, $\overset{*}{\varphi}{}^{-1}$ sarà di ordine $-m$, e il teorema che la resultante di due funzioni di dati ordini ha per ordine la somma degli ordini delle componenti, si estende al caso degli ordini negativi. Si estende anche facilmente il concetto di ordine superiore ad un ordine dato negativo nel caso in cui l'ordine non sia determinato, cioè se $\overset{*}{\varphi}\overset{*}{f}$ non fosse di ordine determinato, ma fosse di un ordine superiore ad $n < m$, si direbbe che φ è di ordine superiore a $n - m$.

12. Come abbiamo detto precedentemente (§ 1), potrebbe parere che in tal modo non si sia fatto che una teoria puramente formale; però questo non è il caso in quantochè gli elementi introdotti, pur essendo formali, cessano di essere tali, per acquistare il senso di funzioni ordinarie, ogni qualvolta si compongano con una funzione di un ordine convenientemente elevato. Così, per esempio, se si ha una somma

$$\overset{*}{f}{}^{0} + \overset{*}{f}{}^{-m} + \frac{\overset{*}{f}}{\overset{*}{\varphi}} + \frac{\overset{*}{\psi}{}^{h}}{\overset{*}{\theta}{}^{h}},$$

basterà comporla con $\overset{*}{f}{}^{m}\overset{*}{\varphi}\overset{*}{\theta}{}^{h}$ perchè divenga una funzione ordinaria.

13. Vogliamo dare subito un esempio ed una applicazione di questo concetto. Consideriamo un seguito infinito di funzioni

$$(4) \qquad f_1(x, y), f_2(x, y), \dots, f_m(x, y), \dots$$

appartenenti ad un gruppo di funzioni permutabili. Per semplicità supponiamo ridotto il gruppo alla forma canonica.

Quando è che diremo che esse tendono verso un limite?

La questione non è semplice e noi esamineremo varii casi.

1°) Siano le funzioni (4) definite nel campo

$$a \leq x \leq y \leq b,$$

e siano di ordine positivo. Esse tenderanno uniformemente verso una funzione $f(x, y)$ di ordine maggiore o eguale ad 1, se, preso comunque ε, si potrà trovare n tale che

$$(5) \qquad |f_m(x, y) - f(x, y)| < \varepsilon,$$

purchè m sia maggiore di n [1].

Si riconosce immediatamente che $f(x, y)$ appartiene anch'esso al gruppo delle funzioni permutabili.

2°) Essendo soddisfatte tutte le altre condizioni precedenti all'infuori della (5), le funzioni (4) tenderanno verso la funzione $f(x, y)$ di ordine maggiore o eguale ad α (essendo $0 < \alpha < 1$), se

$$(y - x)^{1-\alpha} |f_m(x, y) - f(x, y)| < \varepsilon.$$

Si riconosce anche in questo caso che $f(x, y)$ appartiene al gruppo delle funzioni permutabili.

Sia ora φ una funzione di ordine determinato positivo. Consideriamo

$$\overset{*}{\varphi} \overset{*}{f_1}, \overset{*}{\varphi} \overset{*}{f_2} \dots$$

esse tenderanno verso la funzione limite

$$\psi = \overset{*}{f} \overset{*}{\varphi},$$

quindi potremo dire

$$f = \frac{\psi}{\overset{*}{\varphi}}.$$

Questa proprietà serve ad estendere il concetto di limite come vedremo nel paragrafo seguente.

[1] È evidente che la condizione (5) porta come conseguenza che l'ordine positivo delle $f_m(x, y)$ deve essere uguale o superiore ad 1.

14. Siano

$$f_1, f_2, f_3, \ldots$$

delle funzioni del gruppo di ordine negativo nullo o positivo, ma tali che gli ordini stessi siano tutti superiori ad un numero negativo $-n$. Sia φ una funzione del gruppo di ordine determinato positivo superiore ad n. Le funzioni

$$\overset{*}{\varphi}\overset{*}{/_1}, \overset{*}{\varphi}\overset{*}{f_2}, \overset{*}{\varphi}\overset{*}{f_3}, \ldots \tag{6}$$

saranno tutte di ordini positivi. Se esse tendono, secondo i criterii sopra stabiliti, verso una funzione di ordine positivo

$$\psi(x, y)$$

chiameremo limite di $f_1, f_2, f_3, \ldots$ la frazione di composizione

$$\frac{\overset{*}{\psi}(x, y)}{\overset{*}{\varphi}(x, y)}\ (^1).$$

Per giustificare questa definizione basta provare che il detto limite è indipendente da φ. Infatti invece di φ prendiamo φ' di ordine superiore ad n. Avremo

$$\overset{*}{\varphi'}\overset{*}{f_1}, \overset{*}{\varphi'}\overset{*}{f_2}, \overset{*}{\varphi'}\overset{*}{f_3}, \ldots \tag{6'}$$

Due casi possono presentarsi: o queste funzioni hanno un limite ψ', o non esiste limite. Nel primo caso avremo che

$$\overset{*}{\varphi}(\overset{*}{\varphi'}\overset{*}{f_1}), \overset{*}{\varphi}(\overset{*}{\varphi'}\overset{*}{f_2}), \ldots$$

avranno per limite $\varphi\psi'$.

Nello stesso modo

$$\overset{*}{\varphi'}(\overset{*}{\varphi}\overset{*}{f_1}), \overset{*}{\varphi'}(\overset{*}{\varphi}\overset{*}{f_2}), \ldots$$

avranno per limite $\varphi'\psi$. Ma, per le proprietà associativa e commutativa,

$$\varphi(\varphi' f_1) = \varphi'(\varphi f_1), \quad \varphi(\varphi' f_2) = \varphi'(\varphi f_2), \ldots$$

quindi

$$\varphi\psi' = \varphi'\psi$$

che porta come conseguenza

$$\frac{\psi}{\varphi} = \frac{\psi'}{\varphi'}.$$

Il caso che l'insieme delle funzioni (6') non abbia limite, mentre lo ha l'insieme delle (6), può presentarsi benissimo.

(1) Evidentemente deve supporsi che ψ sia tale che corrisponda alle condizioni poste nel § 3 per la definizione di frazione.

Ne diamo qui un esempio. Sia

$$f_n(y-x) = \operatorname{sen} n \cos n(y-x) + \cos(y-x).$$

Le funzioni

$$f_1, f_2, f_3, \dots, f_n, \dots$$

non ammettono alcun limite per $n=\infty$. Ma formiamo

$$\overset{*}{f_n} \overset{*}{1} = \frac{1}{n} \operatorname{sen} n \operatorname{sen} n(y-x) + \operatorname{sen}(y-x).$$

Questa avrà per limite per $n=\infty$

$$\operatorname{sen}(y-x) = \varphi,$$

quindi, in virtù della precedente definizione,

$$\lim_{n=\infty} f_n = \overset{*}{\varphi} \overset{*}{1}^{-1} = \cos(y-x).$$

Secondo dunque la definizione data si avrebbe un limite per l'insieme delle funzioni f_n che non sussisterebbe secondo la definizione ordinaria di limite.

15. Secondo la definizione adesso data di limite noi possiamo esprimere $\overset{*}{f}{}^0$ come un limite.

Prendiamo $\overset{*}{f}{}^{\frac{1}{n}}$ con n intero e positivo, avremo

$$\overset{*}{f} \overset{*}{f}{}^{\frac{1}{n}} = \overset{*}{f}{}^{\frac{n+1}{n}},$$

quindi nella ipotesi che, per n tendente all' ∞, $\overset{*}{f}{}^{\frac{n+1}{n}}$ tenda verso f (vedi §§ 13, 14), avremo

$$\lim_{n=\infty} \overset{*}{f}{}^{\frac{1}{n}} = \overset{*}{f}{}^0.$$

Noi abbiamo veduto che

$$\overset{*}{1}{}^z = \frac{(y-x)^{z-1}}{\Gamma(z)},$$

perciò potremo considerare

$$\overset{*}{1}{}^0 = \lim_{z=0} \frac{1}{\Gamma(z)\,(y-x)^{1-z}}.$$

Ma $\overset{*}{f}{}^0$ si può ottenere come limite in altri infiniti modi.

Supponiamo che il gruppo sia stato ridotto alla forma canonica, e riprendiamo le formule del § 8 del Cap. I. Ponendo

$$\lambda(\xi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} h e^{-h^2 \xi^2},$$

la (2) del detto capitolo diverrà

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} he^{-h^2(y-x)^2} + \int_0^{y-x} \frac{2h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\xi^2} \Phi(\xi|x, y)\, d\xi\,.$$

Questa funzione è permutabile con una funzione $\varphi(x, y)$ del gruppo. Eseguendo la composizione avremo

$$\int_x^y \varphi(\xi, y) \frac{2h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2(\xi-x)^2} d\xi + \int_x^y \varphi(\xi, y)\, d\xi \int_0^{\xi-x} \frac{2h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\eta^2} \Phi(\eta|x, \xi)\, d\eta$$

$$= \int_0^{y-x} \varphi(x+\zeta, y) \frac{2h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\zeta^2} d\zeta +$$

$$+ \int_0^{y-x} \frac{2h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\eta^2} d\eta \int_\eta^{y-x} \varphi(x+\zeta, y)\, \Phi(\eta|x, x+\zeta)\, d\zeta\,.$$

Passando al limite per $h = \infty$ otteniamo

$$\varphi(x, y) + \int_x^y \varphi(\xi, y)\, \Phi(o|x, \xi)\, d\xi\,.$$

Ciò prova che

$$\Phi(o|x, y)$$

è una funzione permutabile appartenente al gruppo. Apparterrà dunque al gruppo anche la funzione

$$\psi_h(x, y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} he^{-h^2(y-x)^2} + \int_0^{y-x} \frac{2h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\xi^2} \Phi(\xi|x, y)\, d\xi - \Phi(o|x, y)\,,$$

e avremo

$$\lim_{h=\infty} (\overset{*}{\varphi}\, \overset{*}{\psi}_h) = \varphi(x, y)\,,$$

onde

$$\lim_{h=\infty} \overset{*}{\psi}_h = \overset{*}{f}{}^0\,,$$

denotando con f una funzione qualsiasi appartenente al gruppo.

In modo analogo potrebbero anche calcolarsi come limite $\overset{*}{f}{}^{-1}$, $\overset{*}{f}{}^{-2}$, ...

16. Vogliamo fare un'ultima applicazione, al caso delle serie, di ciò che è stato detto alla fine del § 12.

Abbiasi la serie

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots$$

il cui raggio di convergenza sia R.

Sostituiamo a z

$$\Psi = A(\overset{*}{F}{}^0 + F)\,,$$

e consideriamo le potenze come operazioni di composizioni.

Dovremo sostituire

$$\overset{*}{\Psi}{}^m = A^m(F^0 + m F + \frac{m(m-1)}{2!} \overset{*}{F}{}^2 + \cdots).$$

a z^m.

La serie sarà convergente se esisterà un limite per la somma dei primi m termini, quando m cresce indefinitamente.

Componiamo $\overset{*}{\Psi}_m$ con una funzione di ordine determinato positivo

$$\varphi(x, y) = f(x, y)(y-x)^{\alpha-1},$$

ove

$$|f(x, y)| < N.$$

Supponiamo F di ordine determinato positivo λ, e chiamiamo M un numero maggiore del massimo modulo della sua caratteristica; sarà

$$|\overset{*}{F}{}^h| < M^h(y-x)^{h\lambda-1}$$

$$|\overset{*}{F}{}^h \overset{*}{\varphi}| < M^h N(y-x)^{h\lambda+\alpha-1}$$

$$|\overset{*}{\Psi}{}^m \overset{*}{\varphi}| < A^m N(y-x)^{\alpha-1}\left(1 + m M(y-x)^\lambda + \frac{m(m-1)}{2!}(y-x)^{2\lambda} + \cdots\right)$$
$$= A^m N(y-x)^{\alpha-1}(1 + M(y-x)^\lambda)^m.$$

Dunque per la convergenza della serie

$$a_0 \overset{*}{\Psi}{}^0 + a_1 \Psi + a_2 \overset{*}{\Psi}{}^2 + \cdots$$

sarà sufficiente che

$$|A(1 + M(y-x)^\lambda)| < R.$$

17. Nel § 3 abbiamo posto come condizioni alle funzioni del gruppo che si consideravano di essere di ordini determinati e tali che anche le loro combinazioni lineari fossero di ordini determinati, ed inoltre che prese due funzioni, l'una di ordine superiore all'altra, questa composta con una ed una sola funzione riproducesse la prima. Ora alcune di queste restrizioni possono togliersi senza che cessino di esser vere alcune delle proposizioni stabilite. Così noi potremo supporre che i soli denominatori soddisfino alle condizioni precedenti. La proposizione fondamentale che due frazioni di composizione eguali ad una terza sono eguali fra loro seguiterà a sussistere, e così le operazioni di somma, sottrazione, moltiplicazione per una costante, e composizione delle frazioni di composizione colle loro proprietà varranno sempre. Non potrà dirsi lo stesso per la divisione, a meno che anche il numeratore della frazione divisore non soddisfi, come i denominatori, alle precedenti condizioni.

La estensione che adesso abbiamo fatta appare necessaria, giacchè, anche partendo da un insieme di funzioni del gruppo che godono delle proprietà stabilite al

§ 3, se si introducono nel gruppo delle funzioni limiti, queste (come si riconosce facilmente) possono non più soddisfare alla condizione di essere di un ordine determinato.

Si può anche estendere (con lievi e semplici modificazioni delle proposizioni enunciate) il campo delle considerazioni al caso in cui le funzioni del gruppo dalle quali si parte, possano essere di ordine non determinato purchè siano di ordine superiore ad un numero positivo, ed inoltre i denominatori siano tali che una funzione qualunque del gruppo, la quale, rapporto ad un denominatore, sia di ordine non inferiore ad un numero determinato positivo, possa ottenersi dal denominatore stesso in un sol modo componendolo con un'altra funzione del gruppo.

18. Abbiamo accennato alla fine del capitolo precedente (§ 15) alla estensione del campo di applicazione del teorema del § 2, Cap. X, e delle considerazioni del § 11 del Chap. XI dell'opera più volte citata (*Leçons sur les fonctions de lignes*), in seguito all'introduzione delle funzioni di ordine fratto. Analoga cosa si può dire adesso in virtù della introduzione di frazioni di composizione, e delle funzioni di ordine negativo appartenenti ad un gruppo di funzioni permutabili. Ad equazioni algebriche o differenziali, le cui soluzioni hanno dei *poli*, corrispondono dalle equazioni integro-differenziali *le cui soluzioni possono esprimersi mediante funzioni di ordine negativo.*

CAP. IV.

Progressioni di composizione - Logaritmi di composizione.

1. Sia $\varphi(x, y)$ una funzione di ordine determinato positivo. Consideriamo la successione

$$\ldots\ldots \overset{*}{\varphi}^{-3}, \overset{*}{\varphi}^{-2}, \overset{*}{\varphi}^{-1}, \overset{*}{\varphi}^{0}, \varphi, \overset{*}{\varphi}^{2}, \overset{*}{\varphi}^{3}, \ldots\ldots$$

Diremo che essa costituisce una *progressione di composizione* avente per *ragione* φ.

Gli esponenti si diranno i *logaritmi di composizione* delle varie potenze di composizione e φ se ne dirà la *base*. Scriveremo

$$n = \overset{*}{\log}_{\varphi} \overset{*}{\varphi}^{n},$$

con n positivo o negativo.

Tutta la teoria aritmetica dei logaritmi è evidentemente estensibile a quelli di composizione ora introdotti. Così *il logaritmo della resultante di più funzioni è la somma dei logaritmi delle funzioni componenti, ecc.*

Analogamente la progressione di composizione gode di proprietà analoghe alle progressioni geometriche. In particolare

$$\overset{*}{\varphi}^{0} + \varphi + \overset{*}{\varphi}^{2} + \cdots + \overset{*}{\varphi}^{n} = \frac{\overset{*}{\varphi}^{0} - \overset{*}{\varphi}^{n+1}}{\overset{*}{\varphi}^{0} - \overset{*}{\varphi}}.$$

3. Mediante la inserzione di medii si può passare a logaritmi frazionarii. Inseriamo, mediante il calcolo di $\overset{*}{\varphi}^{\frac{1}{m}}$, m medii fra due elementi della progressione; otterremo

$$\ldots \overset{*}{\varphi}^{-1} \ldots \overset{*}{\varphi}^{-\frac{2}{m}}, \overset{*}{\varphi}^{-\frac{1}{m}}, \overset{*}{\varphi}^{0} \overset{*}{\varphi}^{\frac{1}{m}}, \overset{*}{\varphi}^{\frac{2}{m}}, \ldots, \varphi, \overset{*}{\varphi}^{\frac{m+1}{m}}, \ldots, \overset{*}{\varphi}^{2} \ldots$$

che potrà considerarsi come una nuova progressione di composizione avente per ragione $\overset{*}{\varphi}^{\frac{1}{m}}$, e potremo scrivere

$$\frac{h}{m} = \overset{*}{\log}_{\varphi} \overset{*}{\varphi}^{\frac{h}{m}},$$

con h e m numeri interi.

In generale, se r è un numero positivo o negativo razionale o irrazionale, porremo

$$r = \overset{*}{\log}_{\varphi} \overset{*}{\varphi}^{r}. \tag{1}$$

e a questi logaritmi di composizione potremo estendere le proprietà dei logaritmi aritmetici.

4. Ci farà comodo di scrivere le potenze di composizione sotto la forma

$$\overset{*}{\varphi}^{r} = \overset{*}{\varphi}^{r\overset{*}{\varphi}^{0}},$$

e quindi di scrivere invece della (1)

$$r\overset{*}{\varphi}^{0} = \overset{*}{\log}_{\varphi} \overset{*}{\varphi}^{r\overset{*}{\varphi}^{0}} = \overset{*}{\log}_{\varphi} \overset{*}{\varphi}^{r}.$$

5. In tal modo noi possiamo, partendo da una base φ e considerandone tutte le potenze reali, avere i logaritmi espressi mediante numeri reali moltiplicati per $\overset{*}{\varphi}^{0}$; ma senza un passo ulteriore non ci sarà possibile di ricavare un

$$\overset{*}{\log}_{\varphi} \psi$$

se ψ, pur essendo permutabile con φ, non è una potenza di φ. Questo ulteriore passo non si potrà fare senza la introduzione del *concetto fondamentale della base neperiana.*

CAP. V.

Base neperiana dei logaritmi di composizione – Logaritmi neperiani di composizione – Estensione della teoria dei logaritmi di composizione.

1. Prendiamo la funzione

$$e\overset{*}{f}^{0} = \overset{*}{e};$$

avremo

$$\overset{*}{e}^{z} = e^{z}\overset{*}{f}^{0},$$

e quindi

$$\frac{d}{dz}\overset{*}{e}^{z} = e^{z}\overset{*}{f}^{0} = \overset{*}{e}^{z}.$$

A cagione di questa proprietà, noi chiameremo $\overset{*}{e}$ la *base dei logaritmi neperiani di composizione*.

Avremo evidentemente

$$\overset{*}{e}^z = \overset{*}{f}^0 \left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots\right),$$

e, in virtù della convenzione fatta nel Cap. precedente,

$$\overset{*}{e}^z = \overset{*}{e}^{z\overset{*}{f}^0} = (z\overset{*}{f}^0)^0 + z\overset{*}{f}^0 + \frac{(z\overset{*}{f}^0)^2}{2!} + \frac{(z\overset{*}{f}^0)^3}{3!} + \cdots$$

2. Analogamente, *per definizione*, porremo

(1) $$\overset{*}{e}^{\Phi} = \overset{*}{\Phi}^0 + \Phi + \frac{\overset{*}{\Phi}^2}{2!} + \frac{\overset{*}{\Phi}^3}{3!} + \cdots = \Psi,$$

e scriveremo

$$\Phi = \overset{*}{\log}_{\overset{*}{e}} \Psi,$$

o anche, più semplicemente,

$$\Phi = \overset{*}{l}\, \Psi.$$

Con la introduzione di questi nuovi concetti noi riesciremo a risolvere il problema che ci siamo proposti alle fine del Cap. precedente.

3. Cominciamo perciò dal risolvere la questione: dato Ψ mediante l'equazione precedente determinare Φ.

Avremo

$$\overset{*}{e}^{z\Phi} = \overset{*}{\Psi}^z,$$

quindi, derivando rispetto a z,

$$\frac{d\overset{*}{\Psi}^z}{dz} = \overset{*}{e}^{z\Phi}\, \overset{*}{\Phi} = \overset{*}{\Psi}^z \overset{*}{\Phi},$$

d'onde

(3) $$\overset{*}{\Psi}^{-z} \frac{d\overset{*}{\Psi}^z}{dz} = \Phi = \overset{*}{l}\, \Psi.$$

Siamo giunti così alla formula molto semplice (3) per ricavare $\overset{*}{l}\, \Psi$ allorchè si conosce $\overset{*}{\Psi}^z$. Però, con quello che abbiamo fin qui detto, la validità della formula è subordinata al sapere *a priori* che esiste il $\overset{*}{l}\, \Psi$.

4. Ma supponiamo, ora, che ci sia data una funzione qualunque ψ del gruppo; e ammettiamola, per semplicità, di ordine determinato α.

Supponiamo inoltre (vedi Cap. II, § 12) che, avendo calcolato $\overset{*}{\psi}^z$, questa resulti data da

(2) $$(y - x)^{\alpha z - 1}\, G(x, y|z),$$

ove G sia una funzione analitica di z..

Calcoliamo

$$\frac{d\overset{*}{\psi}{}^z}{dz};$$

essa resulterà

$$\alpha(y-x)^{\alpha z-1}\,G(x\,,y\,|\,z)\log(y-x)+(y-x)^{\alpha z-1}\,G'(x\,,y\,|\,z)\,,$$

denotando con G′ la derivata di G rispetto a z [1].

Ne segue che

$$\frac{d\overset{*}{\psi}{}^z}{dz}$$

non sarà di ordine determinato; però potremo considerare la frazione di composizione (vedi Cap. III, § 17)

$$(3') \qquad \overset{*}{\psi}{}^{-z}\,\frac{d\overset{*}{\psi}{}^z}{dz}=\Theta\,.$$

È facile dimostrare che Θ è indipendente da z. Infatti abbiamo

$$\overset{*}{\psi}{}^{z+\varepsilon}-\overset{*}{\psi}{}^z=\overset{*}{\psi}{}^z(\overset{*}{\psi}{}^\varepsilon-\overset{*}{\psi}{}^0).$$

Ora, $\overset{*}{\psi}{}^\varepsilon-\overset{*}{\psi}{}^0$ è indipendente da z; dal che discende subito la proposizione enunciata.

Dalla (3′) segue

$$\frac{d\overset{*}{\psi}{}^z}{dz}=\overset{*}{\psi}{}^z\,\Theta\,,$$

quindi

$$\frac{d^2\overset{*}{\psi}{}^z}{dz^2}=\overset{*}{\psi}{}^z\,\overset{*}{\Theta}{}^2$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$\frac{d^h\overset{*}{\psi}{}^z}{dz^h}=\overset{*}{\psi}{}^z\,\Theta^h.$$

Ma

$$\overset{*}{\psi}{}^z+\frac{d\overset{*}{\psi}{}^z}{dz}+\frac{1}{2!}\,\frac{d^2\overset{*}{\psi}{}^z}{dz^2}+\cdots+\frac{1}{h!}\,\frac{d^h\overset{*}{\psi}{}^z}{dz^h}+\cdots,$$

se la serie è convergente nel cerchio di raggio 1 il cui centro è z, ha per somma

$$\overset{*}{\psi}{}^{z+1},$$

quindi

$$\overset{*}{\psi}{}^{z+1}=\overset{*}{\psi}{}^z\left(\overset{*}{\Theta}{}^0+\overset{*}{\Theta}+\frac{\overset{*}{\Theta}{}^2}{2!}+\frac{\overset{*}{\Theta}{}^3}{3!}+\cdots\right).$$

[1] A scanso di equivoci teniamo presente che con $\log A = lA$ noi intendiamo di rappresentare il logaritmo neperiano del numero A.

e per conseguenza

$$\psi = \overset{*}{\Theta}{}^0 + \Theta + \frac{\overset{*}{\Theta}{}^2}{2!} + \frac{\overset{*}{\Theta}{}^3}{3!} + \cdots ,$$

da cui segue

$$\Theta = \overset{*}{l}\,\psi .$$

Basterà dunque sapere che $\overset{*}{\psi}{}^z$ può porsi sotto la forma (2) e che essa è una funzione analitica intera di z per concludere che esiste il $\overset{*}{l}\,\psi$ e che esso si può ottenere mediante la formula (3').

5. Come esempio noi vogliamo calcolare

$$\overset{*}{l}\,1 ,$$

ricordando che l'unità appartiene al gruppo del ciclo chiuso (cfr. Cap. I, § 11).

Noi abbiamo trovato (Cap. II, § 14)

$$\overset{*}{1}{}^z = \frac{1}{\Gamma(z)}(y-x)^{z-1} .$$

Ora è ben noto che $\frac{1}{\Gamma(z)}$ è una funzione intera; quindi potremo senz'altro applicare il procedimento precedente, e avremo

(4) $$\frac{d\overset{*}{1}{}^z}{dz} = \frac{1}{\Gamma(z)}(y-x)^{z-1}\log(y-x) - \frac{1}{\Gamma^2(z)}(y-x)^{z-1}\Gamma'(z) = \Theta(x\,.\,y\,|\,z) ,$$

e

(5) $$\overset{*}{l}\,1 = \overset{*}{\Theta}\,\overset{*}{1}{}^{-z} .$$

Pel teorema precedente, dovrà il secondo membro essere indipendente da z. Facciamo quindi $z = 1$; si otterrà

$$\Theta = \log(y-x) - \Gamma'(1) .$$

Ora

$$C = -\Gamma'(1) = -\int_0^\infty e^{-x}\log x\,dx = 0{,}57721\ldots \qquad \text{(costante di Eulero)} ,$$

quindi

(6) $$\overset{*}{l}\,1 = \frac{\overset{*}{\overbrace{\log(y-x) + C}}}{\overset{*}{1}} .$$

6. Il teorema generale del § precedente conduce a riconoscere che l'espressione (5) deve essere indipendente da z. Ma *a priori* la cosa non resulta immediatamente quando si osservi a primo aspetto la espressione (5); quindi, dato l'interesse e la curiosità del risultato passiamo a verificarlo direttamente. La espressione (5) non può mettersi sotto una forma analitica, e, come è noto, ha un puro significato simbolico; però noi possiamo applicare un principio generale (cfr. Cap. III, § 12), mediante il quale qualunque espressione del tipo stesso perde il significato simbolico per divenire una funzione ordinaria. Se dunque

$$\overset{*}{\Theta}\,\overset{*}{1}{}^{-z}$$

ha un significato puramente simbolico,

$$(\overset{*}{\Theta}\,\overset{*}{1}^{-z})\,\overset{*}{1}$$

è una funzione ordinaria. Basterà dunque verificare direttamente sopra questa funzione ordinaria, che essa è indipendente da z.

Ora

$$(\overset{*}{\Theta}\,\overset{*}{1}^{-z})\,\overset{*}{1} = \overset{*}{\Theta}\,\overset{*}{1}^{1-z}.$$

Ma

$$\Theta = \frac{1}{\Gamma(z)}(y-x)^{z-1}\log(y-x) - \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\,\overset{*}{1}^{z};$$

quindi

$$\overset{*}{\Theta}\,\overset{*}{1}^{1-z} = \frac{1}{\Gamma(z)\,\Gamma(1-z)}\int_x^y \frac{\log(\xi-x)\,d\xi}{(\xi-x)^{1-z}(y-\xi)^z} - \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}.$$

Abbiamo

$$\int_x^y \frac{\log(\xi-x)\,d\xi}{(\xi-x)^{\beta}(y-\xi)^{\alpha}} = -\frac{\partial}{\partial\beta}\int_x^y \frac{d\xi}{(y-\xi)^{\alpha}(\xi-x)^{\beta}} =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial\beta}\left[\frac{1}{(y-x)^{\alpha+\beta-1}}\,\frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(1-\alpha-\beta)}\right].$$

Questa espressione si calcola senza alcuna difficoltà. Facendo poi $\alpha = z$, $\beta = 1-z$, si ottiene

$$\int_x^y \frac{\log(\xi-x)\,d\xi}{(y-\xi)^z(\xi-x)^{1-z}} = \Gamma(z)\,\Gamma(1-z)\left\{\log(y-x) + \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} - \Gamma'(1)\right\},$$

da cui finalmente si ricava

$$\overset{*}{\Theta}\,\overset{*}{1}^{1-z} = \log(y-x) + C$$

che coincide col resultato (6) precedentemente ottenuto.

7. Verifichiamo ora che, sostituendo

$$\overset{*}{l}\,1 = \Phi$$

nella serie (1) al posto di Φ, otteniamo l'*unità* come somma della serie.

Abbiamo infatti, posto

$$\overset{*}{1}^{z} = \frac{1}{\Gamma(z)}(y-x)^{z-1} = \Theta(x\,,y\,|\,z)$$

$$\frac{d\Theta}{dz} = \overset{*}{\Theta}\,\overset{*}{\Phi}$$

$$\frac{d^2\Theta}{dz^2} = \overset{*}{\Theta}\,\overset{*}{\Phi}^2$$

. . . .

$$\frac{d^h\Theta}{dz^h} = \overset{*}{\Theta}\,\overset{*}{\Phi}^h,$$

. . . .

e quindi

$$\overset{*}{\Theta}\left(\overset{*}{\Phi}{}^0 + \overset{*}{\Phi} + \frac{\overset{*}{\Phi}{}^2}{2!} + \frac{\overset{*}{\Phi}{}^3}{3!} + \cdots\right) = \Theta + \frac{d\Theta}{dz} + \frac{1}{2!}\frac{d^2\Theta}{dz^2} + \cdots$$

Ora, Θ è una *funzione intera*; per conseguenza

$$\overset{*}{\Theta}\left(\overset{*}{\Phi}{}^0 + \overset{*}{\Phi} + \frac{\overset{*}{\Phi}{}^2}{2!} + \cdots\right) = \Theta(x\,,y\,|\,z+1),$$

onde

$$\overset{*}{\Phi}{}^0 + \Phi + \frac{\overset{*}{\Phi}{}^2}{2!} + \cdots = \frac{\overset{*}{\Theta}(x\,,y\,|\,z+1)}{\overset{*}{\Theta}(x\,,y\,|\,z)} = 1\,.$$

8. Nel § 2 abbiamo stabilito la definizione di $\overset{*}{l}\Psi$. È facile verificare le proprietà fondamentali seguenti:

(7)	$\overset{*}{l}(\overset{*}{\Psi}\overset{*}{\Theta}) = \overset{*}{l}\Psi + \overset{*}{l}\Theta$,	(8)	$\overset{*}{e}{}^{\varphi+\chi} = (\overset{*}{e}{}^{\varphi})(\overset{*}{e}{}^{\chi})$
(7′)	$\overset{*}{l}\left(\dfrac{\overset{*}{\Psi}}{\overset{*}{\Theta}}\right) = \overset{*}{l}\Psi - \overset{*}{l}\Theta$,	(8′)	$\overset{*}{e}{}^{\varphi-\chi} = \dfrac{\overset{*}{e}{}^{\varphi}}{\overset{*}{e}{}^{\chi}}$
(7″)	$\overset{*}{l}(\overset{*}{\Psi}{}^m) = m\,\overset{*}{l}\Psi$,	(8″)	$(\overset{*}{e}{}^{\varphi})^m = \overset{*}{e}{}^{m\varphi}$
(7‴)	$\overset{*}{l}(c\,\Theta) = \overset{*}{l}\,c\,\overset{*}{\Theta}{}^0 + \overset{*}{l}\,\Theta$,	(8‴)	$\overset{*}{e}{}^{c\overset{*}{\Phi}{}^0+\Phi} = e^c\,\overset{*}{e}{}^{\Phi}$,

ove m è un numero intero o frazionario; ed al limite le formule precedenti varranno anche per m incommensurabile. c denota una costante.

È evidente che

$$\overset{*}{e}{}^{2\pi ni\overset{*}{f}{}^0} = \overset{*}{f}{}^0$$

allorchè n è un numero intero. Ne segue che $\overset{*}{l}f$ è individuato a meno di un termine additivo $2\pi ni\overset{*}{f}{}^0$ nello stesso modo che il logaritmo neperiano di un numero A è individuato a meno del termine $2\pi ni$. Per conseguenza le formule (7), (7′), (7″), (7‴) e le analoghe vanno interpretate in modo simile a quello col quale si interpretano le corrispondenti formule della ordinaria teoria dei logaritmi.

Supponiamo ora m complesso. Noi estenderemo, *per definizione*, la formula (8″) al caso di m complesso; e siccome il secondo membro, in virtù della (1), è rappresentato dalla serie

$$(m\overset{*}{\varphi})^0 + m\varphi + \frac{(m\overset{*}{\varphi})^2}{2!} + \cdots$$

che ha un senso ben determinato, così resta definito il primo membro.

Supponiamo ora $\overset{*}{e}{}^{\varphi} = \Psi$; sarà quindi definito

$$\overset{*}{\Psi}{}^m$$

per m complesso, e sarà

$$\overset{*}{\Psi}^m = \overset{*}{e}^{m\overset{*}{l}\Psi}.$$

Evidentemente siccome $\overset{*}{e}^\varphi$ non cambia aggiungendo a φ il termine $2\pi n i \overset{*}{\varphi}{}^0$, così $(\overset{*}{e}^\varphi)^m$ è determinato a meno del fattore $e^{2\pi m n i}$.

Per definizione noi stabiliremo anche la formula seguente:

$$(\overset{*}{e}^\varphi)^\theta = \overset{*}{e}^{\overset{*}{\varphi}\overset{*}{\theta}},$$

nella ipotesi che φ e θ siano funzioni permutabili. Siccome il secondo membro ha un senso conosciuto, così resta definito il primo membro; e, se

$$\overset{*}{e}^\varphi = \Psi,$$

resterà definito

$$\overset{*}{\Psi}^\theta,$$

e precisamente avremo

$$\overset{*}{\Psi}^\theta = \overset{*}{e}^{\overset{*}{\theta}\overset{*}{l}\Psi}. \tag{9}$$

Anche in questo caso, analogamente ai precedenti, $\overset{*}{\Psi}^\theta$ sarà determinato a meno del fattore di composizione $\overset{*}{e}^{2\pi n i \theta}$.

Scriviamo

$$\overset{*}{\Psi}^\theta = \chi, \tag{10}$$

noi porremo per definizione

$$\theta = \overset{*}{\log}_\Psi \chi \tag{11}$$

e lo chiameremo il *logaritmo di composizione di* χ *e base* Ψ.

Dalle (9) e (10) segue

$$\overset{*}{\theta}\overset{*}{l}\Psi = \overset{*}{l}\chi,$$

e quindi per le (11)

$$\overset{*}{\log}_\Psi \chi = \frac{\overset{*}{l}\chi}{\overset{*}{l}\Psi}. \tag{12}$$

Naturalmente conviene, affinchè il secondo membro abbia un significato, non solo che possano trovarsi i logaritmi neperiani di composizione di χ e Ψ, ma che la frazione che comparisce al secondo membro abbia un senso. Sotto queste condizioni il problema propostoci alla fine del Cap. precedente resta risoluto. Per ciò che riguarda il fatto che abbia un senso la frazione di composizione del secondo membro della relazione (12) rimandiamo al prossimo Capitolo.

9. Sia

$$\Psi = \overset{*}{f}{}^{0} + f,$$

ove f è una funzione di ordine positivo superiore ad un dato numero, la serie

$$f + \frac{\overset{*}{f}{}^{2}}{2} + \frac{\overset{*}{f}{}^{3}}{3} + \cdots$$

sarà una serie convergente (ved. Cap. II, § 6) e avremo

$$\overset{*}{l}\Psi = f + \frac{\overset{*}{f}{}^{2}}{2} + \frac{\overset{*}{f}{}^{3}}{3} + \cdots$$

Ciò si verifica immediatamente ricorrendo alla formula (1).

Se

$$\Psi = a\overset{*}{f}{}^{0} + f,$$

ove a è una costante, avremo

$$\overset{*}{l}\Psi = la \,.\, \overset{*}{f}{}^{0} + \frac{f}{a} + \frac{\overset{*}{f}{}^{2}}{2a^{2}} + \cdots$$

e, se

$$\psi = \theta^{\alpha}(a\overset{*}{f}{}^{0} + \overset{*}{f}), \tag{13}$$

sarà

$$\overset{*}{l}\psi = \alpha\overset{*}{l}\theta + la\overset{*}{f}{}^{0} + \frac{f}{a} + \frac{\overset{*}{f}{}^{2}}{2a^{2}} + \cdots \tag{14}$$

Ne segue che, *se noi conosciamo il logaritmo neperiano di composizione di una funzione θ di un gruppo, mediante la formula* (14) *potremo calcolarlo per tutte le funzioni del gruppo della forma* (13) che ne costituiscono una classe molto estesa (cfr. Cap. III, § 3).

10. Vogliamo dar subito una applicazione di questo resultato.

Si debba calcolare il logaritmo neperiano di composizione di una funzione qualunque, appartenente al gruppo del ciclo chiuso, del primo ordine e derivabile.

Sia $F(y-x)$ questa funzione; e supponiamo, per semplicità, $F(0) = 1$.

Avremo

$$F = \overset{*}{1}(\overset{*}{F}{}^{0} + F'),$$

ove F' denota la derivata di F.

Applicando dunque le formule (14) e (6), avremo:

$$\overset{*}{l}F = \left(\overset{*}{\overbrace{\log(y-x) + C}}\right)\overset{*}{1}{}^{-1} + F' + \frac{\overset{*}{F}{}'^{2}}{2} + \frac{\overset{*}{F}{}'^{3}}{3} + \cdots$$

11. Supponiamo, ora, che si voglia avere il logaritmo di composizione di F a base 1.

Formalmente potremo scrivere

$$\overset{*}{\log}_1 \mathrm{F} = \frac{\overset{*}{l}\,\mathrm{F}}{\overset{*}{l}\,1} = \frac{\overset{*}{1}\overset{*}{l}\,\mathrm{F}}{\overset{*}{1}\overset{*}{l}\,1} = \frac{\overset{*}{1}\overset{*}{l}\,\mathrm{F}}{\overbrace{(\log(y-x)+\mathrm{C})}^{*}} = \overset{*}{\mathrm{F}}{}^0 + \frac{\overset{*}{\mathrm{F}}{}'\overset{*}{1} + \frac{\overset{*}{\mathrm{F}}{}'^2\overset{*}{1}}{2} + \frac{\overset{*}{\mathrm{F}}{}'^3\overset{*}{1}}{3} + \cdots}{\overbrace{(\log(y-x)+\mathrm{C})}^{*}}.$$

Ciò porta, come conseguenza, a risolvere una equazione integrale di prima specie avente per nucleo $\log(y-x)+\mathrm{C}$ (cfr. Cap. III, § 4).

Siamo così condotti ad una nuova classe di equazioni integrali che conviene studiare e che formerà il soggetto del Capitolo seguente.

12. Ma il precedente problema non è che un caso particolare di una questione molto più generale.

Dalla (12) abbiamo, se ψ e χ sono funzioni permutabili,

$$\overset{*}{\log}_\psi \chi = \frac{\overset{*}{l}\chi}{\overset{*}{l}\psi};$$

e, se $\overset{*}{\psi}{}^z$ è dato dalla formula (2), sarà

$$\overset{*}{\log}_\psi \chi = \frac{\overset{*}{l}\chi\,\overset{*}{\psi}{}^z}{\overbrace{[\alpha(y-x)^{\alpha z-1}\,\mathrm{G}(x,y|z)\log(y-x) + (y-x)^{\alpha z-1}\,\mathrm{G}'(x,y|z)]}^{*}};$$

avremo dunque da risolvere nuove equazioni integrali di prima specie il cui nucleo involve dei termini logaritmici. Anche questa questione generale sarà trattata nel seguente Capitolo.

13. Facciamo ancora una osservazione prima di chiudere questo Capitolo: cioè che analoghe estensioni a quelle a cui abbiamo accennato nel § 15 del Cap. II, e nel § 18 del Cap. III, si possono fare colla introduzione dei logaritmi di composizione.

CAP. VI.

Risoluzione di una nuova classe di equazioni integrali – Applicazioni a varii problemi della teoria dei logaritmi di composizione.

1. Abbiamo veduto, alla fine del Cap. precedente, la necessità di risolvere delle equazioni integrali (tipo Volterra) il cui nucleo contenga un termine con un fattore logaritmico.

Queste equazioni integrali non rientrano nelle classi finora studiate, e costituiscono quindi una classe nuova. Noi la esamineremo in questo Capitolo.

Le equazioni, che prenderemo a considerare dapprima, saranno della forma seguente:

$$\int_0^x f(\xi)\left\{(x-\xi)^{\alpha-1}\sum_0^n{}_k\,\mathrm{M}_k \log^{n+k}(x-\xi) + (x-\xi)^\alpha\,\mathrm{F}(\xi,x)\right\}d\xi = \varphi(x)$$

(ove supporremo $0 < \alpha < \infty$; le M_k, quantità costanti; e $F(\xi, x)$ finita, continua e derivabile) [1]; la $f(\xi)$ è la funzione incognita.

2. Cominceremo dall'esaminare il caso in cui l'equazione precedente si riduca a

$$\int_0^x f(\xi) \{\log(x-\xi) + C\} \, d\xi = \varphi(x) , \tag{1}$$

ove C denota la costante di Eulero (ved. Cap. IV, § 5).

Questa equazione potremo anche scriverla

$$\int_0^x f(\xi) \left(\frac{d}{d\alpha} \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} (x-\xi)^{\alpha-1} \right) \right)_{\alpha=1} d\xi = \varphi(x) . \tag{1'}$$

Consideriamo quindi dapprima l'equazione

$$\int_0^x f(\xi) \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (x-\xi)^{\alpha-1} d\xi = \psi(x, \alpha) \tag{2}$$

con $1 \leq \alpha$. Ponendo

$$\varphi(x, \alpha) = \frac{\partial \psi(x, \alpha)}{\partial \alpha} :$$

sarà

$$\varphi(x) = \varphi(x, 1) .$$

La funzione

$$\lambda(x, y) = \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(1+\zeta)} (y-x)^\zeta \, d\zeta$$

è una funzione finita e continua. Moltiplichiamo ambo i membri delle (2) per $\lambda(x ; y) \, dx$, e integriamo fra 0 e y. Si avrà

$$\int_0^y \psi(x, \alpha) \lambda(x, y) \, dx = \int_0^y \lambda(x, y) \, dx \int_0^x f(\xi) \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (x-\xi)^{\alpha-1} d\xi =$$

$$= \int_0^y f(\xi) \, d\xi \int_\xi^y \lambda(x, y) \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (x-\xi)^{\alpha-1} dx =$$

$$= \int_0^y f(\xi) \, d\xi \int_0^\infty d\zeta \int_\xi^y \frac{1}{\Gamma(\zeta+1)} (y-x)^\zeta \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (x-\xi)^{\alpha-1} dx =$$

$$= \int_0^y f(\xi) \, d\xi \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\zeta+\alpha+1)} (y-\xi)^{\zeta+\alpha} d\zeta ,$$

e, derivando rispetto ad α,

$$\int_0^y \varphi(x, \alpha) \lambda(x, y) \, dx = \int_0^y f(\xi) \, d\xi \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\zeta+\alpha+1)} (y-\xi)^{\zeta+\alpha} d\zeta . \tag{3}$$

[1] Con $\log^m(x-\xi)$ intendiamo qui e nel seguito $(\log(x-\xi))^m$, ossia la potenza m^{esima} di $\log(x-\xi)$.

Ora

$$\int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\zeta+\alpha+1)}(y-\xi)^{\zeta+\alpha}\,d\xi = \int_\alpha^\infty \frac{1}{\Gamma(\zeta+1)}(y-\xi)^{\zeta}\,d\zeta\,;$$

quindi

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\zeta+\alpha+1)}(y-\xi)^{\zeta+\alpha}\,d\zeta = -\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}(y-\xi)^{\alpha}\,.$$

La (3) potrà dunque scriversi

$$\int_0^\infty f(\xi)\,\frac{(y-\xi)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\,d\xi = -\int_0^y \varphi(x\,,\alpha)\,\lambda(x\,,y)\,dx\,,$$

e, facendo $\alpha = 1$,

$$\int_0^y f(\xi)\,(y-\xi)\,d\xi = -\int_0^y \varphi(x)\,\lambda(x\,,y)\,dx =$$

$$= -\int_0^y \varphi(x)\,dx\int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(1+\zeta)}(y-x)^\zeta\,d\zeta\,.$$

Derivando due volte rispetto ad y, resulterà finalmente

(4) $$f(y) = -\frac{d^2}{dy^2}\int_0^y \varphi(x)\,dx\int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(1+\zeta)}(y-x)^\zeta\,d\zeta\,.$$

3. Consideriamo la funzione

(5) $$\lambda(x\,,y\,|\,z) = \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(1+\zeta+z)}(y-x)^{z+\zeta}\,d\zeta\,.$$

Avremo

$$\lambda(x\,,y\,|\,z)\log(y-x) = \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(1+\zeta+z)}(y-x)^{z+\zeta}\log(y-x)\,d\zeta =$$

$$= -\frac{(y-x)^z}{\Gamma(1+z)} + \int_0^\infty \frac{\Gamma'(1+\zeta+z)}{\Gamma^2(1+\zeta+z)}(y-x)^{z+\zeta}\,d\zeta$$

e, facendo $z = 0$,

$$\lambda(x\,,y\,|\,0)\log(y-x) = -1 + \int_0^\infty \frac{\Gamma'(1+\zeta)}{\Gamma^2(1+\zeta)}(y-x)^\zeta\,d\zeta\,,$$

il che prova che $\lambda(x\,,y\,|\,0)$ *è infinitesimo di ordine logaritmico per* $y = x$.

Dalle (5) segue

$$-\frac{\partial\lambda(x\,,y\,|\,z)}{\partial x} = \frac{\partial\lambda(x\,,y\,|\,z)}{\partial y} = \int_0^\infty \frac{z+\zeta}{\Gamma(1+z+\zeta)}(y-x)^{z+\zeta-1}\,d\zeta = \lambda(x,y\,|\,z-1),$$

e facendo $z = 0$

$$-\frac{\partial\lambda(x, y|0)}{\partial x} = \frac{\partial\lambda(x, y|0)}{\partial y} = \int_0^\infty \frac{\zeta}{\Gamma(1+\zeta)} (y-x)^{\zeta-1} d\zeta ,$$

d'onde

$$(y-x)\log^2(y-x)\frac{\partial\lambda(x, y|0)}{\partial y} = \int_0^\infty \frac{\zeta}{\Gamma(1+\zeta)} (y-x)^{\zeta} \log^2(y-x)\, d\zeta =$$

$$= -\int_0^\infty (y-x)^{\zeta} \log(y-x) \left(\frac{1}{\Gamma(1+\zeta)} - \frac{\zeta\Gamma'(1+\zeta)}{\Gamma^2(1+\zeta)}\right) d\zeta =$$

$$= 1 + \int_0^\infty (y-x)^{\zeta} \frac{d}{d\zeta}\left(\frac{1}{\Gamma(1+\zeta)} - \frac{\zeta\Gamma'(1+\zeta)}{\Gamma^2(1+\zeta)}\right) d\zeta .$$

Ciò prova che $\lambda(x, y|-1) = \frac{\partial\lambda(x, y|0)}{\partial y}$ *diventa infinito dello stesso ordine di* $\frac{1}{(y-x)\log^2(y-x)}$ *per* $x = y$.

4. Riprendendo la formula (4), dai risultati precedenti si riconosce che le operazioni di derivazione indicati nel secondo membro delle formule stesse non possono eseguirsi sotto il segno. Ma la formula (4) può facilmente trasformarsi.

Abbiamo infatti

$$\int_0^y \varphi(x)\, dx \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(1+\zeta)} (y-x)^{\zeta} d\zeta = \int_0^y \varphi(x)\, \lambda(x . y|0)\, dx =$$

$$= -\int_0^y \varphi(x) \frac{\partial\lambda(x . y|1)}{\partial x} dx = \varphi(0)\int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(2+\zeta)} y^{\zeta+1} d\zeta +$$

$$+ \int_0^y \varphi'(x)\, \lambda(x, y|1)\, dx ,$$

quindi

$$\frac{d}{dy}\int_0^y \varphi(x)\, dx \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(1+\zeta)} (y-x)^{\zeta} d\zeta = \varphi(0)\int_0^\infty \frac{y^{\zeta}}{\Gamma(1+\zeta)} d\zeta +$$

$$+ \int_0^y \varphi'(x)\, \lambda(x, y|0)\, dx =$$

$$= \varphi(0)\int_0^\infty \frac{y^{\zeta} d\zeta}{\Gamma(1+\zeta)} + \varphi'(0)\int_0^\infty \frac{y^{\zeta+1} d\zeta}{\Gamma(2+\zeta)} + \int_0^y \varphi''(x)\, \lambda(x, y|1)\, dx .$$

Se $\varphi(0) = 0$, sarà

$$\frac{d^2}{dy^2}\int_0^y \varphi(x)\, dx \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(1+\zeta)} (y-x)^{\zeta} d\zeta = \varphi'(0)\int_0^\infty \frac{y^{\zeta} d\zeta}{\Gamma(1+\zeta)} +$$

$$+ \int_0^y \varphi''(x)\, \lambda(x, y|0)\, dx .$$

Abbiamo dunque in questo caso le tre formule equivalenti

$$\text{(I)} \qquad f(y) = -\frac{d^2}{dy^2}\int_0^y \varphi(x)\,dx \int_0^\infty \frac{(y-x)^\zeta}{\Gamma(1+\zeta)}\,d\zeta =$$

$$\text{(I')} \qquad = -\frac{d}{dy}\int_0^y \varphi'(x)\,dx \int_0^\infty \frac{(y-x)^\zeta}{\Gamma(1+\zeta)}\,d\zeta =$$

$$\text{(I'')} \qquad = -\varphi'(0)\int_0^\infty \frac{y^\zeta\,d\zeta}{\Gamma(1+\zeta)} - \int_0^y \varphi''(x)\,dx \int_0^\infty \frac{(y-x)^\zeta}{\Gamma(1+\zeta)}\,d\zeta\,.$$

5. Dalla formula

$$\text{(6)} \qquad \int_x^y \frac{(\xi-x)^{\alpha-1}(y-\xi)^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}\,d\xi = \frac{(y-x)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

segue, con una integrazione rispetto a β ed una derivazione rispetto ad α,

$$\text{(7)} \qquad \int_x^y \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{(\xi-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right)d\xi \int_\beta^\infty \frac{(y-\xi)^{\beta'-1}}{\Gamma(\beta')}\,d\beta' = -\frac{(y-x)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)}\,.$$

Se in questa facciamo $\alpha = \beta = 1$, si ha

$$\int_x^y (\log(\xi-x)+C)\,d\xi \int_0^\infty \frac{(y-\xi)^\beta}{\Gamma(1+\beta)}\,d\beta = -(y-x)\,.$$

In virtù della (7), l'equazione integrale

$$\text{(1'')} \qquad \int_0^x f(\xi)\,\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}(x-\xi)^{\alpha-1}\right)d\xi = \varphi(x)$$

si trasforma nell'altra

$$\text{(8)} \qquad -\int_0^y \frac{(y-\xi)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)}\,f(\xi)\,d\xi = \int_0^y \varphi(x)\,dx \int_\beta^\infty \frac{(y-x)^{\beta'-1}}{\Gamma(\beta')}\,d\beta',$$

e, facendo $\alpha = \beta = 1$, la (8) diviene

$$\text{(8')} \qquad -\int_0^y (y-\xi)\,f(\xi)\,d\xi = \int_0^y \varphi(x)\,dx \int_0^\infty \frac{(y-x)^\beta}{\Gamma(\beta+1)}\,d\beta\,.$$

La (8) ci dà subito la soluzione della (1''); e la (8') la soluzione, già ottenuta (4), della (1').

6. Ma la formula (7) e il metodo adoperato adesso per la risoluzione dell'equazione integrale (1'') ci offrono immediatamente delle notevoli estensioni.

Dalle (6) si ricava infatti la relazione

$$\int_0^y \frac{(\xi-x)^{\alpha-1}(y-\xi)^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}\,e^{h(\alpha+\beta-1)}\,d\xi = \frac{(y-x)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)}\,e^{h(\alpha+\beta-1)},$$

ove h è una costante arbitraria.

Derivando rispetto ad α, e moltiplicando per $d\beta$ e integrando fra β e ∞, si trova

$$\int_x^y e^{h\alpha} \frac{(\xi-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left(\log(\xi-x) + h - \frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}\right) d\xi \int_\beta^\infty \frac{(y-\xi)^{\beta'-1}\, e^{h(\beta'-1)}}{\Gamma(\beta')} d\beta' =$$

$$= - \frac{(y-x)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)} e^{h(\alpha+\beta-1)} .$$

donde, dividendo per $e^{h\alpha}$,

$$\int_x^y \frac{(\xi-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left(\log(\xi-x) + h - \frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}\right) d\xi \int_\beta^\infty \frac{(y-\xi)^{\beta'-1}\, e^{h(\beta'-1)}}{\Gamma(\beta')} d\beta' = \tag{9}$$

$$= - \frac{(y-x)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)} e^{h(\beta-1)} .$$

Se poniamo $\alpha = \beta = 1$ questa formula diviene

$$\int_x^y (\log(\xi-x) + h + \mathrm{C})\, d\xi \int_\beta^\infty \frac{(y-\xi)^{\beta'-1}\, e^{h(\beta'-1)}}{\Gamma(\beta')} d\beta' = -(y-x) ,$$

o anche, ponendo $h + \mathrm{C} = \mathrm{M}$,

$$\int_x^y (\log(\xi-x) + \mathrm{M})\, d\xi \int_0^\infty \frac{(y-\xi)^\beta\, e^{(\mathrm{M}-\mathrm{C})\beta}}{\Gamma(\beta+1)} d\beta = -(y-x) . \tag{10}$$

Ciò premesso, consideriamo l'equazione integrale

$$\int_0^x f(\xi) \{\log(x-\xi) + \mathrm{M}\}\, d\xi = \varphi(x) . \tag{11}$$

Moltiplicando ambo i membri per

$$dx \int_0^\infty \frac{(y-x)^\beta\, e^{(\mathrm{M}-\mathrm{C})\beta}}{\Gamma(\beta+1)} d\beta ,$$

e integrando fra 0 e y, l'equazione (11) diviene, in virtù della (10),

$$\int_0^y \varphi(x)\, dx \int_0^\infty \frac{(y-x)^\beta\, e^{(\mathrm{M}-\mathrm{C})\beta}}{\Gamma(\beta+1)} d\beta =$$

$$= \int_0^y dx \int_0^\infty \frac{(y-x)^\beta\, e^{(\mathrm{M}-\mathrm{C})\beta}}{\Gamma(\beta+1)} d\beta \int_0^x f(\xi) \{\log(x-\xi) + \mathrm{M}\}\, d\xi =$$

$$= \int_0^y f(\xi)\, d\xi \int_\xi^y \{\log(x-\xi) + \mathrm{M}\}\, dx \int_0^\infty \frac{(y-x)^\beta\, e^{(\mathrm{M}-\mathrm{C})\beta}}{\Gamma(\beta+1)} d\beta =$$

$$= - \int_0^y (y-\xi)\, f(\xi)\, d\xi .$$

Derivando due volte rispetto ad y, si trova

$$f(y) = - \frac{d^2}{dy^2} \int_0^y \varphi(x)\, dx \int_0^\infty \frac{(y-x)^\beta\, e^{(\mathrm{M}-\mathrm{C})\beta}}{\Gamma(\beta+1)} d\beta .$$

7. Posto

$$\mu(x, y \mid z) = \int_0^\infty \frac{(y-x)^{\beta+z} e^{(M-C)(\beta+z)}}{\Gamma(\beta+z+1)} d\beta = \int_z^\infty \frac{(y-x)^\beta e^{(M-C)\beta}}{\Gamma(\beta+1)} d\beta ,$$

si hanno, per questa funzione, delle proprietà perfettamente analoghe a quelle riscontrate per $\lambda(x, y \mid z)$. Mettiamo in luce in particolare le seguenti:

$$-\frac{\partial \mu(x, y \mid z+1)}{\partial x} = \frac{\partial \mu(x, y \mid z+1)}{\partial y} = \mu(x, y \mid z)\, e^{M-C}$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial z} = -\frac{(y-x)^z e^{(M-C)z}}{\Gamma(z+1)}$$

$$\mu(x, y \mid z)_{x=y} = 0 \quad \text{se} \quad z \geq 0 .$$

8. Quindi

$$\int_0^\infty \varphi(x)\, \mu(x, y \mid 0)\, dx = -\int_0^y \varphi(x)\, e^{-M+C} \frac{\partial}{\partial x} \mu(x, y \mid 1)\, dx =$$

$$= \varphi(0)\, e^{-M+C} \mu(0, y \mid 1) + \int_0^y \varphi'(x)\, e^{-M+C} \mu(x, y \mid 1)\, dx$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_0^y \varphi(x)\, \mu(x, y \mid 0)\, dx = \varphi(0)\, e^{-M+C} \mu(0, y \mid 0) + \int_0^y \varphi'(x)\, e^{-M+C} \mu(x, y \mid 0)\, dx =$$

$$= \varphi(0)\, e^{-M+C} \mu(0, y \mid 0) + \varphi'(0)\, e^{-2M+2C} \mu(0, y \mid 1) +$$

$$+ \int_0^y \varphi''(x)\, e^{-2M+2C} \mu(x, y \mid 1)\, dx .$$

Se $\varphi(0) = 0$, si ha

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \int_0^y \varphi(x)\, \mu(x, y \mid 0)\, dx = \varphi'(0)\, e^{-2M+2C} \mu(0, y \mid 0) + \int_0^y \varphi''(x)\, e^{-2M+2C} \mu(x, y \mid 0)\, dx .$$

Dunque *l'equazione integrale*

$$\text{(11)} \qquad \int_0^x f(\xi) \{ \log(x-\xi) + M \} d\xi = \varphi(x)$$

si risolve mediante una delle tre formule equivalenti:

$$\text{(II)} \quad f(y) = -\frac{d^2}{dy^2} \int_0^y \varphi(x)\, dx \int_0^\infty \frac{(y-x)^\beta e^{(M-C)\beta}}{\Gamma(\beta+1)} d\beta$$

$$\text{(II')} \qquad = -\frac{d}{dy} \int_0^y \varphi'(x)\, dx \int_0^\infty \frac{(y-x)^\beta e^{(M-C)(\beta-1)}}{\Gamma(\beta+1)} d\beta$$

$$\text{(II'')} \qquad = -\varphi'(0) \int_0^\infty \frac{y^\beta e^{(M-C)(\beta-2)}}{\Gamma(\beta+1)} d\beta - \int_0^y \varphi''(x)\, dx \int_0^\infty \frac{(y-x)^\beta e^{(M-C)(\beta-2)}}{\Gamma(\beta+1)} d\beta ,$$

ove $C = -\frac{\Gamma'(0)}{\Gamma(0)}$.

Esse comprendono come casi particolari le (1) (I') (I'').

La formula (9) ci offre anche la soluzione dell'equazione integrale

$$(12) \qquad \int_0^x f(\xi)\,\{\log(x-\xi)+\mathrm{M}\}\,(x-\xi)^{\alpha-1}\,d\xi = \varphi(x)$$

con $0<\alpha<\infty$, rispetto alla funzione incognita $f(\xi)$.

Infatti, dalla (9), facendo $\beta=1$, e

$$h=\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}+\mathrm{M},$$

segue

$$(13) \qquad \int_x^y (\xi-x)^{\alpha-1}(\log(\xi-x)+\mathrm{M})\,d\xi \int_1^\infty \frac{(y-\xi)^{\beta-1}e^{h(\beta-1)}}{\Gamma(\beta)}\,d\beta = -\frac{(y-x)^\alpha}{\alpha};$$

quindi l'equazione integrale (12), ripetendo il procedimento adoperato nel § 6, si trasforma nell'altra

$$(14) \qquad -\int_0^y \frac{(y-\xi)^\alpha}{\alpha} f(\xi)\,d\xi = \int_0^y \varphi(x)\,dx \int_0^\infty \frac{(y-x)^\beta e^{h\beta}}{\Gamma(\beta+1)}\,d\beta$$

che si sa risolvere rispetto alla funzione incognita $f(\xi)$ (vedi Cap. II, § 7).

10. Deriviamo ora la relazione (9) rispetto ad α. Avremo

$$(15) \qquad \int_x^y \frac{(\xi-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\Big\{\log^2(\xi-x)+\left(h-2\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}\right)\log(\xi-x)+$$
$$+\left(2\left(\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}\right)^2-h\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}-\frac{\Gamma''(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}\right)\Big\}\,d\xi\int_\beta^\infty \frac{(y-\xi)^{\beta'-1}e^{h(\beta'-1)}}{\Gamma(\beta')}\,d\beta' =$$
$$=-\frac{(y-x)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)}\left(\log(y-x)-\frac{\Gamma'(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\right)e^{h(\beta-1)},$$

e sommandola membro a membro colla (9), dopo averne moltiplicati ambo i membri per una costante k, si ha

$$(16) \qquad \int_x^y \frac{(\xi-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\Big\{\log^2(\xi-x)+\left(h+k-2\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}\right)\log(\xi-x)+$$
$$+\left(hk-(h+k)\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}+2\left(\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}\right)^2-\frac{\Gamma''(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}\right)\Big\}\,d\xi\times$$
$$\times\int_\beta^\infty \frac{(y-\xi)^{\beta'-1}e^{h(\beta'-1)}}{\Gamma(\beta')}\,d\beta' = -\frac{(y-x)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)}\Big\{\log(y-x)+\left(k-\frac{\Gamma'(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\right)\Big\}e^{h(\beta-1)}.$$

Ponendo $\beta = 1$ e calcolando h e k in modo che si abbia

$$h + k = 2\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} + M_1$$

$$hk = M_1\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} + \frac{\Gamma''(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} + M_2,$$

ove M_1 e M_2 sono due costanti arbitrarie date, l'equazione precedente diviene

$$\int_x^y (\xi - x)^{\alpha-1}\{\log^2(\xi - x) + M_1\log(\xi - x) + M_2\}\,d\xi\int_1^{\infty}\frac{(y-\xi)^{\beta-1}e^{h(\beta-1)}}{\Gamma(\beta)}\,d\beta =$$

$$= -\frac{(y-x)^\alpha}{\alpha}\left\{\log(y-x) + \left(k - \frac{\Gamma'(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)}\right)\right\} =$$

$$= -\frac{(y-x)^\alpha}{\alpha}\{\log(y-x) + m_1\},$$

ove si è posto

$$m_1 = k - \frac{\Gamma'(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

Per mezzo di questa formula, e applicando il procedimento dei §§ 6 e 8, l'equazione integrale

$$\int_0^x f(\xi)\{\log^2(x-\xi) + M_1\log(x-\xi) + M_2\}(x-\xi)^{\alpha-1}\,d\xi = \varphi(x)$$

si trasforma nell'altra

$$-\int_0^y \frac{(y-\xi)^\alpha}{\alpha}\{\log(y-\xi) + m_1\}f(\xi)\,d\xi = \int_0^y \varphi(x)\,dx\int_0^\infty \frac{(y-x)^\beta e^{h\beta}\,d\beta}{\Gamma(\beta+1)}.$$

Ora questa equazione non è altro che una equazione (12) che si sa già risolvere, trasformandola in una equazione del tipo (14).

11. Nuovamente derivando l'equazione (15) e sommando membro a membro colla equazione stessa dopo averne moltiplicati ambo i membri per una costante, si giunge ad una relazione del tipo

$$(16')\quad \int_x^y (\xi-x)^{\alpha-1}\{\log^3(\xi-x) + M_1\log^2(\xi-x) + M_2\log(\xi-x) + M_3\}\,d\xi \times$$

$$\times\int_0^\infty \frac{(y-\xi)^\beta e^{h\beta}\,d\beta}{\Gamma(\beta+1)} = -\frac{(y-x)^\alpha}{\alpha}\{\log^2(y-x) + m_1\log(y-x) + m_2\},$$

e, così procedendo di seguito, si trova in generale

$$(16'') \qquad \int_x^y (\xi - x)^{\alpha-1} \sum_0^n {}_k \mathrm{M}_k \log^{n-k}(\xi - x)\, d\xi \int_0^\infty \frac{(y-\xi)^\beta e^{h\beta}\, d\beta}{\Gamma(\beta+1)} =$$

$$= -\frac{(y-x)^\alpha}{\alpha} \sum_0^{n-1} {}_k m_k \log^{n-1-k}(y-x)\,,$$

ove i coefficienti m_k ed h si calcolano allorchè i coefficienti M_k sono dati, essendo poi in particolare $\mathrm{M}_0 = m_0$.

Per mezzo di questa formula, l'equazione integrale

$$(17) \qquad \int_0^x f(\xi)\,(x-\xi)^{\alpha-1} \sum_0^n {}_k \mathrm{M}_k \log^{n-k}(x-\xi)\, d\xi = \varphi(x)$$

si trasforma nell'altra

$$(17') \qquad -\int_0^y f(\xi) \frac{(y-\xi)^\alpha}{\alpha} \sum_0^{n-1} {}_k m_k \log^{n-k-1}(y-\xi)\, d\xi =$$

$$= \int_0^\infty \varphi(x)\, dx \int_0^y \frac{(y-x)^\beta e^{h\beta}\, d\beta}{\Gamma(\beta+1)}\,.$$

Ripetendo la trasformazione n volte, si giunge ad eliminare i logaritmi dal nucleo dell'equazione integrale fino a ridurre questa ad una equazione del tipo (14) che si risolve con i metodi noti. Il procedimento adoperato ci prova (mentre ci dà la soluzione delle equazioni integrali considerate) che *questa soluzione è unica e determinata*. Questa proposizione è di speciale interesse (cfr. Cap. III, § 17; e Cap. III, § 8).

12. Anzichè la (17), consideriamo l'equazione integrale

$$\int_0^x f(\xi) \left\{ (x-\xi)^{\alpha-1} \sum_0^n {}_k \mathrm{M}_k \log^{n-k}(x-\xi) + (x-\xi)^\alpha \mathrm{F}(\xi, x) \right\} d\xi = \varphi(x)\,,$$

con $\mathrm{F}(\xi, y)$ finita e continua. Applicando la solita trasformazione, l'equazione precedente diviene

$$-\int_0^y f(\xi) \left\{ \frac{(y-\xi)^\alpha}{\alpha} \sum_0^{n-1} {}_k m_k \log^{n-k-1}(y-\xi) + (y-\xi)^{\alpha+1} \Phi(\xi, y) \right\} d\xi =$$

$$= \int_0^y \varphi(x)\, dx \int_0^\infty \frac{(y-x)^\beta e^{h\beta}\, d\beta}{\Gamma(\beta+1)}\,,$$

ove

$$\Phi(\xi, y) = \int_0^\infty \frac{(y-\xi)^\beta e^{h\beta}\, d\beta}{\Gamma(\beta+1)} \int_0^1 \zeta^\alpha (1-\zeta)^\beta \mathrm{F}(\xi, \xi + (y-\xi)\zeta)\, d\zeta\,.$$

Per semplicità consideriamo come esempio il caso in cui $\alpha = 1$, $n = 1$: cioè il caso in cui si ha l'equazione integrale

$$\int_0^x f(\xi) \{ \log(x - \xi) + \mathrm{M} + (x - \xi) \, \mathrm{F}(\xi, x) \} \, d\xi = \varphi(x) .$$

La trasformazione generale la riconduce a

$$- \int_0^y f(\xi) \left\{ (y - \xi) - (y - \xi)^2 \int_0^\infty \frac{(y - \xi)^\beta \, e^{(\mathrm{M} - \mathrm{C})\beta} \, d\beta}{\Gamma(\beta + 1)} \times \right.$$
$$\left. \times \int_0^1 \zeta (1 - \zeta)^\beta \, \mathrm{F}(\xi, \xi + (y - \xi)\zeta) \, d\zeta \right\} d\xi =$$
$$= \int_0^y \varphi(x) \, dx \int_0^\infty \frac{(y - x)^\beta \, e^{(\mathrm{M} - \mathrm{C})\beta} \, d\beta}{\Gamma(\beta + 1)} ,$$

e, derivando due volte rispetto ad y,

$$(18) \qquad - f(y) + \int_0^y f(\xi) \, d\xi \, \frac{d^2}{dy^2} \int_0^\infty \frac{(y - \xi)^{\beta + 2} \, e^{(\mathrm{M} - \mathrm{C})\beta} \, d\beta}{\Gamma(\beta + 1)} \times$$
$$\times \int_0^1 \zeta (1 - \zeta)^\beta \, \mathrm{F}(\xi, \xi + (y - \xi)\zeta) \, d\zeta =$$
$$= \frac{d^2}{dy^2} \int_0^y \varphi(x) \, dx \int_0^\infty \frac{(y - x)^\beta \, e^{(\mathrm{M} - \mathrm{C})\beta} \, d\beta}{\Gamma(\beta + 1)} .$$

La funzione

$$\Psi(\xi, y) = \frac{d^2}{dy^2} \int_0^\infty \frac{(y - \xi)^{\beta + 2} \, e^{(\mathrm{M} - \mathrm{C})\beta} \, d\beta}{\Gamma(\beta + 1)} \int_0^1 \zeta (1 - \zeta)^\beta \, \mathrm{F}(\xi, \xi + (y - \xi)\zeta) \, d\zeta ,$$

è finita e continua nell'ipotesi che $\frac{\partial \mathrm{F}(\xi, y)}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 \mathrm{F}(\xi . y)}{\partial y^2}$ siano finite e continue. Ma essa costituisce il nucleo della equazione integrale (18) di seconda specie. Dunque questa equazione si risolverà con i metodi ordinarii ben noti.

13. Come applicazione proponiamoci di risolvere adesso il problema che abbiamo posto alla fine del Cap. precedente (§ 11), quello cioè di determinare

$$\log_1 \overset{*}{\mathrm{F}} ,$$

essendo F una funzione appartenente al gruppo del ciclo chiuso, e $\mathrm{F}(0) = 1$.

Abbiamo trovato

$$\overset{*}{\log_1} \mathrm{F} = \overset{*}{\mathrm{F}}{}^0 + \frac{\overset{*}{\mathrm{F}}{}' \overset{*}{1} + \frac{\overset{*}{\mathrm{F}}{}'^2 \overset{*}{1}}{2} + \frac{\overset{*}{\mathrm{F}}{}'^3 \overset{*}{1}}{3} + \cdots}{\widetilde{(\log(y - x) + \mathrm{C})}} .$$

Posto dunque

$$\overset{*}{\mathrm{F}}'\overset{*}{1}+\frac{\overset{*}{\mathrm{F}}'^2\overset{*}{1}}{2}+\frac{\overset{*}{\mathrm{F}}'^3\overset{*}{1}}{3}+\cdots=\varphi(y-x),$$

bisognerà risolvere l'equazione integrale

$$\int_x^y f(\xi-x)\,(\log(y-\xi)+\mathrm{C})\,d\xi=\varphi(y-x),$$

ossia

$$\int_0^x f(\xi)\,(\log(x-\xi)+\mathrm{C})\,d\xi=\varphi(x)\,.$$

Osserviamo che $\varphi(0)=0$, e

$$\varphi'=\mathrm{F}'+\frac{\overset{*}{\mathrm{F}}'^2}{2}+\frac{\overset{*}{\mathrm{F}}'^3}{3}+\cdots;$$

quindi, applicando la formula (I'), si avrà

$$f(y-x)=-\frac{\partial}{\partial y}\int_x^y \left(\mathrm{F}'(\xi-x)+\frac{\overset{*}{\mathrm{F}}'^2(\xi-x)}{2}+\frac{\overset{*}{\mathrm{F}}'^3(\xi-x)}{3}+\cdots\right)\times$$
$$\times\, d\xi\int_0^\infty\frac{(y-\xi)^\zeta}{\Gamma(1+\zeta)}\,d\zeta\,,$$

e finalmente

$$\text{(19)}\quad \overset{*}{\log}_1\mathrm{F}=\overset{*}{\mathrm{F}}{}^0-\frac{\partial}{\partial y}\int_x^y\left(\mathrm{F}'(\xi-x)+\frac{\overset{*}{\mathrm{F}}'^2(\xi-x)}{2}+\frac{\overset{*}{\mathrm{F}}'^3(\xi-x)}{3}+\cdots\right)\times$$
$$\times\, d\xi\int_0^\infty\frac{(y-\xi)^\zeta}{\Gamma(1+\zeta)}\,d\zeta\,.$$

Possiamo quindi ottenere (mediante la formula precedente) *il logaritmo di composizione a base unitaria di qualsiasi funzione derivabile del 1° ordine a caratteristica unitaria appartenente al gruppo del ciclo chiuso.*

14. La formula (19) può ancora scriversi:

$$\overset{*}{\log}_1\mathrm{F}=\overset{*}{\mathrm{F}}{}^0-\frac{\partial}{\partial y}\int_0^\infty\left(\overset{*}{\mathrm{F}}'+\frac{\overset{*}{\mathrm{F}}'^2}{2}+\frac{\overset{*}{\mathrm{F}}'^3}{3}+\cdots\right)\overset{*}{1}{}^{\zeta+1}\,d\zeta\,,$$

e quindi

$$\overset{*}{l}\,\mathrm{F}=\overset{*}{l}\,1\left(\overset{*}{\mathrm{F}}{}^0-\frac{\partial}{\partial y}\int_0^\infty\left(\overset{*}{\mathrm{F}}'+\frac{\overset{*}{\mathrm{F}}'^2}{2}+\frac{\overset{*}{\mathrm{F}}'^3}{3}+\cdots\right)\overset{*}{1}{}^{\zeta+1}\,d\zeta\right).$$

Se Φ appartiene pure al gruppo del ciclo chiuso e $\Phi(0)=1$, sarà

$$\overset{*}{l}\,\Phi=\overset{*}{l}\,1\left(\overset{*}{\Phi}{}^0-\frac{\partial}{\partial y}\int_0^\infty\left(\overset{*}{\Phi}'+\frac{\overset{*}{\Phi}'^2}{2}+\frac{\overset{*}{\Phi}'^3}{3}+\cdots\right)\overset{*}{1}{}^{\zeta+1}\,d\zeta\right),$$

onde

$$\overset{*}{\log}_{F} \Phi = \frac{\overset{*}{\Phi}{}^{0} - \frac{\partial}{\partial y}\int_{0}^{\infty}\left(\overset{*}{\Phi}{}' + \frac{\overset{*}{\Phi}{}'^{2}}{2} + \frac{\overset{*}{\Phi}{}'^{3}}{3} + \cdots\right)\overset{*}{1}{}^{\zeta+1}\, d\zeta}{\overset{*}{F}{}^{0} - \frac{\partial}{\partial y}\int_{0}^{\infty}\left(\overset{*}{F}{}' + \frac{\overset{*}{F}{}'^{2}}{2} + \frac{\overset{*}{F}{}'^{3}}{3} + \cdots\right)\overset{*}{1}{}^{\zeta+1}\, d\zeta}.$$

Le considerazioni svolte valgono nella ipotesi che sia $F(0) = 1$. Se $F(0) = A \gtrless 1$, $A \gtrless 0$, allora

$$\overset{*}{l}F = \overset{*}{l}1 + lA\,.\,\overset{*}{F}{}^{0} + \frac{F'}{A} + \frac{\overset{*}{F}{}'^{2}}{2A^{2}} + \cdots;$$

quindi, volendo ottenere

$$\overset{*}{\log}_{1} F\,,$$

basterà che applichiamo il calcolo precedente ed inoltre che sappiamo calcolare

$$\frac{lA\,.\,\overset{*}{F}{}^{0}}{\overset{*}{l}1} = \frac{lA\overset{*}{1}}{\overbrace{(\log(y-x)+C)}^{*}}:$$

ossia, siccome lA è una costante, sarà sufficiente calcolare

$$\frac{\overset{*}{1}}{\overbrace{(\log(y-x)+C)}^{*}}.$$

Ora, per fare questo calcolo, basterà ottenere

$$\psi = \frac{\overset{*}{1}{}^{2}}{\overbrace{(\log(y-x)+C)}^{*}},$$

e quindi avremo

$$\frac{\overset{*}{1}}{\overbrace{(\log(y-x)+C)}^{*}} = \overset{*}{\psi}\overset{*}{1}{}^{-1}.$$

Ma dalla (I″) si ricava

$$\psi = -\int_{0}^{\infty}\frac{(y-x)^{\zeta}\, d\zeta}{\Gamma(1+\zeta)},$$

onde

$$\frac{lA\,.\,\overset{*}{F}{}^{0}}{\overset{*}{l}1} = -lA\int_{0}^{\infty}\frac{(y-x)^{\zeta}\, d\zeta}{\Gamma(1+\zeta)}\,\overset{*}{1}{}^{-1}$$

che dovremo considerare come una frazione di composizione non riducibile a forma intera, giacchè l'ordine del numeratore è inferiore a quello del denominatore (vedi il § 3).

Se $A = 0$, il calcolo si fa pure facilmente ricorrendo alla formula (13) del Cap. IV.

Supponiamo che si voglia

$$\overset{*}{\log}_A F,$$

essendo $A \gtreqless 0$ $A \lesseqgtr 1$.

Siccome

$$\overset{*}{l}A = lA\,\overset{*}{1}^0 + \overset{*}{l}1 = \overbrace{(\log(y-x) + C + lA)}^{*}\,\overset{*}{1}^{-1},$$

basterà evidentemente che applichiamo la formula (II″) anzichè la formula (I″).

15. Noi abbiamo dato due risoluzioni dirette dell'equazione (1) (vedi §§ 2, 5) le quali sono indipendenti dai principii della teoria delle potenze e dei logaritmi di composizione che svolgiamo in questa Memoria Ma noi vogliamo adesso esporre una soluzione della equazione stessa che si appoggia su questi principii. Essa è semplicissima e fu per noi il punto di partenza da cui discesero come conseguenza gli altri metodi.

Però noi considereremo un caso molto più generale e riprenderemo perciò le considerazioni del § 12 del Cap. II, e del § 4 del Cap. IV.

Sia $\psi = (y-x)^{\alpha-1}\,G(x, y)$ una funzione di un gruppo di un ordine determinato α, e sia

$$\overset{*}{\psi}{}^z = (y-x)^{\alpha z-1}\,G(x, y\,|\,z)$$

con $G(x, y\,|\,z)$ funzione intera di z.

Se supponiamo $|G(x, y)| < M$, e z reale e positivo, sappiamo che

$$|\overset{*}{\psi}{}^z| < M^z \frac{\Gamma^z(\alpha)}{\Gamma(z\alpha)};$$

quindi l'integrale

$$\Theta_1(x, y\,|\,z) = \int_z^{\infty} (y-x)^{\alpha\zeta-1}\,G(x, y\,|\,\zeta)\,d\zeta = \int_0^{\infty} (y-x)^{\alpha(\zeta+z)-1}\,G(x, y\,|\,\zeta+z)\,d\zeta$$

è convergente ed è una funzione intera di z.

Ora

$$\overset{*}{\psi}{}^\lambda\,\overset{*}{\psi}{}^\mu = \overset{*}{\psi}{}^{\lambda+\mu};$$

quindi

$$\int_x^y (\xi-x)^{\alpha\lambda-1}\,G(x, \xi\,|\,\lambda)\,(y-\xi)^{\alpha\mu-1}\,G(\xi, y\,|\,\mu)\,d\xi =$$
$$= (y-x)^{\alpha(\lambda+\mu)-1}\,G(x, y\,|\,\lambda+\mu),$$

da cui segue

$$(20)\qquad \int_x^y \frac{\partial}{\partial\lambda}\{(\xi-x)^{\alpha\lambda-1}\,G(x, \xi\,|\,\lambda)\}\,d\xi \int_\mu^{\infty} (y-\xi)^{\alpha\zeta-1}\,G(\xi, y\,|\,\zeta)\,d\zeta =$$
$$= -(y-x)^{\alpha(\lambda+\mu)-1}\,G(x, y\,|\,\lambda+\mu),$$

e per conseguenza

$$(20') \qquad \int_x^y \frac{\partial^k}{\partial\lambda^k}\{(\xi-x)^{\alpha\lambda-1}\,G(x,\xi\,|\,\lambda)\}\,d\xi\int_\mu^\infty (y-\xi)^{\alpha\zeta-1}\,G(\xi,y\,|\,\zeta)\,d\zeta =$$

$$= -\frac{\partial^{k-1}}{\partial\lambda^{k-1}}\{(y-x)^{\alpha(\lambda+\mu)-1}\,G(x,y\,|\,\lambda+\mu)\}\,.$$

Finalmente

$$(20'') \qquad \int_x^y \sum_1^n{}_k\,M_k\frac{\partial^k}{\partial\lambda^k}\{(\xi-x)^{\alpha\lambda-1}\,G(x,\xi\,|\,\lambda)\}\,d\xi\int_\mu^\infty (y-\xi)^{\alpha\zeta-1}\,G(\xi,y\,|\,\zeta)\,d\zeta =$$

$$= -\sum_0^{n-1} M_{k+1}\frac{\partial^k}{\partial\lambda^k}\{(y-x)^{\alpha(\lambda+\mu)-1}\,G(x,y\,|\,\lambda+\mu)\}\,.$$

Abbiamo anche

$$\overset{*}{\psi}{}^{\lambda}\,\overset{*}{\psi}{}^{\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_n} = \overset{*}{\psi}{}^{\lambda+\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_n}\,,$$

d'onde

$$(21) \qquad \int_x^y \frac{\partial^n}{\partial\lambda^n}\{(\xi-x)^{\alpha\lambda-1}\,G(x,\xi\,|\,\lambda)\}\,d\xi\,\times$$

$$\times\int_{\mu_1}^\infty d\zeta_1\int_{\mu_2}^\infty d\zeta_2\ldots\int_{\mu_n}^\infty d\zeta_n(y-\xi)^{\alpha(\zeta_1+\zeta_2+\cdots+\zeta_n)-1}\,G(\xi,y\,|\,\zeta_1+\zeta_2\cdots+\zeta_n) =$$

$$= (-1)^n(y-x)^{\alpha(\lambda+\mu_1+\cdots+\mu_n)-1}\,G(x,y\,|\,\lambda+\mu_1+\cdots+\mu_n)\,.$$

Le formule (20) e (20″) comprendono come casi particolari le formule precedenti (9) e (16″); basta prendere

$$\psi(x,y) = A\,,$$

ove A è una costante. Infatti

$$\overset{*}{\psi}{}^{z} = A^z\,\frac{(y-x)^{z-1}}{\Gamma(z)}\,.$$

16. Le formule (20), (20′), (20″), (21) servono per risolvere nuove equazioni integrali.

Come esempio consideriamo l'equazione integrale

$$(22) \qquad \int_0^x f(\xi)\,\frac{\partial^n}{\partial\lambda^n}\{(x-\xi)^{\alpha\lambda-1}\,G(\xi,x\,|\,\lambda)\}\,d\xi = \varphi(x)\,.$$

In virtù della (21), essa si trasforma nell'equazione integrale

$$(23) \qquad (-1)^n\int_0^y f(\xi)\,(y-\xi)^{\alpha(\lambda+\mu_1+\cdots+\mu_n)-1}\,G(\xi,y\,|\,\lambda+\mu_1+\cdots+\mu_n)\,d\xi =$$

$$= \int_0^y \varphi(x)\,dx\int_{\mu_1}^\infty d\zeta_1\int_{\mu_2}^\infty d\zeta_2\ldots\int_{\mu_n}^\infty d\zeta_n(y-x)^{\alpha(\lambda+\mu_1+\cdots+\mu_n)-1}\,\times$$

$$\times\,G(x,y\,|\,\lambda+\zeta_1+\cdots+\zeta_n)\,.$$

Prendiamo $\lambda = \mu_1 = \mu_2 = \mu_n = 1$. Le (22) e (23) divengono respettivamente

$$(22') \quad \int_0^x f(\xi)(x-\xi)^{\alpha-1} \Big\{ \alpha^n \log^n(x-\xi)\, G(\xi, x|1) + n\alpha^{n-1} \log^{n-1}(x-\xi)\, G'(\xi, x|1) + \frac{n(n-1)}{2} \alpha^{n-2} \log^{n-2}(x-\xi)\, G'' + \cdots + G^{(n)}(\xi, x|1) \Big\} d\xi = \varphi(x),$$

ove $G^{(h)}(\xi, x|1) = \left(\frac{\partial^h G(\xi, x|\lambda)}{\partial \lambda^h} \right)_{\lambda=1}$; e

$$(23') \quad (-1)^n \int_0^y f(\xi)\, \overset{*}{\psi}^{n+1}(\xi, y)\, d\xi = \int_0^y \varphi(x)\, dx \int_1^\infty d\zeta_1 \int_1^\infty d\zeta_2 \ldots \int_1^\infty d\zeta_n (y-x)^{\alpha(1+\zeta_1+\cdots+\zeta_n)-1} \times G(x, y|1+\zeta_1+\cdots\zeta_n).$$

Da questa si calcola immediatamente $f(y)$ allorchè si sa risolvere l'equazione integrale

$$\int_0^y \theta(\xi)\, \psi(\xi, y)\, d\xi = \varrho(y).$$

17. Invece dell'equazione (22), noi possiamo considerare

$$(24) \qquad \int_x^y f(\xi, x) \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} \{(y-\xi)^{\alpha\lambda-1}\, G(\xi, x|\lambda)\}\, d\xi = \varphi(x, y),$$

essendo φ una funzione appartenente al gruppo. Essa può scriversi

$$(24') \qquad \overset{*}{f} \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} \overset{*}{\psi}^\lambda = \varphi.$$

Posto

$$\int_{\mu_1}^\infty d\zeta_1 \int_{\mu_2}^\infty d\zeta_2 \ldots \int_{\mu_n}^\infty d\zeta_n (y-x)^{\alpha(\zeta_1+\cdots+\zeta_n)-1}\, G(x, y|\zeta_1+\cdots+\zeta_n) = \int_0^\infty d\zeta_1 \int_0^\infty d\zeta_2 \ldots \int_0^\infty d\zeta_n (y-x)^{\alpha(\zeta_1+\cdots+\zeta_n+\mu_1+\cdots+\mu_n)-1} \times G(x, y|\zeta_1+\cdots+\zeta_n+\mu_1+\cdots+\mu_n) = \Theta_n(x, y|\mu_1+\cdots+\mu_n),$$

l'equazione (21) si scriverà (essendo $\mu = \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n$)

$$(25) \qquad \frac{\partial^n \overset{*}{\psi}^\lambda}{\partial \lambda^n} \overset{*}{\Theta}_n(x, y|\mu) = (-1)^n\, \overset{*}{\psi}^{\lambda+\mu},$$

e la formula risolutiva della (24')

$$(26) \qquad f = (-1)^n\, \overset{*}{\varphi}\, \overset{*}{\Theta}_n\, \overset{*}{\psi}^{-(\lambda+\mu)}.$$

18. Tenendo presente (vedi Cap. V, § 4) che

$$\frac{\partial^n \overset{*}{\psi}^\lambda}{\partial \lambda^n} = \overset{*}{\psi}^\lambda \overset{*}{\varrho},$$

ove

$$\varrho = \overset{*}{l}\psi,$$

la (25) ci dà

$$\overset{*}{\psi}^\lambda \overset{*}{\varrho}^n \overset{*}{\Theta}_n = (-1)^n \overset{*}{\psi}^{\lambda+\mu},$$

e quindi

$$\Theta_n(x, y \mid \mu) = (-1)^n \overset{*}{\psi}^\mu (\overset{*}{l}\psi)^{-n}.$$

In particolare

$$\Theta_1(x, y \mid \mu) = -\overset{*}{\psi}^\mu (\overset{*}{l}\psi)^{-1}$$

$$\Theta_1(x, y \mid 1) = -\overset{*}{\psi}(\overset{*}{l}\overset{*}{\psi})^{-1}.$$

19. Sia ora

$$\mathrm{F} = \overset{*}{\psi}^z (a\overset{*}{f}^0 + \overset{*}{f}),$$

essendo $\overset{*}{f}$ una funzione di ordine positivo superiore ad un dato numero.

Abbiamo (vedi Cap. V, § 9)

$$\overset{*}{l}\mathrm{F} = z\overset{*}{l}\psi + la\overset{*}{f}^0 + \frac{f}{a} + \frac{\overset{*}{f}^2}{2a^2} + \cdots,$$

d'onde

$$\overset{*}{\log_\psi}\mathrm{F} = \frac{\overset{*}{l}\mathrm{F}}{l\psi} = z\,\mathrm{F}^0 - la\,\overset{*}{\Theta}_1(x, y \mid 1)\,\overset{*}{\psi}^{-1} -$$

$$-\left(\frac{\overset{*}{f}}{a} + \frac{\overset{*}{f}^2}{2a^2} + \frac{\overset{*}{f}^3}{3a^3} + \cdots\right)\overset{*}{\Theta}_1(x, y \mid 1)\,\overset{*}{\psi}^{-1}.$$

Questa formula risolve uno dei problemi fondamentali della teoria dei logaritmi di composizione (vedi Cap. IV, § 12).

20. Prima di abbandonare queste considerazioni vogliamo esporre un altro metodo per risolvere la seguente equazione integrale

$$\overset{*}{f}\overset{*}{\psi}\overset{*}{\varrho} = \varphi, \tag{27}$$

che si riçava dalla (24′) facendo $n = \lambda = 1$ e nella quale prendiamo f come incognita

Dalla (27) si ha

$$\overset{*}{f}\overset{*}{\psi}\overset{*}{\varrho}^2 = \overset{*}{\varphi}\overset{*}{\varrho}$$

$$\overset{*}{f}\overset{*}{\psi}\overset{*}{\varrho}^3 = \overset{*}{\varphi}\overset{*}{\varrho}^2$$

$$\cdots\cdots$$

$$\overset{*}{f}\overset{*}{\psi}\overset{*}{\varrho}^m = \overset{*}{\varphi}\overset{*}{\varrho}^{m-1}$$

$$\cdots\cdots$$

D'onde

$$\overset{*}{f}\overset{*}{\psi}\left(z\overset{*}{\varrho}+\frac{z^2}{2!}\overset{*}{\varrho}^2+\frac{z^3}{3!}\overset{*}{\varrho}^3+\cdots\right)=\overset{*}{\varphi}\left(z\overset{*}{\varrho}^0+\frac{z^2}{2!}\varrho+\frac{z^3}{3!}\overset{*}{\varrho}^2+\cdots\right),$$

ossia

$$\overset{*}{f}\overset{*}{\psi}(\overset{*}{e}^{z\overset{*}{\varrho}}-\overset{*}{\psi}^0)=\overset{*}{\varphi}\left(z\overset{*}{\varrho}^0+\frac{z^2}{2!}\overset{*}{\varrho}+\frac{z^3}{3!}\overset{*}{\varrho}^2+\cdots\right),$$

che si scriverà

$$\overset{*}{f}\overset{*}{\psi}(\overset{*}{\psi}^z-\overset{*}{\psi}^0)=\overset{*}{\varphi}\left(z\overset{*}{\varrho}^0+\frac{z^2}{2!}\overset{*}{\varrho}+\frac{z^3}{3!}\overset{*}{\varrho}^2+\cdots\right).$$

Componendo con ψ,

$$\overset{*}{f}\overset{*}{\psi}^2(\overset{*}{\psi}^z-\overset{*}{\psi}^0)=\overset{*}{\varphi}\left(z(\overset{*}{\psi}^z)_{z=1}+\frac{z^2}{2}\left(\frac{d\overset{*}{\psi}^z}{dz}\right)_{z=1}+\frac{z^3}{3!}\left(\frac{d\overset{*}{\psi}^z}{dz^2}\right)_{z=1}+\cdots\right)=$$

$$=\overset{*}{\varphi}\left(-\int_z^\infty\overset{*}{\psi}^\zeta\,d\zeta+\int_1^\infty\overset{*}{\psi}^\zeta\,d\zeta\right).$$

Facendo tendere z verso l'∞ si trova al limite,

$$-\overset{*}{f}\overset{*}{\psi}^2=\overset{*}{\varphi}\int_1^\infty\overset{*}{\psi}^\zeta\,d\zeta.$$

Da cui finalmente

$$f=-\overset{*}{\varphi}\int_1^\infty\overset{*}{\psi}^\zeta\,d\zeta\,\overset{*}{\psi}^{-2}$$

che è equivalente alla soluzione (26).

CAP. VII.

Funzioni di composizione - Derivate ed integrali di composizione.

1. Noi esporremo in questo capitolo le considerazioni fondamentali su questo argomento e svilupperemo specialmente quelle che hanno attinenza col soggetto che trattiamo delle potenze e dei logaritmi di composizione, rimandando ad un'altra Memoria uno svolgimento più diffuso e completo dell'argomento stesso.

2. Abbiasi un elemento analitico col centro $z=0$,

$$\sum_0^\infty{}_m\, a_m\, z^m\,, \tag{1}$$

convergente entro un cerchio di raggio R. Se $F(x,y)$ è una funzione finita e continua,

$$\sum_1^\infty{}_m\, a_m\, \overset{*}{F}^m$$

sarà una funzione pure finita e continua permutabile con F. Noi la chiameremo una *funzione razionale intera di composizione di* F.

Consideriamo ora

$$\sum_{1}^{p} {}_m\, b_m\, z^{-m}.$$

Essa avrà un polo di ordine p, se $b_m \gtrless 0$. Se ammettiamo F derivabile, avranno un senso, secondo le definizioni del Cap. III, l'espressione

$$\sum_{0}^{n} {}_m\, b_m\, \overset{*}{\mathrm{F}}{}^{-m}$$

e l'altra

$$\sum_{1}^{\infty} {}_m\, a_m\, \overset{*}{\mathrm{F}}{}^{m} + \sum_{0}^{p} {}_m\, b_m\, \overset{*}{\mathrm{F}}{}^{-m}.$$

Questa si dirà una *funzione razionale di composizione con un polo d'ordine p*.

Se supponiamo n intero e positivo, potremo pure calcolare

$$\sum_{1}^{\infty} {}_m\, a_m\, \overset{*}{\mathrm{F}}{}^{\frac{m}{n}} + \sum_{0}^{p} {}_m\, b_m\, \overset{*}{\mathrm{F}}{}^{-\frac{m}{n}}.$$

Essa sarà una funzione irrazionale di composizione allorchè esiste almeno un termine con esponente frazionario.

Consideriamo

$$\overset{*}{l}\,\mathrm{F}.$$

Noi non sappiamo ancora, se esista il $\overset{*}{l}\,\mathrm{F}$ corrispondente ad una funzione qualsiasi finita e continua F (cfr. il Cap. seguente). Però, se il detto logaritmo di composizione esiste, allorchè F è incluso in certo campo funzionale, noi lo chiameremo una *funzione logaritmica di composizione.*

Le somme, le resultanti di composizione e i rapporti di composizione di più funzioni di composizione, li considereremo come *nuove funzioni di composizione.*

3. Rappresenteremo le diverse funzioni di composizione col simbolo

$$\overset{*}{\Phi}(\mathrm{F})$$

F si chiamerà l'*argomento della funzione* Φ.

Se $\overset{*}{\Psi}(\mathrm{F})$ è una funzione di composizione, e $\overset{*}{\mathrm{F}}(\Phi)$ è un'altra funzione di composizione, potremo ottenere

$$\overset{*}{\Psi}(\overset{*}{\mathrm{F}}(\Phi))$$

che chiameremo una *funzione di funzione di composizione.*

4. Abbiamo così il modo di definire varie classi di funzioni di composizione. Nuove funzioni si potrebbero ottenere come limiti uniformi delle precedenti facendo tendere i parametri che essi contengono verso dati valori. Ma noi vogliamo procedere a stabilire una definizione generale di *funzione di composizione* la quale comprenda tutte le classi stesse come casi particolari. La via che terremo per raggiun-

gere questo scopo consisterà nello stabilire due proprietà fondamentali comuni a tutte le funzioni fino ad ora esaminate, e ad assumere le proprietà stesse come quelle che definiscono in generale tutte le funzioni di composizione.

La prima di queste proprietà è, che *tutte le funzioni precedentemente ottenute sono permutabili colla funzione che costituisce l'argomento*; andremo a stabilire nel paragrafo seguente la seconda proprietà fondamentale.

5. Ritorniamo ad una funzione di composizione razionale e intera

$$\overset{*}{\Phi}(\mathrm{F}) = \sum_{1}^{\infty}{}_m\, a_m \overset{*}{\mathrm{F}}{}^m .$$

Formiamo

$$\overset{*}{\Phi}(\mathrm{F} + \varepsilon f) - \overset{*}{\Phi}(\mathrm{F}) ,$$

ove ε è un numero e f una funzione permutabile con F.

Per ε tendente a zero, questa espressione tende a zero; e

$$\frac{\overset{*}{\Phi}(\mathrm{F} + \varepsilon f) - \overset{*}{\Phi}(\mathrm{F})}{\varepsilon \overset{*}{f}} ,$$

per ε tendente a zero, tende verso un limite che è facile calcolare, ed è

$$\sum_{1}^{\infty}{}_m\, m a_m \overset{*}{\mathrm{F}}{}^{m-1} .$$

Esso è quindi indipendente da f. Si chiamerà la *derivata di composizione di* Φ rispetto ad F.

La regola per calcolare questa derivata consiste nel derivare la serie (1) rispetto a z, e sostituire, alle potenze di z, le potenze di composizione di F. Quindi la regola è la stessa che si tiene per calcolare la derivata ordinaria purchè si sostituiscano alle potenze ordinarie quelle di composizione.

Giovandoci del concetto di limite stabilito precedentemente (Cap. III, §§ 13, 14) potremo estendere in modo identico il concetto di derivata di composizione alle funzioni razionali di composizione aventi poli, alle funzioni irrazionali di composizione, e a tutte quelle che da esse si possono ottenere mediante operazioni di somme, di composizioni, di rapporti di composizione e di funzioni di funzioni di composizione. Le regole per eseguire le derivate di composizione saranno le stesse di quelle che si applicano per le derivazioni ordinarie, salvo a sostituire alle operazioni ordinarie di moltiplicazione e di potenza e di rapporto quelle di composizione.

Potremo estendere lo stesso concetto di derivata anche alle funzioni logaritmiche di composizione. Se vogliamo ottenere la derivata di composizione di $\overset{*}{l}\mathrm{F}$, basterà osservare che

$$\overset{*}{e}{}^{\overset{*}{l}\mathrm{F}} = \mathrm{F} ,$$

e quindi si troverà

$$\frac{d\overset{*}{l}\mathrm{F}}{d\overset{*}{\mathrm{F}}} = \overset{*}{\mathrm{F}}^{-1}.$$

Potremo dunque generalizzare le regole precedenti, per eseguire le derivate di composizione, anche ad espressioni contenenti dei logaritmi di composizione.

Evidentemente in tutti i casi considerati, se l'incremento dato alla funzione F è εf, permutabile con F, e si fa tendere poi ε a zero, il limite del rapporto di composizione, che ha per numeratore l'incremento della funzione di composizione, e per denominatore εf, *resulterà indipendente da* f. Questa proprietà è la *seconda proprietà fondamentale* che cercavamo.

Per rappresentare la derivata di composizione della funzione Φ dell'argomento F faremo uso del simbolo

$$\text{(I)} \qquad \frac{d\overset{*}{\Phi}}{d\overset{*}{\mathrm{F}}}.$$

6. Premesso questo, passiamo a stabilire la definizione generale di funzione di composizione.

Sia $\Phi(x,y)$ una funzione che *dipende da tutti i valori della funzione* $\mathrm{F}(\xi,\eta)$ $x \leq \xi \leq \eta \leq y$, nel senso che si dà a questa denominazione nella *teoria delle funzioni di linee*, per modo che potremo scrivere, con i simboli di questa teoria

$$\Phi = \Phi\left|\left[\mathrm{F}(\overset{\eta}{\underset{x}{\xi}}, \overset{y}{\underset{\xi}{\eta}})\right]\right|$$

e possa $\mathrm{F}(x, y)$ variare in un certo campo funzionale per il quale ammetteremo che, se vi sono incluse f e φ, vi sia anche inclusa $af + b\varphi$. *Le funzioni* Φ *ed* F *siano permutabili.* Supporremo di più la *continuità*: cioè, se ad $\mathrm{F}(x, y)$ corrisponde $\Phi(x, y)$, e ad $\mathrm{F}_1(x, y)$ corrisponde $\Phi_1(x, y)$, Φ tenda uniformemente verso Φ_1, allorchè F tende uniformemente verso F_1.

Oltre a ciò ammetteremo che, nel senso che si dà a questa operazione nella *teoria delle funzioni di linee*, la Φ possa differenziarsi rispetto ad F, ottenendone i differenziali successivi primo, secondo ecc., fino a quell'ordine che sarà necessario considerare.

Sostituiamo $\mathrm{F}(\xi, \eta)$ con

$$\mathrm{F}(\xi, \eta) + \varepsilon f(\xi, \eta)$$

permutabile con $\mathrm{F}(\xi, \eta)$, e indichiamo con $\Phi'(x, y)$ ciò che diviene $\Phi(x, y)$. Formiamo il rapporto di composizione

$$\frac{\overset{*}{\Phi'} - \overset{*}{\Phi}}{\varepsilon \overset{*}{f}},$$

e facciamo tendere il numero ε verso zero. *Se esiste un limite indipendente da* f,

diremo che Φ *è una funzione di composizione dell'argomento* F e la rappresenteremo sempre col simbolo $\overset{*}{\Phi}(\mathrm{F})$ sopra adoperato. Il suddetto limite se ne dirà la *derivata di composizione* e si indicherà col simbolo introdotto precedentemente

$$\frac{d\overset{*}{\Phi}}{d\overset{*}{\mathrm{F}}}.$$

Al pari delle derivate ordinarie anche la derivata di composizione può intendersi come *un vero e proprio rapporto di composizione,* ed il numeratore ed il denominatore costituiranno respettivamente i *differenziali della funzione e del suo argomento.*

Due sono dunque le proprietà fondamentali delle funzioni di composizione: 1°) *La permutabilità della funzione col suo argomento*; 2°) *la indipendenza della derivata dal differenziale dell'argomento* (cfr. § 9).

7. Proviamo, adesso, che *la derivata è anche essa una funzione di composizione di* F.

Se denotiamo con Ψ la derivata $\frac{d\overset{*}{\Phi}}{d\overset{*}{\mathrm{F}}}$ potremo dapprima riconoscere che

$$\Psi = \Psi|[\mathrm{F}(\overset{\eta}{\underset{x}{\xi}}, \overset{y}{\underset{\xi}{\eta}})]|. \qquad (1)$$

Mostriamo poi che a Ψ appartengono le due precedenti proprietà fondamentali che servono a caratterizzare una funzione di composizione.

Infatti la prima delle due proprietà fondamentali vale per la derivata Ψ, giacchè essa è permutabile con F.

Passiamo a provare che si verifica anche la seconda proprietà. Osserviamo perciò che si ha

$$\overset{*}{\Phi}(\mathrm{F} + \varepsilon_1 f_1) - \overset{*}{\Phi}(\mathrm{F}) = \varepsilon_1 \overset{*}{f} \overset{*}{\Psi} + \varepsilon_1 h_1,$$

ove f_1 è permutabile con F, e h_1 tende a zero con ε_1.

Sia f_2 pure permutabile con F, e si formi

$$\overset{*}{\Phi}(\mathrm{F} + \varepsilon_1 f_1 + \varepsilon_2 f_2) - \overset{*}{\Phi}(\mathrm{F} + \varepsilon_1 f_1) - \overset{*}{\Phi}(\mathrm{F} + \varepsilon_2 f_2) + \overset{*}{\Phi}(\mathrm{F}) =$$

$$= \varepsilon_1 \overset{*}{f_1} \left\{ \overset{*}{\Psi}|[\mathrm{F} + \varepsilon_2 f_2]| - \overset{*}{\Psi}|[\mathrm{F}]| \right\} + \varepsilon_1 (h_1' - h_1'').$$

ove h_1' e h_1'' si annullano respettivamente con ε_1 e con ε_2.

Siccome, per le ipotesi precedentemente fatte, Ψ è differenziabile secondo le regole delle funzioni di linee, si potrà scrivere

$$(2) \qquad \Psi|[\mathrm{F} + \varepsilon_2 f_2]| - \Psi|[\mathrm{F}]| = \varepsilon_2 \theta_1 + \varepsilon_2 h_2,$$

in cui h_2 va a zero con ε_2. Se ammettiamo l'esistenza del differenziale terzo nel senso delle funzioni di linee, potremo scrivere

$$\overset{*}{\Phi}(F + \varepsilon_1 f_1 + \varepsilon_2 f_2) - \overset{*}{\Phi}(F + \varepsilon_1 f_1) - \overset{*}{\Phi}(F + \varepsilon_2 f_2) + \overset{*}{\Phi}(F) =$$

$$= \varepsilon_1 \varepsilon_2 \overset{*}{f_1} \overset{*}{\theta}_1 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 h'' ,$$

in cui h'' va a zero con ε_1 e con ε_2.

Quindi

$$(3) \qquad \lim_{\substack{\varepsilon_1=0 \\ \varepsilon_2=0}} \frac{\overset{*}{\Phi}(F + \varepsilon_1 f_1 + \varepsilon_2 f_2) - \overset{*}{\Phi}(F + \varepsilon_1 f_1) - \overset{*}{\Phi}(F + \varepsilon_2 f_2) + \overset{*}{\Phi}(F)}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} = \overset{*}{f_1} \overset{*}{\theta}_1 .$$

Ma il primo membro è simmetrico rispetto a f_1 e f_2; onde potrà porsi anche sotto la forma $\overset{*}{f_2} \overset{*}{\theta}_2$, e quindi

$$\overset{*}{f_1} \overset{*}{\theta}_1 = \overset{*}{f_2} \overset{*}{\theta}_2 .$$

Presi f_1 e f_2 di ordine determinato, dovrà essere

$$(4) \qquad \theta_1 = \overset{*}{f_2} \overset{*}{\theta}_{12}$$

$$(4') \qquad \theta_2 = \overset{*}{f_2} \overset{*}{\theta}_{12} ,$$

ossia il limite (3) si scriverà

$$\overset{*}{f_1} \overset{*}{f_2} \overset{*}{\theta}_{12} .$$

Ora Ψ è indipendente da f_1; quindi θ_1 è pure indipendente da f_1. A cagione della (4), resulterà θ_{12} indipendente da f_1. Per la stessa ragione, in virtù della (4'), dovrà θ_{12} essere indipendente da f_2. Dunque θ_{12} è indipendente da f_1 e f_2.

Ritorniamo ora alla (2). Tenendo conto della (4), sarà

$$\Psi|[f + \varepsilon_2 f_2]| - \Psi|[F]| = \varepsilon_2 \overset{*}{f_2} \overset{*}{\theta}_{12} + \varepsilon_2 h_2 ,$$

e per conseguenza

$$\lim_{\varepsilon_2=0} \frac{\overset{*}{\Psi}|[F + \varepsilon_2 f_2]| - \overset{*}{\Psi}|[F]|}{\varepsilon_2 \overset{*}{f_2}} = \theta_{12}$$

con θ_{12} indipendente da f_2, il che dimostra che $\Psi = \dfrac{d\overset{*}{\Phi}}{d\overset{*}{F}}$ gode anche della seconda peoprietá fondamentale e quindi si è provato che essa è una funzione di composizione di F.

Allorchè esistono le successive derivate di composizione di Φ, queste si denoteranno respettivamente con

$$\frac{d^2\overset{*}{\Phi}}{d\overset{*}{F}{}^2}, \frac{d^3\overset{*}{\Phi}}{d\overset{*}{F}{}^3}, \dots$$

e *saranno tutte funzioni di composizione di* F *nel senso stabilito precedentemente.*

8. Passiamo adesso ad esporre alcune osservazioni che serviranno a chiarire e completare i concetti che abbiamo finora stabiliti.

Cominciamo dal notare che conviene sempre individuare il campo funzionale nel quale si ammette variabile l'argomento delle funzioni di composizione che si vogliono esaminare.

Così per esempio consideriamo

$$(5) \qquad \int_x^y F(x, \xi)\, \Omega(y-\xi)\, d\xi ,$$

e riguardiamola come dipendente da tutti i valori di $F(\xi, \eta)$, $x \leq \xi \leq \eta \leq y$ nel senso della teoria delle funzioni di linee. Finchè la funzione F appartiene al gruppo del ciclo chiuso, la espressione (5) ci darà una funzione di composizione di F; al di fuori di questo campo, non più.

Infatti, se prendiamo

$$F(x, \xi) = F(\xi - x),$$

la funzione (5) sarà permutabile con F; mentre, in generale, se $F(x, \xi)$ non appartiene al gruppo del ciclo chiuso, tale permutabilità non sussiste. Dunque la prima delle proprietà fondamentali (§ 6) è verificata soltanto se F appartiene al gruppo del ciclo chiuso e quindi dovrà supporsi variabile entro questo campo funzionale l'argomento F.

9. Potremmo chiederci se, nel definire una funzione di composizione (§ 6), sia necessario di enunciare esplicitamente la condizione che abbiamo posto per la derivata: *di essere indipendente dal differenziale dell'argomento* (2ª condizione), o se essa possa invece discendere come una conseguenza dalla condizione di *permutabilità fra la funzione ed il suo argomento* (1ª condizione); ma è facile il riconoscere che le due proprietà sono *indipendenti,* nel senso che, può esistere la permutabilità fra funzione e argomento, senza che la derivata resulti indipendente dal differenziale dell'argomento. Per averne un esempio consideriamo l'espressione

$$(6) \qquad \int_x^y F(x, \xi)\, \Omega(\xi - x)\, d\xi$$

come dipendente da F.

Se prendiamo F appartenente al gruppo del ciclo chiuso, cioè

$$F(x, \xi) = F(\xi - x),$$

l'espressione precedente diviene

$$\int_0^{y-x} \mathrm{F}(\eta)\, \Omega(\eta)\, d\eta\,,$$

cioè conduce ad una funzione che appartiene pure al gruppo del ciclo chiuso ed è quindi permutabile con F. *La prima proprietà fondamentale* (§ 6) *è dunque soddisfatta.*

Diamo ora ad $\mathrm{F}(y-x)$ l'incremento $\varepsilon f(y-x)$. L'incremento dell'espressione (6) resulta

$$\varepsilon \int_0^{y-x} f(\eta)\, \Omega(\eta)\, d\eta\,.$$

Per calcolare il rapporto di composizione fra l'incremento ora ottenuto e l'incremento dell'argomento F, basterà risolvere l'equazione integrale

$$\varepsilon \int_0^{y-x} f(\eta)\, \Omega(\eta)\, d\eta = \varepsilon \int_x^y f(y-\xi)\, \psi(\xi - x)\, d\xi\,.$$

La soluzione ψ ci darà il cercato rapporto.

Ora, derivando ambo i membri rispetto ad y, si ha

$$f(y-x)\, \Omega(y-x) = f(0)\, \psi(y-x) + \int_x^y f'(y-\xi)\, \psi(\xi - x)\, d\xi\,,$$

ossia

$$f(x)\, \Omega(x) = f(0)\, \psi(x) + \int_0^x f'(x-\xi)\, \psi(\xi)\, d\xi\,,$$

ed evidentemente la soluzione ψ dipende da f.

Ne segue che *la 2ª condizione fondamentale* del § 6 (cioè che la derivata di composizione sia indipendente dal differenziale dell'argomento) *non è soddisfatta*, sebbene lo sia *la prima*, cioè la condizione di permutabilità fra funzione e argomento.

10. La importanza di questa seconda condizione consiste nell'essere essa *invariantiva per le successive operazioni che fanno passare dalla funzione alle sue successive derivate*: ossia, che, se è verificata nel primo passaggio dalla funzione alla derivata prima, sussiste anche in tutti i successivi passaggi alle altre derivate. Tale è il significato del teorema del § 7.

Riconosciutane così la importanza, vogliamo darne una nuova dimostrazione pel caso particolare in cui il campo funzionale dell'argomento sia quello del ciclo chiuso.

Supponiamo di far corrispondere, ad ogni funzione F del ciclo chiuso, un'altra funzione Φ, pure appartenente al gruppo del ciclo chiuso, in modo da ottenere secondo la definizione generale (§ 6) una funzione di composizione $\overset{*}{\Phi}(\mathrm{F})$. Consideriamo

$$\frac{d\overset{*}{\Phi}}{d\overset{*}{\mathrm{F}}} = \psi:$$

ψ apparterrà anch'essa al gruppo del ciclo chiuso, e sarà indipendente da $d\mathrm{F}$ (seconda proprietà fondamentale del § 6).

Secondo la teoria delle funzioni di linee, sarà

$$\delta\Phi = \int_0^x \Phi'(x\,,\xi)\,\delta\mathrm{F}(\xi)\,\delta\xi = \int_0^x \psi(x-\xi)\,\delta\mathrm{F}(\xi)\,d\xi\,,$$

e quindi

$$\Phi'(x\,,\xi) = \psi(x-\xi)\,.$$

Se passiamo alle derivate funzionali seconde, si avrà

$$\delta\Phi'(x\,,\xi) = \delta\psi(x-\xi) = \int_0^x \Phi''(x-\xi\,,\eta)\,\delta\mathrm{F}(\eta)\,d\eta\,.$$

Ora, in virtù della simmetria delle derivate seconde (vedi op. cit. *Leçons sur les fonctions de lignes*, Chap. II, § 4), resulterà

$$\Phi''(x-\xi\,,\eta) = \Phi''(x-\eta\,,\xi)\,,$$

ossia, ammettendo l'esistenza delle derivate di Φ'',

$$\frac{\partial\Phi''}{\partial x} = -\frac{\partial\Phi''}{\partial\xi} = -\frac{\partial\Phi''}{\partial\eta}\,,$$

e per conseguenza

$$\Phi''(x-\xi\,,\eta) = \Phi''(x-\eta\,,\xi) = \Phi''(x-\xi-\eta)\,,$$

onde

$$\delta\psi(x-\xi) = \int_0^x \Phi''(x-\xi-\eta)\,\delta\mathrm{F}(\eta)\,d\eta\,.$$

Ne segue

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_0^x \Phi''(x-\xi-\eta)\,\delta\mathrm{F}(\eta)\,d\eta + \frac{\partial}{\partial\xi}\int_0^x \Phi''(x-\xi-\eta)\,\delta\mathrm{F}(\eta)\,d\eta = 0\,,$$

e quindi, eseguendo le derivazioni,

$$\Phi''(-\xi)\,\delta\mathrm{F}(x) = 0 \qquad\qquad (\xi > 0)\,.$$

Avremo dunque

$$\Phi''(x-\xi-\eta) = 0$$

per η compreso fra $x-\xi$ e x, da cui segue

$$\delta\psi(x-\xi) = \int_0^{x-\xi} \Phi''(x-\xi-\eta)\,\delta\mathrm{F}(\eta)\,d\eta\,;$$

il che dimostra il teorema, giacchè la equazione precedente si potrà scrivere

$$\delta\psi = \overset{*}{\Phi}{}'' \delta\overset{*}{F}$$

e quindi

$$\frac{d\overset{*}{\psi}}{d\overset{*}{F}} = \Phi'',$$

cioè il rapporto

$$\frac{d\overset{*}{\psi}}{d\overset{*}{F}}$$

sarà indipendente dal differenziale che comparisce al denominatore.

11. Se Φ è una funzione di composizione di F la operazione di *derivazione di composizione* può ottenersi mediante una derivazione eseguita nel senso ordinario.

Infatti,

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{\overset{*}{\Phi}(F + \varepsilon f) - \overset{*}{\Phi}(F)}{\varepsilon \overset{*}{f}}$$

deve essere indipendente da f, purchè questa funzione sia permutabile con F. Se prendiamo $f = \overset{*}{F}{}^0$, si avrà

$$\frac{\overset{*}{\Phi}(F + \varepsilon \overset{*}{F}{}^0) - \overset{*}{\Phi}(F)}{\varepsilon \overset{*}{F}{}^0} = \frac{\overset{*}{\Phi}(F + \varepsilon \overset{*}{F}{}^0) - \overset{*}{\Phi}(F)}{\varepsilon},$$

onde

$$\frac{d\overset{*}{\Phi}}{d\overset{*}{F}} = \lim_{\varepsilon=0} \frac{\overset{*}{\Phi}(F + \varepsilon \overset{*}{F}{}^0) - \overset{*}{\Phi}(F)}{\varepsilon} = \left(\frac{d\overset{*}{\Phi}(F + z\overset{*}{F}{}^0)}{dz}\right)_{z=0};$$

la qual formula riconduce la derivazione di composizione ad una derivazione ordinaria.

12. Consideriamo

$$\overset{*}{\Phi}(F_2) - \overset{*}{\Phi}(F_1),$$

ove F_2 e F_1 sono permutabili. Per la formula di Lagrange, avremo

$$\overset{*}{\Phi}(F_2) - \overset{*}{\Phi}(F_1) = \left(\frac{d\overset{*}{\Phi}(F_1 + z(F_2 - F_1))}{dz}\right)_{z=\theta},$$

ove θ è un numero compreso fra 0 e 1.

Da questa formula segue

$$\overset{*}{\Phi}(F_2) - \overset{*}{\Phi}(F_1) = (\overset{*}{F}_2 - \overset{*}{F}_1)\left(\frac{d\overset{*}{\Phi}}{d\overset{*}{F}}\right)_{F=F_1+\theta(F_2-F_1)}, \tag{7}$$

o anche, posto $F_2 = F_1 + f$.

$$\overset{*}{\Phi}(F_1 + f) = \overset{*}{\Phi}(F_1) + \overset{*}{f}\left(\frac{d\overset{*}{\Phi}}{d\overset{*}{F}}\right)_{F=F_1+\theta f}$$

ove F_1 e f sono permutabili.

Ne segue una formula analoga a quella di Taylor, ammessa l'esistenza delle successive derivate di composizione, e cioè

$$\overset{*}{\Phi}(F_1 + f) = \overset{*}{\Phi}(F_1) + \overset{*}{f}\left(\frac{d\overset{*}{\Phi}}{d\overset{*}{F}}\right)_{F=F_1} + \frac{\overset{*}{f^2}}{2!}\left(\frac{d^2\overset{*}{\Phi}}{d\overset{*}{F^2}}\right)_{F=F_1} + \cdots$$

$$+ \cdots + \frac{\overset{*}{f^m}}{m!}\left(\frac{d^m\overset{*}{\Phi}}{d\overset{*}{F^m}}\right)_{F=F_1} + \frac{\overset{*}{f^{m+1}}}{(m+1)!}\left(\frac{d^{m+1}\overset{*}{\Phi}}{d\overset{*}{F^{m+1}}}\right)_{F=F_1+\theta_m f},$$

essendo f permutabile con F_1 e θ_m un numero compreso fra 0 e 1.

13. Dalla formula (7) segue, ammessa la continuità di $\dfrac{d\overset{*}{\Phi}}{d\overset{*}{F}}$,

$$\lim_{F_1=F_2} \frac{\overset{*}{\Phi}(F_2) - \overset{*}{\Phi}(F_1)}{\overset{*}{F_2} - \overset{*}{F_1}} = \left(\frac{d\overset{*}{\Phi}}{d\overset{*}{F}}\right)_{F=F_1},$$

supponendo che le funzioni F_1 e F_2 siano permutabili.

Supponiamo $F(x, y | s)$ dipendente dal parametro s in modo tale che per tutti i valori di s compresi in un certo intervallo, le F resultino funzioni appartenenti ad uno stesso gruppo di funzioni permutabili. Si potrà considerare

$$\overset{*}{\Phi}(F(x, y | s))$$

come una funzione di s. Avremo, per la (7),

$$\frac{\overset{*}{\Phi}(F(x, y | s_0 + h)) - \overset{*}{\Phi}(F(x, y | s_0))}{h} =$$

$$= \frac{\overset{*}{F}(x, y | s_0 + h) - \overset{*}{F}(x, y | s_0)}{h}\left(\frac{d\overset{*}{\Phi}}{d\overset{*}{F}}\right)_{F=F_1+\theta(F_2-F_1)},$$

ove si è supposto $F_1 = F(x, y | s_0)$, $F_2 = F(x, y | s_0 + h)$ e θ compreso fra 0 e 1.

Ammessa la derivabilità di F rispetto ad s, e passando al limite per h tendente a zero, otterremo

$$\frac{d\overset{*}{\Phi}(F)}{ds} = \frac{d\overset{*}{F}}{ds}\frac{d\overset{*}{\Phi}}{d\overset{*}{F}}. \tag{8}$$

14. Dalla formula (7) segue che, se

$$\frac{d\overset{*}{\Phi}}{d\overset{*}{\mathrm{F}}}=0,$$

qualunque sia F nel campo che si considera, Φ è indipendente da F: cioè, è eguale ad una funzione fissa determinata appartenente al gruppo di funzioni permutabili nel quale è compreso il campo funzionale entro cui è variabile l'argomento F. Per conseguenza, se $\overset{*}{\Phi}_1(\mathrm{F})$ e $\overset{*}{\Phi}_2(\mathrm{F})$ hanno la stessa derivata di composizione, esse debbono differire per una funzione fissa determinata appartenente al gruppo delle funzioni permutabili a cui appartiene F.

15. Passiamo adesso alla *integrazione di composizione.*

Abbiasi una funzione di composizione $\overset{*}{\Phi}(\mathrm{F})$, e consideriamo la funzione

$$\mathrm{F}(x \,.\, y \,|\, s)$$

tale che, per tutti i valori di s compresi entro certi limiti $a\ b$, $\mathrm{F}(x\,,y\,|\,s)$ appartenga sempre allo stesso gruppo di funzioni permutabili. Supponiamo, dapprima, che Φ e F siano di ordine positivo.

Formiamo, con una operazione di composizione,

$$\overset{*}{\Phi}(\mathrm{F}(x\,,y\,|\,s))\,\frac{\partial\overset{*}{\mathrm{F}}(x\,,y\,|\,s)}{\partial s},$$

e supponiamo che questa espressione, considerata come funzione di s, sia integrabile. Calcoliamo

(9) $$\int_a^b \overset{*}{\Phi}(\mathrm{F}(x\,,y\,|\,s))\,\frac{\partial\overset{*}{\mathrm{F}}(x\,,y\,|\,s)}{\partial s}\,ds\,.$$

Questo integrale si otterrà dividendo l'intervallo $a\ b$ in n parti $h_1\,,h_2\,,\ldots h_n$, quindi formando

$$\mathrm{F}(x\,,y\,|\,a+h_1+h_2+\cdots+h_r)=\mathrm{F}_r \quad,\quad \mathrm{F}(x\,,y\,|\,a)=\mathrm{F}_0\,,$$

(10) $$\lim\sum_0^{n-1}{}_r\overset{*}{\Phi}(\mathrm{F}_r)\,(\overset{*}{\mathrm{F}}_{r+1}-\overset{*}{\mathrm{F}}_r)\,,$$

passando al limite nell'ultima somma col far tendere indefinitamente verso zero tutti gli intervalli $h_1\,,h_2\,,\ldots h_n$ e crescendone nel tempo stesso indefinitamente il numero.

Se Φ o F fossero di ordine negativo, potremmo operare analogamente, purchè si applicassero le regole per il passaggio al limite di espressioni di ordine negativo (vedi Cap. III, §§ 13 e 14).

16. Poniamo $F(x, y|a) = F_A$, $F(x, y|b) = F_B$. Noi scriveremo l'integrale (9) sotto la forma

$$\int_s \overset{*}{\Phi}(F)\, d\overset{*}{F} = \int_a^b \overset{*}{\Phi}(F)\, d\overset{*}{F},$$

oppure

(11)
$$\int_{F_A}^{F_B} \overset{*}{\Phi}(F)\, d\overset{*}{F}.$$

Per giustificare la notazione (11), bisogna provare che, presa un'altra funzione

$$F'(x, y | s')$$

tale che per tutti i valori di s' compresi fra a' e b' ci dia un insieme di funzioni appartenenti allo stesso gruppo precedente di funzioni permutabili, mentre $F'(x, y | a') = F_A$, $F'(x, y | b') = F_B$, si trova, per

(9')
$$\int_{a'}^{b'} \overset{*}{\Phi}(F'(x, y | s')) \overset{*}{\frac{\partial F'(x, y | s')}{\partial s'}}\, ds',$$

lo stesso resultato (9).

A tal fine consideriamo

$$F(x, y | u, v),$$

e immaginiamo u e v come le coordinate dei punti di un piano. Per tutti i valori di u e v corrispondenti ai punti di una certa area σ e del suo contorno S supponiamo che F resulti una funzione appartenente ad uno stesso gruppo di funzioni permutabili. Formiamo

$$\int_S \overset{*}{\Phi}(F)\, d\overset{*}{F} = \int_S \overset{*}{\Phi}(F) \frac{d\overset{*}{F}}{dS}\, dS = \int_S \overset{*}{\Phi}(F) \left(\frac{\partial \overset{*}{F}}{\partial u} \frac{du}{dS} + \frac{\partial \overset{*}{F}}{\partial v} \frac{dv}{dS} \right) dS.$$

Se nessuna singolarità sussiste nell'interno del campo σ, in virtù della formula (8), avremo

$$\int_S \overset{*}{\Phi}(F) \left(\frac{\partial \overset{*}{F}}{\partial u} \frac{du}{dS} + \frac{\partial \overset{*}{F}}{\partial v} \frac{dv}{dS} \right) dS = \int_\sigma \left\{ \frac{\partial}{\partial v} \left(\overset{*}{\Phi}(F) \frac{\partial \overset{*}{F}}{\partial u} \right) - \frac{\partial}{\partial u} \left(\overset{*}{\Phi}(F) \frac{\partial \overset{*}{F}}{\partial v} \right) \right\} d\sigma =$$

$$= \int_\sigma \left\{ \frac{\partial}{\partial v} \overset{*}{\Phi}(F) \frac{\partial \overset{*}{F}}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial u} \overset{*}{\Phi}(F) \frac{\partial \overset{*}{F}}{\partial v} \right\} d\sigma = \int_\sigma \frac{d\overset{*}{\Phi}}{d\overset{*}{F}} \left(\frac{\partial \overset{*}{F}}{\partial v} \frac{\partial \overset{*}{F}}{\partial u} - \frac{\partial \overset{*}{F}}{\partial u} \frac{\partial \overset{*}{F}}{\partial v} \right) d\sigma = 0.$$

Sarà dunque

(12)
$$\int_S \overset{*}{\Phi}(F)\, d\overset{*}{F} = 0.$$

Da questa formula resulta che, se si può passare dalla $F(x, y | s)$ alla $F'(x, y | s')$ con continuità senza che F e $\Phi(F)$ traversino delle singolarità, i due integrali (9) e (9') resultano eguali.

17. Considerando F_A fisso e F_B variabile,

$$\int_{F_A}^{F_B} \overset{*}{\Phi}(F)\, d\overset{*}{F}$$

resulta una funzione di composizione di F_B. Chiamandola $\psi(F_B)$, sarà

$$\frac{d\overset{*}{\psi}}{d\overset{*}{F}_B} = \overset{*}{\Phi}(F_B)\,.$$

Per integrare le funzioni di composizione razionali o irrazionali considerate precedentemente, basta applicare le ordinarie regole di integrazione e sostituire alle potenze ordinarie quelle di composizione.

È evidente che si potranno considerare delle *equazioni differenziali di composizione* esaminando le relazioni fra funzioni di composizione e le loro derivate dei varii ordini.

È pure evidente che si potranno considerare funzioni di composizione di più argomenti e le loro derivate.

18. Si riconosce facilmente l'analogia fra la teoria che abbiamo svolta e la teoria delle funzioni di variabili complesse. La seconda condizione, posta per la derivata di composizione di una funzione di composizione nel § 6, corrisponde evidentemente alla condizione che la derivata di una funzione di variabile complessa z sia indipendente dalla direzione in cui si sposta nel piano complesso l'indice della variabile complessa z (condizione di monogeneità). Tanto l'una quanto l'altra delle due condizioni si conservano nelle derivazioni successive (teorema del § 7).

Inoltre la formula (12) corrisponde al teorema di Cauchy; ed evidentemente si può stabilire, come condizione perchè una funzione sia di composizione, che venga verificata la formula (12), il che stabilisce un teorema reciproco analogo al noto teorema di Morera, inverso di quello di Cauchy.

CAP. VIII.

Applicazione della integrazione di composizione ai logaritmi di composizione e alle potenze di composizione.

1. Abbiamo veduto che

$$\frac{d\,\overset{*}{l}F}{d\overset{*}{F}} = \overset{*}{F}^{-1}\,,$$

onde

$$\overset{*}{l}F = \int_{F_0}^{F} \overset{*}{F}^{-1}\, d\overset{*}{F}\,.$$

Potremo anche porre

$$\overset{*}{l}\mathrm{F} = \lim_{n=\infty} \frac{\overset{*}{\mathrm{F}} - \overset{*}{\mathrm{F}}{}^0}{n} \left\{ \frac{1}{\overset{*}{\mathrm{F}}{}^0} + \frac{1}{\overset{*}{\mathrm{F}}{}^0 + \frac{\overset{*}{\mathrm{F}} - \overset{*}{\mathrm{F}}{}^0}{n}} + \frac{1}{\overset{*}{\mathrm{F}}{}^0 + \frac{2(\overset{*}{\mathrm{F}} - \overset{*}{\mathrm{F}}{}^0)}{n}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\overset{*}{\mathrm{F}}{}^0 + \frac{3(\overset{*}{\mathrm{F}} - \overset{*}{\mathrm{F}}{}^0)}{n}} + \cdots + \frac{1}{\overset{*}{\mathrm{F}}} \right\} = (\overset{*}{\mathrm{F}} - \overset{*}{\mathrm{F}}{}^0) \int_0^1 \frac{dz}{\overset{*}{\mathrm{F}}{}^0 + z(\overset{*}{\mathrm{F}} - \overset{*}{\mathrm{F}}{}^0)};$$

o anche

$$\overset{*}{\mathrm{F}}\overset{*}{l}\mathrm{F} = (\overset{*}{\mathrm{F}} - \overset{*}{\mathrm{F}}{}^0) \int_0^1 \frac{\overset{*}{\mathrm{F}}\, dz}{\overset{*}{\mathrm{F}}{}^0 + z(\overset{*}{\mathrm{F}} - \overset{*}{\mathrm{F}}{}^0)}.$$

Ora

$$\frac{\overset{*}{\mathrm{F}}}{\overset{*}{\mathrm{F}}{}^0 + z(\overset{*}{\mathrm{F}} - \overset{*}{\mathrm{F}}{}^0)} = \frac{1}{1-z}\left(\mathrm{F} - \frac{z}{1-z}\overset{*}{\mathrm{F}}{}^2 + \frac{z^2}{(1-z)^2}\overset{*}{\mathrm{F}}{}^3 - \cdots\right).$$

Si tratta quindi di vedere se l'integrale

$$\int_0^1 \frac{dz}{1-z}\left(\mathrm{F} - \frac{z}{1-z}\overset{*}{\mathrm{F}}{}^2 + \frac{z^2}{(1-z)^2}\overset{*}{\mathrm{F}}{}^3 - \cdots\right)$$

è un integrale convergente.

2. Noi dimostreremo, a questo proposito, alcune proposizioni.

Lemma I. — *Abbiasi l'equazione integrale*

$$f(x\,.\,y) + \int_x^y f(x\,.\,\xi)\,\mathrm{F}(\xi\,,y)\,d\xi = \Phi(x\,,y)\,.$$

Se le funzioni finite e continue $\mathrm{F}(x\,,y)$ *e* $\Phi(x\,,y)$ *tendono uniformemente verso le funzioni, pure finite e continue,* $\mathrm{F}_1(x\,,y)$ *e* $\Phi_1(x\,,y)$, $f(x\,,y)$ *tenderà uniformemente verso la soluzione dell'equazione integrale*

(2) $$f_1(x\,,y) + \int_x^y f_1(x\,,\xi)\,\mathrm{F}_1(\xi\,,y)\,d\xi = \Phi_1(x\,,y)\,.$$

Infatti, l'equazione (2) avrà una soluzione finita e determinata. Inoltre sarà

$$f(x\,,y) - f_1(x\,,y) + \int_x^y \left\{ f(x\,,\xi) - f_1(x\,,\xi) \right\} \mathrm{F}(\xi\,,y)\,d\xi =$$

$$= \Phi(x\,.\,y) - \Phi_1(x\,,y) + \int_x^y f_1(x\,,\xi)\,(\mathrm{F}_1(\xi\,,y) - \mathrm{F}(\xi\,,y))\,d\xi\,,$$

onde $f(x\,,y) - f_1(x\,,y)$ si ridurrà, in valore assoluto, uniformemente tanto piccola quanto ci piace, purchè $|\mathrm{F}_1(x\,,y) - \mathrm{F}(x\,,y)|$ e $|\Phi_1(x\,,y) - \Phi(x\,,y)|$ siano inferiori a dati valori in tutto il campo in cui si considerano.

Lemma II. — *Abbiasi l'equazione integrale*

$$f(x,y|z)+\int_x^y f(x,\xi|z)\,\mathrm{F}(\xi,y|z)\,d\xi=\Phi(x,y|z)\quad,\quad a<x<y<b\,,$$

e supponiamo che, per z compreso fra m e n, sia

$$|\mathrm{F}(x,y|z)|<\mathrm{M}\,,$$

mentre, scelto ε *piccolo ad arbitrio, si possa trovare* α *tale che per* $n-\alpha<z\leq n$

$$|\Phi(x,y|z)|<\varepsilon\,;$$

avremo che $f(x,y|z)$ *tende uniformemente, per* $z=n$, *verso zero.*

La dimostrazione di questo lemma si fa facilmente ricorrendo alla soluzione dell'equazione integrale.

Lemma III. — *Abbiasi l'equazione integrale*

$$f(x,y|z)+\int_x^y f(x,\xi|z)\,\mathrm{F}(\xi,y|z)\,d\xi=\Phi(x,y|z)\quad,\quad a<x<y<b\,,$$

e supponiamo che, per z *compreso fra* m *e* n, *sia*

$$|\mathrm{F}(x,y|z)|<\mathrm{M}\quad,\quad|\Phi(x,y|z)|<\mathrm{N}\,.$$

Inoltre

$$\lim_{z=n}\mathrm{F}(x,y|z)=\mathrm{G}(x,y)\quad,\quad\lim_{z=n}\Phi(x,y|z)=\Gamma(x,y)\,,$$

ove G *e* Γ *sono funzioni continue (si esclude il valore* $x=y$).

Abbiasi poi che, scelto ε *piccolo ad arbitrio, si possa trovare* α *tale che, per* $n-\alpha<z<n$, *sia (comunque si prendano* x,y)

$$\int_x^y|\mathrm{F}(\xi,y|z)-\mathrm{G}(\xi,y)|\,d\xi<\varepsilon\quad,\quad\int_x^y|\Phi(x,\xi|z)-\Gamma(x,\xi)|\,d\xi<\varepsilon\,;$$

sarà, allora,

$$\lim_{z=n}f(x,y|z)=g(x,y)\qquad\text{(escluso } x=y)\,,$$

ove $g(x,y)$ *è la soluzione dell'equazione integrale*

$$g(x,y)+\int_x^y g(x,\xi)\,\mathrm{G}(\xi,y)\,d\xi=\Gamma(x,y)\,.$$

Infatti, posto

$$f(x,y|z)-g(x,y)=\lambda(x,y|z)$$

$$\mathrm{F}(x,y|z)-\mathrm{G}(x,y)=\mathrm{L}(x,y|z)$$

$$\Phi(x,y|z)-\Gamma(x,y)=\mathrm{P}(x,y|z)\,,$$

sarà

$$\lambda(x, y \mid z) + \int_x^y \lambda(x, \xi \mid z)\, G(\xi, y)\, d\xi = P(x, y \mid z) - \int_x^y f(x, \xi \mid z)\, L(\xi, y \mid z)\, d\xi .$$

Ora

$$| f(x, \xi \mid z) | < N e^{M(n-m)} ;$$

quindi,

$$| \lambda(x, y \mid z) | < | P(x, y \mid z) | + N e^{M(n-m)} \int_x^y | L(\xi, y \mid z) | \, d\xi +$$

$$+ e^{M(n-m)} \int_x^y | P(x, \xi \mid z) | \, d\xi + N e^{2M(n-m)} \int_x^y d\eta \int_x^\eta | L(\xi, \eta \mid z) | \, d\xi .$$

Perciò, se

$$n - \alpha < z < n ,$$

sarà

$$| \lambda(x, y \mid z) | < | P(x, y \mid z) | + \varepsilon N e^{M(n-m)} + \varepsilon\, e^{M(n-m)} + \varepsilon (b - a) N e^{2M(n-m)} :$$

e quindi

$$\lim_{z=n} f(x, y \mid z) = g(x, y) ,$$

escluso il caso di $x = y$.

3. Teorema I. — *Sia* $F(x, y)$ *una funzione finita continua e derivabile,* $a \leq x \leq y \leq b$, *e*

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = F_1(x, y) \quad , \quad \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = F_2(x, y) \quad , \quad \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x\, \partial y} = F_{12}(x, y)$$

$$F(x, x) = 1 \quad , \quad F_1(x, x) = F_2(x, x) = 0 ,$$

(*ossia* F *abbia la forma canonica*, Cap. I, § 8) *mentre* F_1, F_2, F_{12} *sono finite e continue. Avremo*

(I) $$z F - z^2 \overset{*}{F}{}^2 + z^3 \overset{*}{F}{}^3 - \cdots = z e^{-z(y-x)} + \frac{\Phi(x, y \mid z)}{z} ,$$

e, mentre z *varia fra* $h > 0$ *e* ∞, Φ *si conserverà sempre inferiore ad un valore finito.*

Osserviamo innanzi tutto che

$$z^2 F - z^3 \overset{*}{F}{}^2 + z^4 \overset{*}{F}{}^3 - \cdots = \Theta(x, y \mid z)$$

verifica l'equazione integrale

(3) $$\Theta(x, y \mid z) + z \int_x^y \Theta(x, \xi \mid z)\, F(\xi, y)\, d\xi = z^2 F(x, y) .$$

Poniamo

(I') $$\Theta(x, y \mid z) = z^2 e^{-z(y-x)} + \Phi(x, y \mid z) ,$$

e

$$F(x, y) = 1 + G(x, y) .$$

La (3) si scriverà

$$(4) \qquad \Phi(x\,,y\,|\,z) + z\int_x^y \Phi(x\,,\xi\,|\,z)\,d\xi = A(x\,,y\,|\,z)\,,$$

ove

$$(5) \quad A(x\,,y\,|\,z) = z^2\,\mathrm{G}(x\,,y) - z\int_x^y \Phi(x\,,\xi\,|\,z)\,\mathrm{G}(\xi\,,y)\,d\xi - z^3\int_x^y e^{-z(\xi-x)}\,\mathrm{G}(\xi\,,y)\,d\xi\,.$$

Risolvendo l'equazione integrale (4) rispetto a $\Phi(x\,,y\,|\,z)$, si trova

$$(6) \qquad \Phi(x\,,y\,|\,z) = A(x\,,y\,|\,z) - z\int_x^y A(x\,,\xi\,|\,z)\,e^{-z(y-\xi)}\,d\xi\,.$$

Poniamo

$$z\int_x^y e^{-z(\xi-x)}\,f(\xi\,,y)\,d\xi = \Omega\,|[f(x\,,y)]|$$

$$z\int_x^y f(x\,,\xi)\,e^{-z(y-\xi)}\,d\xi = \Omega'\,|[f(x\,,y)]|\,.$$

Sarà

$$\Omega\Omega'\,|[f(x\,,y)]| = \Omega'\Omega\,|[f(x\,,y)]|\,.$$

Sostituendo per A la sua espressione (5), la (6) si scriverà

$$(7) \quad \Phi(x\,,y\,|\,z) + z\int_x^y \Phi(x\,,\xi\,|\,z)\,\mathrm{G}(\xi\,,y)\,d\xi -$$
$$- z^2\int_x^y e^{-z(y-\xi)}\,d\xi\int_x^\xi \Phi(x\,,\eta\,|\,z)\,\mathrm{G}(\eta\,,\xi)\,d\eta =$$
$$= z^2\,\{\mathrm{G}(x\,,y) - \Omega\,|[\mathrm{G}(x\,,y)]| - \Omega'\,|[\mathrm{G}(x\,,y)]| + \Omega'\Omega\,|[\mathrm{G}(x\,,y)]|\,.$$

Ora

$$z\int_x^y e^{-z(y-\xi)}\,d\xi\int_x^\xi \Phi(x\,,\eta\,|\,z)\,\mathrm{G}(\eta\,,\xi)\,d\eta = z\int_x^y \Phi(x\,,\eta\,|\,z)\,d\eta\int_\eta^y \mathrm{G}(\eta\,,\xi)\,e^{-z(y-\xi)}\,d\xi =$$
$$= \int_x^y \Phi(x\,,\eta\,|\,z)\,\Omega'\,|[\mathrm{G}(\eta\,,y)]|\,d\eta\,,$$

quindi la (7) si potrà mettere sotto la forma

$$(7') \qquad \Phi(x\,,y\,|\,z) + \int_x^y \Phi(x\,,\xi\,|\,z)\,\mathrm{H}(\xi\,,y\,|\,z)\,d\xi = \mathrm{S}(x\,,y\,|\,z)\,,$$

ove

$$\mathrm{H}(x\,,y\,|\,z) = z\,\mathrm{G}(x\,,y) - z\,\Omega'\,|[\mathrm{G}(x\,,y)]|$$

$$\mathrm{S}(x\,,y\,|\,z) = z\,\mathrm{H}(x\,,y\,|\,z) - z\,\Omega\,|[\mathrm{H}(x\,,y\,|\,z)]|\,.$$

Ma

(8) $$H(x, y \mid z) = zG(x, y) - z\Omega' \mid [G(x, y)] \mid = -\Omega' \left| \left[\frac{\partial G(x, y)}{\partial y} \right] \right| = -z \int_x^y F_2(x, \xi)\, e^{-z(y-\xi)}\, d\xi$$

(9) $$S(x, y \mid z) = zH(x, y \mid z) - z\Omega \mid [H(x, y \mid z)] \mid = -\Omega \left| \left[\frac{\partial H(x, y \mid z)}{\partial x} \right] \right| = z^2 \int_x^y e^{-z(\xi - x)}\, d\xi \int_\xi^y F_{12}(\xi, \eta)\, e^{-z(y-\eta)}\, d\eta .$$

Siano ora M_2 e M_{12} due numeri respettivamente più grandi dei massimi valori assoluti di $F_2(x, y)$ e $F_{12}(x, y)$. Se, $z > 0$, $y - x > 0$, avremo

$$|H(x, y \mid z)| < M_2(1 - e^{-z(y-x)}) < M_2$$

$$|S(x, y \mid z)| < M_{12}(1 - e^{-z(y-x)} - 2(y - x)\, e^{-z(y-x)}) < M_{12} .$$

Dalla (7') segue dunque

$$\Phi(x, y \mid z) < M_{12}\, e^{M_2(b-a)} .$$

Ma in virtù della formula (1')

$$zF - z^2 \overset{*}{F}{}^2 + z^3 \overset{*}{F}{}^3 - \cdots = \frac{\Theta(x, y \mid z)}{z} = z e^{-z(y-x)} + \frac{\Phi(x, y \mid z)}{z} ,$$

il teorema è perciò dimostrato.

Osservazione. — Le condizioni $F_1(x\, x) = F_2(x\, x) = 0$ si potrebbero togliere, ed il precedente teorema seguiterebbe a sussistere.

Teorema II. — *Supposte soddisfatte le condizioni del teorema precedente, e supponendo inoltre che*

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} , \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} , \quad \frac{\partial^3 F}{\partial x\, \partial y^2} , \quad \frac{\partial^3 F}{\partial x^2\, \partial y}$$

siano finite e continue, ed i loro valori assoluti siano inferiori ad M, *avremo, per* $y > x$,

$$\lim_{z=\infty} \Phi(x, y \mid z) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x\, \partial y} + \int_x^y \frac{\partial^2 F(x, \xi)}{\partial x\, \partial \xi}\, \Psi(\xi, y)\, d\xi ,$$

ove

$$\Psi(x, y) = F_2 + \overset{*}{F}{}_2^2 + \overset{*}{F}{}_2^3 + \cdots$$

e per $y = x$

$$\lim_{z=\infty} \Phi(x, y \mid z) = 0 .$$

Riprendiamo infatti l'equazione (8). Avremo

$$H(x, y \mid z) = -F_2(x, y)\,(1 - e^{-z(y-x)}) + z \int_x^y (F_2(x, y) - F_2(x, \xi))\, e^{-z(y-\xi)}\, d\xi$$

$$= -F_2(x, y)\,(1 - e^{-z(y-x)}) + \theta M \int_x^y z(y - \xi)\, e^{-z(y-\xi)}\, d\xi ,$$

ove θ è un numero compreso fra -1 e $+1$. Quindi

$$|H(x, y | z) + F_2(x, y)| < M e^{-z(y-x)} + \frac{M}{z}.$$

Ne segue

$$(10) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{z=\infty} H(x, y | z) = -F_2(x, y) \\ \displaystyle\int_x^y |H(\xi, y | z) + F_2(\xi, y)| \, d\xi < \frac{M}{z} + \frac{M(b-a)}{z}. \end{array} \right.$$

Abbiamo poi

$$z \int_\xi^y F_{12}(\xi, \eta) e^{-z(y-\eta)} d\eta = F_{12}(\xi, y)(1 - e^{-z(y-\xi)}) -$$

$$- z \int_\xi^y (F_{12}(\xi, y) - F_{12}(\xi, \eta)) e^{-z(y-\eta)} d\eta =$$

$$= F_{12}(\xi, y)(1 - e^{-z(y-\xi)}) + \theta' M \int_\xi^y z(y-\eta) e^{-z(y-\eta)} d\eta =$$

$$= F_{12}(\xi, y)(1 - e^{-z(y-\xi)}) + \frac{\theta'' M}{z},$$

ove θ' e θ'' sono numeri compresi fra -1 e $+1$.

Ora dalla equazione (9) segue, tenendo conto del calcolo precedente,

$$S(x, y | z) = z \int_x^y e^{-z(\xi-x)} \left\{ F_{12}(\xi, y)(1 - e^{-z(y-\xi)}) + \frac{\theta'' M}{z} \right\} d\xi =$$

$$= F_{12}(x, y)(1 - e^{-z(y-x)}) + \frac{\theta''' M}{z} + \theta^{\text{IV}} z(y-x) e^{-z(y-x)} M_{12} + \frac{\theta^{\text{V}} M}{z},$$

indicando sempre con θ''', θ^{IV}, θ^{V} dei numeri compresi fra -1 e $+1$. Quindi

$$|S(x, y | z) - F_{12}(x, y)| < M_{12} e^{-z(y-x)} + M_{12} z(y-x) e^{-z(y-x)} + \frac{2M}{z},$$

da cui segue

$$(11) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{z=\infty} S(x, y | z) = F_{12}(x, y) \\ \displaystyle\int_x^y |S(x, \xi | z) - F_{12}(x, \xi)| \, d\xi < \frac{2(M_{12} + M)}{z}. \end{array} \right.$$

Applichiamo ora il lemma III alla equazione integrale (7′), tenendo presenti le formule (10) e (11); resulterà

$$\lim_{z=\infty} \Phi(x, y | z) = \varphi(x, y) \qquad \text{per } y > x$$

ove $\varphi(x, y)$ è la soluzione dell'equazione integrale

$$\varphi(x, y) - \int_x^y \varphi(x, \xi) F_2(\xi, y) d\xi = F_{12}(x, y),$$

e per conseguenza, per $y > x$,

$$\lim_{z=\infty} \Phi(x, y|z) = \varphi(x, y) = F_{12}(x, y) + \int_x^y F_{12}(x, \xi) \{ F_2(\xi, y) + \overset{*}{F}{}_2^2(\xi, y) + \cdots \} d\xi .$$

Per $y = x$ abbiamo che la funzione $G(x, y)$ del § 3 si annulla e perciò si annullano pure $H(x, y|z)$ e $S(x, y|z)$, quindi in virtù delle (7') anche $\Phi(x, y|z)$, e per conseguenza

$$\lim_{z=\infty} \Phi(x, y|z) = 0 , \qquad \text{per } y = x ,$$

il che dimostra il teorema.

4. Dal teorema I segue, sotto le condizioni stabilite, che il

$$\lim_{z=+\infty} (z\,F - z^2 \overset{*}{F}{}^2 + z^3 \overset{*}{F}{}^3 - \cdots)$$

è zero se $y > x$, ed è ∞ se $y = x$. Inoltre, finchè $f(x, y)$ è superiore ad una quantità positiva, sarà

$$\lim_{z=+\infty} (z\,F + z^2 \overset{*}{F}{}^2 + z^3 \overset{*}{F}{}^3 + \cdots) = \infty .$$

Tali proprietà fanno avvicinare la serie molto generale (1) alla serie esponenziale. Intanto il teorema I (vedi *Osservazione* al detto teorema) serve a risolvere la questione della convergenza dell'integrale (1). L'essere F ridotta alla *forma canonica* (Cap. I, § 11), o anche semplicemente l'essere $F(x, x) = 1$, *basta a farci riconoscere che il detto integrale è convergente*, e quindi

$$\text{(II)} \qquad \overset{*}{F}\overset{*}{l}F = (\overset{*}{F} - \overset{*}{F}{}^0) \int_0^1 \frac{dz}{1-z} \left(\overset{*}{F} - \frac{z}{1-z} \overset{*}{F}{}^2 + \frac{z^2}{(1-z)^2} \overset{*}{F}{}^3 - \cdots \right) .$$

In virtù dell'interesse presentato dal teorema I, ci sia permesso di darne nel § seguente una nuova dimostrazione valevole in un caso particolare (caso polinomiale del ciclo chiuso), la quale ci ha fatto intuire nel corso di queste ricerche il resultato generale, ed è perciò abbastanza significativa.

5. La serie

$$z\,F - z^2 \overset{*}{F}{}^2 + z^3 \overset{*}{F}{}^3 - \cdots$$

è soluzione dell'equazione integrale

$$\text{(12)} \qquad \varrho(x, y|z) + z \int_x^y \varrho(x, \xi|z)\, F(\xi, y)\, d\xi = z\,F(x, y) .$$

Supponiamo che F appartenga al gruppo del ciclo chiuso, e sia

$$F(x, y) = 1 + \alpha_1(y-x) + \alpha_2(y-x)^2 + \cdots + \alpha_n(y-x)^n .$$

Anche $\varrho(x, y|z)$ apparterrà al gruppo del ciclo chiuso, e potrà scriversi $\varrho(y-x|z)$, onde l'equazione (12) diverrà

$$\text{(13)} \quad \varrho(x, z) + z \int_0^x \{1 + \alpha_1(x-\xi) + \alpha_2(x-\xi)^2 + \cdots + \alpha_n(x-\xi)^n\} \varrho(\xi, z)\, d\xi = \\ = z(1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_n x^n) .$$

Questa equazione integrale si trasforma nell'equazione differenziale

$$0=\frac{\partial^{n+1}\varrho(x,z)}{\partial x^{n+1}}+z\frac{\partial^{n}\varrho(x,z)}{\partial x^{n}}+z\alpha_1\frac{\partial^{n-1}\varrho(x,z)}{\partial x^{n-1}}+2z\alpha_2\frac{\partial^{n-2}\varrho(x,z)}{\partial x^{n-2}}+$$
$$+\cdots+n!\,\alpha_n z\varrho(x,z)$$

onde

$$\varrho(x,z)=Ce^{\lambda x}+C_1e^{\lambda_1 x}+\cdots+C_ne^{\lambda_n x},$$

ove $C, C_1, C_2, \dots C_n; \lambda, \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ sono indipendenti da x. Ora

$$(14)\qquad \begin{cases} \lambda+\lambda_1+\cdots+\lambda_n=-z \\ \lambda\lambda_1+\lambda_1\lambda_2+\cdots+\lambda_{n-1}\lambda_n=z\alpha_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n=(-1)^n n!\,z\alpha_n \end{cases}$$

$$(15)\qquad \begin{cases} C=-\dfrac{\lambda}{\left(1-\dfrac{\lambda_1}{\lambda}\right)\left(1-\dfrac{\lambda_2}{\lambda}\right)\cdots\left(1-\dfrac{\lambda_n}{\lambda}\right)} \\ C_1=-\dfrac{\lambda_1^{n+1}}{(\lambda_1-\lambda)(\lambda_1-\lambda_2)\dots(\lambda_1-\lambda_n)} \\ C_n=-\dfrac{\lambda_n^{n+1}}{(\lambda_n-\lambda)(\lambda_n-\lambda_1)\dots(\lambda_n-\lambda_{n-1})}. \end{cases}$$

Se z cresce indefinitamente per valori positivi, dalle (14) si ricava che una sola delle radici, per esempio λ, tenderà assintoticamente verso $-z$, e le altre si manterranno finite, quindi, per le (15), C tenderà assintoticamente verso z, e $C_1, C_2, \dots C_n$ tenderanno verso zero, come $\frac{1}{z}$: onde la forma assintotica di ϱ sarà

$$ze^{-zx}+\frac{\Phi(x,y\,|\,z)}{z}$$

con $\Phi(x,y\,|\,z)$ finita. È questa la forma che resulta dal teorema generale I.

6. Applichiamo ora, come esempio, la formula (II) per ottenere nuovamente l'espressione, già ricavata per altra via di $\overset{*}{1}\overset{*}{l}1$ (cfr. Cap. V, § 5).

Posto

$$f(y-x)=\int_0^1\frac{dz}{1-z}\left(1-\frac{z}{1-z}(y-x)+\frac{z^2}{(1-z)^2}(y-x)^2-\cdots\right)=$$
$$=\int_0^1 e^{-\frac{z}{1-z}(y-x)}\frac{dz}{1-z},$$

si avrà, in virtù della (II),

$$\overset{*}{1}\overset{*}{l}1=(\overset{*}{1}-\overset{*}{1}{}^0)\overset{*}{f}.$$

Ora

$$
(16)\qquad \begin{cases} f(x) = \displaystyle\int_0^1 e^{-\frac{z}{1-z}x} \frac{dz}{1-z}\,, \\[2ex] f'(x) = \displaystyle\int_0^1 - \frac{z}{(1-z)^2} e^{-\frac{z}{1-z}x} dz \\[2ex] f(x) - f'(x) = \displaystyle\int_0^1 e^{-\frac{z}{1-z}x} \frac{z}{(1-z)^2} = \frac{1}{x}\,, \end{cases}
$$

quindi

$$
(17)\qquad f(x) = e^x \int_x^\infty \frac{e^{-\xi}\, d\xi}{\xi} = -\log x + e^x \int_x^\infty \log \xi e^{-\xi}\, d\xi\,,
$$

da cui segue

$$
(\dot{1} - \dot{1}^0)\,\dot{f} = -\int_0^x \log \xi\, d\xi + \int_0^x e^\eta\, d\eta \int_\eta^\infty \log \xi e^{-\xi}\, d\xi =
$$

$$
= \log x - \int_0^\infty \log \xi e^{-\xi}\, d\xi = \log x - \Gamma'(1) = \log x + \mathrm{C}\,,
$$

ove C denota la costante di Eulero. Si ritrova quindi il resultato

$$
\dot{1}\,\dot{l}\,1 = \log x + \mathrm{C}\,.
$$

7. Riprendiamo ora la formula generale (II) e osserviamo che essa ci dà il modo di calcolare

$$
\dot{\mathrm{F}}\; l\, \dot{\mathrm{F}}
$$

essendo F e le sue derivate prime e la derivata seconda mista finite e continue ed $\mathrm{F}(x, x) = 1$.

Avremo infatti, a cagione della (I),

$$
\frac{1}{1-z}\left(\mathrm{F} - \frac{z}{1-z}\dot{\mathrm{F}}^2 + \frac{z^2}{(1-z)^2}\dot{\mathrm{F}}^3 - \cdots\right) =
$$

$$
= \left(\frac{z}{1-z}\mathrm{F} - \frac{z^2}{(1-z)^2}\dot{\mathrm{F}}^2 + \frac{z^3}{(1-z^3)}\dot{\mathrm{F}}^3 - \cdots\right)\frac{1}{z} =
$$

$$
= \left(\frac{z}{1-z} e^{-\frac{z}{1-z}(y-x)} + \frac{\Phi\left(x, y \,\middle|\, \frac{z}{1-z}\right)}{\left(\frac{z}{1-z}\right)}\right)\frac{1}{z} =
$$

$$
= \frac{1}{1-z} e^{-\frac{z}{1-z}(y-x)} + \Psi(x, y \,|\, z)(1-z)\,,
$$

ove $\Psi(x, y \mid z)$ è sempre finita e continua. Quindi, tenendo presente le (16) e (17),

$$\int_0^1 \frac{dz}{1-z}\left(\mathrm{F} - \frac{z}{1-z}\overset{*}{\mathrm{F}}{}^2 + \frac{z^2}{(1-z)^2}\overset{*}{\mathrm{F}}{}^3 - \cdots\right) =$$

$$= \int_0^1 e^{-\frac{z}{1-z}(y-x)} \frac{dz}{1-z} + \int_0^1 \Psi(x, y \mid z)(1-z)\,dz =$$

$$= -\log(y-x) + e^{y-x}\int_{y-x}^{\infty} \log\xi\, e^{-\xi}\, d\xi + \theta(x, y),$$

ove $\theta(x, y)$ è una funzione finita e continua. Ne segue

$$(\overset{*}{\mathrm{F}} - \overset{*}{\mathrm{F}}{}^0)\int_0^1 \frac{dz}{1-z}\left(\overset{*}{\mathrm{F}} - \frac{z}{1-z}\overset{*}{\mathrm{F}}{}^2 + \frac{z^2}{(1-z)^2}\overset{*}{\mathrm{F}}{}^3 - \cdots\right) =$$

$$= \log(y-x) + e^{y-x}\int_{y-x}^{\infty} \log\xi\, e^{-\xi}\, d\xi + \theta(x, y) +$$

$$+ \int_x^y \mathrm{F}(x, \xi)\left\{-\log(y-\xi) + e^{y-\xi}\int_{y-\xi}^{\infty} \log\eta\, e^{-\eta}\, d\eta + \theta(\xi, y)\right\} d\xi =$$

$$= \log(y-x) + \chi(x, y),$$

ove $\chi(x, y)$ è una funzione finita e continua.

Si avrà dunque il teorema:

Se $\mathrm{F}(x, y)$ *è tale che* $\mathrm{F}(x, x) = 1$, *sarà*

$$\overset{*}{\mathrm{F}}\, \overset{*}{l}\, \mathrm{F} = \log(y-x) + \chi(x, y),$$

ove $\chi(x, y)$ *è una funzione finita e continua.*

La funzione $\chi(x, y)$ si potrà calcolare ottenendo dapprima Φ per mezzo della risoluzione di una equazione integrale [cfr. la formula (7')], e quindi ricavando Ψ e θ come è indicato precedentemente.

Non è dunque necessario conoscere $\overset{*}{\mathrm{F}}{}^z$ per poter calcolare $\overset{*}{\mathrm{F}}\, l\, \overset{*}{\mathrm{F}}$, ma *questo calcolo può farsi operando direttamente sulla funzione data* F (cfr. Cap. V, § 4).

8. Ma può aggiungersi ancora qualche cosa di più, e cioè che non solo non è necessario conoscere $\overset{*}{\mathrm{F}}{}^z$ per ottenere $\overset{*}{\mathrm{F}}\, \overset{*}{l}\, \mathrm{F}$, ma che invece, per mezzo di questo ultimo elemento, può calcolarsi $\overset{*}{\mathrm{F}}{}^z$, quando sia data F.

Infatti, noto $\overset{*}{\mathrm{F}}\, \overset{*}{l}\, \mathrm{F}$, potremo ottenere

$$\overset{*}{\mathrm{F}}(\overset{*}{l}\mathrm{F})^2 \quad , \quad \overset{*}{\mathrm{F}}(\overset{*}{l}\mathrm{F})^3 \quad , \quad \overset{*}{\mathrm{F}}(\overset{*}{l}\mathrm{F})^4 \ldots,$$

e quindi applicando la formula (ved. Cap. V, § 8)

$$\overset{*}{\mathrm{F}}{}^{z+1} = \mathrm{F} + \frac{z\,\overset{*}{\mathrm{F}}\,\overset{*}{l}\mathrm{F}}{1!} + \frac{z^2\,\overset{*}{\mathrm{F}}(\overset{*}{l}\mathrm{F})^2}{2!} + \frac{z^3\,\overset{*}{\mathrm{F}}(\overset{*}{l}\mathrm{F})^3}{3!} + \cdots,$$

potremo avere $\overset{*}{F}^{z+1}$ *espresso mediante una serie di potenze di* z *con sole operazioni fatte sopra* F (cfr. Cap. II, § 12).

Si verifica dunque, per le potenze di composizione, il fatto analogo a quello che si ha per le potenze ordinarie, cioè che, per ottenere le prime in generale, conviene passare attraverso ai logaritmi di composizione, come per ottenere in generale le altre conviene passare attraverso i logaritmi dell'algebra ordinaria.

Questa è una nuova conferma delle utilità di introdurre i logaritmi di composizione.

ERRATA-CORRIGE

A pag. 204 linea 19 dopo le parole: precedentemente ottenuto *aggiungere*: (Cfr. Cap. VIII, § 6).

A pag. 207 linea 25 invece di F' *scrivere* $\overset{*}{F}'$.

A pag. 218 linea 19 invece di $\log_1 \overset{*}{F}$ *scrivere* $\overset{*}{\log}_1 F$.

A pag. 228 linea 20 dopo la formola: $af + b\varphi$ *aggiungere le parole*: essendo a e b dei parametri indipendenti da x e y variabili in certi intervalli.

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76) Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI. Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali* Vol. I-XXV. (1892-1916). Fasc. 6°. Sem. 1°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XXIV. (1892-1915).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali* Vol. I-XI. Fasc. 4.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XII. Vol. XIV. Vol. XV. Fasc. 1-2.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI
DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia è di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*
ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

MEMORIE DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

(ANNO CCCXIII 1916)

SERIE QUINTA — VOLUME XI — FASCICOLO V.

LUIGI BALBIANO

L'ACIDO GRAFITICO

Smithsonian
SEP 2

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI
PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI
1916

L'acido grafitico.

Memoria del Corrisp. LUIGI BALBIANO

presentata nella seduta del 16 gennaio 1916

Le ricerche sull'acido grafitico anteriori a quelle che formano oggetto della presente Memoria ([1]) si possono dividere in due periodi. Un primo periodo comprende la scoperta di questa sostanza, la sua analisi e le reazioni che permisero di stabilirne la composizione variabile a seconda degli autori, e questo periodo è illustrato da B. Brodie (lo scopritore dell'acido), da Gottschalk e da Berthelot. Un secondo periodo comprende le modificazioni arrecate alla sua preparazione, le isomerie, ed è caratterizzato principalmente dalla mancanza di dati analitici quantitativi.

I. — Introduzione storica.

In una Nota, inserita negli *Annales de chimie et physique* ([2]), Ad. Wurtz richiamò l'attenzione dei chimici sopra una relazione, presentata da Beniamino Brodie al Comitato internazionale del giurì dell'esposizione universale di Londra, per illustrare alcuni prodotti ch'egli esponeva ([3]). Tra questi prodotti si trovavano alcuni campioni di grafite depurata e levigata con un metodo particolare basato sull'azione ossidante del misto di clorato di potassio ed acido solforico concentrato, e nel Rapporto si descriveva sommariamente un *ossido grafitico* che col riscaldamento svolgeva gas che serviva a suddividere la grafite in polvere finissima.

L'ossido grafitico venne descritto dettagliatamente per la prima volta da Brodie nel 1859 ([4]). L'ossidazione della grafite veniva operata facendo cadere su *un* peso di grafite ridotta in polvere fina e mescolata intimamente con *tre* pesi di clorato potassico, la quantità di acido nitrico fumante necessaria per fluidificare la massa. Si riscaldava il tutto a bagno-maria a temperatura di 60° durante tre o quattro

([1]) Lavoro eseguito nel laboratorio di chimica organica del R. Politecnico di Torino.

([2]) An. Ch. IIIème série *45*, pag. 351 (1855).

([3]) Questo Rapporto è stato giudicato dal giurì internazionale dell'esposizione del 1862 (Reports by the juries international exibition, pag. 89).

([4]) Philosophical transaction of the Royal Society of London, tom. 149, pag. 249 (1859).

giorni sino a cessazione di sviluppo di vapori gialli; poi si versava in gran quantità d'acqua e si lavava per decantazione, indi, disseccato il residuo nella stufa ad acqua, si ripeteva il trattamento ossidante finchè la massa nera della grafite si era convertita in una massa gialla omogenea dell'ossido grafitico, cosa che per lo più avveniva dopo il quarto trattamento. La luce pare abbia la facoltà di accelerare la reazione perchè la miscela, esposta ai raggi solari diretti, reagisce energicamente alla temperatura ordinaria.

La composizione di questo nuovo ossido della grafite è espressa, in seguito a numerose analisi concordanti e fatte su campioni disseccati a 100° o nel vuoto e provenienti da preparazioni diverse — dalla formula $C_{11} H_4 O_5$.

Difatti la media delle analisi diede

C . 61,04	H . 1,85	O . 37,11	trovato
" 61,11	" 1,85	" 37,04	calcolato.

Brodie descrisse il nuovo composto come una sostanza cristallizzata in lamelle gialle, insolubile in tutti i solventi, il che rende difficile la sua depurazione dalle sostanze minerali. Riscaldato deflagra; perciò nell'analisi il riscaldamento deve essere condotto con molta precauzione. Un cristallino umettato con acqua su cartina azzurra di tornasole produce arrossamento; con ciò viene indicata la sua funzione acida, la quale venne comprovata con la determinazione del bario di un sale baritico $C_{11} H_3 ba O_5$ (Ba $^0/_0$ 21,19 trov. 24,13 calc.), che l'acido carbonico converte nel sale $C_{22} H_7 ba O_{10}$ (Ba $^0/_0$ 13,3 trov. 13.73 calc.).

Questi sali sono sostanze insolubili, igroscopiche, che riscaldate deflagrano con violenza maggiore dell'acido stesso. Questo nuovo ossido idrato di carbonio, che arrossa il tornasole, Brodie chiamò *acido grafitico*.

Egli studiò dettagliatamente la sua decomposizione pirogenica; e per evitare la deflagrazione del composto lo riscaldò gradatamente in una massa di petrolio asiatico, proveniente da Rangoon in Birmania, bollente verso 270° e rettificato sul sodio. Riscaldando per 3-4 ore acido grafitico sospeso nel petrolio a 250°, ottenne acqua, anidride carbonica ed un residuo nero rappresentante il 66,7-66,9 $^0/_0$ dell'acido adoperato. Questo residuo, nero cristallino grafitoide, contiene ancora idrogeno ed ossigeno, e la sua composizione corrisponde alla formula $C_{22} H_2 O_4$.

Trovato	C	80,19	79,64	79,40	79.27	Calcolato	80,00
"	H	0,52	0,57	0,55	0,60	"	0,60
"	O	19,29	19,79	20,05	20.13	"	19,40

Il riscaldamento prolungato per 14 ore ridusse a 65,76-65.77 $^0/_0$ la quantità di questo residuo e ne aumentò il tenore di carbonio.

C	80,48	80,50	80,56
H	0,62	0,59	0,63
O	18,90	18,91	18,81

Il nuovo composto chiamò *acido pirografitico*, e dai dati sperimentali calcolò la equazione seguente per la sua formazione

$$7\,C_{11}H_4O_5 \longrightarrow 3\,C_{22}H_2O_4 + 6\,H_2O + 6\,CO_2 + 5\,CO.$$

che richiede la formazione del 65.49 % di acido pirografitico. Quest'equazione, come fa rilevare il Wurtz [1], è errata, poichè nel secondo termine si trovano 10 atomi di idrogeno in meno del primo, ed inoltre stabilisce la formazione del 9,9 % di ossido di carbonio, del quale non si era svelata qualitativamente la presenza nei prodotti di decomposizione dell'acido grafitico.

Riscaldando poi l'acido pirografitico in navicella di platino a 250°, perde ancora di peso sviluppando tracce di gas ed eliminando acqua; e la perdita di peso corrisponde all'incirca all'equazione

$$3\,C_{22}H_2O_4 \longrightarrow H_2O + C_{66}H_4O_{11}\,.$$

Le esperienze di Brodie avevano per iscopo di stabilire se il carbonio entrasse in qualche sua combinazione nella forma allotropica di grafite, come il silicio nell'acido condensato di Buff e Wöhler [2]: $H_4Si_4O_5$, forma che potrebbe chiamarsi, analogamente a quella del silicio, « *grafone* », col peso atomico 33 e col simbolo Gr. Il grafone seguirebbe la legge dei calorici specifici di Dulong e Petit; gli acidi grafitici scoperti sarebbero allora rappresentati dalle formule

$C_{11}H_4O_5$	$C_{22}H_2O_4$	$C_{66}H_4O_{11}$
$Gr_4H_4O_5$	$Gr_8H_2O_4$	$Gr_{24}H_4O_{11}$

Se lo scopo teorico del chimico inglese non è stato raggiunto, le sue esperienze hanno tuttavia il grande merito di aver fatto scoprire un corpo molto interessante che è stato il germe di una serie di lavori importanti.

Invitato dall'Erdmann, il Gottschalk [3] continuò lo studio dell'acido grafitico, ne modificò alquanto il processo di depurazione e la composizione. Secondo le numerose analisi fatte sui prodotti delle successive ossidazioni della grafite col misto adoperato dal Brodie, egli stabilì che il prodotto finale, di *color giallo-solfo*, fosse più ossigenato e lo rappresentò con la formula $C_{11}H_4O_6$. È vero che le analisi del Gottschalk, fatte sul prodotto di color *giallo-solfo* proveniente da *sei* successivi trattamenti ossidanti, gli dettero in media

C . 60,70	H . 1,86	O . 37,42

composizione che si avvicina a quella formulata dal Brodie; ma i prodotti 7-8-9, provenienti dai successivi trattamenti ossidanti, gli dettero

							Calcolato per $C_{11}H_4O_6$
C .	57.69	56,30	57,05	56,01	56,95	55,79	56,89
H .	1,73	1,93	1,97	2,34	1,64	1,82	1,82
O .	40 58	41,76	40,97	41,65	41,41	42,37	41,39

(1) An. Ch. III° 59-466 (1860). Non mi risulta che il Brodie abbia risposto all'obbiezione.
(2) Ann. *104*, pag 94 (1857).
(3) J. pr. *95*, pag. 321 (1865).

Da ciò la conclusione che insistendo nell'azione ossidante l'acido grafitico aumenta la quantità di ossigeno.

La percentuale poi di potassio (11,24 — 11 20 — 12,31) di un sale potassico, che il Gottschalk ritiene contenere il 12,20 °/₀ di potassio mentre effettivamente il calcolato è 10,1 °/₀, servì poi a corroborare la sua idea.

Il fatto più importante da notare nello studio del Gottschalk è che, contrariamente alla supposizione fatta dal Brodie con un'equazione errata dalla quale risulterebbe il 9,9 °/₀ di CO, questo composto non si riscontra fra i prodotti di scissione pirogenica dell'acido grafitico, perchè egli constatò soltanto la formazione di acqua, anidride carbonica, ed un residuo nero grafitoide: e tale decomposizione succede, in modo molto limitato, già alla temperatura di 105-108°.

Le analisi di J. Stingl [1], fatte su acidi grafitici preparati da grafiti di Stiria e di Passau, confermano la composizione data dal Gottschalk:

grafiti di Stiria. . .	C 55,73	H 1,87	O 42.35
" " Boemia . .	" 56,23	" 1,83	" 41,94.

Le proprietà fisiche dell'acido grafitico, secondo lo Stingl, variano alquanto a seconda dell'origine della grafite: quelle di Stiria e di Boemia, depurate, dànno un acido grafico giallo, amorfo, mentre le grafiti del Ceylan o di Passau dànno un corpo giallo che al microscopio si presenta in lamelle cristalline. Inoltre il prodotto nero avuto nella decomposizione pirogenica delle due varietà di acidi presenta alcune caratteristiche fisiche differenti: mentre il primo decolora ed aderisce come il nerofumo, il secondo non ha queste proprietà.

L'importanza della scoperta dell'acido grafitico venne dimostrata dal Berthelot [2] prendendolo per base del suo metodo di analisi qualitativa delle diverse varietà allotropiche del carbonio. Soltanto la grafite nelle sue diverse varietà viene ossidata a bassa temperatura e trasformata in questo corpo così caratteristico fisicamente, pel fatto che, riscaldato su lamina di platino, deflagra.

Il Berthelot sottopose l'acido grafitico, che chiamò *ossido grafitico*, a due serie di ricerche aventi lo scopo di precisare:

1°) se le diverse varietà di grafite davano lo stesso ossido grafitico. Dalle sue esperienze si ritenne autorizzato a conchiudere che la grafite naturale, quella della ghisa e quella ottenuta coll'arco voltaico, davano un ossido grafitico che non sempre presentava gli stessi caratteri, specialmente per la vivacità della deflagrazione al calore e la resistenza al miscuglio ossidante del Brodie, del prodotto pirogenico nero, carbonioso, contenente ancora idrogeno ed ossigeno, e che chiamò *ossido pirografitico*. Quantunque queste differenze fossero poco spiccate, tuttavia egli concluse col ritenerle specifiche; ed in una Memoria ulteriore [3] riscontrò anche una diversa composizione in questi ossidi grafitici.

2°) l'azione dell'acido jodidrico (p. sp. 2) a 280° sui diversi ossidi grafitici gli rivelò anche un comportamento differente. Mentre l'*ossido idrografitico* — ottenuto

(¹) Ber. *4*, pag. 391 (1873).

(²) Ann. d. ch. 4ème série, tom. 19, pag. 401 (1870).

(³) Ann. d. ch., 6ème série, tom. 20, pag. 20 (1890).

dalla grafite naturale — non deflagra al calore, quello preparato dalla grafite della ghisa forma un composto jodurato che, per azione del calore, deflagra svolgendo notevole quantità di jodio; quello della grafite dall'arco voltaico non deflagra, ma, ossidato col misto del Brodie, dà un acido grafitico di color marrone.

In una Memoria stampata 20 anni dopo, nel 1890 (¹), con P. Petit precisa, con dati quantitativi interessanti, tali differenze.

Riassumo, per comodo del lettore, le composizioni dell'acido grafitico (*ossido grafitico*) trovate dai diversi sperimentatori.

		C	H	O	
Brodie		C . 61,04	H . 1,85	O . 37,41	$C_{11}H_4O_5$
Gottschalk		57,69-55,79	1,73-1,97	40,58-42,37	$C_{11}H_4O_6$
Stingl		55,73-56,23	1,87-1,83	42,35-41,94	
Berthelot e Petit	grafite naturale	56,18	1,51	42,26	
	" dalla ghisa	62,63	1,40	35,97	
	" dall'arco	51,95	1,55	46,5	

Dai loro dati analitici Berthelot e Petit dedussero per i diversi ossidi grafitici le formule

(^{a}) $C_{14}H_2O_6$ o $C_{56}H_8O_{24}$ per l'ossido della grafite della ghisa
$C_{56}H_{10}O_{30}, HO$ " " " naturale
$C_{56}H_{10}O_{38}$ " " " dell'arco voltaico.

(^{a}) C = 6 ; O = 8.

Più sconcordanti ancora le esperienze instituite sui sali.

I due sali baritici accennati in modo sommario dal Brodie, ed il sale potassico del Gottschalk, non potevano essere utilizzati senza un'ulteriore controllo sperimentale per determinare la basicità dell'acido grafitico; perciò Berthelot e Petit tentarono di stabilire su solida base sperimentale questo punto importante per la storia chimica del composto.

Si agitò a questo scopo una determinata quantità di ossido grafitico secco con un grande eccesso di soluzione titolata di idrato baritico; e si determinò, con soluzione titolata di acido cloridrico, la quantità di barite assorbita alla temperatura ambiente fino a saturazione *quasi* completa dell'ossido.

I numeri ottenuti in due esperienze si possono riassumere nel modo seguente:

dopo 20 ore di contatto, 100 p. di ossido grafitico hanno assorbito 50 -50,3 p. barite
" 48 " " " " " " " 52 -50,9 "
" 4 giorni " " " " " " 54,2-51,9 "

Da questi dati si calcola — in modo un po' troppo approssimativo — che un equivalente di bario si unisce a $14 \times 6 = 84$ p. di carbonio: e quindi la formula $C_{14}H_2O_6$ da loro proposta per l'ossido grafitico dalla grafite della ghisa, formula che l'ulteriore studio dei prodotti di decomposizione pirogenica ha consigliato a quadruplicare ($C_{56}H_8O_{24}$).

(¹) loc. cit., e Bl. [3] III, pag. 336 (1890).

Un'osservazione mia, di cui l'importanza risulterà in seguito, è che la reazione fra barite e ossido grafitico non è dovuta ad una semplice neutralizzazione — perchè in tal caso sarebbe immediata e completa in presenza di un eccesso di base — ma avviene lentamente ed anche accenna ad un equilibrio fra le due sostanze reagenti.

Le esperienze di Berthelot e Petit completano quelle del Gottschalk per quel che risguarda la stabilità dell'acido grafitico proveniente dalla grafite naturale. Un campione, conservato 20 anni, ha subìto una variante nella composizione:

preparazione recente	C . 56,18	H . 1,51	O . 42,26 ;	barite assorbita	54,9 %
" 20 anni	" 58,54	" 1,86	" 36,6 ;	" "	47,3 "

Questa variazione di composizione con arricchimento di C ed H confermerebbe l'osservazione del Gottschalk di decomposizione dell'acido grafitico con eliminazione di CO_2 ed H_2O alla temperatura ambiente.

La controversia fra il Brodie e il Gottschalk sull'esistenza o meno dell'ossido di carbonio nei prodotti di decomposizione pirogenica dell'acido grafitico, venne risolta in modo definitivo dai due chimici francesi, determinando quantitativamente questo composto in confronto dell'anidride carbonica esistente nella miscela gassosa di decomposizione con deflagrazione.

L'esperimento venne condotto in modo che una quantità pesata di ossido grafitico dalla grafite della ghisa si faceva deflagrare in un tubo chiuso, ripieno di azoto, di cui si conosceva esattamente la capacità. Si apriva il tubo sotto il mercurio, e si raccoglieva la miscela gassosa che, analizzata, si dimostrò formata da 2 vol. CO_2 e 3 vol. CO: ossia per 100 in peso di ossido grafitico

$$16{,}9\,CO_2 \text{ e } 15{,}9\,CO.$$

L'analisi della sostanza nera carboniosa (*ossido pirografitico*) rimasta colla deflagrazione, contiene C . 86,55 — H . 0.70 — O . 12,75, mentre l'acido pirografitico (che rappresentava il 66,83 % in media, se ottenuto alla temperatura di 250°; il 65,76 a temperatura più bassa, 240°-220°) dava la percentuale di C . 80,13 — H . 0,58 — O . 19,29 in media.

Dai dati sperimentali Berthelot e Petit deducevano la formula $C_{92}H_6O_{10}$ [C . 86,5; H . 0.9; O. 12,6] per l'ossido pirografitico, che era ancora capace di fissare il 10 % di barite, mentre Brodie rappresentava l'acido pirografitico colla formula $C_{22}H_2O_4$.

L'equazione errata del Brodie, sopracitata, veniva corretta da essi nel modo seguente:

$$\underset{\text{ossido grafitico}}{2\,C_{56}H_8O_{24}} \longrightarrow \underset{\text{ossido pirografitico}}{C_{92}H_6O_{10}} + 4\,C_2O_4 + 6\,C_2O_2 + 5\,H_2O_2;$$

secondo la quale si calcola	CO_2	16,4	CO	15,7
trovato	"	16,9	"	15,9

Calcolando, secondo quest'equazione, il residuo della deflagrazione dell'ossido grafitico, si arriva a 59,5 % di ossido pirografitico, mentre nell'esperienza del Brodie, dove

la decomposizione avviene senza esplosione, il residuo di acido pirografitico ammonta al 65,7 - 66,8 %. Le due serie di esperienze, non comparabili per la *vivacità* di reazione, servono però a stabilire in modo preciso che la parte volatile della decomposizione pirogenica dell'acido od ossido grafitico è formata da una miscela di CO, CO_2, H_2O e quindi è comprovata l'esistenza dell'ossido di carbonio, negata esplicitamente da Gottschalk.

L'ossido grafitico proveniente dalla grafite naturale, oltre a differenziare nella composizione, si comporta quantitativamente in modo diverso alla deflagrazione. La sua composizione, controllata colla barite assorbita (54,9 - 54,4 %), è rappresentata dalla formula $C_{56}H_{10}O_{30}$, HO, e l'equazione della deflagrazione è

$$2\,C_{56}H_{10}O_{30}.HO \longrightarrow 5\,C_2O_4 + 7\,C_2O_2 + 8\,H_2O_2 + \underset{\text{ossido pirografitico}}{C_{88}H_6O_{12}}$$

che richiede per 100 p.	CO_2	18,5	trovato	15,5
	CO	16,5	"	15,2
	ossido pirografitico	52,9	trovato Brodie	65,7 - 66,8

La composizione del nuovo ossido pirografitico è

C.	83,85	H.	0,72	O.	15,43	trovato
"	83,8	"	0,95	"	15,2	calcolato

cioè intermedia fra il composto di Brodie e quello risultante dalla grafite della ghisa.

Finalmente, l'ossido grafitico proveniente della grafite elettrica dette ai due chimici francesi la percentuale rappresentata dalla formula $C_{56}H_{10}O_{38}$, non controllata coll'assorbimento della barite, nè dalla decomposizione pirogenica.

Dai dati analitici riassunti risulta evidente che in questo primo periodo di studio la composizione dell'acido grafitico *non venne stabilita in modo definitivo.*

Nel secondo periodo le ricerche dei chimici vennero dapprima dirette ad impiegare nuovi mezzi ossidanti per la preparazione dell'acido grafitico.

In una serie di lavori, molto interessanti e che ora da pochi anni vengono apprezzati al loro giusto valore, « Sull'elettrolisi di varie soluzioni acide, neutre ed alcaline con elettrodi di grafite (¹) », Ad. Bartoli e G. Papasogli ottennero, elettrolizzando soluzioni di acidi minerali, solforico e nitrico, il disgregamento dell'elettrodo positivo costituito da grafite purissima; e dal deposito nero ottenuto separarono con lavacri e decantazioni la grafite più densa da una polvere leggera nera che, depurata mediante soluzione d'ipoclorito dal *mellogeno* (²), — sostanza che genera acido mellitico, — contiene 90 % di C. 0,5 di H. 9,5 di O; e riscaldata verso 300°, rigonfia come fa l'acido grafitico. L'ossigeno elettrolitico ha quindi ossidato la grafite trasformandola parzialmente nell'ossido grafitico.

(¹) G., *12*, 1882, pag. 113; *13*, 1883, pag. 37. Le esperienze vennero rese pubbliche fin dal 1879.

(²) Composto nero al quale gli autori assegnano la formola $C_{11}H_2O_4$, confermata recentemente da Vanzetti (*Atti dell'Istituto Veneto,* 1914, pag. 767).

Verso il 1891 [1] W. Luzi pubblicò una serie di esperienze che hanno relazione assai stretta colla formazione dell'acido grafitico.

Le osservazioni di Schafträntl, Marchand e Brodie hanno stabilito che la grafite polverizzata finamente ha la proprietà di assorbire, per un prolungato riscaldamento, certe sostanze come l'acido solforico concentrato, che non cede ad un prolungato lavaggio con acqua; ed il prodotto disseccato, quando venga sovrariscaldato, gonfia aumentando il suo volume, in forma serpentina o di cavolo-fiore. Secondo i tre citati chimici, i reagenti che producono tale fenomeno di rigonfiamento sono acido solforico e le miscele di questo acido con acido nitrico fumante, dicromato potassico e clorato di potassio, cioè misti ossidanti energici. Il Luzi trovò che l'acido nitrico fumante, da solo, produce lo stesso fenomeno; ed esperimentando su 15 varietà di grafiti naturali, scoprì che soltanto alcune di esse presentavano il fenomeno di rigonfiamento. Classificò le prime come *grafiti*, e quelle che non davano il fenomeno chiamò *grafititi*. La causa di questo fenomeno non va ricercata nella forma cristallina della grafite, nè nella densità, nè nella composizione, perchè i campioni esaminati, sottoposti all'analisi, contenevano 99,7 - 99,99 % di carbonio. In una Nota ulteriore [2] egli dimostrò che le due serie di grafiti davano col processo Brodie un'acido grafitico che presentava alcune proprietà — non però troppo accentuate — differenziali. Così le *grafiti* davano un acido grafitico apparentemente cristallizzato in lamelle, che riscaldato deflagra violentemente dando un acido pirografitico nero, spugnoso, con grande aumento di volume.

Le *grafititi* dànno parimenti un acido grafitico giallo, ma amorfo, che dà col riscaldamento, deflagrando, un acido pirografitico nero, poco spugnoso, pulverolento e senza subire un notevole aumento di volume. Da ciò egli conclude per un comportamento differenziale non notevole, ma sufficiente, tra l'acido *grafitico* e l'acido *grafititico* e nei loro piroderivati.

H. Moissan [3] sottopose le diverse varietà di grafiti — ottenute per cristallizzazione nei metalli fusi al forno elettrico e per azione della elevata temperatura sulle diverse varietà di carboni — all'azione ossidante sviluppata dalla miscela di acido nitrico reale (Valentiner) e clorato potassico. La reazione, incominciata a freddo, si completa dopo 12 ore alla temperatura di 60°; e basta un solo attacco per ottenere acido grafitico giallo, che in qualche caso si presentò anche scolorito.

In queste condizioni, adoperando per 1 peso di grafite 20-30 pesi di clorato, l'acido risultante ha sempre lo stesso aspetto lamellare, cristallino, grasso, come la grafite, o la colorazione giallo-solfo. Egli riuscì anche a preparare [4] grafite che dà il fenomeno Luzi, cristallizzando il carbone dal platino fuso; ed in questa ricerca studiò le cause del fenomeno. Egli ritiene che il rigonfiamento sia dovuto ad un brusco sviluppo di gas prodotto dall'ossidazione, al calor rosso-scuro, di una piccola quantità di carbone compresso ed interposto fra le lamelle esagonali di grafite; oppure divide l'opinione di Berthelot, che una piccola quantità di ossido grafitico, prodotta dall'acido nitrico, si decomponga in gas ed ossido pirografitico.

(1) B., *24*, 1891, pag. 4085.
(2) B., *26*, 1893, pag. 891.
(3) Bl., 1895, serie III, *13*, pag. 807.
(4) Bl., 1894, serie III, pag. 837.

Il passo più importante nello studio dell'acido grafitico lo fece fare nel 1898 L. Staudenmaier [1] dando un metodo di preparazione che permette di lavorare, anche in una volta, 250 gr. di grafite [2] senza pericolo di esplosione, mentre il processo del Brodie espone l'operatore a questo pericolo, specialmente se la grafite contiene piccole quantità di composti ferrosi, solo operando su 10-15 grammi di minerale.

Staudenmaier, come il Luzi e il Moissan, cercò di sostituire un altro ossidante all'acido clorico; ma, dopo tentativi infruttuosi, ritornò a questo ossidante. Il suo processo consiste nel sospendere la grafite, polverizzata finamente, in una miscela di acido solforico concentrato e nitrico (p. sp. 1,4), e versare poco a poco il clorato potassico nelle proporzioni che verranno indicate nella parte sperimentale. In sei giorni, alla temperatura invernale di circa 0°, l'ossidazione era completata. La grafite s'era trasformata in un composto *verde* che il permanganato potassico trasforma rapidamente in acido grafitico giallo-solfo. Da queste ricerche compare per la prima volta un prodotto *verde* che precede la formazione dell'acido grafitico. Nè di questo prodotto, nè dell'acido grafitico risultante, egli dà analisi.

Uno dei punti più importanti della sua ricerca sta nelle considerazioni che egli fa sui sali che il Brodie e il Gottschalk descrissero ed analizzarono, e sulle determinazioni di basicità di Berthelot e Petit. Egli osserva che gli alcali, reagendo coll'acido grafitico, ne alterano immediatamente il colore, che si fa bruno-sporco e, col riscaldamento, nero; e tale cambiamento di colore permane quando si neutralizzi l'eccesso di alcali e si renda la massa acida con un acido minerale; e solo gli agenti ossidanti energici, come l'acido clorico ed il permanganato potassico, ripristinano la sostanza giallo-solfo primitiva. Succede quindi fra l'ossido grafitico e gli alcali una reazione più profonda di una semplice salificazione; perciò egli ritiene illusorie le formule proposte pei sali [3] e per l'ossido pirografitico ottenuto per esplosione da Berthelot e Petit, perchè, se si pensa che l'acido grafitico è un composto organico straordinariamente complicato e che la sua decomposizione per azione del calore avviene con esplosione, si può facilmente supporre che l'ossido pirografitico non sia un corpo unico.

Come il Berthelot, studiò anch'egli l'azione dei riducenti sull'acido grafitico e specialmente quella del cloruro stannoso che lo trasforma in un prodotto di riduzione nero brillante, che ha tutte le proprietà della grafite e che, per pseudomorfosi, conserva la forma della grafite come l'acido grafitico e che l'acido clorico ritrasforma in acido grafitico *verde*, e successivamente il permanganato potassico in *giallo-solfo*. Di questo composto nero non dà analisi.

Maggior interesse destano, quantunque non corredate di dati analitici quantitativi, le esperienze instituite con ossidanti sull'acido grafitico.

Il solo miscuglio nitro-solforico (3 vol. H_2SO_4 + 1 vol. HNO_3) reagisce a caldo sull'acido grafitico sciogliendolo in pochi minuti. Scacciato l'eccesso di acido nitrico e ripresa la massa con acqua, si ha col cloruro stannoso un prodotto di riduzione nero. Lo studio di questo processo dimostrò che l'azione del miscuglio acido si esercita pro-

(1) B. *31*, an. 1898, pag. 1481.
(2) B. *32*, an. 1899, pag. 1396.
(3) B. *32*, an. 1899, pag. 2825.

gressivamente per fasi. Dapprima l'acido giallo si colora in nero, ed il prodotto nero viene in seguito ossidato e disciolto. Tentò quindi di separare le due fasi dell'azione trattando dapprima l'acido grafitico con acido solforico di una certa concentrazione (250 cm.^{3} H_2SO_4 + 100 cm.^{3} H_2O); riscaldando la miscela lentamente a 180°, egli osservò verso 160° uno sviluppo abbondante di CO_2, che dopo un certo tempo cessò, e la conversione in una sostanza nera, che lavata e disseccata non deflagrava col riscaldamento su lamina di platino: segno che tutto l'acido grafitico aveva subito la metamorfosi. Egli ritiene questo nuovo *acido nero pirografitico* diverso dai prodotti di questo nome ottenuti dagli altri chimici, quantunque, io osservo che l'acido pirografitico del Brodie sia stato ottenuto nello stesso modo; solo che, invece di acido solforico di quella concentrazione come moderatore di temperatura (e per conseguenza di vivacità della reazione) serviva il petrolio.

L'acido pirografitico di Staudenmaier, bollito a ricadere per 4-8 ore con acido nitrico, colora il liquido in rosso e finisce di sciogliersi completamente dando, fra altri prodotti amorfi rossi, acido mellitico. L'acido clorico lo trasforma in acido verde che poi diventa giallo; ed a questi acidi intermedî dà il nome di acidi *pseudo-grafitici*, ed accenna alla differenza di comportamento coi reattivi dell'acido grafitico. Egli conclude, dalle sue ricerche, che esiste una serie di sostanze nere dall'aspetto della grafite ed una serie di sostanze verdi e gialle dall'aspetto dell'acido grafitico; e pensa che l'acido grafitico e *pseudo-grafitici* siano dei composti complessissimi a funzione *chinonica*, aventi dei gruppi CO, quantunque dica espressamente che l'idrossilamina agisce su esso come riducente. Egli fa osservare che le analisi dei diversi chimici, che si sono occupati di questa sostanza, hanno condotto a formule diverse, perchè ritiene che l'acido grafitico sia una mescolanza di diverse sostanze ed è quindi supponibile che le formule non presentino una grande attendibilità. Quantunque l'aspetto fisico dell'acido grafitico dia l'apparenza di omogeneità, egli ritiene ch'esso sia un miscuglio come le sostanze umiche provenienti dal legno, concetto già espresso nel 1869 da Berthelot (1). Ed in questa idea, a mio parere, lo conforta il fatto che questa sostanza, ritenuta cristallizzata in lamine rombiche o monocline dal Miller al quale il Brodie l'aveva data a studiare cristallograficamente (e questa osservazione era stata suffragata dalle misure microgoniometriche di A. H. Church), venne invece dimostrata amorfa dal Weinschenk (2), e l'apparenza cristallizzata dovuta ad una forma pseudomorfica della grafite che ha servito a prepararla.

Nella sua ultima Nota sull'argomento — 23 ottobre 1899 — lo Staudenmaier (3) si riserva di pubblicare in seguito i dati analitici risguardanti i prodotti di riduzione degli acidi grafitico, piro-grafitico e pseudo-grafitici, e prega i chimici di lasciargli libero il campo per qualche tempo: da quel giorno sono trascorsi 15 anni, e non ho potuto riscontrare altra pubblicazione di questo chimico, nè sull'acido grafitico nè su altro argomento.

(1) Compt. rend., *68*, ann. 1869, pag. 183.

(2) Groth Z. Kr., *28*, 296.

(3) L'ultima pubblicazione (suntata nel C. 1900, II, 542 e nella quale non reca nuovi fatti in aggiunta a quelli accennati) è negli Atti della riunione dei naturalisti e medici tedeschi a Monaco an. 1899.

Al procedimento Moissan ricorse anche Francis A. J. Fitzgerald [1] per comparare le diverse grafiti che si ottengono artificialmente col processo Acheson; e tre anni dopo (1904) Frederic S. Hyde, adottando il processo Staudenmaier allo stesso scopo, propose di chiamare *ossido grafitico* il composto *verde* di ossidazione clorica, ed *acido grafitico* il prodotto giallo di ulteriore ossidazione permanganica [2].

Giorgio Charpy [3], in seguito agli studî di Le-Chatelier e Wologdine sulla grafite, ha suggerito, come mezzo ossidante per convertirla in ossido grafitico giallo, la miscela di acido solforico concentrato e permanganato potassico, o di quest'acido con anidride cromica. Il primo miscuglio agisce a freddo; anzi, elevando la temperatura sopra 45°, avviene parallelamente un'ossidazione più profonda, ed una parte del carbonio si ossida ad anidride carbonica. Col misto cromico avvengono le due reazioni parallele anche alla temperatura ordinaria; in 24 ore il 15 °/₀ della grafite è convertito in anidride carbonica.

Per completare lo studio bibliografico dell'acido grafitico, devo infine accennare a due ultime pubblicazioni recenti, che, se non riguardano direttamente questo composto, hanno però una certa attinenza coll'argomento dell'ossidazione delle diverse varietà di carbonio.

Hans Meyer [4], in una Nota riassuntiva sopra una serie di lavori concernenti i prodotti di ossidazione con acido nitrico di diverse varietà di carbone di legna (dalle quali ricava diversissime quantità, da 0 a 40 °/₀, di acido mellitico), viene alle stesse conclusioni alle quali pervenne sin dal 1870 il Berthelot, cioè che il diamante resiste per via umida a tutti gli ossidanti; la grafite dà acido grafitico, che si può convertire in acido mellitico, ed il carbone di legno dà quantità variabili di quest'ultimo acido. Nell'occasione scrive che Fr. Friede pubblicherà fra breve « nuovi contributi per la risoluzione del problema dell'acido grafitico ».

K. A. Hofmann [5], in seguito alla scoperta dell'influenza catalizzatrice del tetrossido di osmio sull'azione ossidante che sviluppa la soluzione acquosa di clorato potassico, studiò coi suoi allievi l'azione di detta soluzione a freddo sulle diverse varietà di carbonio; e constatò che, oltre a CO_2 e CO, si forma, pel carbone di legna, mellogeno ed acido mellitico, fatto già conosciuto. Come complemento alle sue ricerche studiò parimenti il comportamento delle soluzioni di cloruro di calce sul carbonio cristallizzato. Mentre il diamante, dopo il contatto di 14 giorni con la soluzione di ipoclorito, dà 1 °/₀ di un prodotto contenente 86,74 °/₀ di C e 10,33 °/₀ di H_2O (forse un composto analogo all'acido grafitico del diamante), che si separa sotto forma gelatinosa, amorfa, la grafite Acheson rimane inalterata.

Da questo riassunto risulta evidente che dell'acido grafitico non è finora stabilita con certezza la composizione, alcuni ritenendolo anche un miscuglio complesso come le così dette sostanze umiche del legno, nè si ha indizio sicuro della sua funzione chimica.

(1) Journ. Soc. of. chem. industry, *20*, an. 1901, pag. 445.
(2) Journ. Soc. of chem. Industry, *23*, an. 1904, pag. 302.
(3) Compt. rend., *148*, pag. 920 (1909).
(4) M., pag. 163 (1914).
(5) B. *46*, an. 1913, pag. 2854.

II. — Parte sperimentale.

Preparazione dell'acido grafitico.

Dal riassunto storico si è visto che gli ossidanti adoperati per la preparazione di questo prodotto sono l'acido clorico, il permanganato potassico e l'anidride cromica. Ho lasciato subito da parte l'impiego dell'anidride cromica perchè lo stesso Charpy, che l'ha proposta, ha dimostrato che una parte del carbonio della grafite viene trasformata *a freddo* in anidride carbonica, fatto che posso confermare e che perciò ostacola la preparazione di notevoli quantità di prodotto.

Ho preparato l'acido grafitico con tre campioni di grafite:

a) grafite Ceylan acquistata presso la fabbrica Merck.

b) grafite proveniente dalle miniere di Pinerolo, campione arricchito che ebbi gentilmente dal collega prof. Stella.

c) grafite Acheson, lastra commerciale.

Tutti i campioni di grafite furono depurati mediante trattamento acido (nitrico, cloridrico, fluoridrico); polverizzati e setacciati con setaccio 60×60 per cm^2. Alla calcinazione in corrente di ossigeno lasciavano una quantità insignificante di ceneri, sempre inferiore al 0,5 %.

Il processo Brodie venne adoperato soltanto con la grafite Ceylan e con la grafite Acheson, perchè quella di Pinerolo, benchè depurata in modo da contenere solo 0,34 % di ceneri ferrugginose, scoppiò violentemente quando si trattò nelle condizioni apparenti delle altre due. Le modalità del processo vennero dettagliatamente riferite dal Brodie e dal Gottschalk, perciò ometto la descrizione. Darò invece l'aumento di peso nelle singole fasi dell'ossidazione della grafite adoperata.

Gr. 5 di grafite Ceylan, dopo il I° trattamento, erano aumentati a gr. 6,38, ed il prodotto ottenuto era colorato in verde e deflagrava. Al II° trattamento il peso era aumentato a gr. 7,1, ed il prodotto era sempre colorato in verde. Al III° trattamento il peso era di gr. 7,35, ed il prodotto giallo. Al IV° trattamento il peso era diminuito a gr. 7,26, ed il prodotto aveva conservato il color giallo e lo stesso aspetto cristallino di lamine untuose. Al V° trattamento il peso era diminuito a gr. 7; colore ed aspetto identici. In complesso gr. 5 di grafite dettero, come rendita massima, gr. 7,35 di acido grafitico, che, disseccato, ha un color giallo tendente al rosso.

Gr. 5 di grafite Acheson, dopo il I° trattamento, erano aumentati a gr. 5,57, ed il prodotto ottenuto era una polvere nera lucente, che, riscaldata, deflagrava con poca vivacità; le acque di lavatura erano colorate in giallo. Al II° trattamento il peso era di gr. 5,47; il residuo, nero lucente, deflagrava più vivacemente, e le acque di lavatura si conservavano gialle. Al III° trattamento il peso era di gr. 5,27, il residuo sempre nero-lucente e le acque colorate in giallo. Al IV° trattamento il peso era di gr. 4,77, il residuo nero lucente e le acque sempre colorate in giallo. Al V° trattamento il peso era di gr. 4,36, colorato in verde, e le acque ancora colorate in giallo.

Al VI° trattamento il peso era di gr. 4, il residuo colorato in giallo e le acque appena giallognole. In complesso gr. 5 di grafite hanno dato gr. 4 di acido grafitico giallo. Finchè il prodotto rimane nella soluzione acida si conserva di color giallo-solfo, ma quando si dissecca assume un colore giallo-ocra.

Il processo Charpy al permanganato potassico venne applicato nel modo seguente ed alla sola varietà di grafite Ceylan.

Gr. 5 di grafite vennero spappolati in capsula Bayeux in 200 cm³ di acido solforico concentrato; alla massa, raffreddata con acqua corrente, si aggiunsero a poco a poco, agitando con spatola, 20 gr. di permanganato polverizzato, in porzioni di 2 a 3 grammi per volta ed impiegando circa 3 ore per fare l'addizione completa dell'ossidante. A poco a poco scompare il color nero della grafite e vi subentra un colore rosso-mattone scuro degli ossidi manganici; la soluzione verde tende a scolorarsi. Dopo 24 ore si aggiungono, sempre a piccole porzioni, altri 10 gr. di permanganato e si lascia alla temperatura ambiente sotto campana, agitando di tanto in tanto, per altri 10 giorni, rimanendo la massa colorata in verde. Si diluisce con ghiaccio e si decompone l'eccesso di permanganato e gli ossidi di manganese con peridrolo. Rimane l'acido grafitico cristallizzato in lamelle untuose e colorato in giallo-solfo, che però dopo alcune ore in seno al liquido, acido e scolorito, assume tinta rossigna. Si lava per decantazione, dapprima con acqua, poi, assumendo il prodotto tinta sempre più scura, si completa il lavamento con acido nitrico diluito (1 vol. HNO_3 1,4 + 2 vol. acqua), sino a che nel decantato e filtrato non si riscontra più acido solforico e sale di manganese. Sempre per decantazione si lava con alcool; ma alla terza lavatura il composto diventa gelatinoso depositandosi stentatamente: perciò si finisce il lavaggio con etere, col quale solvente il prodotto si raggruma. Si raccoglie su filtro e si dissecca nel vuoto su acido solforico. Il prodotto secco ha struttura simile alla grafite ed è colorato in bruno quasi nero; riscaldato deflagra violentemente. Da 5 gr. di grafite si ottennero gr. 9 di prodotto disseccato nel vuoto. Si variarono le quantità di ossidante: per 5 gr. di grafite si adoperò gr. 40 di permanganato; si ottenne, dopo il trattamento con peridrolo, l'acido giallo-solfo che il lavaggio trasformò, colorandolo in bruno quasi nero, in una massa gelatinosa, colloidale, che si deposita difficilmente, che si attacca tenacemente al filtro, e che conserva, quando è secca, la proprietà di deflagrare per azione del calore. Non ho esteso questo metodo di preparazione alla grafite di Pinerolo ed alla grafite Acheson, visto che il prodotto finale della lavorazione non conserva la colorazione gialla dell'acido grafitico, ma soltanto la proprietà di deflagrare se riscaldato.

Il processo Staudenmaier venne applicato alle due varietà naturali di grafite di Pinerolo e Ceylan, ed all'artificiale Acheson. Per polverizzare quest'ultima, si elettrolizzò una soluzione diluita di acido solforico adoperando come catodo la lastra di grafite e come anodo una lamina di platino. La polvere formatasi si lavò con acqua regia sino a completa eliminazione di ferro, indi con acqua, e si disseccò a 200°. Lascia 0,4 % di sostanze minerali: contiene 93,5 % di C e 4,2 % di acqua. Tutte le varietà vennero setacciate col setaccio solito $60 \times 60 = 3600$ per cm².

Si fanno gocciolare, in 280 cm^3 di acido solforico concentrato e raffreddato, 120 cm^3 di acido nitrico p. sp. 1,40; ed al miscuglio freddo, contenuto in beuta da 700-750 cm^3, si addizionano gr. 10 di grafite; indi, tenendo il recipiente nell'acqua corrente o nel ghiaccio, si aggiungono, a poco a poco ed agitando, gr. 180 di clorato potassico polverizzato. L'aggiunta di clorato si fa a piccole porzioni per volta (4 a 5 grammi); e la quantità totale si addiziona nello spazio di 16 a 20 ore, in due periodi di 8-10 ore ciascuno, con la notte d'intervallo. La beuta si mantiene coperta con becker e si abbandona il tutto, agitando di frequente, per 8-10 giorni alla temperatura invernale, che nella giornata non raggiunse mai un massimo di $+4°$ a $+5°$. Completata la reazione (il che viene indicato dall'atmosfera del recipiente che si scolora quasi dei vapori di cloro e composti ossiclorurati), la massa viene versata nell'acqua raffreddata con ghiaccio; indi vien lavato il composto verde, residuo insolubile, per decantazione. I primi lavaggi si fanno con acqua pura; poi bisogna adoperare acido nitrico diluito (1 vol. acido 1,4 — 9 a 10 vol. acqua), se no la massa insolubile gelatinizza e si deposita stentatamente. Si compie il lavaggio sino a che siano eliminati completamente l'acido solforico e il cloridrico; indi il residuo si raccoglie su filtro, si asciuga fra carta e si dissecca nel vuoto sull'acido solforico in camera oscura. Così si ottiene il composto *verde* che Hyde propose di chiamare *ossido grafitico.*

Per preparare il composto *giallo*, secondo Hyde *acido grafitico*, si opera nello stesso modo. Quando col lavaggio per decantazione si è eliminata la maggior parte dei sali solubili, il precipitato verde si sospende in circa 300 cm^3 di acido solforico al 50 % in una beuta (che si riscalda a bagno-maria a circa 60°-80°) e si addiziona di circa 10 gr. di permanganato potassico in polvere, ad 1 gr. per volta, in 7 ad 8 ore; indi si decompone l'eccesso con peridrolo, ed il prodotto, di un bel giallo-solfo, si lava per decantazione, dapprima con acqua, indi con acido nitrico diluito, sino ad eliminazione di solfati e cloruri. Si filtra e si dissecca il prodotto nel vuoto sull'acido solforico in camera oscura. Bisogna evitare nei lavaggi l'uso dell'alcool e dell'etere, perchè questi solventi vengono assorbiti dall'ossido ed acido grafitico molto tenacemente, e la loro eliminazione riesce sommamente difficile.

In media, da 10 gr. di grafite di Pinerolo e di Ceylan si hanno 16-17 gr. di ossido grafitico e 15-16 di acido grafitico. Da 10 gr. di grafite Acheson si ottengono 13-14 gr. di ossido e 12-13 gr. di acido grafitico.

L'ossido grafitico proveniente dalle grafiti naturali è apparentemente cristallino, di color verde-cromo, e tale si conserva col disseccamento. Quello proveniente dalla grafite Acheson, dapprima verde, si oscura nei lavaggi e diventa nero e col disseccamento dà una massa che, polverizzata, fornisce una polvere nera con una punta di verde. Tutte le varietà deflagrano vivamente.

L'acido grafitico delle grafiti naturali, appena preparato con la decomposizione dell'eccesso di permanganato col peridrolo, è di un bel colore giallo-solfo; ma nei lavaggi e nel disseccamento il colore incupisce, e disseccato e polverizzato, dà una polvere giallo-bruna. L'acido grafitico della grafite Acheson, appena preparato sott'acqua è di un color giallo tendente al rosso, e col disseccamento diventa color ocra.

Analisi dell'acido ed ossido grafitici.

Brodie, Gottschalk, Stingl, Berthelot e Petit sono i soli chimici che determinarono la composizione dell'acido grafitico: tutti gli altri, che s'occuparono di questa sostanza, non l'analizzarono.

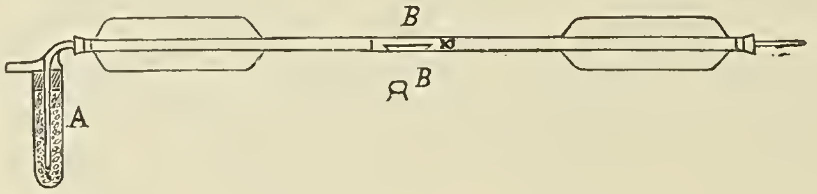
Il Brodie scrive che la combustione di esso va condotta con certe cautele, date le sue proprietà esplosive, e raccoglie e pesa il CO_2 prodottosi in tubo contenente pomice imbevuta di potassa. Il Gottschalk introduce nella canna a combustione la sostanza pesata in tubo di vetro e tappato alle estremità con stoppacci di amianto che hanno l'ufficio di trattenere, nel momento della deflagrazione, le particelle lanciate dall'acido pirografitico; tutti e due poi trattengono la colonna di ossido ramico con tappi di amianto. Stingl, Berthelot e Petit non dicono quali artifizii abbiano usato. Non sono mai riuscito, nei diversi tentativi fatti, ad impedire che nella deflagrazione della sostanza — che sempre succede qualunque precauzione si prenda nel riscaldamento, sia essa contenuta in tubo aperto (come fa Gottschalk), sia in navicella mescolata e diluita con silice — una porzione di carbone venisse proiettata nel tubo a cloruro di calcio, attraversando la colonna di 55-60 cm. di CuO trattenuta con stoppacci di amianto; perciò rinunciai alla combustione diretta dell'acido grafitico.

Come si sa questa sostanza, quando viene riscaldata a circa 200° sotto petrolio o sotto acido solforico di una certa concentrazione, si decompone perdendo acqua, anidride carbonica e presumibilmente ossido di carbonio; ed avendo osservato che questa eliminazione avviene per lo più senza deflagrazione (quando la sostanza secca si riscaldi nel vuoto) ed il residuo nero che rimane può essere in seguito riscaldato al calor rosso senza deflagrare, ho pensato di fare in due periodi la combustione della sostanza. Nel primo, raccogliere la miscela di CO_2 e CO che si svolge da una determinata quantità di prodotto grafitico, acido od ossido, quando si riscaldi nel vuoto a circa 200°; nel secondo, bruciare il residuo non più deflagrante. Potevo così dedurre per differenza, dal peso della sostanza primitiva e dal peso di $CO + CO_2$ formatosi nel primo periodo di riscaldamento, il peso dell'acqua contemporaneamente eliminata, ed avere, con la combustione del residuo, tutti gli elementi per stabilire la composizione del prodotto grafitico. Inoltre questa decomposizione graduale coll'intervento della sola temperatura, senza reagenti, poteva darmi dati importanti sulla costituzione della sostanza.

L'apparecchio che adoperai all'inizio delle esperienze consisteva in un tubo di vetro del diametro di 14 a 15 mm., lungo 45-50 cm., aperto alle due estremità. Una delle estremità era affilata ed in comunicazione con una pompa a caduta di mercurio, munita di manometro e del tubo adduttore per raccogliere i gas; l'altra estremità era chiusa mediante un tappo portante un robinetto a tenuta perfetta. Il tubo era introdotto in una stufa di rame tubulare orizzontale, nella quale, mediante l'ebollizione di liquidi appropriati, si manteneva la temperatura costante nei limiti di 170°-210°, che si erano riconosciuti adatti per la decomposizione. Però questo dispositivo di riscaldamento, portando forse troppo rapidamente la temperatura della sostanza al punto nel quale s'iniziava la decomposizione, s'è dovuto abbandonare

perchè in molte esperienze non si poteva impedire la deflagrazione. In seguito adottai come stufa di riscaldamento un forno tubulare orizzontale Heraeus (tipo *A*; lunghezza del tubo, 22 mm.), col quale potevo far variare a piacimento la temperatura in limiti molto estesi, fino 1400°, intercalando opportuna resistenza. Con tale modo di riscaldamento ho diminuito, se non evitato completamente, il pericolo della deflagrazione.

L'apparecchio, al quale dopo alcuni cambiamenti suggeriti dall'esperienza mi sono attenuto, consiste in un tubo di porcellana della fabbrica imperiale di Germania, smaltato internamente ed esternamente, del diametro interno di mm. 16-17, della lunghezza di 1 metro ed aperto alle due estremità. Un'estremità è in comunicazione con la pompa a caduta di mercurio; l'altra è chiusa con un tappo di gomma rossa ad un foro nel quale s'infila un tubo di vetro affilato, chiuso all'estremità sottile e che serve da robinetto con la rottura della punta affilata al momento opportuno. Per proteggere i tappi di gomma quando l'esperienza venga condotta alla temperatura di 1000° e più gradi nella parte mediana, di 20 cm., del tubo immerso nel forno, si circondano le due estremità con manicotti di vetro della lunghezza di 20-22 cm., in cui si fa circolare acqua fredda. Il tubo-laboratorio è rappresentato nella figura.



Il recipiente *A* è una specie di boccia di Cloez ripiena di pallottoline di vetro e con tappo di cotone per impedire che le proiezioni del carbone finissimo, nel caso di deflagrazione del prodotto grafitico, arrivino ad imbrattare il mercurio della pompa.

La sostanza viene pesata in navicella di platino o di allundo con le precauzioni usuali per le sostanze igroscopiche. Se la temperatura alla quale viene portata è all'incirca di 1000°, è meglio introdurre la navicella in un tubo di platino munito di uncino e di piedi (come è segnato in figura *B*) affinchè la superficie della navicella non si trovi a contatto immediato con la porcellana tenuta al calor bianco per parecchie ore.

Anzitutto ho dovuto controllare l'igroscopicità delle sostanze.

Senza dettagliare i numerosi dati sperimentali, dirò che tanto dell'acido grafitico come dell'ossido si possono ottenere due pesate successive nell'intervallo di 24 ore, con variazioni di 2 a 3 decimi di milligrammo per quantità oscillanti intorno al mezzo grammo; ma un soggiorno prolungato in un essiccatore a vuoto ad acido solforico fa diminuire successivamente il peso di milligrammi, eliminandosi *lentamente* e *continuamente* acqua come lo dimostrano le seguenti esperienze:

I. Ossido grafitico disseccato nel vuoto sull'acido solforico sino a che due pesate successive, nell'intervallo di 48 ore, differenziavano solo di mgr. 1, gr. 1,5493.

Riscaldati in stufa ad acqua a 100°: dopo 1 ora, aumento di peso gr. 0,005
" · " 6 " " " " 0,028.

Rimessi in essiccatore a vuoto su acido solforico e mantenuti per un anno in armadio fuori del contatto della luce, rifacendo mensilmente il vuoto, perdettero di peso gr. 0,0385, ossia il 2,5 %.

L'esperienza si ripetè con maggior quantità di sostanza.

II. Ossido grafitico gr. 6,874 (il cui peso variava di 1 mgr. nell'intervallo di 20 giorni fra due pesate successive), riscaldati in stufa ad acqua bollente per 8 ore, aumentano di peso gr. 0,0225 (0,32 %). Mantenuti 3 mesi nel vuoto su acido solforico, riparati dalla luce, perdettero di peso gr. 0,0742 (1,08 %).

L'esperienza s'interruppe quando due pesate successive, alla distanza di 15 giorni, variavano di 3-4 mgr.

III. Acido grafitico gr. 7,2056 (disseccati nel vuoto su acido solforico finchè due pesate successive nell'intervallo di 20 giorni non variarono che di mgr. 1,3), riscaldati in stufa ad acqua bollente per 8 ore, aumentarono di peso gr. 0,0591 (0,82 %). Mantenuti 3 mesi in essiccatore nel vuoto su acido solforico, riparati dalla luce, perdettero gr. 0,0117 di peso (0,16 %); ed anche l'esperienza venne interrotta quando due pesate successive, alla distanza di 15 giorni, variarono di 3-4 mgr.

Da queste esperienze risulta in modo evidente che tanto l'ossido quanto l'acido grafitico si comportano nello stesso modo; perdono in essiccatore alla temperatura ordinaria, lentamente ed in modo continuo, piccolissime quantità di acqua: perciò una prima spiegazione delle differenze dei risultati analitici dei diversi sperimentatori si trova nel fatto che la sostanza analizzata conteneva piccole e variabili quantità di acqua aderente che si separa lentamente e con grande difficoltà.

L'igroscopicità delle sostanze è un'altra causa concomitante per far variare i risultati analitici.

L'acido grafitico e l'ossido assorbono con avidità il vapor d'acqua atmosferico; mantenuti in ambiente saturo di vapore, lo assorbono rapidamente e lo condensano in goccioline alla superficie.

Gr. 0,3951 di acido grafitico, disseccato nel vuoto su acido solforico sino al limite di gr. 0,0002 in 24 ore di soggiorno, assorbirono:

nelle prime 24 ore	gr. 0,1177	acqua	29,0 %
" 48 "	" 0,1416	"	35,8 "
dopo 3 giorni	" 0,1551	"	39,2 "
" 4 "	" 0,1596	"	40,3 "
" 15 "	" 0,189	"	47,8 "

L'acqua s'era depositata in goccioletto sulla superficie della sostanza che aveva preso una tinta più cupa. In altre esperienze l'acido assorbì 48,7-50,8 % di acqua.

Gr. 0,4234 di ossido grafitico. disseccato nel vuoto su acido solforico sino al limite di gr. 0,0003 in 24 ore, assorbirono:

in 24 ore	gr. 0,1449 H_2O	34,2 %
" 48 "	" 0,1749 "	41,3 "
" 7 giorni	" 0,2139 "	50,5 "
" 9 "	" 0,217 "	51,2 "

Si sospese l'esperienza perchè l'acqua s'era depositata in goccioline sulla superficie della sostanza che però aveva conservato l'aspetto primitivo. In altre esperienze l'ossido assorbì 50,1 - 55,9 % di acqua.

Se le sostanze idratate vengono disseccate in seguito nel vuoto sull'acido solforico, perdono rapidamente l'acqua assorbita; ed il peso, al limite di gr. 0,001, della sostanza, è costantemente inferiore di 0,5 - 0,8 %, al peso della sostanza primitiva sottoposta all' idratazione.

Ho analizzato l'*ossido grafitico* preparato secondo lo Staudenmaier, proveniente dalle grafiti di Ceylan, di Pinerolo, di Acheson, e l'*acido grafitico* preparato col processo del Brodie dalle grafiti di Ceylan e di Acheson, e preparato, secondo Staudenmaier, dalle grafiti di Pinerolo, Ceylan ed Acheson.

Le modalità dell'analisi dei due prodotti sono le seguenti:

Introdotta la sostanza nel tubo e fatto il vuoto nell'apparecchio, si portava lentamente la temperatura del forno a 150° corrispondente ad un dato amperaggio: temperatura determinata mediante termometro e confrontata coll'apparecchio termoelettrico del Le-Chatelier. e per temperature superiori a 300°, determinata col pirometro termo-elettrico del Le-Chatelier.

La decomposizione dei due prodotti grafitici s'inizia nel vuoto a temperatura vicino a 150°; viene segnata dall'abbassamento del manometro della pompa, e procede lentamente. Il periodo più attivo di decomposizione è però compreso nei limiti di 190°-200°; succede un periodo di stasi, indi la decomposizione ripiglia alla temperatura di circa 500°. Nel primo periodo di decomposizione i prodotti sono esclusivamente: H_2O, determinata per differenza di peso; CO_2, per assorbimento con idrato potassico; e CO, per assorbimento con soluzione ammoniacale di cloruro ramoso.

Nel secondo periodo si ha, man mano che la temperatura s'innalza, sviluppo di gas; ma, oltre a CO e CO_2, rimane inassorbibile dai reagenti una porzione di gas, che brucia con fiamma pallida e che venne dimostrato essere idrogeno, perchè bruciando genera acqua. Questo idrogeno prende origine per azione secondaria dell'acqua sul carbonio ed è accompagnato da piccole quantità variabili di metano: come residuo rimane grafite. Per stabilire la composizione dei prodotti grafitici, mi sono perciò limitato a misurare ed analizzare i gas prodotti nel primo periodo di riscaldamento.

Riassumo nelle tabelle I e II i dati analitici ottenuti per l'acido e l'ossido grafitico, adottando anch'io la nomenclatura dell'Hyde.

TABELLA I.

Composizione acido grafitico.

	N. analisi	QUALITÀ GRAFITE	Peso sostanza disseccata nel vuoto gr.	Ceneri gr.	Temperatura forno Heraeus	Volume CO_2 a 0°.76 cm.3	Peso CO_2 gr.	Volume CO a 0°.76 cm.3	Corrisp. peso CO_2 gr.	Peso residuo dedotte ceneri gr.	Peso H_2O per diff. gr.	Peso CO_2 combustione residuo gr.	Peso H_2O combustione residuo gr.	CO_2 totale gr.	H_2O totale gr.	Percentuale C	Percentuale H	Percentuale O
Preparazione Brodie	1°	Ceylan . .	0.3781	0.0011	190°-200°	50.4	0.099	13.8	0.0271	0.2235	0.0372	0.6715	0.0145	0.7976	0.0517	57.69	1.52	40.79
	2°	»	0.3577	0.0007	» »	47.75	0.0938	12.9	0.0253	0.2112	0.0359	0.6342	0.0133	0.7533	0.0492	57.51	1 53	40.96
	3°	Acheson .	0.3458	0.0018	» »	47.3	0.0929	10.7	0 021	0.1998	0.0379	0.5989	0.0165	0.7128	0.0544	56.51	1.75	41.74
Preparazione Staudenmaier	4°	Pinerolo .	0.3869	0.0015	» »	47.1	0.0926	13.8	0.0236	0.2415	0.034	0.7182	0.0115	0.8344	0.0455	59.04	1.37	39.59
	5°	»	0.2855	0.0015	» »	34.8	0.0684	10.3	0.0203	0.1765	0.0262	0.5284	0.0115	0.6171	0.0377	59.26	1.47	39.27
	6°	Ceylan . .	0.4459	0.001	» »	60.2	0.1182	13	0.0256	0.2638	0.0466	0.8194	0.0102	0.8149	0.0568	59.04	1.41	39.55
	7°	»	0.3600	0.0009	» »	46 1	0.0906	10.9	0.0214	0.2189	0.036	0.6668	0.0105	0.7788	0.0465	59 14	1.43	39.43
	8°	Acheson .	0.3434	0.001	» »	44.35	0.0872	10.05	0.0198	0.2111	0.0315	0.6412	0.0104	0·7482	0.0419	59.57	1.35	39.08
	9°	»	0.4637	0.0027	» »	54.4	0.1069	15.5	0.0305	0.2889	0.0458	0.8728	0.016	1.0102	0.0618	59.76	1.49	38.75
	10°	»	0.3592	0.0007	» »	44.1	0.0867	9.6	0.019	0.2222	0.0375	0.6732	0.0078	0.7789	0.0453	59.25	1.40	39.35
	11°	»	0.2673	0.0016	» »	33.5	0.0658	8.7	0.0171	0.1628	0.0262	0.4902	0.0081	0.5731	0.0343	58.82	1.43	39.75

Le analisi 8, 9 furono eseguite sul campione della stessa preparazione, quelle 10, 11 su campione di diversa preparazione.

Tabella II.

Composizione ossido grafitico.

N. analisi	Qualità grafite	Peso sostanza disseccata nel vuoto gr.	Ceneri gr.	Temperatura forno Heraeus	Volume CO_2 a 0°.76 cm.³	Peso CO_3 gr.	Volume CO a 0°.76 cm.³	Corrisp. peso CO_3 gr.	Peso residuo dedotte ceneri gr.	Peso H_2O per diff. gr.	Peso CO_2 residuo gr.	Peso H_2O residuo gr.	CO_2 totale gr.	H_2O totale gr.	Percentuale C	Percentuale H	Percentuale O
1°	Acheson .	0.2437	0.0002	190°-200°	30.3	0.0595	7	0.0136	0.1452	0.0301	0.4496	0.0056	0.5227	0.0357	58.54	1.62	39.84
2°	»	0.3080	0.0008	» »	38.8	0.0763	8.4	0.0165	0.1818	0.0386	0.5613	0.0052	0.6541	0.0438	58.25	1.58	40.17
3°	»	0.2742	0.0016	» »	35.5	0.0697	9.1	0.0179	0.1628	0.0284	0.4902	0.0081	0.5731	0.0343	58.82	1.43	39.75
4°	»	0.4095	0.0018	» »	52.7	0.1036	12.9	0.0253	0.2458	0.0422	0.7511	0.011	0.880	0.0532	58.86	1.44	39.70
5°	»	0.2742	0.0014	» »	35.5	0.0697	9.1	0.0179	0.1633	0.0284	0.4966	0.0095	0.5842	0.0379	58.40	1.54	40.06
6°	»	0.3504	0.0011	» »	43.6	0.0857	11.2	0.022	0.2097	0.0399	0.6579	0.0104	0.7456	0.0503	58.21	1.59	40.20
7°	Ceylan . .	0.4388	0.0022	» »	59.7	0.1173	14	0.0275	0.2488	0.053	0.7708	0.012	0.9156	0.065	57.19	1.65	41.16
8°	»	0.4003	0.0017	» »	55.05	0.1082	12.55	0.0245	0.2267	0.0481	0.7025	0.0116	0.8352	0.0597	57.39	1.65	40.96
9°	»	0.345	0.0017	» »	48.1	0.0945	10.2	0.0199	0.1963	0.0398	0.606	0.0093	0.7204	0.0491	57.22	1.58	41.2
10°	Pinerolo .	0.394	0.001	» »	48.8	0.0959	11.5	0.0226	0.2337	0.049	0.7235	0.0099	0.842	0.0589	58.43	1.66	39.91
11°	»	0.310	0.0009	» »	38.8	0.0762	9.1	0.0179	0.1835	0.038	0.5682	0.0084	0.6623	0.0464	58.43	1.66	39.91

Le analisi 1, 2, 3, 4 furono eseguite sul campione della stessa preparazione. quelle 5, 6 su campione di diversa preparazione.

Dai risultati suesposti nelle due tabelle posso concludere:

1°) che il metodo d'analisi graduale da me adoperato dà risultati sicuri, perchè i numeri ottenuti, analizzando campioni della stessa preparazione, sono concordantissimi fra di loro od entrano nei soliti limiti di errori sperimentali non superando mai il 0,5 %, e va tenuto conto della natura delle sostanze, molto igroscopiche e che ritengono con avidità l'acqua;

2°) che la composizione dei prodotti grafitici non è costante, confermando il fatto già verificato dagli sperimentatori precedenti, non però nella misura enunciata da Berthelot e Petit, i cui risultati oscillano fra

51,9 e 62,6 di carbonio, e 35,9-46,5 di ossigeno;

3°) che la composizione varia a seconda del metodo adoperato per la preparazione e la qualità della grafite. Mentre col processo Brodie l'acido grafitico ha la composizione risultante dalla formula

$C_{13}H_4O_7$ $\quad C = 57,35 \quad H = 1,47 \quad O = 41,17$,

il processo Staudenmaier dà un prodotto la cui composizione centesimale si accosta a quella della formula

$C_{14}H_4O_7$ $\quad C = 59,2 \quad H = 1.4 \quad O = 39,4$;

4°) che l'ossido grafitico segue, per la composizione bruta, le stesse oscillazioni dell'acido grafitico, variando la percentuale dei componenti tra le formule

			$C_{13}H_4O_7$	e	$C_{14}H_4O_7$:
il	C	oscilla fra	57,2	e	58,86
l'	H	"	1,65		1,44
l'	O	"	41,16		39,7

Da ciò la conclusione che l'acido grafitico e l'ossido grafitico *sono quantitativamente simili*, fatto che nessuno aveva finora stabilito.

Decomposizione pirogenica dei prodotti grafitici.

Stabilita la composizione dei prodotti grafitici, ho cercato di seguire quantitativamente l'andamento della reazione pirogenica separando e dosando i singoli prodotti della decomposizione, ma m'imbattei subito nella difficoltà già accennata. Nel primo periodo di riscaldamento, cioè ad una temperatura inferiore a 300°, la scissione avviene in CO, CO_2 e H_2O, e rimane un residuo nero cristallino che non deflagra se riscaldato bruscamente e che contiene ancora idrogeno ed ossigeno, l'acido od ossido pirografitico di Brodie e Berthelot; ma nel secondo periodo, a temperatura di circa 1000°, i prodotti della reazione pirogenica si complicano, trovandosi fra essi l'idrogeno e piccole quantità variabili di metano, generati entrambi da reazioni secondarie. Inoltre le quantità rispettive di CO e CO_2 vengono modificate appunto da queste reazioni secondarie. Il quadro della decomposizione pirogenica di essi prodotti non può perciò essere completato nel suo percorso. Se la prima fase del riscaldamento può essere rap-

presentata con un'equazione simile a quelle escogitate da Brodie e Berthelot [1], comprendente nel secondo membro un residuo ossigenato ed idrogenato, avendo i dati sperimentali sufficienti, nel secondo periodo mancano questi dati, perchè, ripeto, le quantità rispettive di CO e CO_2 vengono influenzate dalle reazioni secondarie che intercedono fra $H_2O \cdot CO \cdot CO_2$ e carbonio all'elevata temperatura.

[1] Seguendo l'esempio di Brodie e Berthelot, si può calcolare un'equazione analoga rappresentativa del 1° periodo della decomposizione pirogenica dei prodotti grafitici.

La composizione media dell'acido grafitico giallo, preparato secondo Brodie, corrisponde alla formula $C_{13}H_4O_7$

	calc.	C = 57,3	H = 1,5	O = 41,2
media delle tre analisi	trov.	» 57,2	» 1,6	» 41,1.

Le quantità di CO, CO_2, H_2O e la composizione del residuo nero cristallino (acido pirografitico) permettono di calcolare l'equazione:

A) $$12\,C_{13}H_4O_7 \longrightarrow 5\,CO + 20\,CO_2 + 21\,H_2O + \underset{\text{residuo nero (acido pirografitico)}}{C_{131}H_6O_{18}}$$

Secondo essa, si calcola la percentuale

		CO = 4,3	CO_2 = 26.7	H_2O = 11,6
mentre l'esperienza ci dà	I	CO = 4,5	CO_2 = 26,3	H_2O = 9,8
	II	» 4,5	» 26,3	» 10,0
	III	» 3,9	» 24,4	» 11,0

e la composizione del residuo nero (acido pirografitico)

calc.		C = 81,9	H = 0,6	O = 17,5
trov.	I	» 82,3	» 0,7	» 17,0
	II	» 82,1	» 0,7	» 17,2
	III	» 82,4	» 0,8	» 16,8.

La composizione media dell'acido grafitico, preparato secondo lo Staudenmaier, corrisponde alla formula

$C_{14}H_4O_7$:	calc.	C = 59,2	H = 1,4	O = 39,4
media delle 8 analisi (4-11)	trov.	» 59,2	» 1,4	» 39,4.

La composizione media dell'ossido grafitico si avvicina parimenti a quella espressa dalla stessa formula, come lo indica la media delle analisi fatte:

C = 58,1   H = 1,6   O = 40,3.

Le quantità di CO, CO_2, H_2O e la composizione del residuo nero cristallino permettono di calcolare l'equazione:

B) $$5\,C_{14}H_4O_7 \longrightarrow 2\,CO + 8\,CO_2 + 8\,H_2O + \underset{\text{residuo nero (acido pirografitico)}}{C_{60}H_4O_9},$$

secondo la quale si calcola la percentuale

calc.	trov. in media per ac. grafitico	per ossido grafitico
CO = 3,9	3,9	3,8
CO_2 = 24,8	24,6	25,5
H_2O = 10,1	9,7	11,6.

La composizione del residuo nero

$C_{60}H_4O_9$: calc.	C = 82,9	media 82,7	media 83,7
	H = 0,5	» 0,5	» 0,5
	O = 16,7	» 16,8	» 15,7.

Seguono le due tabelle comprendenti le percentuali dalle quali si dedussero le medie fornite dai dati sperimentali compresi nelle tabelle I e II.

Perciò dalla reazione pirogenica posso soltanto stabilire il fatto che l'azione del calore, esercitata nel vuoto, agisce sui prodotti grafitici svolgendo *tutto* l' idrogeno ed ossigeno che contengono sotto forma di H_2O . CO . CO_2 e lasciando come residuo grafite che contiene in media circa 99 % di carbonio: fatto che conferma l' identità di composizione di questi prodotti che differenziano in alcune proprietà fisiche, specialmente nel colore verde o giallo.

Le modalità analitiche usate sono le stesse prima descritte. Da una quantità pesata di prodotto grafitico, disseccato nel vuoto, si raccoglievano i gas sviluppati a temperatura inferiore a 300° e si determinavano le quantità rispettive di CO e CO_2 contenute. Poi si portava a 1000° la temperatura del forno; si raccoglieva il gas svi-

TABELLA A.

Acido Grafitico.

	CO %	CO^2 %	H^2O %	COMPOSIZIONE RESIDUO		
				C	H	O
4	4.4	24.02	8.8	81.6	0.52	17.88
5	4.5	24.1	9.2	82.1	0.72	17.18
7	3.8	25.2	10.0	83.07	0.53	16.40
8	3.6	25.4	9.2	82.8	0.54	16.66
9	4.2	23.2	9.7	82.4	0.62	17.0
10	3.3	24.2	10.4	82.6	0.4	17.0
11	4 1	24.7	9.8	82.1	0.55	17.35
MEDIA	3.9	24.6	9 7	82.7	0.5	16.8

Ossido Grafitico.

1	3.6	24.4	12.3	84.4	0.42	15.2
2	3.4	24.8	12.5	84.2	0.31	15.5
3	4.1	25.5	11.04	82.1	0.55	17.35
4	3.9	25.4	10.3	83.3	0.5	16.2
5	4·01	26.8	12.1	84.5	0.52	14.98
6	3.9	27.1	12.06	84.5	0.57	14.93
7	3.7	27.5	11.7	84.19	0.52	15.29
8	3.6	24.4	12.4	84.4	0.47	15.13
9	3.6	24.6	12.3	84.4	0.50	15.1
10	4.1	25.5	10.4	82.9	0.63	16.47
11	4.0	24.5	11.4	82.9	0.54	16.56
MEDIA	3.8	25.5	11.7	83.7	0.5	15.7

luppato, sul quale si determinava il CO e CO_2, trascurando di analizzare la miscela di idrogeno con tracce di metano ed eventualmente di azoto, dovute alla infiltrazione di tracce di aria nel tubo di porcellana, mantenuto parecchie ore alla temperatura elevata nel vuoto. Indi il residuo veniva bruciato in corrente di ossigeno, ed il peso del CO_2 prodottosi serviva a calcolare la percentuale del carbonio.

Riassumo nella tabella III i dati analitici che servirono a stabilire il fatto sopraenunciato.

TABELLA III.

Prospetto analitico della decomposizione pirogenica dei prodotti grafitici.

Acido grafitico.

GRAFITE	Peso sostanza gr.	Ceneri gr.	I Periodo riscald. sotto +300°				II Periodo riscald. circa 1000°					CO_2 residuo gr.	C %
			CO_2 a 0°.76 cm.³	CO_2 gr.	CO a 0°.76 cm.³	CO gr.	CO_2 cm³	CO_2 gr.	CO cm.³	CO gr.	Residuo gr.		
Ceylan. 1	0.462	0.0098	53.4	0.1049	11.2	0.014	24.8	0.0487	44.5	0.0556	0.2187	0.7593	99.1
Pinerolo 2	0.3558	0.0011	43.1	0.084	13	0.0162	11.6	0.0228	38.1	0.0476	0.156	0.5651	99.4
Ossido grafitico.													
Pinerolo 3	0.3041	0.0004	37.1	0.0729	9.4	0.0118	8.5	0.0167	30.2	0.0378	0.133	0.4828	99.2
» 4	0.3657	0.0016	46.2	0.0908	12.9	0.0161	20.5	0.0403	20.6	0.0258	0.1611	0.5725	96.9*
» 5	0.391	0.0003	48	0.0943	9.3	0.0116	15.1	0.0297	43.4	0.0543	0.183	0.657	98.2
» 6	0 3357	0.0006	41.7	0.0819	10	0.0125	9.9	0.0194	27.6	0.0345	0.1485	0.5384	98.8

* Riscaldato nel II periodo solo a 800°.

Preparazione di prodotti grafitici dalla grafite ripristinata da essi.

Le proprietà fisiche differenti dei prodotti grafitici (specialmente la differenza di colore giallo o verde per quelli provenienti da grafiti naturali, mentre sono ocra o nero per quelli provenienti dalla grafite artificiale Acheson) mi hanno indotto ad esaminare i prodotti preparati con la grafite proveniente dalla trasformazione pirogenica dei prodotti grafitici preparati con le grafiti naturali di Ceylan e di Pinerolo.

Perciò ho preparato una certa quantità di questa grafite, che per l'origine chiamerò *pirogenica*, decomponendo dapprima i prodotti grafitici sospesi in un liquido neutro il cui punto di ebollizione fosse a temperatura vicina a quella alla quale l'esperienza m'aveva insegnato avvenire la prima fase della decomposizione pirogenica, cioè compreso fra 180° e 200°, evitando così l'inconveniente della deflagrazione. Ho

scelto il solfato dimetilico perchè il suo punto di ebollizione, 188°, si prestava allo scopo ed inoltre poteva, dato il suo potere eterificante, introdurre l'alchile nella molecola dei prodotti grafitici e darmi qualche nuovo indizio sulla loro funzione chimica ritenuta sinora acida.

Si sottopose l'acido grafitico (preparato secondo Brodie e Staudenmaier) e l'ossido grafitico, sospesi in solfato dimetilico, all'azione del calore. Dapprima, a 130°, principia un leggero sviluppo gassoso; a 150° la massa solida gonfia ed annerisce e lo sviluppo s'intensifica; a 155° è talmente vivace da dare l'apparenza di una viva ebollizione. Cessato lo sviluppo gassoso, si innalza gradatamente la temperatura e si fa bollire a ricadere per 5-6 ore per completare la reazione. Si raccoglie la massa nera carboniosa cristallina su filtro, dopo raffreddamento; ed il residuo si lava ripetutamente con alcool, indi con acqua, e si dissecca nella stufa a 100°. L'etere dimetilico non prende parte alla reazione, ma agisce soltanto come moderatore di temperatura; però si colora leggermente in rosso, perchè l'acqua che si separa dal prodotto grafitico mette in libertà un po' di acido solforico o di solfato acido di metile, che a temperatura elevata carbonizza un po' di etere (donde la colorazione osservata); però, distillato, bolle alla temperatura di 188°, e non lascia residuo apprezzabile.

Per dare una idea del procedere della decomposizione dei prodotti grafitici in queste condizioni, citerò due saggi quantitativi.

I. Gr. 0,9799 di acido grafitico preparato da grafite Ceylan col processo Brodie, riscaldati con 30 cm^3 di solfato dimetilico per 7 ore a ricadere, lasciarono residuo nero cristallino, disseccato a 100°, gr. 0,6106. Questo residuo non deflagra. La parte volatile $CO + CO_2 + H_2O$ costituisce il 37,7 % mentre la quantità teorica, secondo l'equazione A nella nota a pag. 272, richiederebbe 42,8 %.

II. Gr. 0,8795 di ossido grafitico (grafite di Pinerolo), preparato col processo Staudenmaier, lasciarono, nelle stesse condizioni, gr. 0,5496 di residuo nero cristallino che non deflagra. La parte volatile, $CO + CO_2 + H_2O$, costituisce il 37 %, mentre la quantità teorica, secondo l'equazione B della nota a pag. 272, richiederebbe 38,8 %.

Da queste esperienze, mentre viene confermata la simile composizione dell'acido ed ossido grafitico, si deduce che la prima fase della decomposizione pirogenica non è stata completata.

Il residuo nero cristallino si sottopose al riscaldamento nel forno Heraeus a 1000°, mantenendolo nel vuoto sino a che cessò lo sviluppo di gas, segnato dalla costanza del manometro della pompa a mercurio.

La grafite così riottenuta conteneva 99,33 % di carbonio.

Gr. 0,2666 lasciarono gr. 0,0022 di ceneri e dettero gr. 0,963 di CO_2.

Con questa grafite rigenerata, *pirogenica*, si prepararono i prodotti grafitici coi due processi Brodie e Staudenmaier.

Col processo Brodie si ottenne un prodotto di color *giallo-solfo*, che col lavaggio diventò color *ocra* e che, disseccato, era *nero* e deflagrava violentemente.

Col processo Staudenmaier si ottenne l'ossido grafitico *verde*, che lavato e disseccato, diventò *nero* e deflagrava violentemente. Completando l'ossidazione con permanganato potassico, l'acido grafitico, dapprima depositato per azione del peridrolo.

era giallo-solfo; coi lavacri con acqua acidulata con acido nitrico, diventò color *ocra*, e col disseccamento si ebbe una polvere *nera* che deflagrava violentemente.

Queste esperienze, che potranno forse avere un interesse per spiegare la formazione delle diverse varietà di grafiti naturali, dimostrano che queste, sottoposte ad elevata temperatura, dànno prodotti grafitici, non differenzianti per la composizione, ma che diversificano per la proprietà fisica del colore.

Riassumo nella presente tabella IV i risultati analitici.

Tabella IV.

Composizione prodotti grafitici della grafite pirogenica.

Acido grafitico	N.	Peso sostanza disseccata gr.	Ceneri gr.	Temp. forno Heraeus	Volume CO_2 a 0°.76 cm.3	Peso CO_2 gr.	Volume CO a 0°.76 cm3	Corrisp. peso CO_2 gr.	Peso residuo dedotte ceneri gr.	Peso H_2O per diff. gr.	Peso CO_2 residuo gr.	Peso H_2O residuo gr.	CO_2 totale gr.	H_2O totale gr.	Percentuale C	Percentuale H	Percentuale O
preparato secondo Brodie	1	0.2688	0.002	190°-200°	34.9	0.0686	5.52	0.0108	0.1717	0.0216	0.4831	0.010	0.5625	0.0316	57.5	1.3	41.2
	2	0.2095	0.0055	" "	29.4	0.0578	6.9	0.0135	0.117	0.0261	0.3647	0.0096	0.436	0.0307	57.7	1.6	40.7
preparato secondo Staudenmaier	1	0.3456	0.0018	" "	36.2	0.0712	9.3	0.0182	0.2135	0.0346	0.6342	0.0025	0.7236	0.0371	57.5	1.2	41.3
Ossido grafitico	1	0.4097	0.001	" "	52.1	0.1024	13.7	0.0269	0.2405	0.0497	0.7128	0.014	0.8421	0.0637	56.2	1.7	42.1

Decomposizione dell'acido grafitico con deflagrazione.

Nelle molte esperienze eseguite sul riscaldamento dell'acido grafitico, specialmente nei primordî dello studio quando riscaldavo nella stufa tubolare col vapore di liquidi appropriati, mi successero ripetute deflagrazioni con perdita completa dell'analisi; ma in pochi casi potei raccogliere i prodotti gassosi della deflagrazione.

Secondo le esperienze accennate di Berthelot e Petit, la deflagrazione dell'acido grafitico proveniente dalla grafite della ghisa e dalla grafite naturale avviene con due modalità assai prossime, che gli autori francesi rappresentarono con le due equazioni citate nell'introduzione a pag. 256-257. Però giova subito notare che l'attendibilità di esse è resa molto dubbia, perchè la deflagrazione avviene con elevazione tale di temperatura che l'acqua reagisce sul carbonio e genera gas d'acqua, come nel secondo periodo delle mie esperienze quando riscaldo la sostanza sul forno Heraeus a temperatura di 1000° e forse

il gas, ritenuto ossido di carbonio dai due chimici francesi, perchè non assorbibile dall'idrato potassico, poteva contenere un po' di idrogeno.

Ho utilizzato le cinque esperienze seguenti, dove nella deflagraz one potei raccogliere i gas risultanti, dovute tutte a decomposizione di acido grafitico; nelle esplosioni dell'ossido grafitico l'analisi andò perduta completamente.

I. Gr. 0,2934 acido grafitico preparato secondo Brodie dalla grafite Acheson

CO_2 cm³ 36,8 a 0° e 76_{cm} = gr. 0,0723 **24,5** %; CO cm³ 16,9 = gr. 0,0211 **7,2** %.

Rimasero cm³ 0,5 di idrogeno bruciante con fiamma pallida.

II. Gr. 0,2629 acido grafitico preparato secondo Standenmaier dalla grafite Ceylan:

CO_2 cm³ 14,9 a 0° e 76_{cm} = gr. 0,0293 **11,1** %; CO cm³ 6 = gr. 0,0075 **2,8** %.

Rimasero cm³ 1,6 di idrogeno.

III. Gr. 0,3099 stesso acido Standenmaier dalla grafite di Ceylan:

CO_2 cm³ 32,7 a 0° e 76_{cm} = gr. 0,0643 **20,7** %; CO cm³ 18,6 = gr. 0,0233 **7,2** %.

Rimasero cm³ 0,7 di idrogeno.

IV. Gr. 0,360 acido grafitico preparato secondo Standenmaier dalla grafite di Pinerolo:

CO_2 cm³ 48,3 a 0° e 76_{cm} = gr. 0,0949 **26,3** %; CO cm³ 35,3 = gr. 0,0441 **12,2** %.

Rimasero cm³ 2,9 di idrogeno.

V. Gr. 0,345 acido grafitico preparato secondo Standenmaier dalla grafite Ceylan:

CO_2 cm³ 27,9 a 0° e 76_{cm} = gr. 0,0548 **15,9** %; CO cm³ 43,9 = gr. 0,0549 **15,9** %.

Rimasero cm³ 1,3 di idrogeno.

Queste determinazioni servono solo a dimostrare che nella deflagrazione dell'acido grafitico le quantità di CO_2 e CO che si producono sono variabilissime e non regolate da un'equazione come pretesero Berthelot e Petit; e fra i prodotti gassosi si riscontra sempre l'idrogeno, che conferma la mia critica.

Azione della soluzione cloridrica di cloruro stannoso sui prodotti grafitici.

Ho cercato di studiare la reazione fra il cloruro stannoso ed i prodotti grafitici in senso quantitativo, perchè speravo di avere con tale riducente un mezzo relativamente blando per ritornare da essi alla grafite originaria.

Le esperienze qualitative di Staudenmaier hanno dimostrato che con tale reagente l'acido grafitico si trasforma in un prodotto nero brillante, che egli ritiene essere il *vero acido pirografitico*, differente da quello di Brodie e di Berthelot e che ha tutte le proprietà, secondo me, della grafite.

Espongo dapprima i risultati sperimentali ottenuti coi prodotti preparati con la grafite di Pinerolo.

I. Gr. 0,475 ossido grafitico verde vennero riscaldati a ricadere per 7 ore con 20 cm^3 di soluzione cloridrica di cloruro stannoso contenente, per 1 cm^3, gr. 0,16 $SnCl_2$. Dopo raffreddamento si raccolse il prodotto nero lucente su filtro, previo lavaggio a caldo per decantazione con acido cloridrico diluito, sino a che il solfidrico non accennasse più presenza di stagno nel filtrato. Il prodotto nero residuo, insolubile, disseccato a 100° e nel vuoto su acido solforico sino a costanza di peso, è di gr. 0,3905, non deflagra, e, riscaldato nel forno Heraeus a + 300°, svolse

cm^3 1,7 di CO_2 = gr. 0,0033, e cm^3 0,6 di CO = gr. 0,0007.

Nel secondo periodo di riscaldamento, a 1000°, svolse

cm^3 10,3 di CO_2 = gr. 0,020, e cm^3 3,1 CO = gr. 0,0039

e rimase un piccolo residuo di idrogeno inassorbito (circa cm^3 1).

Il residuo, calcinato nel vuoto, pesa gr. 0,2725, e bruciato in corrente di ossigeno dà gr. 0,983 di CO_2 e lascia gr. 0,019 di SnO_2 rosso corrispondente a gr. 0,0169 di ossido stannoso. Carbonio della grafite *104,8* %.

II. Gr. 0,5927 acido grafitico giallo vennero riscaldati a ricadere per 14 ore con 20 cm^3 della stessa soluzione cloridrica di cloruro stannoso. Il residuo nero grafitico venne lavato con acido cloridrico diluito: disseccato a 100° e nel vuoto, pesa gr. 0,6107 e non deflagra. Riscaldato nel forno Heraeus a + 300°, dette:

cm^3 2,6 di CO_2 = gr. 0,0051, e tracce appena di CO.

Nel secondo periodo di riscaldamento, a 1000°, dette

cm^3 33,8 di CO_2 = gr. 0,0664, e cm^3 19,9 di CO = gr. 0,0249

e rimase un piccolo residuo di idrogeno (circa cm^3 1,3).

Il residuo, gr. 0,3008 bruciato in corrente di ossigeno, dette gr. 1,0709 di CO_2 e lasciò gr. 0.0126 di ossido stannico, pari a gr. 0,0112 di ossido stannoso.

Carbonio della grafite *100,8* %.

Se si cerca di stabilire l'andamento della reazione dai dati suesposti, ci troviamo davanti a più difficoltà dovute alle reazioni concomitanti.

La prima azione è pari a quella del calore moderato, cioè eliminazione di CO e CO_2 (che $SnCl_2$ riduce a CO) ma la grafite, o l'acido pirografitico che si forma, assorbe acqua, ed il peso del prodotto nero, che ha perduto la proprietà di deflagrare, nel caso dell'acido grafitico è superiore a quello della sostanza primitiva, e nell'ossido differenzia di poco da essa. Però in tutti e due i casi questi supposti *piroprodotti*, riscaldati nel forno Heraeus a + 300°, svolgono una piccola quantità CO + CO_2:

ossido	grafitico	circa	0,7 %
acido	"	"	0,8 "

Perciò sono autorizzato a supporre logicamente, che nella prima fase la soluzione cloridrica di cloruro stannoso agisca nello stesso modo del calore moderato 180-190°, e che l'acqua ed il prodotto stannoso, assorbiti dal residuo nero pirogra-

fitico o grafite, mascherino la perdita di peso dovuta all'eliminazione contemporanea di CO e CO_2.

I due prodotti pirografitici, riscaldati a 1000°, emettono:

l'ossido grafitico:	CO_2,	4,2 % ;	CO,	0,8 %	con piccole	quantità	di idrogeno
l'acido	»	» 11,2 »	»	4,2 »	»	»	»

e lasciano come residuo grafite che contiene notevoli quantità di cenere stannica:

ossido grafitico	4	%	ceneri
acido »	2,1	»	»

che altera notevolmente la percentuale di carbonio della grafite residua.

ossido grafitico	C	104,8 %
acido »	»	100,8 »

In conclusione, l'azione della soluzione cloridrica di cloruro stannoso sui prodotti grafitici è parallela a quella del calore. A moderata temperatura, eliminazione della più gran parte dell'ossigeno di questi prodotti sotto forma di CO, CO_2 ed H_2O; poi stasi; ed infine, coll'elevata temperatura, grafite.

Azione della soluzione acquosa di barite sui prodotti grafitici.

Risultati più concludenti ed importanti ottenni colla soluzione d' idrato baritico. Ho dapprima ripetuto le esperienze di Berthelot e Petit (1), mettendomi nelle stesse condizioni da loro descritte.

I. Gr. 0,8945 acido grafitico, preparato secondo Brodie dalla grafite Ceylan, si misero a contatto, alla temperatura ordinaria, con un eccesso di soluzione titolata di barite (si adoperarono 250 cm^3 di acqua baritica, di cui 1 cm^3 conteneva disciolti gr. 0,02623 $Ba(OH)_2$, in tutto, gr. 6,58 barite). Dopo 24 ore di contatto, di cui 8 ore di agitazione, l'acido aveva assorbito gr. 0,6304 barite, ossia 70,4 %.

Il prodotto risultante aveva una colorazione ocra-scuro; e si vedevano disseminate nella massa delle particelle bianche di carbonato baritico.

Si filtrò, impedendo il più possibile il contatto dell'aria; e nella soluzione alcalina incolora si fece gorgogliare a caldo un eccesso di anidride carbonica. Il filtrato dal carbonato baritico evaporato a secco non lasciò residuo sensibile, segno che non s'era prodotto formiato di bario. Il prodotto, ocra-nero, si lavò con acido cloridrico diluito, sino ad eliminazione di sale di bario; indi si disseccò a 100-110°. Non deflagra, e, riscaldato nel vuoto a 1000°, svolge la miscela di CO^2. CO. H_2 e rimane come residuo grafite che contiene 100 % di carbonio.

II. Gr. 1,2664 acido grafitico giallo dalla grafite di Pinerolo assorbirono in quattro giorni, a freddo, senza agitazione, gr. 0,7022 barite - 55,4 %; ed il residuo nero, lavato con acido cloridrico sino ad eliminazione di sali baritici solubili, disseccato a 100-110°, non deflagra, e, riscaldato nel vuoto a 1000°, svolge la miscela di CO, CO_2 e H_2, e rimane grafite che contiene 99,6 % di carbonio.

(1) loc. cit.

III. Una terza esperienza, variando le condizioni di temperatura, venne eseguita con ossido grafitico preparato con la grafite di Pinerolo.

Gr. 0,5919 di ossido grafitico, agitati per 8 ore con un eccesso di barite — 200 cm^3 della stessa soluzione — e riscaldati per un'ora a bagno-maria, assorbirono gr. 0,677 di $Ba(OH)_2$, cioè 114,3 %. Il residuo nero, lavato con acido cloridrico, disseccato a 100°-110° e riscaldato nel vuoto a 1000°, lascia grafite contenente 100,2 % di carbonio.

La divergenza fra le mie esperienze e quelle dei chimici che mi precedettero nello studio dell'acido grafitico, sta nel fatto che essi ritennero sempre che la *barite salificasse l'acido grafitico*; invece, siccome per mezzo dell'acido cloridrico io rimetto in libertà anidride carbonica dopo l'azione (CO_2 che posso, come si vedrà appresso, dosare), ciò mi dimostra che *la barite non fa altro che assorbire, dal prodotto grafitico, anidride carbonica, trasformandosi, lentamente a freddo, più rapidamente a caldo, in carbonato*. Così l'osservazione qualitativa dello Staudenmaier, accennata nell'introduzione, cioè l'annerimento dell'acido grafitico a contatto degli alcali ed il non ripristinarsi della colorazione primitiva con l'acidificazione, riceve una razionale ed esauriente spiegazione, perchè quello che si ha dopo acidificazione non è più l'acido grafitico primitivo.

Cercai perciò di esaurire l'azione assorbente dell'idrato baritico e per comodità d'esperienza, invece di dosare la quantità esaurita di barite salificata a carbonato con l'ebollizione da una pesata quantità di prodotto grafitico, preferii determinare la quantità di anidride carbonica assorbita dalla barite in eccesso da questa quantità di prodotto grafitico e l'esperienza veniva condotta nel modo seguente. Una quantità pesata di prodotto grafitico si fa bollire a ricadere con un eccesso di soluzione baritica in pallone di vetro poco attaccabile (Jena) ed impedendo l'accesso dell'anidride carbonica dell'aria con un tubo di calce-sodata annesso al refrigerante. Dopo l'ebollizione e raffreddamento, s'innesta rapidamente il pallone nel solito apparecchio a dosamento dell'anidride carbonica, che si fa svolgere mediante un leggero eccesso di acido cloridrico sulla massa baritica e si raccoglie nelle bolle a potassa pesate. Il residuo nero grafitoide, lavato fino ad eliminazione di sale baritico solubile, conteneva (oltre carbonio ed eventualmente ossigeno) acqua, piccole quantità di silice e di silicati baritici provenienti dall'attacco del vetro, e bisogna notare che questa parte minerale, variabile con la durata dell'ebollizione, non era in piccola quantità, perchè la barite ha un potere disgregante assai pronunciato. Di questo residuo grafitoide si fece la combustione per constatare se tutto l'ossigeno del prodotto grafitico si era eliminato sotto forma di anidride carbonica e di acqua o se ne rimaneva ancora sotto altra forma, presumibilmente di ossido di carbonio, come la decomposizione pirogenica faceva prevedere.

Riferisco i dati sperimentali, riserbandone l'ulteriore discussione nel capitolo delle conclusioni. Le esperienze vennero fatte sui prodotti grafitici della grafite di Pinerolo.

I. Gr. 0,5433 di acido grafitico, preparati secondo Staudenmaier, vennero addizionati di cm^3 50 acqua di barite contenente in soluzione gr. 1,5 di idrato, e lasciati in contatto per circa 190 ore, di cui 50 alla temperatura di ebollizione. La quantità di CO_2 ricavata fu di gr. 0,1511, ossia *27,8* %. Il residuo nero, lavato e disseccato

a 100° poi nel vuoto sull'acido solforico, pesa gr. 0,396 e non deflagra. Gr. 0,3499 di questo residuo dettero gr. 0,8528 CO^2 e gr. 0.0311 H_2O e lasciarono gr. 0,0651 di ceneri silicee contenenti ancora bario. Dedotte le ceneri, la composizione del residuo risulta:

Carbonio 81,6 % Acqua 10,9 % Ossigeno p. differenza 7,5 %.

II. Gr. 0,5689 di ossido grafitico si fecero reagire con acqua di barite nelle stesse condizioni di concentrazione, soltanto il contatto delle sostanze reagenti fu solo di 4 giorni, di cui 27 ore all'ebollizione. La quantità di CO_2 ricavata fu di gr, 0,1536, ossia *27,0* %. Il residuo nero, non deflagrante, pesa gr. 0,4428, di cui gr. 0 2577 dettero alla combustione, gr. 0,621 CO_2 e gr. 0,0172 H_2O e lasciarono gr. 0,0529 di ceneri. Dedotte le ceneri, la composizione del residuo risulta:

Carbonio 82,6 % Acqua 8,3 % Ossigeno p. differenza 9,1 %.

III. Una terza esperienza si fece per dimostrare che nell'assorbimento dell'anidride carbonica non si ha contemporaneo sviluppo di ossido di carbonio, producendo l'ebollizione con la barite in una corrente di aria depurata dall'anidride carbonica e costringendo la miscela gassosa proveniente dal liquido in ebollizione, dopo averla disseccata per passaggio su lunga colonna di cloruro di calcio anidro, a passare per una canna di 50 cm. contenente dell'ossido ramico arroventato, e portante all'estremità anteriore un tubo a cloruro di calcio anidro seguìto da due tubetti a calce-sodica pesati. Se nella reazione si fosse sviluppato ossido di carbonio, il passaggio sull'ossido ramico rovente l'avrebbe convertito in CO_2 e perciò sarebbe stato assorbito dai tubi a calce-sodica, con aumento corrispondente del loro peso. L'esperienza dimostrò che non si svolge CO, perchè i due tubi a calce-sodata non variano sensibilmente di peso.

Gr. 0,340 di ossido grafitico mescolati con 100 cm^3 di barite contenenti in soluzione gr. 3,1 d'idrato e vennero lasciati in contatto 4 giorni con ebollizione viva durante 36 ore. La quantità di CO_2 ricavata fu di gr. 0,094, ossia *27,6* %. Il residuo nero, non deflagrante, fu di gr. 0,4489 di cui gr. 0,4084 dettero alla combustione gr. 0,5666 CO_2 — gr. 0,020 H_2O e lasciarono gr. 0,2189 ceneri siliceobaritiche. Dedotte le ceneri, la composizione del residuo risulta:

Carbonio 81.5 % Acqua 10,5 % Ossigeno p. differenza 8,0 %

Da queste esperienze sono autorizzato a concludere che l'idrato baritico assorbe dai prodotti grafitici circa 2 pesi molecolari di anidride carbonica.

La composizione dei prodotti grafitici si raggira, come si è visto a pag. 271, intorno alle formole $C_{13}H_4O_7$ e $C_{14}H_4O_7$. Per la prima si calcola 32,3 %, per la seconda 30,9 % di CO_2, mentre l'esperienza dette in media 27,5 %.

Le esperienze poi del Berthelot e Petit, completate da quelle sopradescritte, dimostrano che l'assorbimento dell'anidride carbonica da parte della barite è graduale: a freddo ne viene assorbita circa 1 molecola (54 % BaO); coll'ebollizione la quantità si avvicina a 2 molecole (108 % BaO; 120,6 $Ba(OH)_2$), senza mai, almeno nei limiti di tempo e di concentrazione sperimentati, raggiungere l'assorbimento completo, fatto sul quale ho già richiamato l'attenzione nell'introduzione, riferendo sulle esperienze dei due chimici francesi.

Azione della soluzione idro-alcoolica d' idrossilamina sui prodotti grafitici.

In tutte le esperienze finora descritte, sui prodotti grafitici, mi trovai sempre davanti ad un ostacolo; cioè, qualunque fosse il reagente adoperato, mai ho potuto ottenere una reazione netta di decomposizione che mi portasse direttamente, ed in modo blando, alla grafite di partenza. Il calore moderato fa svolgere dai prodotti grafitici $CO_2 . CO . H_2O$, e rimane un residuo contenente idrogeno ed ossigeno e non nei rapporti dell'acqua, ma con un'eccesso di ossigeno; e da questo residuo, a temperatura più elevata, si svolge ancora CO, CO_2 e H_2 (quest'ultimo per reazione secondaria), e rimane grafite. Ma questo passaggio diretto non l'ho potuto seguire quantitativamente nell'ultima fase, appunto per la reazione secondaria che intercede tra l'acqua od il carbonio. Parimenti si comportano il cloruro stannoso e l' idrato baritico. Il reagente che mi permise di passare nettamente ed in modo blando dai prodotti grafitici alla grafite od almeno a grafite contenente soltanto acqua, fu l' idrossilamina. All'impiego di questo reagente fui condotto dall'osservazione che la fenilidrazina reagisce sui prodotti grafitici, riscaldando leggermente, con grande energia manifestata da un forte svolgimento di gas e da potente sviluppo di calore che porta alla ebollizione il reagente e lo resinifica in parte, trasformandolo in catrame che non può più essere eliminato coi solventi. L' idrato d'idrazina si presterebbe forse anche a tale reazione ed eviterebbe l' inconveniente del catrame; ma, data la facilità colla quale all'ebollizione intacca il vetro, e non avendo a disposizione recipienti di argento o di platino adatti per l'esperimento, non l' ho tentato. Ricorsi perciò a studiare l'azione della soluzione idroalcoolica di idrossilamina, la quale reagisce, lentamente a freddo, rapidamente a caldo, con grande sviluppo di gas, sui prodotti grafitici. Colle quantità stechiometriche di sodio sciolto in alcool e di cloridrato d' idrossilamina sciolto nella sufficiente quantità di acqua tiepida, si prepara la soluzione idroalcoolica di idrossilamina che si fa reagire sui composti grafitici.

I. Gr. 0,955 di acido grafitico secco, preparato con la grafite di Pinerolo, secondo Staudenmaier, vennero messi a contatto con una soluzione idroalcoolica di idrossilamina, contenente gr. 5,4 di base, preparata sciogliendo gr. 3,78 di sodio in gr. 40 di alcool assoluto e gr. 11,42 di cloridrato d' idrossilamina disciolti nel minimo possibile di acqua tiepida, e filtrando dal cloruro sodico precipitatosi. Anche a freddo s' inizia la reazione che viene manifestata da un debole sviluppo gassoso e dall'annerimento del prodotto grafitico. Dopo 24 ore di contatto alla temperatura ambiente, il prodotto è diventato completamente nero. Si riscaldò a ricadere per 9 ore con refrigerante munito di tubo a calce-sodata; indi si lasciò raffreddare e, dopo 48 ore complessive di contatto, si filtrò e si lavò con acqua fino ad eliminazione di cloruri solubili; indi si disseccò a 100°, e nel vuoto sull'acido solforico sino a costanza di peso.

Il residuo nero grafitoide non deflagra e pesa gr. 0,6332.

Gr. 0,2017 di questo residuo, bruciati, dettero gr. 0,660 CO_2, gr. 0,019 H_2O e lasciarono gr. 0,004 di ceneri alcaline contenenti cloruri.

La composizione del residuo nero grafitoide, dedotte le ceneri, si calcola:

Carbonio 91,1 % Acqua 9,6 %.

È quindi grafite che tiene assorbito circa il 10 °/₀ di acqua.

II. Si preparò con lo stesso acido grafitico una certa quantità di questa grafite contenente acqua adsorbita, per ulteriori studî che verranno proseguiti, e si constatò che nel nuovo campione le proporzioni tra adsorbente e adsorbito erano un po' variate.

Gr. 0,2501 di sostanza disseccata a 100°, e poi nel vuoto sull'acido solforico, dettero gr. 0,7951 CO_2 e gr. 0,0282 H_2O e lasciarono gr. 0,004 di ceneri.

Perciò si calcola la composizione del medesimo:

Carbonio 88,1 °/₀ Acqua 11,4 .

Dai dati della I esperienza si calcola che la perdita di peso dovuta a gas $CO + CO_2$ è, per gr. 0,955 di acido grafitico. gr. 0,3939, ossia *41,2* °/₀. Ora si è visto, nell'azione della barite sui prodotti grafitici, che questa assorbiva circa 2 pesi molecolari di anidride carbonica; paragonando la composizione di questi prodotti con la cifra totale dei prodotti gassosi CO e CO_2 si ha indirettamente la quantità di CO che viene messa in libertà od assorbita dai reattivi.

$$C_{14}H_4O_7 \begin{cases} \nearrow 2\,CO_2 = 30{,}9 \\ \searrow CO \;\;\; = 9{,}8 \end{cases} \qquad C_{13}H_4O_7 \begin{cases} \nearrow 2\,CO_2 = 32{,}3 \\ \searrow CO \;\;\; = 10{,}3 \end{cases}$$

Somma . . . 40,7 Somma . . . 42,6

Trovato come somma 41,2

CO °/₀ per differenza . . . . . 10,3 - 8,9

III. Gr. 0,4958 di ossido grafitico verde della grafite di Pinerolo vennero messi a contatto con una soluzione idroalcoolica di idrossilamina contenente gr. 5,7 di base e preparata sciogliendo gr. 4 di sodio in gr. 40 di alcool assoluto, e gr. 12,1 di cloridrato disciolto nel minimo possibile di acqua tiepida e filtrando dal cloruro di sodio precipitatosi. Anche per l'ossido la reazione s'inizia a freddo, manifestata dal lento sviluppo gassoso e dall'annerimento in questo caso meno sensibile. Dopo 24 ore di contatto alla temperatura ambiente, il prodotto è diventato nero. Si riscaldò per 9 ore all'ebollizione e, dopo 48 ore complessive di contatto. si raccolse il residuo nero grafitoide che, disseccato a 100° e nel vuoto, pesa gr. 0,3264. Questo residuo nero, d'aspetto grafitoide, non deflagra.

Gr. 0,2831 del residuo dettero gr. 0,934 di CO_2 — gr. 0,0283 H_2O e lasciarono gr. 0,0033 ceneri alcaline clorurate.

La composizione del residuo nero grafitoide, dedotte le ceneri, si calcola:

Carbonio 91,0 °/₀ Acqua 10,1 °/₀

È quindi grafite che tiene adsorbito il 10 °/₀ di acqua come nel caso dell'acido grafitico.

In una preparazione fatta con maggiore quantità di sostanza, la grafite risultante ha la composizione:

Carbonio 90,9 °/₀ Acqua 10,5 °/₀ .

Se dai dati sperimentali si calcola la perdita di peso dovuta alla miscela gassosa $CO + CO_2$, si trova che gr. 0,4958 di ossido grafitico dettero gr. 0,2058, ossia *41,5* %: cioè press'a poco le cifre trovate per l'acido grafitico, che portano al quantitativo percentuale di CO oscillante fra 10,6 e 9,2.

IV. Gr. 0,876 dello stesso ossido grafitico, trattati nelle identiche condizioni con la stessa soluzione d'idrossilamina, diedero gr. 0,595 di residuo nero grafitoide, di cui gr. 0,2417, bruciati con ossido ramico, dettero gr. 0,7974 CO_2 e gr. 0,0252 H_2O e lasciarono gr. 0,0025 di ceneri. La composizione del residuo nero grafitoide è quindi:

Carbonio 90,9 % Acqua 10,5 %;

e dai dati surriferiti si calcola che gr. 0,876 di ossido grafitico hanno, per sviluppo gassoso CO e CO_2, perduto gr. 0,3491 di peso, ossia *39,9* %:

CO per differenza 9,0 - 9,6 %.

Con queste esperienze ho potuto determinare con una certa approssimazione le quantità percentuali di CO e CO_2 che contengono i prodotti grafitici.

III. — **Conclusioni.**

La conclusione alla quale pervenni nel sunto storico premesso all'esposizione dei fatti registrati nella parte sperimentale di questa Memoria, afferma che dell'acido grafitico non era stabilita con sicurezza la composizione, alcuni ritenendolo anche un miscuglio complesso come le così dette *sostanze umiche* del legno, nè si aveva indizio sicuro sulla sua funzione chimica, ritenuta da Brodie e Berthelot acida, e dallo Staudenmaier chinonica.

Col presente lavoro non ho portato contributo nuovo alla preparazione di questa sostanza; ho notato soltanto alcuni dettagli della preparazione col processo Brodie ed ho fatto alcune varianti pratiche nel processo Staudenmaier. Ho dedicato cura particolare all'analisi di questo prodotto, perchè questo era il primo scopo da raggiungere: stabilirne la composizione.

Il fatto che Brodie non assorbe l'anidride carbonica con la solita soluzione acquosa di potassa, ma adopera pomice imbevuta di potassa (cioè un'assorbente solido), e scrive che la combustione va condotta con certe cautele (fatto che anche il Gottschalk avverte), mi rendeva un po' dubbioso sui risultati analitici da loro ottenuti. Nei diversi tentativi fatti, adoperando come mezzo riscaldante il solito forno Glaser-Anschütz a gas, non sono mai riuscito ad evitare la deflagrazione della sostanza e conseguente proiezione di particelle carboniose nel tubo a cloruro di calcio ed alle volte passaggio anche nelle bolle contenente la soluzione di potassa. Per evitare l'inconveniente, ho fatto l'analisi dei prodotti grafitici in due periodi. Nel primo ho raccolto i gas CO e CO_2 che si svolgono da una quantità pesata di prodotto grafitico riscaldato in un forno Heraeus a resistenza elettrica a temperatura oscillante intorno ai 200° e nel vuoto operato con pompa a mercurio: la diminuzione di peso della sostanza primitiva dopo il riscaldamento sottratta del peso del $CO + CO_2$ raccolti, mi dà il peso

dell'acqua eliminata durante il riscaldamento. Nel secondo periodo ho fatto la combustione, col metodo ordinario, del residuo nero che ha perduto la proprietà di deflagrare.

La preparazione della sostanza da analizzare, data la sua igroscopicità già avvertita dagli altri sperimentatori e specialmente da Berthelot e Petit, m'ha occupato alquanto, e perciò ho seguìto quantitativamente l'assorbimento dell'acqua fatto dai prodotti grafitici. Questi prodotti assorbono il vapor d'acqua avidamente come fa la torba naturale. La quantità assorbita alla temperatura ordinaria in ambiente saturo oscilla intorno al 50 % del loro peso, acqua che separano poi facilmente nel vuoto in essiccatore ad acido solforico, ed il quantitativo complessivo di acqua separata è superiore del 0,5-0,8 % a quello assorbito. Le prime porzioni di acqua si separano nel vuoto molto rapidamente, ma il disseccamento completo della sostanza non si ottiene mai; dopo tre mesi di soggiorno in essiccatore ad acido solforico perdono da 0,16 a 1,08 % del loro peso, e dopo un anno la perdita arriva anche al 2,5 %, senza cambiare menomamente d'aspetto e di colore, se conservate al riparo della luce.

Dalle analisi eseguite, come s'è visto nella parte sperimentale, posso concludere che la composizione dei prodotti grafitici varia (se si vuole, in limiti ristretti) a seconda del procedimento adoperato nella loro preparazione e della varietà di grafite usata.

Mentre, ad esempio, la grafite Ceylan dà, col procedimento Brodie, acido grafitico

C . 57,69	H . 1,52	O . 40,83
» 57,51	» 1,53	» 40,96

(risultati concordanti fra di loro e che dimostrano l'esattezza del metodo da me adottato), la grafite Acheson dà acido grafitico la cui composizione è

C 56,51 H 1,75 O 41,74,

cioè un prodotto più ossigenato di circa 1 %.

L'analisi dei prodotti grafitici, preparati secondo Staudenmaier con tre varietà di grafite, dà risultati più concordanti fra di loro, ma che differenziano del 3 % circa in tenore di carbonio e del 1,5 % dell'ossigeno, da quelli del procedimento Brodie. Anche per l'acido grafitico preparato secondo questo processo si verifica la perfetta concordanza dei risultati nelle determinazioni eseguite sullo stesso campione.

Concludendo si deduce che mentre il processo Brodie mi ha dato un acido grafitico la cui composizione si avvicina alla formula $C_{13}H_4O_7$ che richiede

C 57,35 H 1,47 O 41,17 ,

il processo Staudenmaier mi ha invece dato un acido dalla formula $C_{14}H_4O_7$ che richiede

C 59,2 H 1,4 O 39,4 ,

cioè un prodotto più carburato e meno ossigenato.

Come s'è visto nell'introduzione, la composizione dell'ossido grafitico scoperto dallo Staudenmaier non fu ancora determinata. Anche qui si hanno piccole differenze di composizione a seconda della qualità di grafite adoperata. La grafite Ceylan dà

un ossido grafitico che contiene, in media,

C 57,26 H 1,62 O 41,11

mentre la grafite di Pinerolo e quella Acheson dànno un prodotto che contiene, in media,

C 58,5 H 1,53 O 40,0

cioè la prima dà un ossido che si avvicina alla composizione $C_{13}H_4O_7$, la seconda dà un'ossido che si accosta alla composizione $C_{14}H_4O_7$. Ma il fatto più saliente e nuovo che risulta da queste ricerche è che *l'acido grafitico e l'ossido grafitico presentano la stessa composizione centesimale: sono perciò due sostanze isomere*, rappresentate dalle due formule-limite soprascritte.

Lo studio dei prodotti di decomposizione pirogenica conferma questo fatto. La decomposizione pirogenica dei due prodotti avviene, nel vuoto, in due periodi di temperatura: verso i 200° essi si decompongono senza deflagrazione, se il riscaldamento è lentamente regolato: e le sostanze prodotte sono CO, CO_2, H_2O.

Rimane un residuo che a 1000° nel vuoto svolge CO, CO_2, H_2 con piccole quantità variabili di CH_4 [1], e lascia grafite che contiene in media 99 % di carbonio. La presenza dell'idrogeno fra i prodotti di decomposizione nella seconda fase del riscaldamento è dovuta all'azione secondaria del vapor d'acqua sul carbonio alla elevata temperatura; i prodotti *veri* della decomposizione pirogenica, anche a questa temperatura, sono CO e CO_2.

Si sa che i diversi ossidanti, reagendo sul carbonio [2] nelle sue svariate forme, generano CO e CO_2, che in presenza dell'acqua vengono *adsorbiti* dalla grafite e generano i prodotti grafitici. Schematicamente posso rappresentare la formazione e decomposizione pirogenica dei prodotti grafitici nel modo seguente:

$$\text{grafite} + a\,CO + b\,CO_2 + c\,H_2O \begin{array}{l} \rightleftarrows \text{acido grafitico giallo} \\ \rightleftarrows \text{ossido grafitico verde} \end{array}$$

I prodotti grafitici sarebbero perciò, secondo il mio modo d'interpretazione, *soluzioni solide di CO, CO_2 ed acqua nella grafite*, nel senso che Van't Hoff 25 anni fa dette a questa categoria speciale di complessi chimici, che il Küster adottò per lo joduro d'amido [3] ed il Biltz appoggiò per la soluzione azzurra di iodio nell'acetato basico di lantanio [4] e che il Van Bemmelen [5] precisò chiamandoli *Absorptions-*

(1) Leo Vignon, Bl. 1911, pag. 420. Per questa variabilità non presentava interesse il dosare le quantità dei gas H e CH_4 componenti il miscuglio.

(2) Si confrontino le recenti esperienze di K. A. Hoffmann e collaboratori sulla costante presenza di CO nelle ossidazioni a freddo delle diverse varietà di carbonio [Ber. *46*, pag. 2054 (1913)], e la Nota di E. Rhead e V. Wheeler [P. ch. S. *103*, pag. 461, (1913)].

(3) Ann. 283, pag. 360, an. 1894.

(4) Ber. *37*, pag. 719, (1904).

(5) Zeitsch. an. Ch., *36*, pag. 380, (1903).

verbindungen (*composti di adsorbimento*), quantunque le quantità adsorbite ed adsorbenti non stiano in rapporti stechiometrici.

La grafite, come si sa da lungo tempo, ha la proprietà di assorbire, come le altre varietà di carbonio, le sostanze gassose, le materie coloranti ed i sali; ed inoltre le recenti ricerche di H. L. Doyle (1) dimostrano che in determinate condizioni può dare sospensioni colloidali; è quindi un *adsorbente*. La tenacità con la quale questi composti grafitici di adsorbimento ritengono le ultime porzioni d'acqua fa pensare che una parte di essa sia contenuta nel sistema in quello stato particolare di *soluzione solida*, al quale il Th. W. Richards (2) dà una grande importanza; e questo spiegherebbe in certo modo i due periodi di decomposizione pirogenica osservati, effettuandosi nel secondo periodo esclusivamente la reazione secondaria che dà origine al gas d'acqua.

Conforme a questa mia idea è la struttura fisica dell'acido grafitico; perciò le determinazioni cristallografiche dello Weinschenk acquistano per me un notevole valore, perchè dimostrano che questo *composto di adsorbimento* è una sostanza amorfa.

L'azione dei diversi reagenti sui prodotti grafitici conferma la mia idea permettendo l'azione dell'idrato baritico e dell'idrossilamina di fissare con una certa approssimazione i valori dei coefficienti *a*, *b*, *c*, dello schema soprascritto.

Lasciando da parte l'azione della soluzione cloridrica di cloruro stannoso (che, come s'è visto nella parte sperimentale, è parallela in prima fase all'azione di moderata temperatura), veniamo a discutere l'azione della barite.

Questo reagente esplica la sua azione, non, come ritennero Brodie e Berthelot, *salificando il prodotto grafitico*, cioè formandosi acqua e sale di esso, ma invece *l'idrato baritico assorbe il CO_2 dei prodotti grafitici*: il che viene dimostrato dal fatto che, trattando con un acido, dal $BaCO_3$ formatosi si ha sviluppo di CO_2. Seguendo questa reazione quantitativamente, ho potuto constatare che la quantità di CO_2 assorbita dai due prodotti grafitici si avvicina a 2 pesi molecolari, il che mi permette di cambiare in formule razionali quelle brute date dall'analisi:

			Calc. °/o	Trov. °/o
$C_{13}H_4O_7 \longrightarrow C_{11}H_4O_3, 2CO_2$		CO^2	32.3	27.5.
$C_{14}H_4O_7 \longrightarrow C_{12}H_4O_3, 2CO_2$		»	30,9	

Più dimostrativa ancora è l'azione della soluzione idroalcoolica dell'idrossilamina Essa reagisce sui prodotti grafitici riducendoli a grafite con acqua. Cadono perciò tutte le supposizioni fatte dai chimici sulla natura *chinonica* di questi prodotti. Seguendo quantitativamente la reazione, ho potuto constatare che, per 2 molec. di CO_2, si elimina 1 molec. di CO; donde un ulteriore sdoppiamento dello schema pei prodotti grafitici:

(1) Chemistry, tom. 17, pag. 390, (1913).
(2) C. II, pag. 593, (1911).

$C_{13}H_4O_7 \longrightarrow C_{10}H_4O_2 \left\{ \begin{array}{l} 2\,CO^2 \\ CO \end{array} \right.$	calc.	CO^2 %	32,3 10,3		trovato in media
	"	CO "			
	somma . . .		42,6		
					somma 41,6
$C_{14}H_4O_7 \longrightarrow C_{11}H_4O_2 \left\{ \begin{array}{l} 2\,CO_2 \\ CO \end{array} \right.$	"	CO^2 %	30,9		
	"	CO "	9,8		
	somma . . .		40,7		

E finalmente dalla tabella III (pag. 274) posso dedurre — sempre in modo approssimativo per la reazione concomitante che succede nel secondo periodo di riscaldamento — la quantità di carbonio che tiene *assorbiti* H_2O, CO e CO_2 nei prodotti grafitici; e trovo, in media,

$$C\ \ 44{,}9\ \%, \text{ mentre si calcola per } \begin{array}{l} C_{11} - 46{,}4 \\ C_{10} - 44{,}1 \end{array} .$$

Perciò, basandomi sul fatto che *tutto* l'ossigeno dei prodotti grafitici si svolge, per azione del calore, sotto forma di H_2O, CO e CO_2, posso concludere, trasformando lo schema qualitativo precedente nel quantitativo seguente,

$$10 \text{ ó } 11\,C + 2\,H_2O + CO + 2\,CO_2 \begin{array}{l} \rightleftarrows C_{13}H_4O_7 \\ \rightleftarrows C_{14}H_4O_7 \end{array} .$$

In conclusione, i prodotti grafitici, che presentano in comune il fenomeno della deflagrazione quando vengano riscaldati bruscamente, e che differenziano nel colore a seconda della grafite d'origine e del processo di preparazione, non sono altro che *prodotti di adsorbimento di grafite, acqua, ossido di carbonio ed anidride carbonica* in limiti ristretti di composizione, e non hanno per niente funzione *acida* o *chinonica*; perciò trovo logico di sostituire, al nome di *acido grafitico* ed *ossido grafitico* quello, più generico di *idrocarbossigrafite* gialla, verde o nera.

Naturalmente, con queste mie ricerche non presumo di aver concluso sulla natura dei prodotti grafitici; ma ho la speranza di aver fatto balenare un nuovo indirizzo di ricerca ai futuri sperimentatori, indirizzo che potrà essere applicato utilmente a quei prodotti di adsorbimento risultanti dall'unione di sostanze gassose con solidi e servire di guida nello studio dei cosidetti prodotti ulmici in generale.

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76) Parte 1ª Transunti.
2ª Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — Transunti. Vol. I-VIII. (1876-84).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — Rendiconti. Vol. I-VII. (1884-91).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — Rendiconti *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali* Vol. I-XXV. (1892-1916). Fasc. 6°. Sem. 1°.
Rendiconti *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XXIV. (1892-1915).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali* Vol. I-XI. Fasc. 5.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XII. Vol. XIV. Vol. XV. Fasc. 1-2.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia è di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

Ermanno Loescher & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*

Ulrico Hoepli. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

MEMORIE DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

(Anno CCCXIII 1916)

Serie Quinta — Volume XI — Fascicolo VI.

ICILIO GUARESCHI

LA TEORIA ATOMISTICA E SEBASTIANO BASSO

CON

NOTIZIE E CONSIDERAZIONI SU WILLIAM HIGGINS

Smithsonian Institution
SEP 26 1924

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI
PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI
1916

LA TEORIA ATOMISTICA E SEBASTIANO BASSO
con notizie e considerazioni su William Higgins.

Memoria del Corrisp. prof. ICILIO GUARESCHI

letta nella seduta del 16 gennaio 1916.

INTRODUZIONE

Molteplici sono le cause per le quali pubblico ora questo mio già vecchio lavoro su Sebastiano Basso. Innanzi tutto, perchè desidero farne omaggio alla memoria di mia figlia Maria, della quale posseggo il manoscritto che ora faccio conoscere; ella tradusse, sino dal 1903 circa, il bel capitolo su S. Basso scritto dal Lasswitz nel suo classico libro *Geschichte der Atomistik vom Mittelalter bis Newton*. In secondo luogo, perchè io avevo già promesso questo mio lavoro nel 1905; ed anche perchè di S. Basso assai poco si conosce, ed infine perchè tutto ciò che riguarda la storia dell'ipotesi o teoria atomica ha sempre per me avuto una grande attrattiva.

È un saggio, o meglio, un abbozzo su questo filosofo antiaristotelico; e vorrei che questo mio lavoruccio servisse di incitamento ad altri per un lavoro di maggior lena, più completo; allora sarebbero anche corretti quegli errori nei quali sarò incorso nel presente studio.

I grandi rivolgimenti della scienza si combinano coll'azione di uomini coraggiosi i quali, come centri di calore e di luce, e quindi di vita, suscitano infiniti moti anche in ispiriti minori; tali uomini spesso rimangono dimenticati. Però, a mano a mano che la scienza si evolve e si amplifica, essa sente quasi come un debito di gratitudine, si volge indietro e mette sotto nuova luce quegli spiriti audaci che erano rimasti nell'ombra. Così fu del nostro Sebastiano Basso.

I massimi problemi che riguardano la costituzione dell'universo hanno sempre preoccupato la mente dell'uomo pensante. D'onde veniamo e dove andiamo? Lo spazio è infinito? La materia e il moto, la materia e lo spirito, sono indissolubili, eterni? La materia è divisibile in minime particelle od è continua? Che cosa sono gli elementi? Questi sono i più grandi problemi che erano già posti dai filosofi indiani e greci, dai quali traggono origine la filosofia e la scienza contemporanea.

L'*atomo* è la parola magica che ha dato tanto lavorìo al pensiero umano; e ne dà ancora, mentre muoiono milioni di uomini!

Lungi da me l'idea di fare una storia dell'atomismo, sia pure brevissima; si è già scritto tanto su questo enorme problema, che essa nel caso attuale sarebbe perfettamente inutile. Se ne faccio un breve cenno, egli è per collegare questa questione con la filosofia naturalistica di Sebastiano Basso e, nel tempo stesso, fare un accenno alle idee di W. Higgins.

La costituzione della materia rimane sempre, come nei tempi più antichi, il problema più delicato da risolvere.

Due sole grandi teorie sono state possibili sino ad ora: la teoria che ammette la divisibilità all'infinito, cioè che i corpi siano costituiti in modo da formare una massa uniforme, senza interstizî, omogenea. È la teoria di Anassagora (1). L'altra teoria ammette che la materia abbia un limite di divisibilità e che sia costituita da particelle piccolissime, indivisibili, dette *atomi*, separati gli uni dagli altri da spazî vuoti. È la teoria o ipotesi di Leucippo e di Democrito.

(1) L'*omeomeria* (Anassagora) considera tutti i corpi come formati di piccole particelle simili al corpo intero, divisibili all'infinito, ma disposti in vario modo; l'oro, a cagion d'esempio, è immaginato come costituito di tante particelle, ma sempre d'oro, e così anche gli organi degli animali sarebbero formati di tanti piccoli organi. Questo concetto di Anassagora è così espresso da Lucrezio:

« ossa videlicet e pauxillis atque minutis
« ossibus; sic et de pauxillis atque minutis
« visceribus viscus gigni; sanguenque creari,
« sanguinis inter se multis coëuntibus guttis:
« ex aurique putat micis consistere posse
« aurum, et de terris terram concrescere parvis.
« ignibus ex ignis, umorem umoribus esse,
« cetera consimili fingit ratione putatque ».

(*De Rerum Natura*, I, v. 835-842).

Ecco quanto scrive Zeller (*La phil. des Grecs*, II, pag. 391) intorno alla teoria di Anassagora:

« Cette théorie implique la pluralité des substances primordiales; mais tandis qu' Empédocle « et les atomistes tiennent les corps les plus simples pour les plus primitifs, et, par suite, n'attri- « buent à leurs substances premières, outre les propriétés générales de toute matière, d'autres pro- « priétés que la détermination mathématique de la forme, ou encore les qualités simples des quatre « éléments, Anaxagora, au contraire, estime que ce sont les corps déterminés individuellement, tels « que la chair, les os, l'or etc., qui constituent les substances premières quant aux corps élémen- « taires: ce sont, selon lui, des mélanges dont l'apparente simplicité résulte uniquement de cette « circonstance que, grâce à la réunion de tout espèce de substance déterminée, on ne perçoit aucune « des qualités de ces dernières, mais seulement les qualités qui leur sont communes. Empédocle « et les atomistes pensent que l'organique est formé par l'élémentaire; Anaxagora, au contraire, « professe que l'élémentaire est formé par les parties constitutives de l'organique.

« Aristote exprime d'ordinaire cette doctrine en disant qu'Anaxagora regarde les corps aux « parties semblables (τὰ ὁμοιομερῆ) comme les éléments des choses: et les écrivains postérieurs dé- « signent les substances premières d'Anaxagora par le nom d'*homœomérie*.

« Ce mot se trouve pour la première fois dans Lucrèce ».

L'idea atomistica è antica quanto sono antiche le filosofie indiana e greca. L'antica concezione di Leucippo (¹) (495 av. Cr.), di Democrito (470-357), di Epicuro (342) e di Lucrezio (97-53), è rimasta come sepolta per molti secoli; poi risorse specialmente alla fine del secolo XVI ed al principio del XVII, per opera di filosofi naturalistici, per arrivare, dopo profonde modificazioni, alla mente di J. Dalton e di Avogadro, i quali ne fecero il fondamento delle teorie chimiche; e, sino ad oggi, può dirsi essere la base di tutte le scienze sperimentali.

Dissi che è rimasta sepolta; ma ciò fu principalmente pel fatto che le opere di Lucrezio e di molti filosofi greci erano quasi come perdute, e furono ritrovate solamente molto tardi (²).

Le idee di Democrito, di Epicuro e di altri filosofi greci furono splendidamente svolte e fatte proprie da Lucrezio, il più grande scrittore romano di filosofia scientifica. Nel *De Rerum Natura* Lucrezio dice chiaramente (liber I):

sappi, poi, che, de' corpi, altri son primi;
altri si fan per l'unïon di questi.

(¹) Leucippo (495 av. Cr), di Abdera o di Mileto (o di Elea), era contemporaneo di Empedocle, ed a lui si deve il primo concetto di particelle indivisibili o atomi: *αἱ ἄτομοι* insecabili, indivisibili. Secondo Leucippo, gli atomi rotondi si muovono con maggiore velocità. Il fuoco e l'anima sono costituiti da atomi sferici. Le idee di Leucippo, sotto questo riguardo, furono sviluppate da Democrito. Tutti i principali argomenti, i quali comprovano la indipendenza e la spontaneità della filosofia greca dall'India, sono stati in modo mirabile, completo ed esatto discussi e raccolti dallo Zeller nella sua famosa opera *La philosophie des Grecs*, trad. franc., 1877, I, pag. 25; ciò che riguarda i filosofi atomisti trovasi nel vol. II, 1882, pag. 279: « Mais pour nous » scrive Zeller, « il n'est pas prouvé par là qu'Héraclite et Platon, Thalès et Aristote aient effectivement « emprunté leurs doctrines aux Hindous ou aux Égyptiens » (vol. I, pag. 41). A proposito dell'idealismo greco, ricorderò che giustamente Platone fece rilevare come ne' Greci siavi lo spirito scientifico, mentre la caratteristica degli Egiziani e dei Fenicî è l'amore del guadagno; loda negli Egiziani più le invenzioni pratiche, o le istituzioni politiche, che non le scoperte filosofiche.

(²) Il poema di Lucrezio (T. Lucretius Carus) *De Rerum Natura* è considerato come la più bella opera che esista nel genere didattico. Nel medio evo quest'opera, nella quale sono esposte le concezioni filosofiche di Leucippo, di Democrito e di Epicuro, non era conosciuta, ed anche i più grandi pensatori del medio evo, quali Dante e Ruggero Bacone, non conoscevano Lucrezio. L'opera di questo poeta filosofo romano fu conosciuta solamente dopo il 1417, quando Poggio Bracciolini, viaggiando in Francia, Inghilterra, Germania, Svizzera, ritrovò molti antichi manoscritti che erano andati dispersi e che egli portò in Italia. Fra i manoscritti che egli trovò in una vecchia torre della abbazia di S. Gallo in Isvizzera, v'era il *De Rerum Natura* di Lucrezio; e questo manoscritto fu poi la sorgente delle 15 copie manoscritte del Lucrezio che esistono in Italia. L'opera del Lucrezio cominciò ad essere conosciuta dal pubblico dopo il 1550, quando fu fatta conoscere l'edizione *Lucretii, De Rerum Naturâ*, libri sex, Lugd., Gryphii, 1558, in-12, e specialmente quando fu pubblicata la prima edizione corretta dal Lamblin nel 1564, poi da Bentley e Creek nel 1595. La traduzione italiana del Marchetti è conosciuta da tutti; lascia non poco a desiderare, e migliore sarebbe quella del Tolomei (1863), ma non so se sia compiuta; fra le altre traduzioni ricordo quelle di Sartori (1876), di Rapisardi (1880), di Cavagnari (1882) ecc.

Nel libro di R. Sabbadini: *Le scoperte dei codici latini e greci* ne' secoli XIV e XV, pag. 80, trovo le pochissime notizie seguenti intorno ai manoscritti lucreziani « Di Lucrezio, Poggio non portò seco l'archetipo, ma un apografo, cfr. M. Lehnerdt *Lucrêtius in der Renaissance* (1904) 3-4, il quale dimostra che il testo di Lucrezio ebbe tarda e lenta diffusione. Sul luogo della scoperta, certo molto lontano da Costanza, non si può fare veruna congettura plausibile ». Dunque, nulla di nuovo.

I versi seguenti si applicano specialmente ai così detti corpi semplici, indecomposti od elementi:

> Namque eadem cœlum, mare, terras, flumina, solem
> Constituunt; eadem, fruges, arbusta, animantes,
> Verum aliis, alioque modo commixta, moventur
>
> (*De Rer. Nat.* I, v. 820).

che il C. Martha (forse meglio del Rapisardi) traduce così: « I principii che formano « il cielo, il mare e la terra, i fiumi ed il sole, sono i medesimi; che, misti ad « altri o trasportati in altre combinazioni, hanno formato i frutti della terra, gli « alberi, gli animali ».

Ho detto, scrive il Trezza, che Lucrezio non apprezzava abbastanza le idee di Eraclito; egli però, pur combattendone il simbolismo fantastico, tolse da Eraclito le parti più vere e più arditamente nuove della sua dottrina ([1]).

Non credo privo di interesse il riprodurre le seguenti parole di Humboldt relativamente al poema di Lucrezio ([2]):

« La poesia ha mostrato tutte le sue ricchezze nel poema di Lucrezio *Sulla* « *natura delle cose.* L'autore abbraccia il mondo intero; discepolo di Empedocle e « di Parmenide, egli accresce ancora la maestà del suo dire colle forme arcaiche « del suo stile. La poesia e la filosofia hanno fuso le loro forze nel libro di Lucrezio « senza che giammai dalla loro fusione risalti quella freddezza che più severamente « biasimava il retore Menandro, confrontandola all'aspetto brillante sotto il quale « Platone rappresentava la natura. Mio fratello ha analizzato, con grande sagacità, « gli effetti analoghi e dissimili, prodotti dall'unione della poesia e dell'astrazione « filosofica negli antichi poemi didattici della Grecia, nel poema di Lucrezio e nel- « l'episodio del *Bhagavad-Gîta.* Se si considera il grande quadro della natura trac- « ciato dal poeta romano, si rimane colpiti dal contrasto che producono l'aridità del « sistema atomistico e le sue strane visioni sulla formazione della terra, con quella « vivente descrizione della razza umana che esce dal fondo delle foreste per lavo- « rare i campi, vincere le forze della natura, coltivare il suo spirito, perfezionare il « suo linguaggio e fondare la vita civile » (Lucrezio, libro V, vv. 930-1450). Cicerone riconosceva in Lucrezio più arte che genio: « Non multis luminibus ingenii, multa tamen artis ». Giudizio severo ed ingiusto, dice Humboldt; mentre Virgilio, Ovidio e Quintiliano lo innalzarono molto più. Però la frase di Cicerone fu riconosciuta errata, e si deve leggere: « Multis luminibus ingenii, multa tamen artis » (H.).

P. B. Lafaist, nella *Dissertation sur la philosophie atomistique*, Paris, 1833 (opuscolo molto raro), ha esposto e discusso con grande ricchezza di documenti l'opera atomistica di Leucippo e di Democrito. Questo lavoro termina colle parole seguenti:

([1]) Trezza, *Lucrezio*, 1876, pag. 84. Della teoria atomica di Lucrezio discorre il Trezza anche nel suo libro: *Epicuro e l'Epicureismo*, Firenze 1877 nel Cap. VI *Atomi*. Il Trezza qui ricorda il lavoro di Jenkin, *The Atomic Theory of Lucretius* in *North British Review*, t. XLVIII.

Io posseggo un bellissimo esemplare dell'ediz. del *Lucretius* coi commenti di D. Joannes Nardius Florentini, 1647, in 4°, con IX tavole; apparteneva ad Adolfo Bartoli. A proposito degli atomi il Nardi ricorda D. Sennert, ed appena appena S. Basso.

([2]) *Cosmos*, II, pp. 46-47.

« Quand on a recueilli, collationné, discuté tous les textes qu'ont rapport à la « doctrine des nombres, ou au symbolisme pythagoricien, et qu'on n'est arrivé qu'à « des probabilités combattues par des probabilités d'égale valeur; quand, à force de « travaux et de veilles, on est parvenu à peine à comprendre le sens du système « éléatique, le sens de la polémique de Zénon, grâce encore aux conjectures ingé- « nieuses de quelque philosophe supérieur; quand, dis-je, après avoir traversé toute « cette philosophie hérissée de difficultés parfois insurmontables, on rencontre une « doctrine claire et simple, quoique parfaitement systématique, parfaitement consé- « quente, on ne peut se défendre d'un peu de satisfaction. Sans doute, les atomistes « vont droit au matérialisme, au fatalisme, à l'athéisme; mais lorsque la philosophie « fait ses premiers pas, qu'importent les résultats? la méthode est tout. Or, en fait « de méthode, l'atomisme surpasse certainement tout ce qui l'a précedé. Avant Leu- « cippe et Démocrite, on n'avait pas encore eu le sentiment de la réalité, on n'avait « pas analysé les corps avec ce tact, cette délicatesse, je dirai même cette sorte de « profondeur; on avait cherché à expliquer la nature par des abstractions, en un « mot on n'avait pas encore trouvé la vraie méthode de la science naturelle; et si « Thalès et ses successeurs l'avaient soupçonnée, les atomistes l'étendirent prodigieu- « sement et la mirent en pratique. C'est en quoi ils ont bien mérité de la science ».

Giustamente il Terquem (1883), in un rapido cenno storico sulle origini della fisica, scrive che « Lucrezio, nel suo mirabile libro *De Rerum Natura*, ha saputo adornare col fascino della poesia l'esposizione sovente astratta delle dottrine del suo maestro Epicuro. Si è colpiti, alla lettura di Lucrezio, della giustezza d'un gran numero di osservazioni e sovratutto della convinzione generale che anima tutta l'opera, la convinzione della costanza delle leggi della natura sufficenti a spiegare tutti i fenomeni ».

La vecchia teoria atomica considera dunque i corpi come costituiti da un certo numero di particelle o atomi o elementi semplici indistruttibili, duri, indivisibili, il cui insieme e la cui disposizione costituirebbero tutti gli esseri inorganici e viventi [1]; e Lucrezio canta:

Nunc igitur, quoniam certissima corpora quaedam
Sunt, quae conservant naturam semper eandem,
Quorum abitu, aut aditu, mutatoque ordine, mutant
Naturam res, et convertunt corpora sese;

(*De Rerum Natura*, I, v. 677-680).

Quin etiam passim nostris in versibus ipsis
Multa elementa vides multis communia verbis;
Cum tamen inter se versus, ac verba, necesse'st [2].
Confiteare, et re, et sonitu distare sonanti:
Tantum elementa queunt permutato ordine solo.
At rerum, quae sunt primordia, plura adhibere
Possunt, unde queant variae res quaeque creari.

(*De Rerum Natura*, I, v. 823-829).

[1] Berthelot, *La chimie fondée sur la synthèse*, vol. I.

[2] Nella trascrizione di qualche brano di Lucrezio mi sono valso della bella edizione: *Titi Lucretii Cari De Rerum Natura libri sex, recensuit notisque illustravit Thom. Creech. Aug. Taurinorum ex typis Ios. Pomba*, anno MDCCCXXXI. Altri, più giustamente forse, scrivono *necesse est*.

Secondo Lucrezio, gli atomi sono solidi e semplici:

Sunt igitur solida primordia simplicitate.

Concetto veramente geniale di Epicuro si è quello di aver ammesso che gli atomi, qualunque siano la loro forma e massa, si muovono nel vuoto con la stessa velocità.

Nè io voglio di più intrattenermi intorno a Lucrezio, sul quale hanno scritto altri più di me addentro nella sua filosofia: sotto l'aspetto letterario specialmente basterà che io rimandi il lettore all'opera di Martin Schanz, *Geschichte der römischen Litteratur*, 2ª ed., 1898, vol. I. Nella quale però la parte scientifica è appena accennata [1].

Io penso che da alcuni si sia fatto dire a Lucrezio più di quello che realmente egli abbia voluto dire. A cagion d'esempio, si è discussa la questione se Lucrezio abbia confuso le molecole cogli atomi. Si volle interpretare la parola *glomeramen* come molecole o masse atomiche! (Giussani) [2]. Certamente sì che avrà confuso molecola con atomo, pel solo fatto che allora era impossibile di avere il concetto di molecola diversa dall'atomo; la molecola, fatta di uno o più atomi come nel concetto moderno. Lucrezio discusse il concetto delle minime particelle universali dette *αἱ ἄτομοι* indivisibili; concetto emesso la prima volta da Leucippo (*Λεύκιππος*) e da Democrito (*Δεμόκριτος*) di Abdera. Ma non andiamo più in là nella interpretazione del testo lucreziano. Sono inutili, anzi dannose, esagerazioni.

Non è in tutto vero che il concetto di elemento e di atomo, dopo Lucrezio, entri nelle tenebre completamente e si perda nell'oblio sino al secolo XVI, in cui rinasce con Bruno, con Basso ecc. Un periodo abbastanza glorioso fu il *periodo arabo*, il periodo dell'*atomismo arabo* dei Motecallemin, il quale però, credo, abbia avuto poca influenza sul progredire dell'atomismo. I lavori di Schmoelders [3], di Munck e di altri su questo argomento sono ampiamente riassunti dal Mabilleau [4]. Dunque anche nel medio evo l'atomismo non era affatto scomparso come alcuni mostrano di credere; ma certamente era poco conosciuto.

Io non entrerò in più minuti particolari, perchè non voglio, nè potrei, fare qui la storia dell'atomismo; e volentieri rimando all'opera sovracitata del Mabilleau e più specialmente a quella del Lasswitz.

La teoria atomica dei Greci e di Lucrezio era essenzialmente un concetto astratto, applicabile ad ogni sorta di cose, senza però un vero significato scientifico basato su qualche esperienza, perchè allora la scienza, nel senso moderno di scienza sperimen-

[1] G. Bruno, nella sua opera *De l'infinito universo, ed uno* », ricorda spesso Lucrezio come l'autorità di maestro.

[2] *Rend. Istit. lomb.*, 1894, tom. 27, pag. 349. Lavoro più ampio del Giussani è quello: *T. Lucreti Cari De Rerum Natura Libris sex* — Revisione del testo, commento e studi introduttivi. 4 vol. Torino, Loescher 1896 98. Giustamente Carlo Pascal (*Studî critici sul poema di Lucrezio*, 1903, pag. 41), a proposito di *soliditas et semplicitas*, scrive: « temo si attribuiscano a Lucrezio distinzioni più sottili di quelle che egli stesso consentirebbe, o che il suo testo consenta ».

[3] *Essai sur les écoles philosophiques chez les Arabes*. Paris, Didot, 1842.

[4] L. Mabilleau, *Histoire de la philosophie atomistique*. Paris, 1895, pag. 319.

tale, non esisteva. Quale concetto dell'infinitamente piccolo penetrò anche nelle matematiche cogli *indivisibili* del Cavalieri.

Si è discorso e si discorre troppo dell'atomismo antico, cioè da Leucippo, Democrito ed Epicuro a Lucrezio e Gassendi. In altro mio lavoro, quasi incidentalmente, ho detto come questo atomismo fosse ammesso quando ancor non si aveva idea netta di che cosa fossero composti i corpi; si parlava di particelle piccole, di esseri invisibili che si muovono, si agitano, senza che a quelle parole si potesse attribuire un significato moderno. Non si sapeva ancora nulla della composizione dei corpi; non si conosceva ancora la natura dell'aria; nemmeno si sapeva, con esperienze esatte e precise, che l'aria fosse pesante; e, così stando le cose, come poteva aversi una idea chiara che precorresse l'idea moderna di peso dell'atomo, di peso atomico, come l'hanno ideato Higgins e Dalton?

Si è anche esagerato molto col fare grande merito dell'atomismo a Gassendi, a Sennert, a Jungius, lasciando quasi in completa dimenticanza Sebastiano Basso, che ha ben più merito degli altri.

Rispetto a Lucrezio, si è giunti sino all'esagerazione di scorgere in alcuni suoi versi l'idea del moderno movimento browniano!

La teoria atomica ha seguìto, può dirsi, i progressi della fisica e della meccanica. Il fiorire della meccanica dopo Galileo portò a concetti meccanici anche relativamente agli atomi [Guglielmini (1), Bernoulli]; quando dopo Newton si generalizzò il concetto di gravitazione, agli atomi si attribuirono proprietà attrattive e si ammise che le combinazioni chimiche fossero dovute all'attrazione fra gli atomi (Le Sage); e Berzelius arrivò al concetto delle attrazioni elettriche fra gli atomi prima ancora che fosse emessa la teoria atomica del Dalton. Dopo le grandi scoperte del Volta, si ammisero le polarità elettriche e che le combinazioni chimiche fossero l'effetto dell'elettricità (Berzelius, Davy).

« Durante il medio evo » scrive Tyndall (2) « la dottrina degli atomi sembrava essere scomparsa da ogni discussione filosofica; essa forse esisteva in alcuni spiriti sobrii e serî, benchè nè la Chiesa nè il mondo fossero allora preparati a lasciarne parlare con tolleranza. Una sol volta, nell'anno 1348, essa fu enunciata in un modo distinto, ma ne risultò immediatamente una ritrattazione forzata; quella dottrina sonnecchiò sino al secolo XVII, e fu risvegliata da un contemporaneo di Hobbes e di Descartes, da P. Gassendi ».

(1) D. Guglielmini, quale filosofo, appartiene al gruppo di coloro che ammettevano la teoria corpuscolare od atomistica di Democrito e di Lucrezio; egli, tanto nella Memoria del 1688 (*Riflessioni filosofiche dedotte dalle figure de' sali*), quanto e più in quella del 1705, lo dimostra chiaramente: era imbevuto delle idee dei filosofi novatori del XVII secolo e specialmente di Sebastiano Basso e di Gassendi, e le ha applicate alle particelle saline che egli studiava (I. Guareschi, *Domenico Guglielmini e la sua opera scientifica*, in *Suppl. Ann.*, vol. XXX, 1914, Torino).

(2) J. Tyndall, *L'évolution historique des idées scientifiques*, in *Rev. scient.*, 1874, 2° sem., pag. 270. Ma il Tyndall in questo discorso ha dimenticato un fatto che meglio di tutto il resto spiega il silenzio del medio evo intorno a Lucrezio, del quale non parla nemmeno Dante: ed è che i manoscritti di Lucrezio non erano, o quasi, conosciuti; e solamente dopo che furono fatti conoscere, per merito di Poggio Bracciolini, si cominciò a discutere della teoria atomica dei Greci, e certamente uno de' primi, od il primo, fu Giordano Bruno (ved. sopra, pag. 291).

Ma qui il Tyndall dimenticava che in questa parte della sua filosofia il Gassendi ([1]) deriva dal Basso. E giustamente l'Höffding, discorrendo del Gassendi, osserva:

« Ces œuvres eurent une grande importance, car la théorie atomique, préparée « par Bruno et Basso, était bien faite pour être utilisée par la science moderne de « la nature » ([2]).

L'atomismo prende nuova vita alla fine del secolo XVI ed al principio del XVII, con G. Bruno e S. Basso, e, poco dopo, con Sennert, Bérigard ([3]) e Gassendi. Senza dimenticare David van Goorle, detto Gorlœus, contemporaneo del Basso.

Ecco quanto io ho scritto nel 1906 intorno a Dan. Sennert, il quale, molto probabilmente, conosceva l'opera di S. Basso ([4]):

« Il Sennert, professore di medicina in Halle (n. 1572 e m. 1637), nella sua opera « *Hypomnemata physica de rerum naturalium principiis, occultis qualitatibus, de* « *atomis* ecc., in-4°, Frank. 1635, emise delle idee di una certa importanza sugli « atomi e sugli elementi. Il Lasswitz, nella sua opera *Gesch. der Atom*, vol. I, « pag. 443, così scrive:

« Bisogna di necessità ammettere l'esistenza di alcuni corpi semplici, di qualità « speciale, dai quali nascono i corpi composti e nei quali essi tornano a scomporsi.

([1]) Pietro Gassendi nacque nel 1592 a Champtercier nella Provenza, e morì nel 1655 a Parigi. Aveva dunque solamente 23 anni quando Basso pubblicò l'opera sua. L'opera del Basso doveva essere molto conosciuta, perchè già l'edizione del 1621 fu pubblicata come se fosse stampata in due tipografie diverse: cioè vi è una edizione di Ginevra 1621 e una *aurelliana* (Orléans) pure del 1621 e un'altra edizione nel 1649. Il Gassendi, nel 1624, pubblicò il libro *Exercitationes paradoxicae adversus Aristotelem* (I, 1624; II, postumo, 1659). Mise in voga la filosofia di Epicuro; nel 1647 fece conoscere l'altro suo lavoro *De vita, moribus et doctrina Epicuri*, Leyd., e nel 1647 *Syntagma philosophiae Epicuri*. Le sue opere complete furono pubblicate a Lyon nel 1658, in 6 voll. in-fol.

([2]) *Histoire de la philos. moderne*. Paris, 1908, vol. I, pag. 269.

([3]) Claude Guillennet de Bérigard o Beauregard (italianizzato, non so perchè, in Claudio di Berigardo). Questo filosofo francese, che insegnò lungo tempo in Italia e specialmente a Pisa ed a Padova, è posteriore al Basso ed al Galileo. Nacque a Moulins in Provenza nel 1578. Si laureò in medicina ad Aix, pare nel 1601. Nel 1628 fu chiamato a Pisa dal granduca di Toscana, poi a Padova dal Governo veneto nel 1640. Secondo alcuni, morì nel 1663; secondo altri, nel 1667. Combattè la scolastica; era fautore della filosofia ionica ed epicurea. La sua opera principale è « *Circuli Pisani, seu de veterum et peripatetica philosophia dialogi* » (Udine, 1643-1647; poi Padova, 1661, in-4°). Però nel 1632 pubblicò un'opera contraria a Galileo: *Dubitationes in dialogos Galilaei pro terrae immobilitate*, 1632, in 4°.

Le principali notizie su Claude de Bérigard, o Claudius Berigardius, sono state raccolte dal Brucker nella sua grande opera *Historia critica philosophiae*, vol. IV, pag. 463.

Su questo filosofo si trovano alcune notizie anche in un lavoro di P. Ragnisco: *Da Giacomo Zabarella a Claudio Berigardo, ossia prima e dopo Galileo nell'Università di Padova*, in *Atti Ist. Ven.*, nov. 1893 a ott. 1894, pag. 492.

Giacomo Zabarella di Padova (1533-1589) scrisse varî trattati, di logica, di fisica, di astronomia (*De natura coeli*); pare sia stato accusato di ateismo pel suo libro *De inventione aeterni motoris*. Fu uno dei tanti commentatori di Aristotele.

Però, rispetto alla teoria atomica, il Bérigard e lo Zabarella interessano molto meno di Sebastiano Basso.

([4]) I. Guareschi, *Generalità sugli elementi e loro composti, acidi* ecc. dalla *Nuova Enciclopedia di Chim.*, vol. I (1906), pag. 1047.

« Questi *semplici* sono *minima* naturali, cioè fisici e non matematici: *minima* « *naturae, atomi, atoma, corpuscola, σώματα ἀδιαίρετα, corpora indivisibilia*, e così « piccoli che non sono concepibili ai sensi. In loro confronto i pulviscoli del sole « sono corpi composti. I *minima* rappresentano il *massimo* grado della suddivisione, « oltre il quale la natura non può giungere; e sono d'altra parte il principio di tutti « i corpi naturali.

« Bisogna distinguere però gli atomi di specie diversa, e secondo un doppio « rapporto, cioè secondo gli elementi e secondo i corpi composti. Secondo la diver- « sità degli elementi, vi sono quattro specie di atomi elementari: *igneae, aëreae,* « *aqueae, terrae* ».

Il Sennert era contemporaneo di S. Basso: ma non può dirsi che l'uno abbia preso le idee atomistiche dall'altro. Nella prima edizione dell'*Epitome scientiae naturali* del Sennert (Witaebergae 1618) non si trova alcun cenno sulla teoria atomica; bensì nell'altra opera *De chymicorum cum Aristotelicis et Galenicis consensu et dissensu*, Wittemb., 1619, in-4°. Ma dove ne discorre di più è nell' opera sovracitata, del 1635.

« L'opinione — scrive Clerk Maxwell (¹) — che i corpi che noi vediamo e che « noi tocchiamo, che noi possiamo mettere in movimento o lasciare in riposo, che « noi possiamo distruggere e rompere in pezzi: l'opinione che questi corpi siano com- « posti di particelle più piccole che noi non possiamo nè vedere nè toccare, nè arre- « stare nel loro movimento perpetuo da cui sono animati, nè possiamo mettere in « briccioli, nè privare delle minime loro proprietà, era conosciuta col nome di teoria « atomica. Questa teoria era associata ai nomi di Democrito e di Lucrezio, i quali « fondavano la costituzione dell'universo sull'esistenza del vuoto e degli atomi, ad « esclusione di ogni altro elemento ».

Il Baskerwille, in una Conferenza sugli *Atomi ed elementi* tenuta il 1904 nella *British Association* dice: « Noi abbiamo stabilito di definire un elemento secondo le sue proprietà ». Il che è precisamente quanto hanno ammesso alcuni filosofi atomistici, e specialmente Sebastiano Basso, già nei secoli XVI e XVII.

In generale, nelle brevi storie della teoria atomica si fa un gran salto, da Democrito e Lucrezio a Dalton. Il dott. Macneven, nel 1821, pubblicò un lungo lavoro di indole storica: *Exposition de la théorie atomistique*, nel *Journ. de physique*, 1821, t. XCII, pag. 275, nel quale già nella prima pagina salta subito da Democrito a Dalton. Questo è un grave errore. Perchè le idee esposte dai filosofi dei secoli intermedî, XVI e XVII, debbono aver avuto influenza nella creazione della attuale teoria atomica di Higgins e Dalton.

Robert Boyle, nel suo *Chemista septicus*, espone pure una teoria corpuscolare razionale e discorre di corpi composti di primo, di secondo ordine ecc. Ma ciò, in fondo, era già stato fatto da S. Basso.

Dopo Bruno, Basso, Sennert e Gassendi, la teoria atomica fu ammessa e discussa da Descartes, Fr. Bacone, Locke, Boyle, Hobbes, Guglielmini, Newton, Dan. Ber-

(¹) *Rapports des sciences phisiques avec les sciences mathématique: théorie atomique* (in *Assoc. britann. pour l'avancement des sciences*: *Rev. scient.*, 1871, 1° sem., pag. 234).

noulli e Le Sage, sino a Higgins e Dalton, i quali ultimi attribuirono alla teoria un significato nuovo: quello dei rapporti di peso (¹).

Anche nell'*Essai de chymie mécanique* del 1758, del Le Sage, nel quale si discute intorno al movimento degli atomi, nulla si dice del peso di questi.

Questo lavoro del Le Sage è certamente molto interessante; è un primo tentativo dell'applicazione della meccanica al movimento delle piccole particelle o atomi, dopo D. Bernoulli (²). È un libro meritevole di molta attenzione.

I.

Notizie e considerazioni su Williams Higgins.

Chi farà la storia dell'atomismo moderno non potrà tralasciare di scrivere in prima linea il nome di William Higgins.

L'Higgins fu il primo ad ammettere, sino dal 1789, che fra le minime particelle o atomi dei corpi, che si combinano tra loro, esistono dei rapporti fissi e costanti di peso. Fu un chimico, ora quasi sconosciuto, ma che in questo punto della storia della chimica non deve essere dimenticato.

Egli era professore di chimica e di mineralogia nel « Repository Dublin Society »; poi nel Pembroke College (³). Non si conosce l'anno di nascita, nè quello della sua morte.

Per il posto che occupava, e per l'opera che aveva pubblicato, doveva essere tutt'altro che sconosciuto al suo tempo.

(¹) Ern. Bloch, in un articolo *Die antike Atomistik in den neuren Geschichte der Chemie*, ricorda le idee atomistiche di Giordano Bruno, Sennert, Jungius ecc.; poi fa cenno, sempre in base al libro di Lasswitz, delle idee di S. Basso, le quali avrebbero avuto notevole influenza per Gassendi e Descartes (*Isis*, 1913, I, pag. 386). In questo lavoro il Bloch accenna anche alle idee di Boyle e di Newton; ma non è ora mio còmpito entrare in questi particolari.

Anche in un discorso di R. Lorenz, *Die Geschichte des atomistischen Gedanken* (*Chem. Zeit.* 1914, pag. 1048) alla Società di fisica di Francoforte non trovo nulla di nuovo; il Lorenz non ricorda S. Basso, nè Higgins, nè altri.

(²) Giorgio Luigi Le Sage, nato nel 1724 a Ginevra, ed ivi morto nel 1803, era un privato cultore delle scienze matematiche e naturali, di forte ingegno, al quale si deve, oltre all'*Essai de chymie mécanique*, altri lavori, quali: *Sur la manière d'estimer la pesanteur à deux distances diff. de la terre* (*Journ. de phys.*, 1773 e 1776), *Lucrèce newtonien* (*Mém. Ac.*, Berlin 1782), *Loi qui comprend toutes les actractions et répulsions* (*Journ. des savants*, 1764) ecc.; e un trattato di fisica redatto da P. Prévost secondo le note di Le Sage, Ginevra 1818.

Forse in altro momento dovrò occuparmi di questo cultore delle scienze. Io posseggo una bella copia della sua opera principale *Essai* ecc., con dedica manoscritta del Le Sage stesso al prof. Formey, segretario perpetuo all'Accademia delle scienze di Berlino nel 1762, cioè al tempo di Federico II.

(³) R. Watt, *Bibliotheca britannica or a general Index to British and Foreign Literature*, 4 vol. in 4°, Edinburg 1824.

Era membro della Irish Academy. Nel 1789 pubblicò un'opera, *A comparative View of the phlogistic and antiphlogistic Theories* etc., London 1789, nella quale sono molte idee buone e nella quale si accettano completamente le nuove teorie del Lavoisier.

Non solo, in questo opuscolo, vi è il primo concetto di peso relativo atomico [1], ma, come osservò il Wollaston, vi è la prima idea delle proporzioni multiple, cioè il primo esempio di un corpo che si suppose combinato con diverse quantità di un altro corpo in tali proporzioni che una di queste quantità era un semplice multiplo dell'altra.

« Le premier cas dans lequel », scrive il Wollaston [2], « on a supposé que le « même corps s'unissait avec différentes proportions d'un autre, de telle manière que « l'une de ces quantités est un multiple simple de l'autre, a été observé par le « docteur Higgins, qui conçut plutôt qu'il ne chercha à représenter les dégrés suc- « cessifs d'oxidation de l'azote, et qui donna la série suivante de ses combinaisons « avec l'oxigène (*A comparative View of the phlogistic and antiplogistic Theories*, « 1789, pag. 133) :

Azote	1	avec	2	d'oxigène	forme	le gaz nitreux;
»	1	»	3	»	»	le vapeur nitreuse rouge;
»	1	»	4	»	»	l'acide nitreux jaune;
»	1	»	5	»	»	l'acide nitrique blanc.

« Il ajoute, en même temps, à cette opinion, que telles sont les proportions dans « lesquelles ces gaz s'unissent l'un et l'autre en *volume*, ayant auparavant observé « un exemple de combinaison du double en volume dans la formation de l'eau par « la combustion de l'hydrogène et de l'oxigène; et il exprima la persuasion, qu'il avait « acquise, que le nombre de particules dans les composés d'azote et d'oxigène sont « successivement dans les proportions établies ci-dessus.

« Mais quoique M. Higgins, dans le cas de la combinaison de l'hydrogène avec « l'oxigène, ait anticipé sur la loi des combinaisons en volume observée par M. Gay- « Lussac, par rapport à l'union du gaz, et qu'en concevant l'union entre les der- « nières particules, il ait clairement précédé M. Dalton dans ses vues *atomistiques* « sur la combinaison chimique, il ne paraît pas [3] avoir beaucoup cherché à s'assu- « rer l'antériorité de cette loi des proportions multiples qui soutiennent bien la théorie « *atomistique*; et c'est, en effet, à M. Dalton que nous sommes redevables de la « première observation exacte d'une combinaison d'un multiple simple dans l'union

(1) Che gli atomi avessero un peso, l'avevano ammesso Leucippo e Democrito (Zeller, loc. cit., II, pag. 296); ma era il peso nel senso generico di grave, di gravità, non di rapporto quantitativo di combinazione.

Nella sua prima opera l'Higgins chiama *ultimate particle* gli *atomi*.

(2) *Mémoire sur une échelle synoptique des équivalents chimiques* in *A. Ch.* (1), 1814, t. XC, pp. 143-144; *Phil. Trans.*, 1814, e *Journ. de phys.*, 1815, t.LXXXI, pag. 141. Il Wollaston era allora segretario della *Royal Society*.

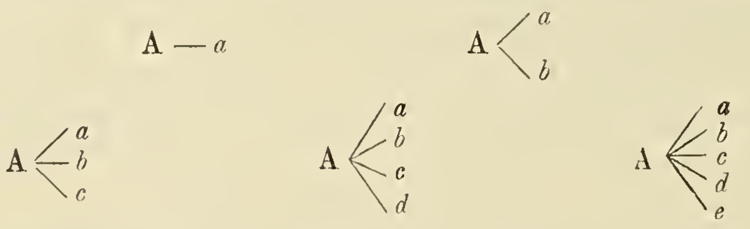
(3) « Dans l'acide nitreux jaune pâle, la proportion *paraît* être 4 à 1; mais celui qui est moins coloré contient *environ* cinq d'air déphlogistiqué ».

« des gaz nitreux avec l'oxigène. Dans ces recherches, pour déterminer la composition « de l'atmosphère, il trouva que la quantité d'oxigène contenue dans 100 mesures « d'air commun se combine avec 56 ou 72 mesures de gaz nitreux, selon la manière « de faire l'expérience » ([1]).

Il Wollaston, chimico di grande valore, contribuì colle proprie ricerche allo svilupppo e alla conferma della teoria del Dalton coi suoi lavori sui sali neutri, acidi e basici, e sugli equivalenti; fu uno dei primi, se non il primo, a confermare la legge delle proporzioni multiple. Berzelius aveva alta stima del Wollaston ([2]); era uomo rigido, modesto, coscienzioso, e certamente non avrebbe ricordato con lode i libri di Higgins del 1789 e del 1814 se di lode non fossero stati meritevoli. Egli indubbiamente non ha scritto per astio contro il Dalton, ma perchè realmente i concetti di peso e delle leggi delle proporzioni definite e multiple nel lavoro di Higgins del 1789 vi sono.

A me pare molto inesatto quanto scrive il Nernst nel suo libro *Theoretische Chemie*, 2ª ed. 1898, pag. 32 e trad. franc. *Traité de chimie générale*, 1911, I, pag. 36, che, cioè « per le proporzioni ponderali, secondo le quali i diversi elementi « si trovano contenuti nei composti a composizione costante, John Dalton (1808) trovò « una legge notevole e semplice, che si chiama la legge delle proporzioni definite e « multiple ».

L'Higgins nel suo *Comparat. View* ammise *cinque* gradi di combinazione o di attrazione dell'azoto per l'ossigeno, che rappresentò con speciali diagrammi:



Essendo A = azoto ed *a*, *b*, *c*, *d*, *e* l'ossigeno. E a pag. 135 del *Comparat. View* scriveva (1789): « This is the state of colourless nitrous acid; and, in my opinion, « no more oxygen can unite to the azote, having its whole force of attraction expen- « ded on the particles *a*, *b*, *c*, *d*, *e*. This illustrates the nature of saturation, or *definite* « *proportions* ».

Il *Comparative View* del 1789 fu riassunto nella *Monthley Review*, 1789, pag. 195 e questo riassunto fu tradotto nel *Journ. de Phys.* di Green, 1790, vol. I, pag. 348. In questo opuscolo l'Higgins si dichiara apertamente favorevole alla teoria antiflogistica del Lavoisier.

L'esempio di Higgins, Beddoes, Nicholson, Black e Kirwan fu di tale importanza che indusse tutti i chimici inglesi ad accettare la teoria antiflogistica del Lavoisier; rimasero attaccati alla teoria del flogisto solamente Cavendish e Priestley.

([1]) *Manchester's Memoirs*, vol. V; *Nichols. Journ.*, vol. XIII, pag. 433.

([2]) Ved. I. Guareschi, *J. J. Berzelius e la sua opera scientifica, con brevi cenni sulla chimica nella prima metà del secolo XIX* (dal *Suppl. Ann.*, 1815, vol. XXXI, pp. 305 a 460).

Il lavoro dell'Higgins avrebbe dovuto esser ben conosciuto; ma allora si era in pieno periodo della chimica sperimentale, ed i lavori prettamente speculativi attiravano meno l'attenzione dei dotti (*Kahlbaum Monographien*, *Lavoisier*, pp. 132-134). Hoefer [1] scrive che « William Higgins credeva al fatto delle proporzioni multiple, ma non l'espose in forma di legge ».

Nel 1814 Higgins pubblicò un grosso opuscolo assai interessante: *Experiment and Observations on the Atomic Theory and Electrical Phenomena*, Dublin 1814, che fu riassunto da Th. Thomson nel suo *Journ. of Philos.*, 1814, vol. IV, pp. 52-56. In questa opera l'Higgins, forse con un po' di esagerazione, rivendica a sè la priorità della teoria atomica moderna. Per quanto il carattere del Dalton non ci lasci dubbio che egli abbia concepito la sua teoria indipendentemente dalle idee dello Higgins, pure è giustizia l'osservare che nell'opera di questi, pubblicata nel 1789, vi è esposta la base, e vi sono citati i principali fatti, che hanno servito a fondare la teoria daltoniana. Egli aveva già nettamente affermato che i corpi si combinano in proporzioni definite, e aveva già una idea chiara delle proporzioni multiple. Non vi aggiunse nulla di sperimentale: e questa fu una delle cause per cui non fu data grande importanza al suo lavoro. Davy e Wollaston conoscevano l'opera dell'Higgins e l'hanno anche molto apprezzata.

La storia imparziale non deve dunque dimenticare il nome di Higgins, da mettersi vicino a quello di Dalton.

H. Davy conosceva, come tanti altri chimici, l'opuscolo di Higgins; e nella sua Memoria: *Esperienze su alcune combinazioni del gas ossimuriatico e dell'ossigeno e sui rapporti chimici di questi principii coi corpi combustibili* [2] scrive:

« Nella mia ultima comunicazione alla Società reale io ho citato Dalton come « il primo autore dell'ipotesi che l'acqua è formata d'una parte di ossigeno e d'una « di idrogeno; ma, dopo, io ho trovato che questa opinione era già stata emessa in un « libro pubblicato nel 1789, col titolo: *Vedute comparative delle teorie flogistica « e antiflogistica*, di William Higgins.

« In quest'opera accurata ed ingegnosa il signor Higgins ha figurato felice- « mente più modi in cui (nell'ipotesi corpuscolare) le parti o molecole dei corpi pos- « sono combinarsi; e alcune di queste vedute, benchè concepite nel primo periodo « di ricerche, mi sembrano più sostenibili ammettendo i suoi dati che non quelli « di altri emessi dopo; ad esempio, considera il gas nitroso come composto di 2 parti « d'ossigeno e 1 d'azoto. Il signor Higgins ha egualmente tratto una conclusione « giusta rispetto alla costituzione dell'idrogeno solforato secondo il metodo di decom- « porsi coll'elettricità. Essendochè l'idrogeno è la sostanza che si combina cogli altri « corpi in più piccola quantità, è forse la sostanza più propria a rappresentare la « unità. Secondo questa idea, la proporzione degli elementi dell'ammoniaca sarebbe « 3 di idrogeno e 1 d'azoto; e il numero rappresentante la più piccola quantità « nella quale l'azoto si combina, sarebbe 13,4. Dalton (*Nuovo sistema di filosofia*

(1) *La Chimie enseignée par la biographie de ses fondateurs*, pag. 219.

(2) Memoria letta alla Società reale di Londra il 15 novembre 1810; in *A. Ch.*, 1811 (1), t. LXXVIII, pag. 327, e *Journ. de phys.* 1811, t. LXXII, pag. 570.

« *chimica*, pp. 323 e 431) ha adottato 4,7 oppure 5,1 per rappresentare il peso di « un atomo di azoto. Egli ha citato le mie esperienze (*Ricerche filosofiche e chi-« miche*), come se autorizzassero quei numeri; ma tutte le ricerche contenute in « quest'opera, sull'acido nitrico, il gas nitroso, l'acido nitroso e la decomposizione « del nitrato di ammoniaca, si accordano molto meglio col numero 13,4 ».

È curioso l'osservare che il Dalton nel vol. II del suo *Nuovo sistema di filosofia chimica*, adotta l'opinione che la potassa e la soda siano ossidi metallici; ma alla fine del volume li considera come corpi semplici, ed i metalli che ne derivano (potassio e sodio) come dei composti della potassa e della soda coll'idrogeno. Anche il Davy non poteva capire da che dipendesse questo cambiamento di opinione del suo illustre compatriota (*Journ. de phys.* t. LXXII, pag. 766).

H. Davy anche nell'introduzione ai suoi *Elementi di filosofia chimica* (¹), scrive che « dalla legge delle proporzioni multiple il Dalton fu condotto ad adottare l'ipotesi atomica che già nel 1789 l'Higgins aveva abilmente sostenuta, e secondo la quale gli elementi chimici consistono di particelle indistruttibili, le quali si uniscono una ad una, o una a due, o in numero qualunque determinato ».

È d'uopo non dimenticare che H. Davy non era in buona relazione con Dalton; ma però, in fondo, egli ha affermato la verità.

Nei primi decennii del secolo XIX tutti i migliori trattati di chimica ricordavano, relativamente alla teoria atomica, sempre il nome dell'Higgins prima di quello del Dalton, ora invece, è quasi dimenticato. È una ingiustizia.

Del resto, che anche prima del Dalton si sia espressa l'idea che uno stesso corpo poteva formare diversi gradi di ossidazione e in determinate proporzioni, risulta molto chiaro. Basta leggere il capitolo *Osservazioni sulle combinazioni binarie dell'ossigeno con le sostanze semplici metalliche e non metalliche*, del Lavoisier (*Traité de chim.*, 1789, vol. I, pag. 203), per persuadersene. Egli dà una grande tabella che comprende corpi conosciuti e non ancora conosciuti che formano un primo, un secondo, un terzo e un quarto grado di ossidazione. Per l'azoto dà la serie seguente:

ossido nitroso
acido nitroso
acido nitrico
acido nitrico ossigenato (incognito).

Ma il Lavoisier non diede numeri che rappresentino queste proporzioni. La tabella data dal Lavoisier, e relativa ai diversi gradi di ossidazione di un medesimo corpo, fu da me riprodotta nel mio libro *J. J. Berzelius e la sua opera scientifica*, Torino 1915, in *Suppl. Ann.*, 1915, pag. 457.

I chimici non furono colpiti dall'importanza delle osservazioni di Dalton se non quando Thomson e Wollaston pubblicarono le loro ricerche sui sali neutri, sottoacidi e sovracidi.

(¹) H. Davy, *Éléments de philos. chim.*, 1812, vol. II, pag. LII; e *The collected Works*, IV, pag. 39. Davy discorre con lode di W. Higgins anche nel suo Discorso presidenziale della *Royal Society* pronunciato il 30 novembre 1825, quando fu conferita la medaglia Copley ad Arago. Ed anche nel Discorso del 1826.

« Quelque temps avant les travaux de Richter et de M. Berthollet », scriveva « Berzelius nel 1819 [1], « un savant irlandaise, nommé Higgins, avait publié un ou- « vrage intitulé *A comparative View of the phlogistic and antiphlogistic theo-* « *ries* (1789), dans lequel il envisageait sous un nouveau point de vue les différents « degrès de combinaison qui peuvent avoir lieu entre les mêmes corps. Il y établit « que les corps sont composés de particules ou d'atomes. Selon lui, un nouvel atome « d'oxigène ajouté à un oxide, c'est à-dire à un corps composé d'un atome de ra- « dical et d'un atome d'oxigène, produit un nouveau degrès d'oxidation. Cependant « M. Higgins lui-même parut attacher peu d'importance à cette hypothèse, dont il « ne chercha d'ailleurs à démontrer la vérité par aucune expérience analytique; il « ne pressentit pas même les proportions multiples que en sont la consequence né- « cessaire. Son ouvrage éxcita peu d'attention, et ne tarda pas à tomber dans « l'oubli » [2].

Rispetto all'Higgins, ecco quanto scriveva Berzelius, ancora nel suo *Traité de chimie*, 1845, IV, pag. 492:

« Ma Higgins, scienziato irlandese, emise il primo l'idea di numeri relativi de- « terminanti, secondo i quali le particelle dovrebbero combinarsi; questa idea si « trova enunciata in un'opera *A comparative View of the phlogistic and anti-* « *phlogistic theories* (1789), nella quale si considerano sotto un nuovo punto di vista i « differenti gradi di ossidazione che possono aver luogo tra i medesimi corpi. Egli « stabilisce che i corpi sono composti di particelle o atomi. Secondo lui, un nuovo « atomo di ossigeno aggiunto ad un ossido, vale a dire ad un corpo composto di un « atomo di radicale e di un atomo di ossigeno, produce un nuovo grado di ossida- « zione. Però lo stesso Higgins pare attribuire poca importanza a questa ipotesi; « egli non cercò di dimostrare la verità con alcune esperienze analitiche; egli non « previde le proporzioni multiple che ne sono la conseguenza necessaria. La sua « opera eccitò poco l'attenzione e cadde nell'oblio.

« Quindici anni dopo, John Dalton riprodusse la stessa idea; ma ne fece una « applicazione più estesa e cercò di verificarla coi risultati delle migliori analisi... ».

Sia pure, noi non vogliamo togliere il merito al Dalton; ma lo storico imparziale dovrebbe denominare la nuova teoria atomica, ove è l'idea di peso, di misura, *teoria atomica di Higgins-Dalton.*

Il primo che emette una idea buona, geniale, non dovrebbe mai essere dimenticato.

Anche il Macneven, nell'*Exposition de la théorie atomique* [3], ricorda Higgins quale precursore del Dalton e scrive:

« Higgins, professeur de chimie à Dublin, dans un livre qu'il publia en 1789, « approche beaucoup de la théorie atomistique; il donne en effet la composition des

[1] *Essai sur la théorie des proportions chimiques et sur l'influence de l'électricité.* Paris, 1819, pag. 11.

[2] « Trente années plus tard, M. Higgins voulut prouver que cette hypothèse, dont il n'avait fait qu'une application fort limitée, devait le faire considérer comme l'auteur de la découverte des proportions multiples » (Berzelius).

[3] *Journ. de Phys.*, 1821, t. XCII, pag. 278.

« acides sulfurique et sulfureux, celle de l'eau et des composés d'azote et d'oxigène, « presque comme on les admet aujourd'hui. Mais ses expériences particulières furent « trop peu nombreuses, et il n'y avait pas assez des quantités fournies par les au- « tres, pour qu'il pût avoir des matériaux suffisans à l'établissement de la théorie « atomistique. Pendant les 21 ans qui se sont écoulé depuis la publication des « *Vues comparatives* de M. Higgins, jusqu'à la publication des *Éléments de chimie* « *philosophique* de Dalton, le premier aurai pu sans doute s'assurer à lui-même la « reputation dont il est maintenant si désireux; mais s'il est franc et vrai, il avou- « era que la célébrité sans travaux n'est ni légitime ni susceptible d'être atteinte « dans le champ des sciences, et que la réputation d'une découverte appartient juste- « ment à celui qui, non-seulement a été le plus assidu à ses travaux, mais qui en « outre a été le premier à la publier et à en faire l'application. Quoique M. Thomson « n'ait été pour rien dans la découverte de la théorie atomistique, il n'y a peut-être « pas de chimistes en Angleterre qui ait autant fait pour elle. MM. Berzelius et Gay- « Lussac ont poussé les principes de cette théorie aussi loin au-delà du point où ils « avaient été laissés par M. Dalton, que celui-ci l'avait fait en partant des premières « et faibles suggestions de M. Higgins. Elle est maintenant reçue partout, et con- « stamment perfectionnée ».

La direzione del *Journ. de Phys.* fece subito notare che questo giudizio su Higgins era troppo severo. E giustamente scriveva: « Ci sembra che Macneven sia qui « un po' troppo rigoroso verso Higgins. Infatti vi sono due sorta di scoperte: l'una « che ha luogo prima del tempo voluto dalla maturità della scienza (ed allora essa « rimane più o meno lungo tempo come non avvenuta, benchè sia realmente esatta); « e l'altra che si fa valere in circostanze opportune (e in questo caso essa è am- « messa quasi subito, perchè può essere allora generalmente compresa). Ma se « la prima appartiene realmente a un solo individuo, non è lo stesso nel secondo « caso, perchè essa, come suol dirsi, è l'espressione abbreviata dello stato della scienza, « e per conseguenza essa è dovuta ad un certo numero di contemporanei i quali la- « vorano nella stessa direzione pel suo progresso ».

Dunque l'idea di Higgins era buona, ma prematura. Vi è qualche cosa di analogo come per Avogadro.

Rispetto all'Higgins, il Thenard nel 1825 (¹) scriveva:

« Les lois que nous venons d'exposer appuient fortement un système que M. Dalton « avait fait connaître dans sa *Philosophie chimique*. Ce système, qu'on appelle *sy-* « *stème atomistique*, et dont on trouve les premiers indices dans un ouvrage de « M. Higgins, publié en 1789, est trop remarquable pour que nous n'en donnions « point une idée précise ».

Faraday, nelle sue *Letture sugli elementi non metallici* (*The subject watter of a course of six lectures on the non-metallic elements*, London 1853), a pag. 31, scriveva riguardo ad Higgins: « It would nevertheless be unjust to the late Mr. Higgins, « of Dublin, were the circumstance not mentioned that he had entered upon certain « trains of reasoning which, if persevered in, must have conducted him to the di-

(¹) *Traité de Chimie*, 4ᵐᵉ édit., 1824, vol. I, pag. 20.

« scovery of Dalton. Mr. Higgins, in his comparative views of the phlogistic and « antiphlogistic theories, published in 1789, states, p. 36 and 37, that in volatile « vitriolic acid, a single ultimate particle of sulphur et intimately united only to « a single particle of dephlogisticated air; and thus, in perfect vitriolic acid, every « single particle of sulphur is united to two of dephlogisticated air, being the quantity « to saturation. A similar trains of reasoning is applied by Mr. Higgins to the « constitution of water, and the compounds of nitrogen and oxygen ».

Anche Ern. v. Meyer (*Storia della chim.*, ed. it., 1915, pag. 201) è di parere che Higgins *può certo considerarsi come precursore di Dalton.* Però fa notare che lo scritto di W. Higgins, del 1789, fu conosciuto da Dalton solo nel 1810. Ma a noi oggi reca meraviglia come, in tempi in cui la raccolta bibliografica era abbastanza facile, un professore di chimica quale Dalton, non conoscesse, verso il 1800, un lavoro scritto nel 1789 da un suo collega, pure professore di chimica e vivente.

A pag. 208 Ern. v. Meyer scrive: « Certo, Higgins espresse opinioni che ad « un'osservazione superficiale sembravano simili a quelle di Dalton, poichè egli ritenne « che le particelle più minute si riunissero secondo rapporti semplici, per formare « composti chimici. Ma queste affermazioni non avevano alcun nesso tra di loro e « non si basavano su esperienze. Davy stesso si accorse, più tardi, che Higgins non « poteva pretendere di essere il fondatore della teoria atomica, e riconobbe il merito « del Dalton » Tutto questo sta bene; ma se Higgins non può essere riguardato come il fondatore della teoria atomica, indubbiamente vi ha contribuito. E si noti che pure nel 1789 il Lavosier aveva nel suo *Traité* data una tavola dei diversi gradi di ossidazione, dalla quale un'intelligenza non comune poteva dedurre la legge delle proporzione multiple (V. sopra pag. 302). Ai tempi dell'Higgins non vi erano ancora le ricerche di Richter, di Proust, ecc., sulle proporzioni definite, come invece ai tempi di Dalton. Che poi il Davy abbia revocato il suo primo giudizio, non fa meraviglia quando si pensi al carattere del Davy stesso.

Ern. v. Meyer, in un'altra opera, è d'avviso che l'Higgins sia un vero predecessore del Dalton, avendo l'Higgins avuto l'idea chiara che le piccole particelle della materia (atomi) si combinano in proporzioni fisse e in diversi rapporti (1).

Ed il Wurtz, nella sua *Introduction à l'étude de la chimie*, 1885, scrive:

« Questa ipotesi dei filosofi greci, rinnovata, era stata enunciata vagamente prima « di Dalton, tra gli altri da Higgins, il quale nel 1790 (1789) aveva ammesso che « le combinazioni dei corpi tra essi si fanno per la giustapposizione degli atomi in « proporzioni diverse, ma semplicissime; solamente, egli attribuiva a tutti quegli atomi « lo stesso peso, ciò che toglie ogni valore alla sua idea; ed a torto si è considerato « Higgins come uno degli autori della teoria atomica moderna ».

E nel suo bel libro *La théorie atomique*, 1879, pag. 19, il Wurtz, dopo accennato al Dalton, scriveva: « Il y avait là une conception juste; les dernières particules « des corps diffèrent par leurs poids relatifs et sans doute par leur grandeur et leur « forme. En 1790, Higgins a pris le contrepied de cette hypothèse en attribuant « faussement le même poids aux atomes qui se combinent, suivant des proportions

(1) *Die Kultur der Gegenwart*, II; *Chemie.*

« très-simples, pour former les corps composés. Ainsi, Higgins admettait qu'une partie « pondérable de soufre est combinée, dans l'acide sulfureux, avec une partie pondé- « rable d'oxygène et dans l'acide sulfurique avec deux parties pondérables d'oxygène, « et que ces combinaisons peuvent être représentées comme formées, la première, « d'un atome de soufre avec deux atomes d'oxygène, les atomes de ces deux éléments « possédant d'ailleurs des poids égaux. Il admettait, le même, qu'une partie pondé- « rable d'azote était unie à deux parties pondérables d'oxygène dans le bioxyde « d'azote, et à cinq parties pondérables d'oxygène dans l'acide nitrique. Il représen- « tait, par conséquent, ces combinaisons comme formées par l'union do particules ou « atomes, de même poids, mais unis en proportions différentes (un d'azote pour deux « d'oxygène, dans le bioxyde d'azote; un d'azote et cinq d'oxygène dans l'acide ni- « trique) ».

Tutto ciò è giusto sino ad un certo punto; ma si può anche notare che l'Higgins, all' idea di atomo quale l'avevano avuta gli antichi, poi Basso, Gassendi ed altri, aggiunse quella del peso relativo e l'altra di combinarsi in proporzioni fisse e diverse. La più esatta idea del peso l'ha data poi il Dalton attribuendo ad ogni elemento o corpo un determinato peso atomico; ma ciò non toglie che l'opera dell'Higgins non possa aver avuto una felice influenza sulla mente del Dalton.

Concediamo pure che Higgins abbia errato nell'ammettere che gli atomi hanno egual peso; ma l' idea di combinazioni in rapporti ponderali costanti e multipli vi è certamente. Tutto questo è chiaro. Certo che il Dalton ha fatto un passo di più; ma, se egli conosceva l'opera dell'Higgins, è indubitato che quest'opera gli ha agevolato il passo. Tanto più che nel 1789, quando l'Higgins scriveva, non vi erano ancora, come già dissi, le analisi di tanti composti, eseguite poi dal Proust.

Allora dovremmo anche dire che il Dalton ha sbagliato rappresentando l'ammoniaca come l'unione di un atomo di azoto con uno di idrogeno, quando già si sapeva che 1 vol. di azoto è nell'ammoniaca cambiato con 3 vol. d'idrogeno: perchè il numero che egli dà (5 esatto 4,66) come peso dell'atomo di azoto, è invece il peso dell'equivalente o numero proporzionale.

Secondo Th. Thomson, il Dalton avrebbe ideato la sua teoria dalla composizione di composti di azoto e ossigeno (¹). Ma è precisamente ciò che aveva fatto l'Higgins, il quale, nella sua opera del 1789, discorre a lungo dei composti dell'azoto coll'ossigeno. E nel suo secondo libro, pubblicato nel 1814, riporta appunto tutto quanto risguarda le combinazioni dell'azoto con l'ossigeno (pp. 119 e seg.).

Lontano è da me il pensiero di togliere o di diminuire il merito a Dalton; ma, dato che egli conoscesse l'opera di Higgins, e dalla lettura di questa balenasse nella sua mente la prima idea della teoria atomica, avrebbe dovuto dirlo, perchè avrebbe non solo detto il vero, ma non sarebbe stato diminuito di molto il suo reale merito di aver esposto la teoria nel modo magistrale come egli ha saputo fare.

È un fatto innegabile che frequentemente Davy, Wollaston ed altri, dopo la pubblicazione della *Filosofia chimica* di Dalton, parlano anche di Higgins. La storia ha il dovere di registrare questi lavori quasi obliati, ne' quali trovansi idee buone,

(¹) *History of Chemistry*, 1831, II, pag. 289.

certamente imperfette, ma che possono aver acceso quella scintilla da cui scaturirono lavori di molto maggiore importanza.

È certo che, quando Dalton ha concepito la sua teoria, il terreno era preparato, almeno in parte, a riceverla, dalle precedenti pubblicazioni, non solo di Higgins, di Lavoisier e di Proust, ma anche di Wenzel e di Richter. Se l'Inghilterra si onora di aver avuto Dalton, deve onorarsi anche di Higgins. Avviene non di rado che una scoperta, specialmente di natura speculativa, resta ignorata nel paese stesso ove è nata; poi, quando lo stesso argomento ha attratto l'attenzione degli scienzati per altre vie, si vengono a conoscere e ad apprezzare i lavori pubblicati anteriormente.

È dunque una ingiustizia verso W. Higgins il tacere affatto il suo nome a proposito della moderna teoria atomica. Certo il gran nome di Dalton, tanto come fisico quanto come chimico, ha tenuto e tiene nell'ombra l'altro, meno splendente, di Higgins; ma lo storico deve eliminare queste ingiustizie.

Higgins ha fatto delle considerazioni importanti intorno all'*affinità*, alla meccanica molecolare, che furono ben chiaramente messe in luce dal Salet [1] e sulle quali tornerò forse a suo tempo; non solo, ma l'opuscolo dell'Higgins contiene molte altre interessanti osservazioni.

L'Higgins, nell'opera pubblicata nel 1814 (*Experiment a. Obser.* ecc.), più sopra citata, riporta molti lunghi brani della sua prima opera, ora molto più rara di questa seconda. Egli in questo suo opuscolo usa i simboli analoghi a quelli di Berzelius, e scrive: A = azoto, O = ossigeno, S = solfo, C = copper (rame), I = iron (ferro) ecc.

Il nome di *struttura* per indicare la disposizione o l'assettamento delle particelle nell'interno de' corpi è stato usato, io penso, forse per la prima volta, da W. Higgins, a proposito dell'acido nitrico (ved. opera citata del 1814, pag. 117). Di W. Higgins dirò probabilmente più a lungo in un altro lavoro.

Oltre alle due opere citate, l'Higgins scrisse:

An essay on the theory and practice of bleaching, wherein the sulfuret of lime is recommended as a substitute for potash 1779;

On the origine of the atomic theory (Tilloch, *Phil. Mag.*, 1816, tom. XLVIII, pag. 365;

Remarks on a paper by Mr. Dalton on the chemical compounds of azote and oxigen ecc. (Tilloch, *Phil. Mag.*, 1817, tom. 49, pag. 241).

È indubitato che nell'opuscolo pubblicato dall'Higgins nel 1789 vi sono esposte delle idee che dànno a lui un posto elevato nella storia della teoria atomica moderna e delle leggi delle proporzioni definite e multiple. Higgins costituisce il vero anello di congiunzione fra la vecchia teoria atomica e la nuova.

Sembra a me che si dovrebbe distinguere la *ipotesi atomistica* di Leucippo e Democrito sino a Basso e Gassendi, dalla moderna *teoria atomica* di Higgins-Dalton. In quest'ultima vi è non solamente l'idea della divisibilità limitata dei corpuscoli,

(1) Ved. l'art. *Affinité*, nel *Dictionn. de Chim.* del Wurtz, vol. I, pp. 71-76. William Higgins non deve essere confuso con Bryan Higgins, il quale, oltre ad alcuni lavori riguardanti la luce, l'elettricità ecc., pubblicò un opuscolo, *Experiments and observ. relating to acetous acid, fixable air, dense inflammable air* ecc., 1786, ma non pensò mai alla teoria atomica o alle leggi chimiche.

ma vi è anche l'idea meccanica e principalmente di peso o, meglio, di rapporti di peso; la *ipotesi atomistica* ha un significato costitutivo *qualitativo*; la *teoria atomica* ha inoltre un significato *quantitativo*.

Il concetto di *peso relativo* dell'atomo devesi unicamente a Higgins e poi a Dalton; a nessuno dei loro predecessori.

La *teoria* o *ipotesi atomistica* è, a mio avviso, passata per i due periodi seguenti:

I) da Leucippo e Democrito a Lucrezio;

II) da Lucrezio all'atomistica araba, a Bruno, S. Basso e Sennert sino a Gassendi, Bernoulli e Le Sage.

E la vera *teoria atomica moderna* va pure distinta in due periodi:

I) da Higgins, Dalton e Avogadro alla

II) costituzione e demolizione dell'atomo ([1]).

Questa differenza sostanziale, sulla quale io insisto, era stata ben afferrata ed esposta già dal Wurtz ([2]): « Une autre conception théorique a donné un corps à « l'hypothèse électro-chimique, comme elle a donné depuis une base totale à la chimie « tout entière: nous voulons parler de l'hypothèse des atomes renouvelée des Grecs, « mais qui a pris, au commencement de ce siècle, une forme nouvelle et une expres- » sion précise. Elle est due à la pénétration d'un penseur anglais, Dalton, qui pro- « fessait la chimie à Manchester au commencement de ce siècle. Elle était moins « une spéculation pure de l'esprit comme les idées des atomistes anciens et des phi- « losophes de l'école cartésienne, qu'une représentation théorique de faits bien con- « statés, savoir de la fixité des proportions suivant lesquelles les corps se combinent « et de la simplicité des rapports qui expriment les combinaisons multiples entre « deux corps ».

Per molte questioni riguardanti la teoria atomistica si può consultare l'opera del Fechner ([3]).

Si è voluto da alcuni attribuire la teoria atomica a D. Bernoulli. È un errore. Nel mio lavoro *Daniele Bernoulli ed Amedeo Avogadro e la teoria cinetica dei gas* ([4]) io ho scritto:

« La teoria atomica è di Dalton; Dalton ha ripreso l'antico concetto degli atomi « di Democrito e di Epicuro e poi di Gassendi, ed ha emesso la sua teoria nel 1804- « 1808 indipendentemente dai lavori di Bernoulli e tenendo conto delle proporzioni « secondo cui i corpi si combinano e di altre leggi sperimentali. Nessuno di coloro

([1]) Ora si parla e si discute anche della compressibilità degli atomi; e su questo modernissimo argomento può essere letto con profitto un discorso di Th. Richards, *Intorno allo stato attuale dell'ipotesi di atomi compressibili* (in *Supplem. Ann. all'Encicl. di Chim.*, 1915, pag. 225). La conservazione apparente dell'Universo, scrive Richards, suggerì ad alcuni antichi filosofi l'idea che le particelle o atomi non potessero mai essere distrutte, e quindi concepirono l'idea che gli atomi fossero infinitamente duri. Newton ereditò questa idea e parlò di particelle dure, massiccie.

([2]) *La théorie des atomes dans la conception générale du monde*, par Ad. Wurtz. Paris, 1875, pag. 15.

([3]) G. Th. Fechner, *Ueber die physikalische und philosophische Atomenlehre*, 2ª edizione, Leipzig 1864.

([4]) *Atti R. Accad. delle scienze di Torino*, 1910, tom. XLV.

« che hanno scritto, anche ampiamente, sull'origine della teoria atomica nella mente « di Dalton, ha mai pensato che egli deducesse la sua teoria dal lavoro di Bernoulli; « nè Charles Henry, nè Aug. Smith, nè Harden e Roscoe hanno mai sospettato ciò. « È stata veramente geniale la teoria daltoniana, ed ha avuto un immensa influenza « nel progresso della chimica; senza con ciò voler dire, come fa il Roscoe, che John « Dalton sia il fondatore della chimica moderna.

« Bernoulli ha avuto il grande merito di concepire la materia aeriforme come « costituita da piccole particelle in continuo movimento; nessuno può a lui negare « questo merito, origine della teoria cinetica; ma andare più in là, e vedere in ciò « la teoria atomica di Dalton, che nacque invece dalla osservazione dei fatti e prin- « cipalmente dalle tre leggi sperimentali della costante composizione dei corpi, delle « proporzioni multiple e della equivalenza secondo la quale i corpi si combinano, è « un voler negare la verità. Dalton scoprì, fra le particelle materiali, delle relazioni « di peso; coll'ipotesi di Dalton si previdero nuovi fatti, si spiegarono le leggi « recentemente scoperte, ecc., il che non era possibile con quanto aveva ammesso « Bernoulli ».

II.

Sebastiano Basso e la sua opera scientifica.

Nel 1905, nel capitolo *Origine orientale dell'idea di elemento e di atomo*, di un mio lavoro *Generalità sugli elementi* (1), io scrivevo:

« Nel secolo XVII comincia a modificarsi l'idea di elemento. Si ritorna, da « molti filosofi, alle idee di Aristotele e si modificano. L'idea della *immutabilità* degli « elementi nasce con Gorlaeus e d'Espagnet. In questo tempo sorse un filosofo ita- « liano, poco conosciuto, ma di grande valore, che pel primo introdusse l'idea di « cinque sostanze fondamentali: era *Sebastiano Basso*. Di questo scrittore dirò più « ampiamente in un altro mio lavoro ».

Già prima d'allora io, volendo per mio conto riassumere i lavori dei filosofi atomisti per arrivare poi a Higgins e a Dalton, mi incontrai in Sebastiano Basso, che era tenuto in considerazione anche dal Mabilleau (2). Ma veramente fu il libro del Lasswitz sulla storia dell'atomistica che mi decise a scrivere qualche cosa intorno a questo scienziato di valore ed intorno al quale tanto poco si conosce.

Il primo autore, scrive Lasswitz, in cui si incontra l'idea di cinque elementi o principii fondamentali, invece di quattro, è Sebastiano Basso (1621). Basta che ora io qui ricordi un breve cenno che tolgo dal Lasswitz (3):

« L'ipotesi ammessa da Gorlaeus, d'Espagnet ed Helmont, che, dei tre elementi, « solo due, cioè l'acqua e la terra, entrassero come parte costituente nei composti

(1) I. Guareschi, *Generalità sugli elementi e loro composti: acidi, basi e sali.* Torino, 1906 (dalla *Nuova Enciclop. di Chim*, vol. I, pp. 1031-1192, in-4° a due colonne).

(2) *Historie de la philos. atomistisque.* Paris, 1895.

(3) Opera cit., pag. 339.

« chimici, precede un allargamento nel numero delle sostanze chimiche elementari, « che, da tre, divennero cinque. Questo aumento avvenne nel principio del XVII secolo, « ma si generalizzò soltanto nella seconda metà dello stesso secolo. I chimici, nelle « loro scomposizioni, avevano trovato, oltre al mercurio, solfo e sale, anche dei resti « insolubili, che essi chiamarono *phlegma caput mortuum* (o *faeces*). Essi li con« sideravano come una specie di principî passivi in contrasto dei tre principî attivi « di Paracelso; da ciò a identificarli cogli elementi acqua e terra, il passo era breve. « Il primo autore in cui s'incontrino i cinque elementi è Basso (1721); l'equiva« lenza di *aqua* col *phlegma* e di *terra* col *caput mortuum* si trova per la prima « volta in Etienne de Claves (1624) ».

La filosofia di Sebastiano Basso interessa non solo l'atomistica in senso astratto, ma ben anco la fisica e la chimica molecolare nel senso moderno. Basso, che ha studiato a fondo anche le opere di Bruno, è, dopo Lucrezio, il primo vero filosofo atomistico; ma meglio di Lucrezio è penetrato nell'essenza delle cose ed ha emesso delle idee veramente moderne.

Dell'opera intera di Sebastiano Basso, specialmente filosofica, io non posso trattare perchè uscirei troppo dall'àmbito delle mie conoscenze scientifiche; ma con questo mio lavoro vorrei incitare qualcuno che meglio di me facesse conoscere l'importante opera di quest'uomo. La conoscenza, l'apprezzamento e una giusta interpretazione dell'opera filosofico-scientifica di Sebastiano Basso devesi al Lasswitz. In Italia invece si è scritto pochissimo intorno a questo filosofo; anzi potrei dire di non conoscere nessun lavoro italiano di qualche importanza intorno a questo filosofo scienziato o a questo medico-filosofo.

Al tempo di Lucrezio, come anche al tempo di Basso, era ben più difficile che non oggi avere un'idea chiara delle particelle piccolissime, invisibili. E quando Lucrezio volle dare una rappresentazione mentale del movimento atomico, cioè delle particelle piccolissime, non seppe fare di meglio se non rivolgere lo sguardo ad un raggio di sole che penetri in una camera oscura e di osservare i *granelli*, o meglio, le *particole* che si muovono e si urtano in tutte le direzioni. Oggi sappiamo che quei granelli o particole costituiscono il cosiddetto *pulviscolo atmosferico*, così magistralmente studiato dal Pasteur. Lucrezio diceva che quel movimento visibile non era che il risultato di un più complicato movimento degli atomi invisibili, i quali da tutte le parti urtano queste particelle (1).

Idee ancora più chiare di Lucrezio aveva il Basso.

Rispetto allo spirito di libertà e di ribellione contro le tradizioni aristoteliche d'allora, il S. Basso si connette con Ruggero Bacone, il quale, come già scrissi nel mio *Ruggero Bacone, il metodo sperimentale e Galileo* (2), fu uno dei più grandi ribelli, come lo furono poi Ramus, Bruno, Vanini, Basso ed altri.

(1) Qualcuno potrebbe trovare in queste parole l'idea moderna della causa del movimento browniano; ma ciò non è (ved. sopra).

(2) I. Guareschi, *Ruggero Bacone, il metodo sperimentale e Galileo*, in *Mem. R. Acc. delle Scienze di Torino*, 1914-1915, tom. LXV, pag. 57.

Il povero nome di Sebastiano Basso è rimasto soffocato dai soliti grandi nomi di Gassendi, Descartes, ecc.; ma certe idee fondamentali, originali, sono sue. Bisogna essere giusti e dare ad ognuno ciò che gli spetta.

Vi sono non pochi scrittori, specialmente francesi, i quali, quando discorrono del pensiero filosofico, tutto concentrano in pochi grandi uomini della loro nazionalità, e tacciono affatto dei così detti minori, e anche dei maggiori, ma di altri paesi; ma se si guardi bene, spesso i così detti *minori* sono stati coloro che hanno emesso le prime idee direttive. Tra questi storici parziali ricordo il Damiron (1), che discorre a lungo di Gassendi, di Spinoza, ma non accenna affatto a G. Bruno, a Sebastiano Basso; eppure è indubitato che Gassendi deriva da Basso, e ancor più Spinoza da G. Bruno.

A me sembra che gli storici della filosofia abbiano apprezzato in modo molto imperfetto l'opera scientifica di Sebastiano Basso.

Probabilmente nelle biblioteche di Francia si troveranno dei manoscritti inediti di Seb. Basso, come lo farebbero dubitare alcune frasi del suo libro *Philosophiae naturalis*, l'unico che io conosca. Basso viveva in quel terribile periodo in cui le idee filosofiche liberali a larghe vedute, quali quelle di G. Bruno, C. Vanini, Campanella, Galileo ed altri, tenevano in gran sospetto l'Inquisizione. Cremonini non era forse da porsi vicino a questi grandi spiriti per l'arditezza del pensiero (2).

Sebastiano Basso è di quei filosofi naturalisti a larghe vedute che mandano sprazzi di luce in molte parti del sapere. Egli, come critico dell'opera aristotelica scolastica, entra nel novero di quei pensatori ribelli della scuola di Giordano Bruno. Ma la terribile fine di quegli spiriti liberi che furono Bruno (1600) e Vanini (1619) aveva spaventato tutti coloro che anelavano al libero pensiero (3); Sebastiano Basso stimò

(1) M. Ph. Damiron, *Essai sur l'hist. de la philos. en France, au XVII^e siècle* (Paris, 1846, 2 vol., in-8°); e così pure del Nourrison ed altri scrittori.

(2) Però rispetto al Cremonini, Renan scriveva: « Cremonini a été jusqu'à présent apprécié d'une façon fort incomplète par les historiens de la philosophie. On ne l'a jugé que par ses écrits imprimés, qui ne sont que ses dissertations de peu d'importance et ne peuvent en aucune façon faire comprendre la renommée colossale à laquelle il parvint » (*Averroès*, pag. 140, citato da L. Mabilleau in *Étude hist. sur la philos. de la renaissance en Italie. Cesare Cremonini*, Paris, 1881). Mabilleau (loc. cit.) fa notare che Cremonini è morto nel 1631, cioè nell'anno stesso in cui furono pubblicati *I dialoghi sui due massimi sistemi del mondo* di Galileo e dieci anni dopo la pubblicazione del *Novum organum* di Bacone; si potrebbe aggiungere: dieci anni dopo la pubblicazione della *Philosophiae naturalis* di S. Basso. I *Dialoghi* di Galileo furono pubblicati in italiano nel 1632, e il *Novum organum* nel 1620.

(3) L'esempio della fine di G. Bruno, e più ancora quella di G. C. Vanini, più vicino a lui, deve aver fatto una sgradevole e spaventosa impressione nell'animo di Sebastiano Basso.

Giulio Cesare Vanini, nato nel 1585 in Taurisano, paese di Terra d'Otranto, fu condannato a Tolosa il 9 febbraio 1619; la sentenza decretava che « G. C. Vanini in camicia con una corda « al collo fosse consegnato nelle mani del carnefice; che sulle spalle della vittima fosse posto un « cartello con queste parole: *ateo e bestemmiatore di Dio* ; che durante il tragitto il condannato « in ginocchio innanzi alla chiesa metropolitana di S. Étienne, colla testa nuda e i piedi scalzi, « tenendo fra le mani un cero acceso, domandasse perdono a Dio, al re, alla giustizia, delle bestemmie « profferite; che, por ultimo, sulla piazza del Salin, avvinto ad un palo, subisse lo strangolamento, « previo lo strappo della lingua; che il corpo esanime fosse arso sul rogo e le ceneri disperse ». (Le *Opere* di G. C. Vanini, pubblicate da G. Porzio, Lecce 1912, vol. II, pag. CCXXVI).

Il povero Bruno amava la propria patria di caldo amore; ed il Bartholmèss, che fu il primo

prudenza pubblicare l'opera sua fuori della Francia, a Ginevra; e Gassendi pure usò molta prudenza nell'attaccare Aristotele, tanto più che egli, come poco prima Basso, viveva nel tempo in cui Galileo era obbligato alla ritrattazione. Il Gassendi era sostanzialmente materialista, e, secondo il Lange, non mantenne la tradizione spiritualistica se non per compiacere la Chiesa.

In Sebastiano Basso vi è di più che il pretto atomismo; vi è sviluppata l'idea di composizione chimica dei corpi; da quel tempo si va sostituendo, al concetto di elemento nel senso aristotelico, quello di sostanze diverse, quali il mercurio, il solfo, il sale ecc.

Consultando anche numerose ed ampie raccolte biografiche, quali sono le grandi opere di Bayle, del Moreri, di Mazzuchelli, di Chauffépié, Niceron ecc., non sono riuscito a trovare delle notizie intorno all'origine ed alla vita di Sebastiano Basso. Un breve cenno trovasi nella recente *Grande Encyclopédie*, ed è il seguente: « Sebastiano Basso fu un filosofo naturalista; egli, dopo Telesio e Patrizii ed altri arditi « precursori del secolo XVI, prese viva parte al movimento di emancipazione e di « rinascimento nel secolo XVI. Combattè risolutamente Aristotele, specialmente nella « sua opera *Philosophiae naturalis adversus Aristotelem libri duodecim* (Paris, « 1621; e poi ancora 1649) ». Il dire edizione di *Parigi* mi pare errato, perchè è invece di *Genève*; non conosco l'edizione del 1649, citata anche dal Lasswitz.

Il Buhle, nella sua ampia storia della filosofia (¹), discorre a lungo di Bruno, di Vanini, di Descartes, di Gassendi e Campanella, ecc.; ma non ricorda affatto il Basso.

Il Bouillier, nella sua storia della filosofia cartesiana (²), scrive che: « Sébastien « Basson et Chrystôme Magnen entreprennent de faire revivre Démocrite, vers la « fin du VIème siècle ». Poi più nulla.

Il Mazzuchelli ricorda molti *Basso* ma non il nostro filosofo.

Il Brucker, nella sua magnifica opera « *Jacobi Bruckeri historia critica philosophiae a tempore resuscitatarum in occidente literarum ad nostra tempora*: tomus IV, pars I, *De studio philosophiae emendandae sectario*; *liber primus De primis conatibus restituendae philosophiae* », pag. 467, discorre brevemente dell'opera scientifica di Sebastiano Basso, lo loda, ma nulla dice della vita. L'opera del Brucker, per la storia della filosofia, è molto interessante (³).

---

o uno dei primi a far seriamente conoscere il nostro grande filosofo, pone la frase seguente del Bruno quale epigrafe della sua bellissima opera *Jordano Bruno*, Paris 1846, in 2 vol.: « Italia, « Napoli, Nola, quella regione gradita dal cielo, e posta insieme tal volta capo e destra di questo « globo, governatrice e domitrice de l'altre generazioni, è sempre da noi et altri stata stimata « maestra, nutrice e madre di tutte le virtudi, discipline, umanitadi ».

(¹) *Histoire de la philos. moderne*, trad. fr., Paris 1816, in 6 vol.-8° (ved. vol. II e III).

« Anche Tommaso Campanella, scrive giustamente Buhle, merita uno dei principali posti fra i filosofi che dubitarono della verità del sistema di Aristotilo e che percorsero anche nuove vie per penetrare nel santuario della verità » (Buhle, loc. cit., vol. II, pag. 749).

(²) *Hist. de la philos. cartésienne*. Paris, 1854, in 2 vol.-8°, vol. I, pag. 5.

(³) J. J. Brucker, nato ad Augsburg nel 1696 e morto nel 1770, fu professore di storia della filosofia a Jena, poi pastore nella chiesa di S. Ulrico in Augsburg. Scrisse un'ampia storia critica

W. G. Tennemann (1), nel capitolo III *Modificirte jonische und atomistische Philosophie*, accenna come l'opera di Bérigard, Magnenus, Sennert e Gassendi derivi in parte almeno da Basso. Nulla della vita di questo filosofo.

Il Buonafede, *Della restaurazione di ogni filosofia nei secoli XVI, XVII e XVIII* (1785) (2), accenna al nostro Basso; ma del nostro filosofo discorre come se non ne avesse capito nulla, e in parte il giudizio è tolto dal Brucker.

Il Sorel, nella sua opera *La science universelle* (Paris 1668, tom. IV, pag. 411), discorre brevemente di Sebastiano Basso:

« Il se trouve un autre Livre latin, dont l'impression est presque de la même « date (1621), qui est *Philosophiae naturalis adversus Aristotelem, libri XII, In* « *quibus abstrusa veterum Physiologia restauratur et Aristotelis errores solidis ra-* « *tionibus refelluntur, a Sebastiano Bassone, medico.* Il y a là beaucoup de pensées « curieuses touchant la nature des choses, la Matière et le Mixte, la Forme, le Mou- « vement et l'Action des premières qualités. On y rencontre aussi un Traité du Ciel, « un autre de la Veuë, et un autre des Metéores. Les opinions d'Aristote y sont « conférées avec celles de plusieurs Modernes, et il ne faut point douter que la « vérité ne s'y découvre en beaucoup d'endroits parmi ces altérations; mais il « semble que le dessein de l'Auteur n'estant que d'écrire autre Aristote comme le « tître de son Livre le porte, il y devoit procéder aver plus de méthode, et choisir « mieux qu'il n'a fait, tous les sujets qui sont le plus en contestation ».

Anche E. Saisset, nell'opera *Précurseurs et disciples de Descartes*, Paris 1862, non ricorda affatto Sebastiano Basso.

Il Mabilleau, nella sua *Storia della filosofia atomica* (3), non tiene nella dovuta considerazione il Basso; non sembra che abbia esaminato l'opera originale *Philosophiae naturalis.*

Anche il Lange (4) discorre a lungo del Gassendi; ma pare non conoscesse l'opera del Basso.

Fried. Ueberwegs, nel suo *Grundriss der Geschichte der Philosophie der patristischen und scholastischen Zeit*, 4 vol. in-8°, Berlin 1905, discorre brevissimamente, in due righe, di Sebastiano Basso, nel vol. III, pp. 43 e 51.

Il nome di Sebastiano Basso non è nemmeno compreso nel voluminoso *Dictionnaire des sciences philosophiques* del Franck, ed. 1875. Eppure qui sono ricordati anche i filosofi più *insignificanti.*

---

della filosofia: *Historia critica philosophiae a mundi incunabulis ad nostram usque aetatem deducta* (Leipzig 1741-1744 e 1767, in 6 vol. in 4°). A detta dei competenti, è un'opera grandiosa e sapiente di compilazione, ove sono esposte e giudicate con coscienza le varie opinioni dei filosofi. Il Brucker ne fece un riassunto col titolo *Institutiones historiae philosophiae*, 1747 e 1756. Scrisse altre opere, tra le quali voglio ricordare *Pinacotheca scriptorum* (1747).

(1) *Grundriss d. Geschichte der Philosophie.* Leipzig 1829, pp. 141 e 349.

(2) Vol. I, pag. 118. Quest'opera è, a mio parere, uno zibaldone sconclusionato.

(3) *Histoire de la philosophie atomistique*, Paris 1895, 1 vol. in 4°.

(4) *Histoire du materialisme*, trad. francese, 2 vol. in 8°.

W. Windelband [1], ricordata l'opera del Basso *Philosophia naturalis adversus Aristotelem*, Ginevra 1621, ne accenna il significato colle parole seguenti:

« In Bruno, il concetto della monade si collega in modo molto interessante, « benchè senza ulteriore effetto sulle idee fisiche, con quello dell'*atomo*, che ei toglie « dalla tradizione epicurea (Lucrezio): il *minimo* che nella metafisica è l'atomo, « l'elemento indivisibile, sferiforme, del mondo corporeo. Queste reminiscenze della « dottrina, pitagorico-platonica degli elementi e della teoria affine atomica-demo- « critea riebbero così vita in pieno platonismo; ma troviamo anche in uomini come « Basso, Sennert ed altri, rinnovamenti indipendenti, i quali condussero alla cosiddetta « teoria corpuscolare, secondo la quale il mondo dei corpi consisterebbe in complessi « atomici indivisibili, in corpuscoli ». Poi l'autore rimanda all'opera del Lasswitz. Quando il Windelband discorre del Descartes, fa notare (loc. cit., pag. 79) che « per « la teoria corpuscolare, Descartes trovò più d'un impulso in Bacone, Hobbes, Basso. « Sennert ecc. ». Ed anche qui rimanda sempre all'opera del Lasswitz.

Sebastiano Basso era italiano?

Io non sono riuscito a trovare sicuri documenti che comprovino essere Sebastiano Basso italiano. Il Basso non ha scritto nulla intorno alla sua vita. Nella sua opera *Philosophia naturalis*, nella parte I (*De materia et mixto*, liber I, pag 13), scrive che egli ha studiato nell'*Accademia di Pont-à-Mousson* in Lorena, sotto il professore *Petrus Sinsorius* [2]. Che però sia nato in Lorena io non posso mettere in dubbio perchè nel libro *Meteorologicorum* art. IX dell'opera sua, a pag. 647, scrive:

« Quin quod diximus de aquis stagnorum ad salsuginem accedentibus experientia « didicerunt nostrates in eo tractu Lotharingiae qui a sale vocatur *le Saulnois*, pa- « tria mihi carissima. Memini enim me patris mei, cuius mihi suavissima re- « cordatio... ».

Io credo dunque che il Basso sia nato in Lorena [3], ma molto probabilmente da genitori italiani, perchè il nome di *Basso* era ed è molto comune in Italia.

Un *Giovanni Basso* era professore di filosofia a Padova e fu uno dei primi a combattere anche egli le dottrine di Aristotele sulla generazione spontanea.

[1] *Storia della filosofia*, trad. ital., vol. II (1910), pp. 10 e 32.

[2] *Pont-à-Mousson* o *Villa Pontus sub castro Moutionis*, o *Mussipons*, non lontano da Nancy, fu dal 1572 sede di una Università, fondata dal duca di Lorena Carlo III, che conservò per due secoli, sino al 1768, quando fu traslocata a Nancy. Verso la fine del secolo XVI, Pont-à-Mousson divenne il centro intellettuale della Lorena. Era rinomata la sua Facoltà di medicina (Alb. René, *L'ancienne Faculté de médecine de Pont-à-Mousson*, Paris 1881, in 8°).

Intorno a Pont-à-Mousson vi sono le opere seguenti, che io non ho potuto trovare e nelle quali probabilmente vi sarà qualche notizia intorno a Sebastiano Basso, e specialmente nel lavoro del dott. Albert René:

Dott. Albert René, *L'ancienne faculté de médecine de Pont-à-Mousson*, Paris 1881, in 8°; Davier, *Notice sur l'école royale militaire de Pont-à-Mousson*, Nancy 1898, in 8°; Henry, *Histoire de Pont-à-Mousson et ses environs*, Pont-à-Mousson 1839, in 8°; Ory, *Causeries sur Pont-à-Mousson*, Pont-à-Mousson 1889, in 8°; Eug. Martin, *L'université de Pont-à-Mousson*, Nancy 1891, in 8°.

[3] Non so se altri prima di me abbia fatto questa osservazione relativa alla patria o luogo natìo di S. Basso.

Un *Carlo Andrea Basso* era amico del cardinale Gilberto Borromeo e scrisse delle opere religiose. Forse questo è lo stesso *Andrea da Basso*, ferrarese, poeta, ricordato dal Corniani in *I secoli della letteratura italiana*, II, pag. 174. Morì verso il 1470.

Un *Girolamo Basso*, nativo di Savona, fu fatto cardinale nel 1477 e morì nel 1507 in Roma. Nel dizionario del Moreri sono citati altri Basso, ma di minore importanza.

Di un altro Basso, forse più vicino a Sebastiano, io ho trovato qualche notizia. *Antonio Basso* era un giureconsulto e poeta napoleano della prima metà del secolo XVII (era parente con Sebastiano?). Ebbe gran parte nella rivoluzione del 1647, capitanata dal Masaniello, e morì decapitato dopo aver sofferto la tortura, nel medesimo anno in cui fu assassinato Masaniello. Il duca di Guisa, nelle sue *Memorie*, dice: « Basso fuit celui qui porta la parole, homme éloquent et d'un esprit fort chaud, « et fort emporté. Il me dit que l'établissement de la république était si nécessaire, « qu'il me priait d'en vouloir jeter les premiers fondements » (*Grande Encyclopédie*, vol. V). Di questo Basso si ha: *Parte prima delle poesie*, Napoli 1645.

Ma diciamo il vero: comunque sia, il Basso nato italiano in Italia, oppure nato in Francia da genitori italiani (come è molto più probabile), o sia poi anche francese, in fondo poco importa; per quanto spiaccia non conoscere nulla della vita di un uomo che ha lasciato buone idee. Il fatto, è però, che egli merita di essere da noi conosciuto e posto nel novero dei migliori filosofi antiaristotelici ed atomistici, tra il secolo XVI e il XVII.

Jean de Launoy, dottore della Sorbonne, fu uno dei primi a discorrere dell'opera scientifica antiaristotelica di S. Basso; ma anch'egli nulla dice della vita di questo filosofo. Il De Launoy era un grande erudito; nacque nel 1603 e morì nel 1678. Era dunque quasi contemporaneo del Basso, e scrisse di filosofia e di storia; ma pel suo carattere indipendente (anch'egli era antiaristotelico), e per non aver voluto firmare la condanna dell'Arnauld, fu cacciato dalla Sorbonne. Le sue opere furono pubblicate dall'abate Granet: *Oeuvres*, Genève 1731-1733, in 5 tomi e in 10 vol. in-fol. L'opera che più ci interessa *Joannis Lavnoii constantiniensis* DE VARIA ARISTOTELIS *in Academia Parisiensi* FORTUNA. Io ho sott'occhio l'edizione del 1720.

Il De Launoy, nella sua opera, riproduce una gran parte della prefazione del libro di S. Basso. In quest'opera il De Launoy tratta anche di altri antiaristotelici dei secoli XVI e XVII quali Budin, Sennert, ecc.

Dobbiamo dunque esser grati al De Launoy ed al Lasswitz, specialmente.

Ed ora dirò brevemente dell'opera di Sebastiano Basso. Il titolo preciso dell'opera di Sebastiano Basso è il seguente:

PHILOSOPHIAE | NATURALIS | adversus Aristotelem | libri XII. | In quibus abstrusa veterum physiologia restauratur, et Aristotelis errores solidis rationibus refelluntur | a Sebastiano Bassone, | doctore medico. | Cum INDICE *locupletissimo*;| *amicus Plato, amicus Socrates,* | *sed magis amica Veritas.* | *Genevae (Aurelianae), apud Petrum de la Roniere* | MDCXXI.

È un bel volume in-8°, di 701 pagine più la prefazione e l'indice. Di questa opera fu fatta un'edizione in elzeviro in Amsterdam nel 1649, in-8°.

Non sarebbe fuor di luogo, anzi io penso che sarebbe utile, una traduzione italiana di questa opera del Basso. Queste opere è bene siano conosciute non solo dai filosofi, ma ben anco dai cultori delle scienze, i quali in generale non hanno famigliarità con la lingua latina e particolarmente col latino, non sempre facile, di opere scientifiche dei secoli di mezzo (1).

Tutta l'opera è interessantissima. Ecco le varie parti in cui essa è divisa:

I. *De prima rerum naturalium, materia ac de mixto, libri duo.* Interessa non poco la chimica.
II. *De forma, libri tres.*
III. *Liber de natura et anima mundi.*
IV. *De motu, liber.*
V. *De actione et quatuor primis qualitatibus.* Interessa pure la chimica.
VI. *De coelo, libri duo.*
VII. *Liber de Visu.*
VIII. *Meteorologicorum, liber.*

Stupenda è la prefazione.

Nel libro I sono notevoli i capitoli: *Quales atomos veteres illi intellexerint* (pag. 14); *Qua probatur mixtionem nihil atiud csse quim elementorum remanentium compostionem.* E così continua negli art. II e III.

Nel libro II, a pag. 111, è interessante l'art. IV: *Cur motus situ causa caloris.*

Nella parte II (*De forma*, liber I, Intentio III, pag. 148) è interessante pure l'Intentio III: *Qua probatur formas ex nihilo fieri ac proinde creari.*

Nella parte VIII *Meteorologicorum liber. Meditatio I: De causis salsuginis maris*, discute a lungo, in *nove* capitoli, della *salsedine del mare*; discute le opinioni di Aristotele, di Scaligero, di Cardano. Non ricorda il Biringucci.

Questa è una parte importante dell'opera di S. Basso, sulla quale però non posso ora intrattenermi. In un lavoro, *Intorno alla salsedine del mare*, dirò più ampiamente su quanto scrisse in proposito S. Basso. Della salsedine dell'acqua del mare discorre anche un contemporaneo di Basso, G. C. Vanini (2).

A quanto mi è parso, l'autore moderno che più e meglio ha studiato l'opera di Sebastiano Basso è stato Kurd Lasswitz; egli, nella sua classica opera *Geschichte der Atomistik vom Mittelalter bis Newton* (2 voll. in-8°, 1890, Hamburg e Leipzig) (3),

(1) Queste opere latine che trattano essenzialmente di scienza, come già quella di Lucrezio, dovrebbero essere tradotte e commentate da chi conosca bene la lingua latina e la parte scientifica, oppure dei due lavoratori un letterato ed uno scienziato, altrimenti la traduzione lascierà a desiderare in un senso o nell'altro.

(2) Le *Opere di G. C. Vanini* pubblicate dal prof. Guido Porzio. Lecce, 1912, vol. I, pag. 98.

(3) Quest'opera del Lasswitz è veramente un monumento, una fonte inesauribile di tutto quanto riguarda la storia dell'atomistica, dal pensiero greco a Newton. Alcuni, che si sono occupati della storia della filosofia atomistica, hanno certamente pescato in questa opera ammirevole e in quella dello Zeller, senza però ricordarlo. Questo succede spesso a compilatori poco coscienziosi.

nel vol. I, pp. 467-481, discorre a lungo dell'importanza dell'opera del Basso, non tanto per la teoria atomistica, quanto per la chimica e la fisica, la filosofia naturale in genere.

Io credo di non poter fare cosa migliore, per far conoscere l'importanza dell'opera del Basso, se non riproducendo, tradotto, il capitolo *Sebastian Basso* di questo libro del Lasswitz. La traduzione fu fatta dalla indimenticabile mia figlia Maria. Si vedrà come il Lasswitz, con acume profondo, abbia sviscerato l'opera del nostro filosofo; forse in alcuni punti interpretandola con idee un po' troppo moderne. Ecco dunque la traduzione di Maria [1], che pubblico nel settimo anniversario della sua morte (9 marzo 1909):

[1] Questo è uno di quei lavoretti, o *cadeaux*, che quell'anima gentile e buona si compiaceva tanto volentieri di fare per me. Lavori simili ne trovo di tanto in tanto nei miei già vecchi manoscritti. Tutto ciò che poteva recar piacere o sollievo a suo padre, ella lo faceva con amore, con spontaneità, con serenità, senza altro scopo se non quello di compiere un dovere morale, che porta tanta soddisfazione alle intelligenze buone.

Ella era fornita di un senso di delicatezza tale che pare incredibile; mai una parola che in qualsiasi occasione potesse offendere la suscettibilità del suo amato genitore. Io stesso temo di non averla apprezzata abbastanza. Non parliamo poi della modestia — vera, non apparente — che era connaturale in quell'anima incomparabile. La Maria, nel 1904, venne con me a Genova, ove trovai importanti documenti relativi al grande fisico Macedonio Melloni; ci trattenemmo colà breve tempo, ma la Maria ebbe per le mani alcune lettere inedite di Humboldt, scritte con carattere fittissimo, piccolissimo e difficilmente leggibile, caratteristico di quel grande uomo. Ebbene, ella le copiò, le tradusse; e così fece di una lunga lettera inedita di Faraday al Melloni nel 1854. Di tutto mi fece dono graditissimo. Nel 1907 pubblicai un lungo lavoro sul Melloni; e quando, nel principio del 1908, le scrissi che mi dispiaceva di non averla ricordata in quel mio lavoro mi rispose (31 marzo 1908):

« ... Non credere, poi, ch' io pensassi affatto a esserci nominata; nè ne era il caso, essendo stato « quel piccolo aiuto puramente meccanico. Una cosa che mi viene da te certamente è la mancanza « assoluta, completa (e forse esagerata per ciò che riguarda il successo nel mondo), di qualsiasi « vanità: lo posso dire senza rendermi orgogliosa. Tu sai — e forse non sai del tutto — con « quanto sforzo, e con quanta lotta intima ho acconsentito a pubblicare qualcosa, tanto mi è estraneo « il piacere di vedere il mio nome in pubblico ».

Ha vissuto pochi anni, trentatrè e mezzo, ma lunga vita, secondochè giustamente scrisse lo Smiles: « Alcuni vivono più in venti anni che non altri in un secolo. La vita di un uomo si misura da ciò che in essa egli ha fatto e sentito: più fa, più sente e più vive ».

L'aiuto di sua figlia permise a D' Israeli di seguitare i suoi studi letterari, ed anche egli la ricorda con gratitudine nella prefazione alle sue *Miscellanies of Literature*, edizione 1840.

Ora, più divento vecchio e più conosco il mondo e questa umanità poco buona (e, direi anzi, cattiva), tanto più mi si presenta chiaro alla mente, alla memoria, alla visione intellettuale, quell'essere così puro, così mòndo delle bassezze umane, che a me pare ora quasi incredibile.

Ella traduceva e discuteva Memorie di Avogadro, di S. Basso, di Em. Fischer, di Moissan, i *Principii fondamentali della chimica* di Jörgensen (Unione Tip.-Ed., Torino 1904), ecc., ecc., che trattano di argomenti còsì disparati, riguardanti la chimica teorica, la filosofia, la chimica applicata, la storia, con abilità non comune; tutti argomenti che richiedono versatilità di ingegno e che io non ho ancora avuto occasione di osservare in altri. Conservo, e spero di pubblicare, una sua traduzione letteraria: *Casa paterna* del Sudermann, che è un vero gioiello. Ora, non tutti i traduttori letterarî, anche i più distinti, saprebbero, a cagion d'esempio, tradur bene un lavoro di Sudermann o di Dickens, o di Heise, e, nel tempo, stesso lavori scientifici di Jörgensen, di Ramsay, di Walden, di van't Hoff ecc.

I lavori di traduzione di lunga lena a lei non piacevano; la traduzione di più volumi era da

Sebastiano Basso.

Fu medico in Francia, uomo di straordinario acume, e di grande sapere, secondo il De Launoy ([1]): parteggiò fra i primi in favore della teoria corpuscolare. L'opera sua non comparve però a Parigi, ma bensì — forse per misura di precauzione — a Ginevra ([2]). Oggi essa è poco nota, ma dovette avere grande influenza sul circolo degli studiosi francesi e gli antichi autori ricordano Basso accanto ai più celebri nomi ([3]). Jungius, Etienne de Claves, Descartes, Gassendi, Bérigard, Magnenus ([4]), furono ispirati direttamente da Basso. Della sua vita nulla si sa, se non che era medico e istruitosi a Pont-à-Mousson ([5]).

---

lei definita un facchinaggio. Trovava invece soddisfazione a tradurre lavori brevi, di natura varia, che si confacessero ai suoi ideali o al desiderio suo di compiacere il genitore. Quanta, quanta delicatezza in quell'anima rara!

Ella faceva il bene in tutto. « Il bene non si fa tanto colle gloriose azioni quanto colle piccole cortesie e i piccoli sacrifizi della vita giornaliera, colle tranquille virtù, col buon umore, la simpatia e le buone maniere, la benevolenza verso i congiunti e gli amici ».

Ella lavorava, e desiderava rimanere nascosta. Sono io ora, e continuerò sin ch'io viva, che voglio di tanto in tanto far conoscere una parte di questi suoi lavori ignorati.

Ed ora, anima candida, vivi in pace; e quando avverrà che ci riuniremo, insieme contempleremo questo basso mondo così pieno di ingratitudine o viltà morale, di gelosia e d'invidia. E forse tu ora mi dirai:

. . . .

E il dì ch'ultimo a te segni il destino,
e ponga fine al viver tuo dolente,
io sola, io sola ti sarò vicino,
io chiuderò le tue pupille spente.

(Graf, *Dopo il tramonto*).

Se non esistesse la memoria, la ricordanza del passato, che sarebbe dunque la vita?

(1) Launojus, *De varia Arist.*, in *Acad. Parisiensi Fortuna op.*, tom. IV, pag. 220.

(2) *Philosophia naturalis adv. Aristotelem libri XII, in quibus abstrusa veterum philosophia restauratur et Aristotelis errores solidis rationibus refelluntur* (in 8°) Genevae, 1621. Io cito secondo l'ediz. Elzeviriana, Amsterdam 1649.

(3) Ved. Campanella, *De lib. propriis*, c. II, art. 5, pag. 47. — Mersenne, *La vérité des sciences*, l. I, pag. 9 f. — Descartes, *Oeuvres*, VI, 146. — Couring, *Introd. in phil. naturalem*, c. 2, § 7. — Hermann, *Acta philos.*, II, pag. 939. — Leibniz, *Math.'Schr.*, ed. Gerhardt, VI, pag. 78. — Sorel, pag. 484. — De Launoy, loc. cit. (ved. Heumann, *Acta phil.*, III, pag. 779). — Reiman, *Hist. litt.*, III, fr. 328, pag. 462. Qui è detto (pag. 461): « Coloro che non meritano fama presso i posteri, l'ottengono; coloro che la meritano, si lasciano giacere nella polvere. A questi ultimi appartiene il nostro Sebastianus Basso ». — Sperling, *Exercit. phis.*, p. m. 30. — Morhof, *Polyhist.* tom. II, libr. 2°, cap. 11, n. 2, pp. 206 e 364. — Magnenus cita Basso spesso insieme con Sennert in *Democritus reviviscens*. — Brucker, loc. cit. Intorno a Voëtius ved. Bayle, art. *Gorleus*. — Jungius conosceva Basso (ved. Wohlwill, *Jungius*, pag. 18).

(4) *Democritus reviv.* Ticini, 1646, pag. 125.

(5) Basso (*Phil. nat.*, l. I, art. 5, pag. 13) dice che egli studiò nella nuova *Academia Mussipontana* (Pont-à-Mousson) in Lorena, sotto il prof. Phil. Petrus Sinsonius.

Nella prefazione egli si ribella con molta eloquenza contro l'autorità di Aristotele e contro la tendenza a rigettare qualsiasi opinione che non sia concorde alla teoria scolastica. Seguono due libri sulla materia prima e sulla miscela.

Qui Basso combatte la dottrina aristotelica della materia e cerca di sostituirvi il concetto di atomi invariabili ([1]). Loda le dottrine di Democrito, Platone, Anassagora ed Empedocle ed espone le diverse opinioni di questi filosofi relativamente agli atomi. Cerca di conciliare, per quanto è possibile, le dottrine fondamentali di Anassagora, Platone e Democrito sulla materia. Si propone, fondandosi su queste dottrine, di formare una teoria della materia, e di dimostrare che la causa di tutte le mutazioni della materia si trova nella natura stessa: si potranno così spiegare molte questioni che fino ad allora hanno dato tanto a pensare ai più grandi sapienti. Il principio su cui riposa tutta questa dottrina è questo: tutte le cose sono formate da piccolissime particelle diverse che mantengono, anche quando sono combinate insieme, la stessa differenza fra le loro nature che vi è quando sono separate ([2]). Il Basso chiama atomi queste particelle, ma nota espressamente che esse sono create da Dio ([3]). Sulla grandezza degli atomi egli ripete le osservazioni di Lucrezio, come fanno già Bruno, Lubin e Sennert: i granelli di polvere sono già corpi composti, ognuno dei quali può contenere mille atomi democritici; le bestioline più piccole visibili (*sirones*) sono esseri completamente organizzati: quanto piccoli debbono dunque essere i loro organi e le particelle dello *spiritus animalis* che ha sede in questi organi!

La più convincente prova, secondo Basso, dell'esistenza di particelle elementari immutabili, è la combinazione degli elementi in composti e la loro susseguente separazione. Anche in Basso, come in Sennert, è chiaro che il primo passo verso la rin-

([1]) *Phil. nat.*, pag. 23: « Materiamque talem nos cum veteribus asserere, quae constet ex par-« tibus diversissimis. Ita ut in parte ossis, vel carnis, quam minimam cogites, sit particularum diversi « generis conjunctio, quae in illa compositione propriam naturam retineant ».

[Noi abbiamo asserito, con gli antichi, che la materia è quella la quale consta di parti diversissime, di modo che in una particella di osso o di carne, per quanto minima tu la pensi, siavi unione di particole eterogenee, le quali ritengano in detta composizione la propria natura].

Questi brani in nota furono tradotti dall'egr. dott. Mario Zucchi.

([2]) ....., lib. 1, art. 4 e 5, pp. 10-12: « Sed esto ... veteres circa illa prima rerum principia « discrepasse, certum tamen est, illos in eo convenisse, quod et verissimum esse demonstrabimus, « et ad mutationum naturalium causam rationemque inveniendam sufficit. Quod scilicet agnoverint « omnes ex minimis, diversissimisque particulis res construi, quae, ut ab invicem sejunctae naturas « haberent dissimiles, eandem naturae differentiam conjunctae retinerent, quocumque tandem nomine « res illas voces ».

[Ma sia pure ... che gli antichi siano stati discordi di giudizio intorno a quei primi principii delle cose; certo è, tuttavia, che essi furono concordi in questo (ciò che dimostreremo pure sommamente conforme al vero e che basta a trovare la causa e la ragione delle mutazioni naturali): che cioè essi conobbero come tutte le cose si formassero di particelle minutissime e diversissime, le quali, ove, separate vicendevolmente, abbiano natura dissimile, ritengono, congiunte, la stessa differenza di natura, qualunque sia il nome col quale tu le chiami].

([3]) ..... lib. I, art. 6, pag. 14: « Cum agimus de atomis, censemus eas a Deo creatas, quod « fuit praemonendum ».

[Quando trattiamo degli atomi, pensiamo che essi furono creati da Dio; il che era da premettere].

novazione della teoria corpuscolare fu questa questione del modo di comportarsi delle parti componenti nella miscela. In una discussione molto estesa con Scaligero, il Basso afferma che esiste una *mixtio*, nella quale, senza dubbio, ogni parte (certo non *actu mathematice*, perchè non nei limiti prescritti, ma *actu naturali*) esiste nella sua forma propria, separata dalle altre ([1]), mentre tuttavia l'insieme conserva l'apparenza di una miscela perfetta.

Ora, poichè in questo caso, ammesso anche da Scaligero, un composto, che sia solo una *mixtio ad sensum* nel senso aristotelico, non si può distinguere da un corpo unico-omogeneo, questa uguaglianza può ritrovarsi anche in tutti gli altri casi. L'omogeneità esiste soltanto per i sensi; le parti elementari rimangono, nel composto, immutate; la differenza sta solo in ciò: che la loro separazione avviene in alcuni corpi più facilmente, in altri più difficilmente. Contro l'opinione di alcuni seguaci della teoria della stabilità degli elementi, il Basso si rifiuta però di attribuire quest'opinione già ad Aristotele, il quale invece cade qui in errore ([2]).

A sostenere quest'opinione si adducevano ragioni empiriche, fondate sulla scomposizione chimica dei corpi, nei quali lo *spiritus* (o *mercurius*), *oleum* (o *sulphur*), *sal*, *faeces* (*caput mortuum*) e *phlegma* si consideravano come parti contenute in egual modo in tutti i corpi, quantunque non fossero state osservate prima d'allora.

Combattendo passo a passo la dottrina aristotelica della miscela, il Basso dimostra l'assurdità dell'ipotesi della trasformazione degli elementi e delle particelle elementari. Per qual ragione una sola e stessa particella dev'essere destinata a subire delle trasformazioni diversissime, se le particelle non sono già, di per sè, di natura diversa le une dalle altre? Perchè nella scomposizione dei corpi solo una data parte si trasforma in acqua, e il resto no? Perchè, dopo la volatilizzazione delle parti odoranti dei corpi aromatici, rimangono altre parti senza odore? Perchè alcune sostanze si possono lavare ed estrarre coll'acqua? Tutto questo può solo spiegarsi ammettendo che le ultime particelle dei corpi possiedano, da natura, delle differenze tra loro, differenze immutabili ed incancellabili. Questa differenza è *sostanziale*.

Fra le ragioni addotte dal Basso per confutare le teorie degli avversarî, basti ricordarne una, che colpisce tutti i tentativi fatti per spiegare i fenomeni naturali fondandosi su cambiamenti qualitativi senza tener conto dell'elemento quantitativo. Il passaggio dal fuoco in terra, dice Basso, richiede una fortissima contrazione. Questa contrazione non può essere istantanea, ma avviene gradatamente.

([1]) ....., pag. 14: « Crama namque illud, id est aqua dilutum vinum, non est unum forma, « sed continuatione sola ».

[Imperocchè quel miscuglio, vale a dire il vino diluito con acqua, non è uno per la forma, ma solo per la continuità].

([2]) ..... pag. 23-29. Pag. 27: « Quod scilicet de vini et aquae mistorum partibus comper- « tum est, eas etsi minutissimas, et alias cum aliis continuas, in sua quamque natura persistere, « idem de omnibus mixtis esse dicendum; discrimenque solum esse, quod alia aliis facilius dissol- « vantur ».

[In verità, ciò che è manifesto delle parti del vino e dell'acqua commisti, le quali persistono ciascuna nella propria natura, benchè siano minutissime e congiunte le une alle altre; lo stesso deve dirsi di tutte le cose composte: la differenza è solo nel fatto che alcune si dissolvono più facilmente che non altre].

Ora, qual'è il punto critico nel quale avviene la trasformazione della forma? A qual grado di densità il fuoco diventa terra? Può essere ancora fuoco, mentre è già più denso dell'acqua? Oppure è esso già terra, prima di raggiungere tale densità? Qui il vantaggio di ammettere l'esistenza di parti elementari immutabili diventa assolutamente evidente.

Una questione, posta già da Aristotele (1) e trattata anche da Plutarco (2) e che aveva già suscitato molte difficoltà agli scienziati del medio evo, fu risolta da Basso a modo suo, fondandosi su opinioni platoniche. Per quanto tale questione sia in sè secondaria, essa ricompare tuttavia per essere trattata ancora dai fisici del XVII secolo, come uno di quei problemi di scuola i quali, in certo modo, sono in relazione con ogni teoria della materia (3).

Si tratta del fenomeno che il fiato, emesso a labbra chiuse, è freddo, mentre quello che sfugge dalla bocca aperta è caldo. Aristotele spiega il fatto dicendo che a bocca chiusa esce poco fiato, per cui nella sensazione che si riceve sulla mano entra in gran parte l'impressione dell'aria fredda esterna. Basso risponde (4): Nel fiato, le particelle calde sono ravvolte dentro le fredde; quando l'alito sfugge dalle labbra chiuse, le particelle calde sono compresse dalle fredde e non possono agire; mentre a bocca aperta esse hanno spazio sufficiente per svolgersi. Questa spiegazione di Basso è interessante, perchè si fonda sull'idea dell'avviluppamento molecolare (*Umlagerung*). Le particelle di calore esistono, ma non possono essere avvertite come tali, perchè sono circondate dalle particelle fredde. Qui si inizia la teoria atomistica del calore di Basso.

Basso parte dall'ipotesi che i sensi non possano decidere sulla presenza del caldo o del freddo, ma soltanto sull'azione di fatto (*actio*) di essi. Le parti calde, cioè, sono avviluppate dalle fredde, e anzi a questo scopo è necessario tanto maggior numero di particelle fredde quanto più grande è il numero delle calde. Quanto meglio le particelle calde sono avvolte dalle fredde, tanto più costante e solida è la miscela a condizioni uguali. Da ciò proviene che molte cose, che per i sensi ed esternamente sono molto fredde, possono contenere nell'interno molto calore. Nella combustione i corpi non prendono in sè, come erroneamente asserisce Aristotele, altre particelle di calore, ma anzi ne perdono la maggior parte, perchè queste particelle entrano in mezzo alle fredde, sfuggono e diventano attive (5).

L'evaporazione dell'acqua, *i cui vapori non sono aria, ma sono di natura acquosa e più densi dell'aria*, è dal Basso spiegata nel modo seguente: Le particelle del fuoco s'infiltrano nell'acqua, separano le particelle di acqua che prima erano aderenti l'una all'altra, in modo che l'acqua, divenuta meno densa, si fa trasparente, e trasportano con sè in alto le particelle di acqua. Se il vapore vien raffreddato (o contro vi si espone un metallo o un vetro), le particelle del fuoco vengono scac-

(1) Arist., *Problemata*, XXXIV, 7, pag. 964, vv. 10-14.
(2) Plutarch., *De primo frigido*, VII, 4. Paris, 1841, pag. 1160, n. 18 f.
(3) Descartes, *Oeuvres inédites*, I, pag. 78; Gassendi, *Opera*, I, pag. 3516; Hobbes, *De corpore*, op. I, pag. 380.
(4) *Phil. nat.* pag. 55.
(5) *Phil. nat.*, lib. II: *De materia et mixto*, pag. 69.

ciate dal freddo (oppure passano attraverso i pori aperti del metallo) e il vapore ritorna acqua (1).

Anche qui dunque, come in Gorlaeus, troviamo già fatta distinzione fra vapor d'acqua e aria, come conseguenza necessaria dell'immutabilità degli elementi.

Per quanto riguarda la natura delle particelle elementari, Basso lascia incerta la questione se i quattro elementi stessi corrispondano a queste particelle, oppure se gli atomi sono qualcosa di più semplice, dai quali poi si compongono gli elementi. In ogni modo, gli atomi sono di natura straordinariamente diversa fra loro; quelli che più sono adatti a formare il fuoco, devono chiamarsi particelle di fuoco, e così per altri (2). Queste particelle, non percettibili ai sensi, si raggruppano in modi diversi per formare particelle di secondo ordine; queste a loro volta formano diversissime particelle di terzo ordine, ecc. Così si spiega la straordinaria varietà dei corpi che si trovano in natura, ad onta dell'invariabilità delle sostanze elementari (3). E senza danno per l'immutabilità degli atomi primarî, le particelle di secondo e terzo ordine possono scambievolmente passare dall'uno all'altro, con maggiore o minore cambiamento secondo il grado di diversità nella loro composizione.

Come si vede, Basso dovrebbe essere considerato, fra i rinnovatori della fisica, come il primo che abbia afferrato il concetto della molecola chimica in modo perfettamente chiaro. Il modo di formazione di queste molecole o particelle di ordine più alto determina la natura dei corpi, le cui proprietà dipendono dalle proprietà delle loro parti. Tutti i corpi composti della natura inanimata si possono dividere in quattro categorie: in corpi *solidi* (solida), in *liquidi* (liquida), in *fusibili* (fusilia) che stanno fra i solidi e i liquidi, e in *aeriformi* (meteora), come i fumi e i vapori (4). Nei corpi solidi è contenuta essenzialmente la terra, nei liquidi l'acqua, nei

(1) libr. I, pag. 66.

(2) ....., libr. II, Int. III, art. 4, pag. 119. Tutto questo è molto importante.

(3) ....., libr. II, Int. I: *De diversitate partium compositarum, ex quarum harmonia totum resultat*, pag. 79: ..... « Non tantum prima elementa in mixto seu mavis composito manere, sed « diversissimas quibus mixtum constat, particulas, ex iis primis rerum principiis diversimode con- « structas; quas secundas, docendi gratia, vocare liceat. Ex his secundis varie coëuntibus tertiae fiunt « non minus quam secundae inter se differentes. Eundem in modum, et ex tertiis quarta, et ex « quartis quintae fieri intelliguntur. Atqui compositum naturale non primo resolvitur in prima illa « elementa, sed in partes quasdam inter se natura discrepantes; quarum singulae species rursus in « alias multiplices dividuntur; et hae in alias minutiores conciduntur. Saepiusque haec partium « diversarum in minutiores semper diversas subdivisio repetitur ».

[*Della diversità delle parti composte, dalla cui armonia risulta il tutto*, pag. 79: .... nella mistione (o, se vuoi meglio, composizione) permangono non solo i primi elementi, ma le particelle diversissime delle quali consta il corpo misto, composte variamente di quei medesimi primi principii delle cose; particelle che, per comodità d'insegnamento, sarà lecito chiamare seconde. Da queste seconde, variamente riunite, risultano le terze, non men delle seconde tra loro differenti. E nel medesimo modo s'intendono derivare le quarte dalle terze e dalle quarte le quinte. Pur tuttavia il composto naturale non si risolve immediatamente in quei primi elementi, ma bensì in certe parti difformi tra sè per natura, le cui singole specie si dividono di bel nuovo in altre molteplici, e queste si risolvono alla loro volta in altre più minute ancora. E assai frequentemente si ripete questa suddivisione di parti diverse in altre più piccole, diverse sempre].

(4) ....., libr. II, Int. I, art. 2, pag. 80: « Si inanima spectes, differentiamque eorum motus « contempleris, corpora omnia composita in quatuor genera commode possunt distribui: ut alia sint

fusibili più terra che acqua, negli aeriformi il fuoco: la predominanza delle diverse parti elementari determina il modo di comportarsi dei corpi come solidi, come liquidi, ecc., il loro innalzarsi o il loro precipitare. Così il fuoco diventa pesante, appena rinchiuso in modo che non può salire in alto; l'acqua è leggiera, appena sia condotta in alto dal fuoco, che entra nel suo interno e la dilata. Lo spegnersi del fuoco non è altro che la compressione e la condensazione delle sue parti, cagionato dall'acqua e dall'aria ([1]).

Le azioni reciproche degli elementi non sono cagionate da un contrasto nell'interno dell'elemento stesso, oppure fra la sostanza e un accidente sopravvenuto, ma bensì da un contrasto di parti diverse e da un'azione scambievole di sostanze ([2]). Non possiamo dar qui in tutti i particolari la teoria del calore come è esposta dal Basso: quanto si è detto basterà per dare i fondamenti di questa teoria.

A questi due libri sulla materia e sulla miscela, Basso fa seguire: 8 libri *de forma*; 1 libro *de natura et anima mundi*; 1 libro *de motu*; 1 libro *de actione et quatuor primis qualitatibus*; 2 libri *de cœlo*; 1 libro *de visu* e 1 libro *meteorologicum*. Da questi libri, che contengono parecchi errori nella dottrina della fisica speciale, togliamo quanto può aver interesse per la teoria atomistica del Basso.

La dottrina peripatetica delle forme è rigettata interamente dal Basso; in suo luogo è posta la immediata creazione, per opera di Dio, delle sostanze elementari diverse ed immutabili.

La forza, che per sè e come prima causa muove e dirige tutto, si chiama *Natura*. La natura stessa però non è altro che quel perfetto ordine che sovrasta alla creazione e alla conservazione delle cose. *Quindi Dio e Natura sono una stessa cosa* ([3]). Questo spirito onnisciente, che chiamiamo Dio o Natura, si serve, come mezzo unico e generale per far muovere tutte le cose, di una sostanza straordinariamente fissa, corporea, un etere universale (*spiritus*). Caratteristico per l'intima logica e per lo sviluppo storico dei concetti metafisici e fisici è il modo con cui Basso svolge quest'idea dello *spiritus*. Egli cerca di spiegare in questo modo i fenomeni di condensazione e di dilatazione dei corpi. Ammessa l'immutabilità delle particelle elementari, non gli par possibile spiegare tali fenomeni senza ammettere l'esistenza del vuoto (*vacuum*). Se poi non si vuole concedere questo vuoto, da cui la natura rifugge, rimane solo l'ipotesi che una sostanza penetri fra gli atomi, per separare l'una dall'altra le particelle di aria, fuoco, acqua, ecc. Se le particelle più grosse sono com-

---

« liquida et fluida, alia firma et constantia, alia utramque naturam partecipantia (qualia sunt fusilia « omnia); alia denique meteora, que sublime feruntur (ut halitus et vapores) ».

[Se tu osservi i corpi inanimati ed esamini la differenza del loro moto, tutti i corpi composti possono comodamente distribuirsi in quattro generi: alcuni sono liquidi o fluidi, altri stabili e costanti; altri partecipano dell'una e dell'altra natura, quali sono tutti i corpi atti a fondersi; altri finalmente sono aeriformi e tendono a salir in alto, come il vento e i vapori].

Anche in questo capitolo si trovano delle idee che ricordano quelle emesse poi dai grandi chimici nel secolo XVIII e al principio del XIX.

([1]) . . . . ., art. 4, n. 18-20.

([2]) . . . . ., art. 4, n. 22-24.

([3]) . . . . ., pag. 278: « Liber de natura et anima mundi ».

poste da piccole immutabili, è certo che le più grosse non possono dilatarsi se le più piccole non sono allontanate, le une dalle altre, da una sostanza estranea. Che sostanza può esser questa? Essa è l'*etere degli stoici*, che esiste in tutto il mondo: è un medio corporeo, finissimo, uno *spiritus*. Questo etere però non penetra le parti sostanziali dei corpi, ma si insinua *fra* gli atomi. È di natura semplice, nè pesante nè leggiero, indifferente al movimento. Non è il fuoco, il quale è formato da corpuscoli materiali, finissimi e acuti (*aculeis subtilissimis*), e dallo *spiritus* ([1]). Lo *spiritus* muove ad agire le parti elementari; nelle combinazioni, perciò, esse non sono attive, non essendo mosse dall'etere.

Il Basso è convinto che anche Democrito non intendesse per *vacuum* altro che questo etere universale degli Stoici. E così, egli dice, un lampo abbagliante c'illumina improvvisamente, e noi vediamo qual'è il legame che in un solo tutto stringe questo universo composto di cose tanto diverse. Esso è appunto questo *spiritus* che si trova dappertutto, che è la migliore e la più nobile parte di tutte le cose e per il quale l'universo è un tutto. Non sarebbe erroneo certo affermare che lo stesso filo logico di ragionamento, esposto dal Basso, è quello che ha condotto Francesco Bacone alla sua speciale concezione atomistica.

Coll'aiuto di questo *spiritus* come legame degli atomi e coll'aiuto delle molecole composte di atomi elementari, la spiegazione atomistica della natura risultava completa. L'etere universale, che è unito agli elementi, comunica loro una doppia tendenza: da un lato la tendenza a combinarsi col loro simile; dall'altro la tendenza

([1]) ...., *Liber de natura*. Intentio III: « De anima mundi » art. I.

« Quae sit illa substantia quae rarefactione ignem subit et aërem et reliqua corpora [pag. 300]. « Ergo vacuum est necessarium, AUT SANE ALIQUA ALIA SUBSTANTIA intercedit, qua ingrediente fiat « ut partes vel aëris vel ignis vel aquae vel cuiusve rei aliae ab aliis deducantur. Haec paucis. « Dantur particulae quae non extenduntur rarefactione: ex his particulis solis fiunt majores, quas « proinde minoribus non dilatatis impossibile est crescere, nisi nova accedat substantia, vel detur « vacuum. Habemus illud igitur luculentissime demonstratum atque evictum, ni concedimus vacuum « inter partes, a quo natura abhorret, admittendam esse substantiam aliquam corpoream, tenuissimam « quidem, quae in aëris, verbigratia, rarefactione, in partes aëris sese insinuans, alias ab aliis dedu- « cat, ut plus loci occupent, tali substantia spatium quod relinquunt, adimplente, quod alioquin « vacuum remaneret. Si quae sit illa substantia nosse laboras, en tibi Stoici clare manifesta- « runt ».

[Quale sia quella sostanza che, con la rarefazione, si insinua nel fuoco, nell'aria e negli altri corpi (pag. 300). Il vuoto adunque è necessario, o certo si frappone una qualche altra sostanza, introducendosi la quale, avviene che le parti o dell'aria, o del fuoco, o dell'acqua, o di qualsiasi altra cosa, restino separate le une dalle altre. Questo esporrò brevemente. Si dànno delle particelle che non si dilatano con la rarefazione; solo da queste particelle provengono le maggiori, le quali perciò, — poichè le minori non si dilatano — è impossibile che aumentino ove non sopravvenga una nuova sostanza, o non si dia il vuoto. Rimane dunque dimostrato e provato in modo luculentissimo che, se non ammettiamo tra le parti il vuoto, da cui la natura abborre, devesi ammettere l'esistenza di una qualche sostanza materiale, senza dubbio tenuissima, la quale nella rarefazione dell'aria, a mo' d'esempio, insinuandosi nelle varie parti dell'aria stessa, separi le une dalle altre, in siffatto modo che, riempiendo tale sostanza lo spazio intermedio e che altrimenti rimarrebbe vuoto, esse occupino uno spazio maggiore. Se tu ti preoccupi di conoscere quale sia questa sostanza, ecco che gli stoici te lo dimostrarono chiaramente].

a raggiungere e a conservare il luogo e lo spazio inerente alla loro natura. Di qui hanno origine due specie di movimento: l'attrazione del simile (per disposizione, non per forza) e l'espulsione del contrario. Questi movimenti avvengono tanto nei grandi corpi quanto nelle loro minime particelle [1]. Così ad es. lo scorrere dell'acqua si spiega con un raggrupparsi e, per conseguenza, un affrettarsi delle particelle nelle molecole, cosicchè il movimento si compie come nei vermi e nei serpenti [2].

E poichè il caldo, il freddo, l'umido e l'asciutto, queste quattro primarie qualità, si possono spiegare come un movimento locale delle particelle, è dimostrato che tutti i processi non dipendono da altro che da tali movimenti locali.

Questa è l'atomistica di Basso, il primo sistema completo della filosofia corpuscolare, perchè la teoria corpuscolare del Sennert (1619) è inferiore a quella di Basso per estensione e per logica.

Prima tuttavia di dare un giudizio sul carattere di questa teoria, sarà bene di accennare ancora agli sforzi fatti dal Basso per confutare le obbiezioni cosiddette matematiche contro l'atomistica, sforzi che già abbiamo riscontrato in Bruno e in Lubin.

Il Basso apprese queste obbiezioni dal commentario di Toleto alla fisica aristotelica. Siccome esse furono già ripetutamente esposte, ci limiteremo alla confutazione del Basso.

Egli comincia col discutere la questione dell'infinita divisibilità del continuo (*continuum*) [3]. Basso non insiste sull'impossibilità di una divisione e costruzione matematicamente perfetta, ma dichiara che questa inesattezza o imprecisione è affatto senza importanza. A proposito della divisione di una linea formata da un numero impari di atomi, Basso esclama: « Infatti, che differenza ci sarebbe fra queste parti, se anche ad una di esse si aggiungesse *una* parte non divisibile? ». Per una così piccola differenza non è il caso di parlare di diversità!

Di più, anche quando il matematico crede di aver diviso le sue parti nel modo più esatto possibile, esse differiranno sempre fra loro di qualche migliaio di atomi. Che valore ha dunque una tale prova?

L'obbiezione che la diagonale del quadrato debba essere uguale al lato, viene da Basso, come già dal Bruno, combattuta ricordando la figura del punto e quella del *minimum* spaziale. Noi non possiamo giungere al concetto di *punto* se non partendo dal concetto di *corpo*; perciò non dobbiamo immaginare il punto senza una certa forma e non considerare i punti come qualcosa che compaia nel contatto degli altri e perda così il carattere di *punto*. Immaginiamo i punti quadrati o rotondi: nel loro comporsi per formare una figura, essi formeranno una serie retta od obliqua. Soltanto i punti ordinati in linea retta debbono essere considerati come collegati insieme; quelli in serie obliqua sono *ἀσύστατα et impertinentia*, non legati per continuità l'uno all'altro. Perciò i punti della diagonale non hanno nessuna relazione di dipendenza fra loro; ma solo quelli vicini a destra e a sinistra, in basso e in alto, sono legati fra loro (fig. *a*).

È dunque un errore credere che da ogni punto ad ogni altro si possa tirare una retta; questo è possibile solo nelle linee concepibili coi sensi; ogni linea primaria

(1) ....., *De actione et quatuor primis qualitatibus liber*, pag. 391.
(2) ....., *De motu liber*, Int. VII, pag. 319.
(3) ....., pag. 384.

(*intelligibile*) esiste evidentemente fra punti continui. Secondo la natura degli atomi, esistono solo linee parallele, e quindi linee rette perpendicolari (¹).

Per quanto infine risguarda i raggi tratti da un punto medio ai punti della periferia di circoli diversi concentrici, è da notare che questi raggi, proseguiti dall'esterno al mezzo, cadono in parte l'uno sull'altro, prima di raggiungere il centro (ved. Lubin, pag. 409).

Fig. *a*.

Il Basso non osa decidere con sicurezza la questione di sapere se le ultime parti della materia siano piccoli corpi, come vuole Democrito, o superfici, come afferma Platone. In ogni caso, esse sono indivisibili, di natura diversa, per cui Basso crede di essere d'accordo non solo con Democrito e Platone, ma anche con Empedocle (²).

In questi sforzi del Basso per difendere l'atomistica matematica, si ritrova la stessa oscurità che in Giordano Bruno, alla cui teoria atomistica quella del Basso rassomiglia, se non nei punti metafisici di partenza, nei suoi risultati fisici: se non che nel Basso si riscontrano una più profonda, quantunque variabile, conoscenza delle questioni fisiche ed un interesse molto più vivace per il loro sviluppo. Questa è forse la ragione per cui egli trasporta nel concetto di *spazio* il concetto di atomo, mentre il Bruno spiega il concetto di atomo col concetto teoretico della monade. Ma si trova comune a questi due, come pure a Bodin, l'idea che gli atomi rappresentano soltanto la grande polvere mondiale (*Weltenstaub*) che ebbe origine dal moto dell'etere, e che questo etere si può concepire sia come vuoto (*vacuum*), sia come anima nel mondo, che abbraccia lo spazio ed è cagione del moto. Se esiste un tale etere universale, esiste anche, evidentemente, un continuo (*continuum*): ed è quindi di secondaria importanza e anche superflua cosa costruire le figure matematiche da punti non continui.

In tutti i seguaci della teoria corpuscolare, prima di Descartes e di Galilei, troviamo la stessa confusione fra atomistica e teoria della fluidità, confusione proveniente dal fatto che essi ammettevano bensì l'invariabilità delle particelle dei corpi sensibili, ma ammettevano insieme l'esistenza di un etere continuo e fluido che chiamavano *aër* o *spiritus*: i primi a concepire in modo chiaro il problema della fluidità furono appunto Descartes e Galilei. Ma fra i loro predecessori nella teoria corpuscolare e nella fisica, Basso è certo il più notevole. Pare ch'egli sia stato il primo ad ammettere la differenza dei corpi secondo lo stato di aggregazione, e, insieme con Gorlaeus, fu anche il primo a negare la trasformazione dell'acqua in aria. In lui si riscontra, assai più decisamente che non in Bacone, la concezione meccanica della

(¹) ....., pag. 387.
(²) ....., *De motu liber*. Intentio VII, pag. 350 ff.

natura, in quanto egli considera il movimento nello spazio come l'unica causa dei mutamenti dei corpi. Qui già è in principio l'idea che tutte le qualità appartengono all'impressione soggettiva, e che la conoscenza dei loro mutamenti dipende dalla loro obbiettività come movimento di particelle invariabili. Certo, Basso considerava ancora il freddo e il caldo come qualità primarie; ma anch'esse presuppongono un processo di movimento molecolare. Prima del *Saggiatore* di Galilei (1623), nessuno, se non Basso, aveva chiaramente espresso il principio che le qualità sono da oggettivare (da considerare) come movimenti. A lui spetta anche il merito di aver manifestato l'idea della costruzione molecolare della materia. La sua teoria della combinazione ha tutto il carattere della chimica moderna, e ai suoi atomi non manca che la determinazione quantitativa.

La causa dei mutamenti nelle proprietà dei corpi è da lui sempre cercata nel fatto che le molecole, cioè le particelle di secondo e terzo ordine, sono formate dalle diverse combinazioni degli atomi primarî invariabili.

Quest'idea, sulla quale noi oggi fondiamo la spiegazione esatta delle mutazioni chimiche, servì al Basso in senso più generale per la spiegazione dei fenomeni naturali. Anche la mutazione del calore e l'evaporazione, e specialmente il modo generale di comportarsi fisicamente dei corpi, egli li considera come un processo chimico, cioè che si può spiegare coi mutamenti che hanno luogo non fra le molecole, ma nella molecola stessa. I mutamenti di calore avvengono perchè le particelle calde sono avviluppate da quelle fredde, oppure sfuggono da questo inviluppo; queste particelle calde e fredde sono particelle primarie: e la teoria del calore non si fonda su un movimento delle molecole fra loro, ma bensì su un movimento delle particelle primarie verso le secondarie. Così pure l'evaporazione e lo stato di aggregazione non si spiegano col modo di comportarsi delle molecole le une verso le altre, ma con la costituzione propria speciale della molecola stessa. È questa la differenza essenziale ed interessante fra l'inizio della teoria molecolare e il suo perfetto stato presente. Mentre noi distinguiamo la chimica dalla fisica pel fatto che nella chimica i mutamenti dei corpi si spiegano con il movimento e l'aggruppamento degli atomi nelle molecole, mentre nella fisica questi mutamenti si spiegano col movimento e l'aggruppamento delle molecole fra loro, a quel tempo non vi è ancora accenno a tale differenza.

I processi del calore, dell'evaporazione e della condensazione, della solidità e della fluidità, ecc., sono trattati secondo gli stessi principî con cui si trattano la combustione e la calcinazione, la soluzione e la combinazione dei corpi.

Questa teoria ha dunque carattere cinetico: essa spiega tutto col movimento degli atomi nell'interno delle molecole, e come agente motore ammette l'attività dell'etere universale intramolecolare. Il fatto, poi, che questa teoria non segue con perfetta conseguenza la cinetica, ma che in essa il rigido ragionamento dell'antica atomistica subisca l'influenza dell'eclettismo e dell'azione retrospettiva della teoria aristotelica delle forme e degli elementi, non impedisce di riconoscere l'essenziale progresso che la fisica ha fatto, assurgendo dalle forme sostanziali alle sostanze invariabili dei corpuscoli. Le scoperte teoriche del Basso, e l'epoca in cui egli le rese pubbliche chiaramente e decisamente, fanno di lui uno dei più grandi riformatori nella storia della fisica generale.

Non v'ha dubbio ch'egli abbia subìto l'influenza del Bruno. Basterebbe ricordare l'identificazione dei concetti di Natura e di Dio, e l'unificazione del tutto nello spirito universale, che già troviamo nella metafisica del Bruno.

Anche nella sua atomistica matematica egli sostiene, come il Bruno, che le proprietà della figura dipendono sempre dal *minimum* relativamente alla sua forma. Anch'egli fa astrazione dalla grandezza, e conserva nel minimo il carattere della determinazione dell'estensione. Solo, invece dello sviluppo della monade, egli sostiene il rapporto meccanico dei corpuscoli. Il concetto di variabilità compie per tal modo il suo *passaggio dalla sostanza all'azione scambievole delle sostanze. È questo il passo più importante nello svilnppo della teoria corpuscolare, che si potesse fare senza l'aiuto della meccanica matematica.* È vero che questa realtà del movimento, l'attualità della materia, è attribuita non ai corpuscoli stessi, ma all'etere universale: e, come si vede, il sistema del Basso è una forma di passaggio della teoria del Bruno a quella del Descartes. Ma questo passaggio appunto è di grande interesse per lo sviluppo del problema dei corpi, e rappresenta una tappa inevitabile nello sviluppo continuo del pensiero. La mutazione delle cose diventa, conservandosi immutate le sostanze elementari, un'azione meccanica della materia. Era logico e necessario questo graduale passaggio da un'ipotesi ad un'altra, fino alla compiuta soluzione del problema della meccanica naturale. Così Basso sta fra Bruno e Descartes, non solo come punto di contatto fra le due teorie, ma come rappresentante della tradizione storica. Che Basso mai non ricordi Bruno si spiega facilmente col divieto emesso nel 1603 ai libri dell'eretico morto sul rogo.

Il Bruno apparteneva, come lo Spinoza, a quei filosofi « compromettenti » che non si nominavano volentieri (1). Certo è poi che il Descartes conobbe le idee del Basso (2) ».

Io non ho la pretesa di aver fatto conoscere delle cose nuove; ho voluto ricordare due dimenticati: William Higgins e specialmente Sebastiano Basso, facendone, per quanto mi era possibile, rilevare alcuni dei loro meriti principali.

(1) Nel principio del XVII secolo sono rari gli accenni al nome di Bruno. Trovo un tentativo di riabilitazione della teoria di Bruno, che l'acqua sia più pesante della terra, dal punto di vista scolastico, in M. Fabiani Hippii, physici, in acad. Lips. prof. ord. *Problemata physica et logica peripatetica* ecc., Wittenb. 1604, XXVII, pag. 155.

(2) Ved. nota a pag. 464: Descartes, *Oeuvres*, VI, pag. 146 (N. di Lasswitz).

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76) Parte 1ª Transunti.
2ª Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª Memorie *della Classe di scienze morali storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — Transunti. Vol. I-VIII. (1876-84).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — Rendiconti. Vol. I-VII. (1884-91).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — Rendiconti *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali* Vol. I-XXV. (1892-1916). Fasc. 8°. Sem. 1°.
Rendiconti *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XXIV. (1892-1915).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali* Vol. I-XI. Fasc. 7.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XII. Vol. XIV. Vol. XV. Fasc. 1-2.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia è di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

Ermanno Loescher & C.° — ***Roma***, *Torino* e *Firenze.*

Ulrico Hoepli. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

MEMORIE DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

(Anno CCCXIII 1916)

Serie Quinta — Volume XI — Fascicolo VII.

F. CANTELLI

SULLA LEGGE DEI GRANDI NUMERI

Smithsonian Institution
SEP 25 1924
National Museum

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1916

RELAZIONE

letta dal Corrisp. G. Castelnuovo, a nome anche del Socio V. Reina, nella seduta del 6 febbraio 1916, sulla Memoria del dott. F. Cantelli, avente per titolo: *Sulla legge dei grandi numeri.*

La Memoria del dott. Cantelli si riattacca a quei fondamentali concetti che, introdotti nella scienza da Tchebycheff e dalla sua scuola, vanno oggi trovando stabile assetto nel classico edifizio del calcolo delle probabilità. In queste ricerche gioca la parte dominante la nozione astratta di variabile casuale. Il dott. Cantelli, dopo avere dato la definizione in modo più chiaro e preciso di quel che non si sia fatto sinora, estende il metodo di Bienaymé-Tchebycheff allo scopo di fissare due limiti tra i quali cada la probabilità che una variabile casuale oscilli in un determinato intervallo.

L'autore prende poi in esame la legge dei grandi numeri, considerata come tendenza ad un limite (nel senso del calcolo delle probabilità) della media aritmetica di un numero crescente di variabili casuali. Di questa legge egli riesce ad estendere la portata, sia togliendo, in parte, la restrizione della indipendenza delle variabili, sia col ricorrere, nella formulazione della legge, a momenti di ordine diverso da 2. Si presenta così una serie di leggi dei grandi numeri, tra le quali il dott. Cantelli stabilisce interessanti relazioni.

La Memoria, importante per i risultati che contiene, è pur notevole per i concetti che introduce o precisa, qualcuno dei quali si presterebbe ad ulteriori sviluppi. Ciò può dirsi, in particolare, della nozione, posta in piena luce, di *tendenza al limite secondo il calcolo delle probabilità*; a proposito della quale converrebbe esaminare fino a qual punto gli ordinarî teoremi sui limiti possano trasportarsi al nuovo e più generale campo di ricerche.

Per i pregi indicati proponiamo che il lavoro del dott. Cantelli venga inserito nelle Memorie accademiche.

Sulla legge dei grandi numeri.

Memoria di F. CANTELLI

presentata nella seduta del 6 febbraio 1916.

L'idea di variabile casuale è suggerita dai problemi che si presentano nel calcolo delle probabilità. Limitandoci a considerare, da principio, una *variabile casuale reale discontinua* X, possiamo dire che essa è una grandezza che può assumere uno dei valori, *reali* e *distinti*,

(1) $$\ldots\ldots, x_{-n}, x_{-n+1}, \ldots, x_0, \ldots, x_{n-1}, x_n, \ldots\ldots$$

che supponiamo *ordinati* per valori crescenti, secondo che si presenti uno degli *eventi*, escludentisi a vicenda,

(2) $$\ldots\ldots, E_{-n}, E_{-n+1}, \ldots, E_0, \ldots, E_{n-1}, E_n, \ldots\ldots$$

rispettivamente di probabilità, ben definite,

(3) $$\ldots\ldots, p_{-n}, p_{-n+1}, \ldots, p_0, \ldots, p_{n-1}, p_n, \ldots\ldots$$

soddisfacenti alla condizione

(4) $$\sum_i p_i = 1\,.$$

Una variabile casuale discontinua non può, per sua natura, ammettere una formulazione più semplice di quella sopra indicata. Può invece ammettere, agli effetti dei valori distinti che può assumere, diverse *forme equivalenti* nei casi in cui esistano eventi della successione (2) che possano considerarsi come combinazione di altri eventi, escludentisi a vicenda. Così, ad es., se l'evento E_r consiste nella manifestazione di uno dei due eventi E'_r, E''_r, escludentisi a vicenda, rispettivamente di probabilità p'_r, p''_r, essendo quindi $p'_r + p''_r = p_r$, si può ripetere, nella successione (1), due volte il valore x_r, sostituendo, nella successione (2), gli eventi E'_r, E''_r a E_r e, nelle (3) e (4), le due probabilità p'_r, p''_r a p_r. Possiamo dire, in definitiva, che una variabile casuale reale discontinua X può assumere diverse forme equivalenti le quali ammettono la *stessa forma canonica* che caratterizza la variabile casuale indicata.

Della nozione di forme equivalenti di una variabile casuale usufruiremo in seguito. Avvertiamo invece, fin da ora, che quando, in seguito, parleremo della *esistenza* di una variabile casuale soddisfacente a determinate condizioni, intendiamo dire, in modo generale e per quel che riguarda questo scritto, che essa possa logicamente costruirsi secondo le regole del calcolo delle probabilità.

*
* *

Indichiamo con m un numero reale comunque assegnato, con k un numero positivo pure assegnato e scriviamo, avuto riguardo ai valori distinti x che la variabile casuale X può assumere con probabilità p_x,

(5) $$\sum_{x=-\infty}^{x=+\infty} p_x = 1 \quad , \quad \sum_{x=-\infty}^{x=+\infty} |x-m|^k p_x = \sigma_k ,$$

supposto che anche la seconda somma abbia senso e non sia nulla; si potrà pure scrivere, indicando con ω un numero positivo sufficientemente piccolo e con λ un numero positivo,

(6) $$\sigma_k = \sum_{x=-\infty}^{x=m-\lambda\sqrt[k]{\sigma_k}-\omega} |x-m|^k p_x + \sum_{x=m-\lambda\sqrt[k]{\sigma_k}}^{x=m+\lambda\sqrt[k]{\sigma_k}} |x-m|^k p_x + \sum_{m=m+\lambda\sqrt[k]{\sigma_k}+\omega}^{x=+\infty} |x-m|^k p_x .$$

Ciò posto, indichiamo con P la probabilità delle ineguaglianze

(7) $$m-\lambda\sqrt[k]{\sigma_k} \leq X \leq m+\lambda\sqrt[k]{\sigma_k}$$

e proponiamoci di determinare un confine inferiore di P, quando sia $\lambda \geq 1$.

Si ricava dalla (6), osservando che in tal caso il secondo sommatorio dovrà necessariamente contenere qualche termine, altrimenti esisterebbero soltanto valori di $|x-m|^k$ superiori a σ_k, il che non è ovviamente possibile,

(8) $$\sigma_k > \sum_{x=-\infty}^{x=m-\lambda\sqrt[k]{\sigma_k}-\omega} |x-m|^k p_x + \sum_{x=m+\lambda\sqrt[k]{\sigma_k}+\omega}^{x=+\infty} |x-m|^k p_x$$

e, rilevando che il più piccolo valore che può assumere $|x-m|^k$, nei due sommatori precedenti, è

(9) $$(\lambda\sqrt[k]{\sigma_k}+\omega)^k$$

si deduce agevolmente

(10) $$\sigma_k > (\lambda\sqrt[k]{\sigma_k}+\omega)^k\,(1-P) > (\lambda\sqrt[k]{\sigma_k})^k\,(1-P)$$

da cui

(11) $$P > 1 - \frac{1}{\lambda^k} \cdot$$

Osserviamo che, per $\lambda < 1$, potrà assumersi lo zero come confine inferiore di P.

Ricerchiamo, ora, un confine superiore di P nell'ipotesi che il limite superiore dei valori che può assumere $|X - m|$ non superi un numero finito α assegnato.

Potremo in tal caso scrivere, per la stessa variabile casuale X precedentemente considerata,

(12) $$\sum_{x=m-\alpha}^{x=m+\alpha} p_x = 1 \quad , \quad \sigma_k = \sum_{x=m-\alpha}^{x=m-\lambda\sqrt[k]{\sigma_k}-\omega} |x-m|^k p_x + \sum_{x=m-\lambda\sqrt[k]{\sigma_k}}^{x=m+\lambda\sqrt[k]{\sigma_k}} |x-m|^k p_x + \sum_{x=m+\lambda\sqrt[k]{\sigma_k}+\omega}^{x=m+\alpha} |x-m|^k p_x$$

e, osservando che i massimi valori di $|x - m|^k$ corrispondono rispettivamente, nei tre sommatorî precedenti, ai valori $x = m - \alpha$, $x = m \pm \lambda\sqrt[k]{\sigma_k}$, $x = m + \alpha$, si deduce

(13) $$\sigma_k \leq \alpha^k \sum_{x=m-\alpha}^{x=m-\lambda\sqrt[k]{\sigma_k}-\omega} p_x + \lambda^k \sigma_k \sum_{x=m-\lambda\sqrt[k]{\sigma_k}}^{x=m+\lambda\sqrt[k]{\sigma_k}} p_x + \alpha^k \sum_{x=m+\lambda\sqrt[k]{\sigma_k}+\omega}^{x=m+\alpha} p_x$$

da cui

(14) $$\sigma_k \leq \alpha^k(1 - P) + \lambda^k \sigma_k P,$$
$$P(\alpha^k - \lambda^k \sigma_k) \leq \alpha^k - \sigma_k.$$

Ma si ha, tenuta presente la seconda delle (12),

(15) $$\alpha^k \geq \sigma_k$$

e perciò, se è $\lambda < 1$, dalla (14) si ricava

(16) $$P \leq \frac{\alpha^k - \sigma_k}{\alpha^k - \lambda^k \sigma_k} \leq 1 .$$

ed è ovviamente

(17) $$\lim_{\alpha=\infty} \frac{\alpha^k - \sigma_k}{\alpha^k - \lambda^k \sigma_k} = 1 .$$

È facile intendere come si possano estendere tutte le indicate considerazioni ad una variabile casuale reale continua.

In tal caso sono da sostituire alle (12) le altre due

(18) $$\int_{m-\alpha}^{m+\alpha} \varphi(x)\,dx = 1 \quad , \quad \int_{m-\alpha}^{m+\alpha} |x - m|^k \varphi(x)\,dx = \sigma_k \ ,$$

avendo indicato con $\varphi(x)\,dx$ la probabilità che X assuma un valore compreso tra x e $x+dx$. In seguito, riferendoci anche a variabili casuali reali continue, limiteremo qualche dimostrazione al caso di una variabile casuale reale discontinua.

Dopo quanto è stato detto sopra, si può enunciare il seguente

Teorema. — Se X è una variabile casuale, se m è un numero reale comunque assegnato, se k è un numero positivo pure comunque assegnato, se il limite superiore dei valori che può assumere $|X-m|$ non supera un numero finito α, se σ_k indica il valore medio di $|X-m|^k$, si hanno, per la probabilità P delle ineguaglianze

$$(19)\qquad m-\lambda\sqrt[k]{\sigma_k}\leq X\leq m+\lambda\sqrt[k]{\sigma_k}\,,$$

le seguenti limitazioni:

$$(20)\qquad 1-\frac{1}{\lambda^k}<P\leq 1\quad \text{se } \lambda\geq 1\,,\qquad 0\leq P\leq\frac{\alpha^k-\sigma_k}{\alpha^k-\lambda^k\sigma_k}\quad \text{se } \lambda<1\,.$$

***

Del teorema precedente consideriamo due casi particolari.

Supponiamo $k=2$ e scegliamo m in modo che σ_2 risulti minimo. È noto, allora, che m coincide col valore medio M di X; si ottiene, in questo caso, un noto teorema di Bienaymé-Tchebychef, completato con un confine superiore di P per $\lambda<1$.

Valgono cioè, per la probabilità P delle ineguaglianze

$$(21)\qquad M-\lambda\sqrt{\sigma_2}\leq X\leq M+\lambda\sqrt{\sigma_2}\,,$$

le seguenti limitazioni:

$$(22)\qquad 1-\frac{1}{\lambda^2}<P\leq 1\quad \text{se } \lambda\geq 1\,,\qquad 0\leq P\leq\frac{\alpha^2-\sigma_2}{\alpha^2-\lambda^2\sigma_2}\quad \text{se } \lambda<1\,.$$

Ad es: per $\alpha=2\sigma_2$, $\lambda=\frac{1}{2}$, si ha $P\leq 0{,}80$; per $\alpha=3\sigma_2$, $\lambda=\frac{1}{3}$, si ha $P\leq 0{,}90$.

Supponiamo, in secondo luogo, $k=1$ e scegliamo m in modo che σ_1 risulti minimo. È noto che, allora, m coincide con la *mediana* A che si riferisce alla legge di probabilità di X; *mediana* che, indicando con $\psi(x)$ la probabilità che X assuma valori inferiori o eguali a x, soddisfa alla condizione

$$(23)\qquad \psi(A)=\tfrac{1}{2}.$$

In tal caso, per la probabilità P delle ineguaglianze

$$(24)\qquad A-\lambda\sigma_1\leq X\leq A+\lambda\sigma_1\,,$$

valgono le seguenti limitazioni:

$$(25)\qquad 1-\frac{1}{\lambda}<P\leq 1\quad \text{se } \lambda\geq 1\,,\qquad 0\leq P\leq\frac{\alpha-\sigma_1}{\alpha-\lambda\sigma_1}\quad \text{se } \lambda<1\,.$$

Ad es.: per $\alpha=4\sigma_1$, $\lambda=\frac{1}{4}$, si ha $P\leq 0{,}80$; per $\alpha=9\sigma_1$, $\lambda=\frac{1}{9}$, si ha $P\leq 0{,}90$.

***

Il teorema più generale, precedentemente enunciato, altro non presuppone che la conoscenza di m, di σ_k e di α, osservando, però, che su di m non è stata fatta, per la dimostrazione del teorema, alcuna speciale ipotesi.

Ove, nella ricerca dei confini di P, che sono oggetto di indagine, si tenesse conto di altre condizioni, ad es. quando invece di presupporre noto un singolo σ_k fosse presupposta la simultanea conoscenza di diversi σ_k, corrispondenti a valori diversi dell'indice k, possono ricavarsi confini più convenienti di quelli precedentemente ottenuti (¹). Così pure possono ottenersi confini più convenienti, per speciali valori di m, relativi alla probabilità P_1 che X assuma valori compresi tra a e $m + \lambda \sqrt[k]{\sigma_k}$, essendo $a < m - \lambda \sqrt[k]{\sigma_k}$ (¹).

Nei casi, poi, in cui il problema possa ricondursi alla conoscenza delle somme

$$\sum_x p_x \quad , \quad \sum_x p_x\, x \quad , \quad \sum_x p_x\, x^2 \,, \ldots\ldots, \sum_x p_x\, x^{n-1},$$

la ricerca dei confini più convenienti di

$$\sum_{x \leq v} p_x \,,$$

essendo v un numero reale determinato, rientra teoricamente nelle generali ineguaglianze indicate da Tchebychef (²). Non ci è noto che la discussione di queste ineguaglianze, che presenta difficoltà pratiche notevoli per valori finiti di n appena elevati, sia stata tentata per valori diversi da $n = 3$; il qual caso fu discusso dallo stesso Tchebychef, con riferimento ad un problema di fisica, e dimostrato e da noi generalizzato, per altra via, con riferimento al calcolo delle probabilità (³). Il caso discusso da Tchebychef è quello in cui gli integrali corrispondenti alle prime tre somme soprascritte siano compresi tra limiti positivi; il risultato, quando i limiti di tali integrali siano $-\infty$ e $+\infty$, ottenuto per mezzo delle indicate ineguaglianze di Tchebychef, è dato nella nostra citata Nota sul rischio.

***

Dovremo applicare i teoremi sopra dimostrati ad una variabile casuale *somma* delle variabili casuali $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Interessa, pertanto, qualche riflessione sull'argomento.

(¹) Cfr. Cantelli, *Intorno ad un teorema fondamentale della teoria del rischio.* Bollettino dell'Associazione degli Attuari italiani, n. 24. Milano 1910.

(²) Cfr. *Oeuvres de P. L. Tchebychef,* pubbliées par les soins de M.M. A. Markoff et N. Sonin. Tome II, St. Pétersbourg 1907, pp. 183, 421, 443, 541, 681.

(³) Cfr. *Intorno ad un teorema di calcolo delle probabilità.* Giornale di matematiche di Battaglini, vol. XLIX.

La variabile casuale X_i, tra le $X_1, X_2, \ldots, X_n$ che supponiamo assegnate, può assumere il valore $x_{i,u}$, in cui u è un indice variabile, con la probabilità $p_{x_{i,u}}$ ed è

(26) $$\sum_u p_{x_{i,u}} = 1 .$$

Ora supponiamo che esista la variabile casuale

(27) $$X(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$$

la quale assuma uno dei valori dati dalla somma

(28) $$x_{\alpha,\beta,\ldots,\gamma} = x_{1,\alpha} + x_{2,\beta} + \cdots + x_{n,\gamma}$$

— in dipendenza dei valori acquistati da ciascuna delle variabili casuali $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — con probabilità

(29) $$\theta(x_{1,\alpha}, x_{2,\beta}, \ldots, x_{n,\gamma}),$$

che la conoscenza delle variabili casuali X_i deve permettere di potere determinare; dovrà essere ovviamente

(30) $$\sum_\alpha \sum_\beta \cdots \sum_\gamma \theta(x_{1,\alpha}, x_{2,\beta}, \ldots x_{n,\gamma}) = 1$$

poichè sono considerati tutti i valori possibili che può assumere la (27).

Quando siano soddisfatte le precedenti condizioni diciamo che la variabile casuale (27) è la *somma* delle variabili casuali $X_1, X_2, \ldots, X_n$, e scriviamo

(31) $$X(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = X_1 + X_2 + \cdots + X_n .$$

Si dimostra che si ha [1], essendo E il simbolo di valore medio o di speranza matematica,

(32) $$E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n) .$$

Supponiamo, ora, che una certa variabile casuale X sia esprimibile per mezzo di una somma

(33) $$X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

e pure esprimibile per mezzo di un'altra somma

(34) $$Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_m .$$

[1] Cfr. Markoff, *Wahrscheinlichkeitsrechnung*, pp. 50-51, Leipzig-Berlin 1912; Cantelli, *Elementi di matematica attuariale*, pag. 40, in Sinossi della cultura universale e pratica, vol. II, Milano 1909.

Nel primo caso, tenuta presente la definizione di variabile casuale *somma*, la X potrà assumere uno dei valori $x_{\alpha,\beta,\dots,\gamma}$; nel secondo caso uno dei valori $y_{\alpha',\beta',\dots,\gamma'}$. Dalla supposta *esistenza* della variabile casuale X discende che le (33) e (34) non possono essere che due forme equivalenti della X stessa. E siccome, come è facile verificare, due forme equivalenti di una stessa variabile casuale hanno lo stesso valore medio, resta in questo modo chiarito il perchè della eguaglianza

$$(35) \qquad E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n) = E(Y_1) + E(Y_2) + \cdots + E(Y_m).$$

Analogamente al modo come è stata definita una variabile casuale *somma* può essere definita una variabile casuale *prodotto*, ecc. Ora è da tener presente che due variabili casuali X e Y che ammettono una stessa forma canonica, anche a prescindere dalla specie di eventi che ne completano la conoscenza, soddisfano sempre alle eguaglianze

$$(36) \qquad \begin{aligned} E|X|^s &= E|Y|^s, \\ E(X^s) &= E(Y^s) \end{aligned}$$

per tutti i valori di s per cui esistono i valori medî indicati; mentre, nel caso che X e Y non ammettano una stessa forma canonica, tali eguaglianze potrebbero essere solo soddisfatte per qualche speciale valore di s.

***

Sia $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ una successione illimitata di variabili casuali, sia

$$(37) \qquad E(X_i) = M_i$$

e ammettiamo che esista pure la successione di variabili casuali

$$(38) \qquad \frac{X(n)}{n} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots.$$

Supposto, *anche*, che

$$(39) \qquad \lim_{n=\infty} E\left(\frac{X(n)}{n}\right) = \lim_{n=\infty} \frac{\sum_{i=1}^{i=n} M_i}{n} = M,$$

è noto come si soglia dimostrare, nel caso che $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ siano *indipendenti*, soddisfacenti a certe condizioni, e in base al teorema di Bienaymé-Tchebychef precedentemente indicato, la *tendenza*, nel senso del calcolo delle probabilità, per n crescente ad infinito, della (38) verso il limite M.

Nella dimostrazione di questo teorema — il quale va sotto il nome di legge dei grandi numeri — tanto per il Bienaymé quanto per il Tchebychef, e per tutti gli autori che hanno esposto il teorema, la indipendenza delle $X_1, X_2, \dots, X_n$ costituisce una premessa. È intuitivo, d'altra parte, che tra le X_i possono esistere

condizioni di dipendenza tali per cui il teorema resti ancora valido. Il Markoff fa questa osservazione e in una sua Memoria ([1]) dà alcuni esempi di tali condizioni di dipendenza. A noi interessa, in questo scritto, sostituire alla premessa della indipendenza delle variabili casuali X_i, nella dimostrazione dell'indicato teorema, una premessa di carattere più generale, tale che implichi condizioni, verificabili *a priori*, da potere includere tutti i casi di dipendenza accennati. Invero, tale premessa si presenta spontanea per chi usufruisca dei primi concetti della teoria della correlazione, sulla utilità pratica e teorica della quale rimandiamo ad un lavoro di Udny Yule ([2]) e alla letteratura sull'argomento da questi citata.

* * *

Essendo

$$X(n) = X_1 + X_2 + \cdots + X_n\,,$$

(40)
$$E\big(X(n)\big) = \sum_{i=1}^{i=n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{i=n} M_i$$

e posto

(41)
$$E(X_i - M_i)^2 = \sigma_{2,i} \quad , \quad E(X_r - M_r)(X_s - M_s) = \gamma_{r,s}\,, \quad r \neq s\,,$$

si deduce agevolmente

(42)
$$\sigma_2(n) = E\left[X(n) - \sum_{i=1}^{i=n} M_i\right]^2 =$$
$$= \sigma_{2,1} + \sigma_{2,2} + \sigma_{2,3} + \cdots + \sigma_{2,n} + 2(\gamma_{1,2} + \gamma_{1,3} + \cdots + \gamma_{n-1,n})\,,$$

in cui i termini $\gamma_{r,s}$ sono in numero di $\frac{n(n-1)}{2}$ e in cui è noto ([2]) che i valori che può assumere $\gamma_{r,s}$ sono compresi tra $-\sqrt{\sigma_{2,r}\,.\,\sigma_{2,s}}$ e $+\sqrt{\sigma_{2,r}\,.\,\sigma_{2,s}}$. Diremo, qui, che nel caso $\gamma_{r,s} = 0$ le due variabili casuali X_r e X_s *non sono correlate*, che nel caso $\gamma_{r,s} < 0$ sono *negativamente correlate* e che nel caso $\gamma_{r,s} > 0$ sono *positivamente correlate.*

Due variabili casuali X_r e X_s tra di loro indipendenti sono sempre non correlate, mentre due variabili casuali X_r e X_s non correlate possono essere dipendenti. Adduciamo, a chiarimento, un esempio molto semplice.

Siano le due variabili casuali X_1 e X_2; X_2 dipende da X_1 in tal modo che, se X_1 ha assunto il valore $x_{1,r}$, il valore medio dei valori che può assumere X_2 è lo stesso $x_{1,r}$. Ciò posto, indichiamo con $p(x_{1,r})$ la probabilità che X_1 assuma il valore $x_{1,r}$, con $p(x_{2,s})$ la probabilità che X_2 assuma il valore $x_{2,s}$ quando X_1 abbia assunto il valore $x_{1,r}$, e consideriamo le due variabili casuali

(43)
$$X_1 - M \quad , \quad X_1 - X_2\,,$$

([1]) Cfr. *Extension de la loi des grands nombres aux événements dépendants les uns des autres.* Bulletin de la Société physico-mathématique de Kasan (2me série, tome XV, n. 4, 1906); cfr. pure *Wahrsch.*, pag. 62, Anmerkung.

([2]) *An Introduction to the Theory of Statistics.* London 1912, second edit., Charles Griffin & C.

essendo per ipotesi

(44) $$E(X_1) = M.$$

Si deduce

$$E(X_1 - M) = 0,$$

(45)
$$\begin{aligned} E(X_1 - X_2) &= \sum_r \sum_s (x_{1,r} - x_{2,s})\, p(x_{1,r})\, p(x_{2,s}) = \\ &= \sum_r p(x_{1,r}) \sum_s (x_{1,r} - x_{2,s})\, p(x_{2,s}) = 0, \\ \gamma_{1,2} = E(X_1 - M)(X_1 - X_2) &= \sum_r \sum_s (x_{1,r} - M)(x_{1,r} - x_{2,s})\, p(x_{1,r})\, p(x_{2,s}) = \\ &= \sum_r (x_{1,r} - M)\, p(x_{1,r}) \sum_s (x_{1,r} - x_{2,s})\, p(x_{2,s}) = 0. \end{aligned}$$

Ritornando alla (42), poniamo

(46) $$C(n) = \frac{\gamma_{1,2} + \gamma_{1,3} + \cdots + \gamma_{n-1,n}}{\dfrac{n(n-1)}{2}}$$

e potrà scriversi

(47) $$\sigma_2(n) = E\left[X(n) - \sum_{i=1}^{i=n} M_i\right]^2 = \sum_{i=1}^{i=n} \sigma_{2,i} + n(n-1)\, C(n).$$

Ora, se abbiamo riguardo alla variabile casuale

(48) $$\frac{X(n)}{n} = \frac{X_1 + X_2 \cdots + X_n}{n}$$

di valore medio $\dfrac{\sum_{i=1}^{i=n} M_i}{n}$, alla quale corrisponde lo scostamento quadratico medio

(49) $$\sqrt{\frac{\sigma_2(n)}{n^2}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{i=n} \sigma_{2,i}}{n^2} + \left(1 - \frac{1}{n}\right) C(n)},$$

e se osserviamo che, quando sia α_i un numero non inferiore al limite superiore dei valori che può assumere $|X_i - M_i|$, sarà $\dfrac{\sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i}{n}$ un numero non inferiore al limite superiore dei valori che potrà assumere

(50) $$\left| \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} - \frac{M_1 + M_2 + \cdots + M_n}{n} \right|$$

si potrà dire, tenute presenti le (21) e (22):

« Se $X(n)$ è una variabile casuale, somma delle variabili casuali $X_1, X_2, \ldots X_n$, si hanno, per la probabilità P che sia

$$(51) \qquad \left| \frac{X(n)}{n} - \frac{M_1 + M_2 + \cdots + M_n}{n} \right| \leq \lambda \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{i=n} \sigma_{2,i}}{n^2} + \left(1 - \frac{1}{n}\right) C(n)}\,,$$

le seguenti limitazioni:

$$1 - \frac{1}{\lambda^2} < P \leq 1 \quad \text{se } \lambda \geq 1\,,$$

$$(52) \qquad 0 \leq P \leq \frac{\left(\frac{\sum \alpha_i}{n}\right)^2 - \left[\frac{\sum_i \sigma_{2,i}}{n^2} + \left(1 - \frac{1}{n}\right) C(n)\right]}{\left(\frac{\sum \alpha_i}{n}\right)^2 - \lambda^2 \left[\frac{\sum_i \sigma_{2,i}}{n^2} + \left(1 - \frac{1}{n}\right) C(n)\right]} \quad \text{se } \lambda < 1\,.$$

* * *

Nelle pagine precedenti, enunciando i teoremi sui confini di P abbiamo considerato anche un confine superiore di questa probabilità. Ciò abbiamo fatto per enunciare i detti teoremi nel modo più completo. In seguito, però, dovendo occuparci della tendenza, nel senso del calcolo delle probabilità, di $\frac{X(n)}{n}$ verso un limite, sarà sufficiente di considerare l'unità come confine superiore di P.

Cominciamo ora dal fissare il concetto di tendenza ad un limite, nel senso del calcolo delle probabilità, almeno per quel tanto che può interessare in questo scritto.

Se è N un numero assegnato, η un numero positivo prefissato piccolo a piacere, e $P_{(n)}$ la probabilità delle ineguaglianze

$$(53) \qquad N - \eta \leq \frac{X(n)}{n} \leq N + \eta\,,$$

noi diremo che la variabile casuale $\frac{X(n)}{n}$ tende al limite N, col crescere di n, nel senso del calcolo delle probabilità, tutte le volte che sia

$$(54) \qquad \lim_{n=\infty} P_{(n)} = 1\,.$$

Al simbolo lim, della ordinaria tendenza al limite, contrapporremo il simbolo Lim a designare la tendenza ad un limite nel senso del calcolo delle probabilità; onde scriveremo

$$(55) \qquad \operatorname*{Lim}_{n=\infty} \frac{X(n)}{n} = N\,.$$

Ciò posto, esaminiamo, in base alla (51) e alla prima delle (52), a quali condizioni si possa concludere la tendenza, nel senso del calcolo delle probabilità, di $\frac{X(n)}{n} = \frac{\sum X_i}{n}$ verso il limite, supposto esistente, di $\frac{\sum M_i}{n}$. Dimostreremo che se si ha

$$\lim_{n=\infty} \frac{M_1 + M_2 + \cdots + M_n}{n} = M,$$

(56)

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sigma_2(n)}{n^2} = \lim_{n=\infty} \left[\frac{\sum_{i=1}^{i=n} \sigma_{2,i}}{n^2} + \left(1 - \frac{1}{n}\right) C(n) \right] = 0,$$

sarà necessariamente

$$\text{(57)} \qquad \operatorname*{Lim}_{n=\infty} \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} = M;$$

cioè le condizioni (56) sono *sufficienti* perchè la (57) sia vera.

Si ha infatti, usando i soliti simboli,

$$\text{(58)} \qquad \left| \frac{\sum M_i}{n} - \frac{X(n)}{n} \right| \leq \lambda \sqrt{\frac{\sigma_2(n)}{n^2}} \quad , \quad P > 1 - \frac{1}{\lambda^2}$$

ed essendo

$$\text{(59)} \qquad - \left| \frac{\sum M_i}{n} - M \right| + \left| M - \frac{X(n)}{n} \right| \leq \left| \frac{\sum M_i}{n} - \frac{X(n)}{n} \right|$$

si ha, a maggior ragione, tenute presenti le (58),

$$\text{(60)} \qquad - \left| \frac{\sum M_i}{n} - M \right| + \left| M - \frac{X(n)}{n} \right| \leq \lambda \sqrt{\frac{\sigma_2(n)}{n^2}} \quad , \quad P > 1 - \frac{1}{\lambda^2}$$

oppure

$$\text{(61)} \qquad \left| M - \frac{X(n)}{n} \right| \leq \lambda \sqrt{\frac{\sigma_2(n)}{n^2}} + \left| \frac{\sum M_i}{n} - M \right| \quad , \quad P > 1 - \frac{1}{\lambda^2}.$$

Ora, indicando con ε_1 e ε_2 due infinitesimi positivi al crescere di n, le (56) permettono ovviamente di scrivere

$$\text{(62)} \qquad \sqrt{\frac{\sigma_2(n)}{n^2}} \leq \varepsilon_1 \quad . \quad \left| \frac{\sum M_i}{n} - M \right| \leq \varepsilon_2$$

e, se indichiamo con η un numero positivo *assegnato* piccolo a piacere, potremo porre

$$\lambda \sqrt{\frac{\sigma_2(n)}{n^2}} + \left| \frac{\sum M_i}{n} - M \right| \leq \lambda \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \eta \tag{63}$$

da cui

$$\lambda = \frac{\eta - \varepsilon_2}{\varepsilon_1}, \tag{64}$$

e sarà

$$\lim_{n=\infty} \lambda = \infty .$$

In definitiva, le condizioni (56) conducono a poter scrivere

$$\left| M - \frac{X(n)}{n} \right| \leq \eta \quad , \quad 1 \geq P_{(n)} > 1 - \frac{\varepsilon_1^2}{(\eta - \varepsilon_2)^2} \tag{65}$$

ed è

$$\lim_{n=\infty} \left[1 - \frac{\varepsilon_1^2}{(\eta - \varepsilon_2)^2} \right] = 1 \tag{66}$$

onde resta dimostrata la (57).

Consideriamo un caso particolare. Siano soddisfatte la prima delle (56) e la condizione

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum_{i=1}^{i=n} \sigma_{2,i}}{n^2} = 0 ; \tag{67}$$

in tal caso, essendo $\frac{\sigma_2(n)}{n^2}$ sempre positivo, dovrà necessariamente essere, quando $C(n)$ non possa mai assumere valori positivi,

$$\lim_{n=\infty} C(n) = 0 . \tag{68}$$

Potremo pertanto dire che, se sono soddisfatte la prima delle (56) e la (67) e se le variabili casuali della successione $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ *non sono correlate* o sono *negativamente correlate*, sarà

$$\operatorname{Lim}_{n=\infty} \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} = M . \tag{69}$$

Vogliamo accennare ad un semplice esempio di una successione illimitata di variabili casuali dipendenti e non correlate. A tale scopo generalizziamo l'esempio precedentemente addotto.

Sia la successione di variabili casuali $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$, ognuna delle quali dipende dalle precedenti in tal modo che, se X_i ha assunto il valore $x_{i,\alpha}$, essendo α l'indice variabile, il valore medio dei valori che può assumere X_{i+1} è lo stesso $x_{i,\alpha}$. Se è

$$E(X_1) = M, \tag{70}$$

le variabili casuali, *dipendenti*, della successione

$$M - X_1, X_2 - X_1, X_2 - X_3, X_4 - X_3, X_4 - X_5, X_6 - X_5, X_6 - X_7, X_8 - X_7, X_8 - X_9, \ldots \tag{71}$$

hanno valore medio nullo e risultano non correlate.

Che ciascuna variabile casuale della successione (71) abbia valore medio nullo si dimostra in modo analogo a quello dell'esempio precedentemente indicato.

Indicando, ora, con $p(x_{i,\alpha}, x_{i+1,\beta})$ la probabilità che X_i e X_{i+1} assumano rispettivamente i valori $x_{i,\alpha}$ e $x_{i+1,\beta}$; con $p(x_{r,\gamma})$, essendo $r \geqq i+1$, la probabilità che X_r assuma il valore $x_{r,\gamma}$ nella ipotesi che X_i e X_{i+1} abbiano assunto i valori $x_{i,\alpha}$ e $x_{i+1,\beta}$; con $p(x_{r+1,\delta})$ la probabilità che X_{r+1} assuma il valore $x_{r+1,\delta}$ nella ipotesi che X_i, X_{i+1}, X_r abbiano assunto rispettivamente i valori $x_{i,\alpha}$, $x_{i+1,\beta}$, $x_{r,\gamma}$; sarà

$$E(X_i - X_{i+1})(X_r - X_{r+1}) = \tag{72}$$

$$= \sum_\alpha \sum_\beta \sum_\gamma \sum_\delta (x_{i,\alpha} - x_{i+1,\beta})(x_{r,\gamma} - x_{r+1,\delta})\, p(x_{i,\alpha}, x_{i+1,\beta})\, p(x_{r,\gamma})\, p(x_{r+1,\delta})$$

la quale può anche scriversi

$$\sum_\alpha \sum_\beta \sum_\gamma (x_{i,\alpha} - x_{i+1,\beta})\, p(x_{i,\alpha}, x_{i+1,\beta})\, p(x_{r,\gamma}) \sum_\delta (x_{r,\gamma} - x_{r+1,\delta})\, p(x_{r+1,\delta}) = 0. \tag{73}$$

È facile immaginare uno schema ad urna che illustri l'esempio considerato.

*
* *

Riprendiamo il teorema generale precedentemente dimostrato [formole (19) e (20)] ed estendiamolo al caso di una successione, supposta esistente, di variabili casuali

$$\frac{X(n)}{n} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{74}$$

Potremo dire che la probabilità che sia

$$\left| m_k(n) - \frac{X(n)}{n} \right| \leq \lambda \sqrt[k]{\sigma_k[m_k(n)]}, \tag{75}$$

in cui $m_k(n)$ è, per ogni assegnato positivo k, un numero finito comunque assegnato, in dipendenza di ogni valore di n, e in cui è

$$\sigma_k[m_k(n)] = E\left| m_k(n) - \frac{X(n)}{n} \right|^k, \tag{76}$$

è maggiore di

$$1 - \frac{1}{\lambda^k}. \tag{77}$$

Possiamo prescindere dalla considerazione del confine inferiore della probabilità indicata, relativo a $\lambda < 1$.

Nel caso $k = 2$, nell'ipotesi che $M_2(n)$ sia quella funzione di n che rende minimo

$$E\left(m_2(n) - \frac{X(n)}{n}\right)^2 \tag{78}$$

e ancora nelle ipotesi che esista il limite M_2 di $M_2(n)$, per $n = \infty$, e che sia

$$\lim_{n=\infty} E\left(M_2(n) - \frac{X(n)}{n}\right)^2 = 0, \tag{79}$$

si deduce la *legge dei grandi numeri* nel senso più esteso precedentemente indicato. Ora se, invece di considerare il caso $k = 2$, consideriamo un valore diverso di k e ammettiamo che una successione $\frac{X(n)}{n}$ di variabili casuali, con riferimento ad una *assegnata* funzione $m_k(n)$, soddisfi alle seguenti condizioni:

α) che sia $\lim_{n=\infty} \sigma_k[m_k(n)] = 0$,

β) che la funzione $m_k(n)$ ammetta un limite,

si deduce, con ragionamento analogo a quello precedentemente fatto, relativo al caso $k = 2$, che sarà ancora

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty} \frac{X_1 + X_2 + \cdots X_n}{n} = \lim_{n=\infty} m_k(n), \tag{80}$$

e cioè che le condizioni α) e β) sono sufficienti perchè la precedente relazione sia vera.

Se una successione di variabili casuali $\frac{X(n)}{n}$ è tale che, con riferimento ad una *assegnata* funzione $m_k(n)$, soddisfa alle condizioni α) e β) noi diremo, in seguito, per brevità, che soddisfa alle condizioni S_{m_k}; così possiamo dire che le successioni $\frac{X(n)}{n}$ che soddisfano alla legge dei grandi numeri, soddisfano alle condizioni S_{M_2}.

***

Per una più esauriente analisi della legge dei grandi numeri ci sembrano di qualche interesse quei teoremi che possano mostrare in quali casi una successione di variabili casuali soddisfacente alle condizioni S_{m_k} soddisfi alle condizioni S_{M_2}, e viceversa.

In questo scritto ci limiteremo a dimostrare i seguenti teoremi, avvertendo che indichiamo con $m'_k(n)$ ogni *assegnata* funzione di n, tale che sia, per ogni valore di n,

$$\sigma_k[m'_k(n)] \leq \sigma_k[m_k(n)]. \tag{81}$$

α) Qualunque sia $k > 0$; se una successione di variabili casuali soddisfa alle condizioni S_{m_k}, soddisfarà alle condizioni $S_{m'_k}$ e sarà inoltre

$$\lim_{n=\infty} m_k(n) = \lim_{n=\infty} m'_k(n). \tag{82}$$

β) Per $k > 2$; se una successione di variabili casuali soddisfa alle condizioni S_{m_k}, soddisfarà alle condizioni S_{M_2} e sarà inoltre

$$\lim_{n=\infty} m_k(n) = \lim_{n=\infty} M_2(n). \tag{83}$$

γ) Per $k < 2$; se una successione di variabili casuali soddisfa alle condizioni S_{m_k}, e se esiste $\sigma_{2+\delta}[m_k(n)]$, essendo δ un numero positivo piccolo a piacere, soddisfarà anche alle condizioni S_{M_2} e sarà pure valida la (83).

δ) Per $k > 2$; se una successione di variabili casuali soddisfa alle condizioni S_{M_2}, e se esiste $\sigma_{k+\delta}[M_2(n)]$, essendo δ un numero positivo assegnato piccolo a piacere, soddisfarà alle condizioni $S_{m_k=M_2(n)}$.

ε) Per $k < 2$; se una successione di variabili casuali soddisfa alle condizioni S_{M_2}, soddisfarà alle condizioni $S_{m_k=M_2(n)}$.

Illustriamo, ad es., su di un caso particolare le proposizioni ε), α), γ).

Consideriamo una successione di variabili casuali

$$\frac{X(n)}{n} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{84}$$

per i termini della quale, in corrispondenza di ogni valore dell'indice n, oltre che esistere le mediane $A(n)$ e i valori medî $M_2(n)$, si verifichino le condizioni

$$\lim_{n=\infty} M_2(n) = M,$$

$$\lim_{n=\infty} {}^r E\left(M_2(n) - \frac{X(n)}{n}\right)^2 = 0. \tag{85}$$

Per le proposizioni ε) ed α), la successione A(n) dovrà allora ammettere un limite e sarà anche

$$(86) \qquad \begin{gathered} \lim_{n=\infty} \mathrm{M}_2(n) = \lim_{n=\infty} \mathrm{A}(n), \\ \lim_{n=\infty} \mathrm{E}\left| \mathrm{A}(n) - \frac{\mathrm{X}(n)}{n} \right| = 0. \end{gathered}$$

Reciprocamente per le proposizioni γ) e α): Se per una successione $\frac{\mathrm{X}(n)}{n}$ di variabili casuali, oltre che esistere le mediane A(n), i valori medî $\mathrm{M}_2(n)$ e i valori medî $\sigma_{2+\delta}[\mathrm{A}(n)]$, si verificano le condizioni

$$(87) \qquad \begin{gathered} \lim_{n=\infty} \mathrm{A}(n) = \mathrm{A}, \\ \lim_{n=\infty} \mathrm{E}\left| \mathrm{A}(n) - \frac{\mathrm{X}(n)}{n} \right| = 0, \end{gathered}$$

allora anche la successione $\mathrm{M}_2(n)$ dovrà ammettere un limite e sarà

$$(88) \qquad \begin{gathered} \lim_{n=\infty} \mathrm{A}(n) = \lim_{n=\infty} \mathrm{M}_2(n), \\ \lim_{n=\infty} \mathrm{E}\left(\mathrm{M}_2(n) - \frac{\mathrm{X}(n)}{n} \right)^2 = 0. \end{gathered}$$

* * *

Dimostriamo la proposizione α).

Esistano, per ipotesi, una successione $\frac{\mathrm{X}(n)}{n}$ di variabili casuali e una determinata funzione $m_k(n)$, che ammette un limite per $n = \infty$, tali che sia pure

$$(89) \qquad \lim_{n=\infty} \sigma_k[m_k(n)] = 0.$$

Ammettiamo, inoltre, che esista un'altra funzione $m'_k(n)$ tale che, per ogni valore di n, sia

$$(90) \qquad \sigma_k[m'_k(n)] \leq \sigma_k[m_k(n)]$$

onde si deduce

$$(91) \qquad \lim_{n=\infty} \sigma_k[m'_k(n)] = 0.$$

Dobbiamo dimostrare che anche la funzione $m'_k(n)$ ammette allora un limite e che è

$$(92) \qquad \lim_{n=\infty} m_k(n) = \lim_{n=\infty} m'_k(n).$$

Siccome, per ipotesi, la funzione $m_k(n)$ ammette un limite m_k, si potrà determinare un valore n_1 di n tale che, per *tutti* i valori di $n > n_1$, i valori di $m_k(n)$ siano compresi in un intervallo

$$m_k - \varepsilon_0 \quad , \quad m_k + \varepsilon_0 , \tag{93}$$

essendo ε_0 un numero positivo prefissato, piccolo a piacere.

Indichiamo, adesso, con ε_1 e ε_2 altri due numeri positivi, prefissati piccoli a piacere, e supponiamo che, assegnato un numero $\bar{n}$ grande a piacere, esista *qualche* valore di $n > \bar{n}$ a cui corrisponda un valore $m'_k(n)$ esterno all' intervallo

$$m_k - \varepsilon_0 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \quad , \quad m_k + \varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 . \tag{94}$$

Risulterà che tale ipotesi contraddice alla supposta esistenza della successione $\frac{X(n)}{n}$; se ne conclude che, quando tale successione esista, si deve poter trovare un valore $\bar{n}$ di n tale che, per *tutti* i valori di $n > \bar{n}$, i valori di $m'_k(n)$ e di $m_k(n)$ siano compresi nell' intervallo (94), onde segue la (92).

Essendo, infatti,

$$\begin{aligned} &\left| m_k(n) - \frac{X(n)}{n} \right| \leq \lambda \sqrt[k]{\sigma_k[m_k(n)]} \quad , \quad P_1 > 1 - \frac{1}{\lambda^k} , \\ &\left| m'_k(n) - \frac{X(n)}{n} \right| \leq \lambda \sqrt[k]{\sigma_k[m'_k(n)]} \quad , \quad P_2 > 1 - \frac{1}{\lambda^k} \end{aligned} \tag{95}$$

ed essendo pure

$$\lim_{n=\infty} \sigma_k[m_k(n)] = \lim_{n=\infty} \sigma_k[m'_k(n)] = 0 , \tag{96}$$

è ovvio come si possano determinare valori di n $(> n_1)$ tali che non solo l' intervallo

$$m_k(n) - \lambda \sqrt[k]{\sigma_k[m_k(n)]} \quad , \quad m_k(n) + \lambda \sqrt[k]{\sigma_k[m_k(n)]} . \tag{97}$$

risulti tutto compreso in

$$m_k - \varepsilon_0 - \varepsilon_1 \quad , \quad m_k + \varepsilon_0 + \varepsilon_1 , \tag{98}$$

essendo inoltre $P_1 > \frac{1}{2}$, ma anche tali — ove sia ammessa l'ipotesi che si vuole rigettare — che, nello stesso tempo, l' intervallo

$$m'_k(n) - \lambda \sqrt[k]{\sigma_k[m'_k(n)]} \quad , \quad m'_k(n) + \lambda \sqrt[k]{\sigma_k[m'_k(n)]} \tag{99}$$

risulti tutto esterno a quello precedentemente indicato (98), ed essendo pure $P_2 > \frac{1}{2}$.

Ne conseguirebbe, dunque, l'esistenza di valori di $n(>n_1)$ in corrispondenza di ciascuno dei quali la variabile casuale

$$\frac{X(n)}{n} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} \tag{100}$$

potrebbe assumere un valore compreso in un intervallo tutto interno a quello indicato (98), oppure un valore compreso in un intervallo tutto esterno al precedente (98), con probabilità $P_1 + P_2 > 1$. Ma questa conclusione è incompatibile con la presupposta esistenza della variabile casuale (100) poichè, se essa esiste, la somma delle probabilità relative a tutti i valori possibili che essa può assumere deve essere, per definizione, eguale all'unità.

* * *

Per la dimostrazione degli altri teoremi ricordiamo che, essendo k_1 e k_2 due numeri positivi qualunque, $k_1 > k_2$, e X una variabile casuale che possa assumere soltanto valori positivi, la esistenza del valore medio di X^{k_1} porta come conseguenza la esistenza del valore medio di X^{k_2}. Richiamiamo, inoltre, il seguente caso particolare di una recente proposizione dovuta ad A. Liapounoff [1]:

Se X è una variabile casuale che può assumere soltanto valori positivi, e se k_1, k_2, k_3 sono tre numeri qualunque che verificano le ineguaglianze

$$k_1 > k_2 > k_3 \geq 0, \tag{101}$$

si ha

$$\left[E(X^{k_2})\right]^{k_1-k_3} < \left[E(X^{k_3})\right]^{k_1-k_2} \left[E(X^{k_1})\right]^{k_2-k_3}. \tag{102}$$

Esistano ora, per ipotesi, una successione di variabili casuali $\frac{X(n)}{n}$ e una determinata funzione $m_{k_1}(n)$, che ammette un limite per $n = \infty$, tali che sia pure

$$\lim_{n=\infty} \sigma_{k_1}[m_{k_1}(n)] = 0. \tag{103}$$

Allora, se nella (102) si pone $k_3 = 0$ e $X = \left| m_{k_1}(n) - \frac{X(n)}{n} \right|$, si ha

$$\sigma_{k_2}\left[m_{k_1}(n)\right] < \left\{\sigma_{k_1}\left[m_{k_1}(n)\right]\right\}^{\frac{k_2}{k_1}}, \quad k_1 > k_2, \tag{104}$$

onde, per la (103),

$$\lim_{n=\infty} \sigma_{k_2}[m_{k_1}(n)] = 0. \tag{105}$$

[1] *Nouvelle forme du théorème sur la limite de probabilité.* Mémoires de l'Acad. des Sciences de St. Pétersbourg, Classe Physico-mathématique, vol. XII, n. 5.

Come caso particolare, se $k_1 = 2$, se $m_{k_1}(n) = M_2(n)$, si ha la proposizione ε). Nel caso generale, indicando ancora con $m'_{k_2}(n)$ una funzione di n tale che sia

$$(106) \qquad \sigma_{k_2}[m'_{k_2}(n)] \leq \sigma_{k_2}[m_{k_1}(n)],$$

si deduce, per la (105),

$$(107) \qquad \lim_{n=\infty} \sigma_{k_2}[m'_{k_2}(n)] = 0$$

e, per l'applicazione del teorema α), anche $m'_{k_2}(n)$ ammetterà un limite e sarà

$$(108) \qquad \lim_{n=\infty} m_{k_1}(n) = \lim_{n=\infty} m'_{k_2}(n).$$

Come caso particolare, se $k_1 > 2$, se $k_2 = 2$, se $m'_{k_2}(n) = M_2(n)$, si deduce la proposizione β).

*
* *

Applicando la (102) ad una variabile casuale

$$(109) \qquad \left| m_{k_2}(n) - \frac{X(n)}{n} \right|,$$

si ha, essendo $k_1 > k_2 > k_3 \geq 0$,

$$(110) \qquad \left\{ \sigma_{k_2}[m_{k_2}(n)] \right\}^{k_1-k_3} < \left\{ \sigma_{k_3}[m_{k_2}(n)] \right\}^{k_1-k_2} \left\{ \sigma_{k_1}[m_{k_2}(n)] \right\}^{k_2-k_3}.$$

Ora supponiamo che la funzione $m_{k_2}(n)$ ammetta un limite e che sia

$$(111) \qquad \lim_{n=\infty} \sigma_{k_3}[m_{k_2}(n)] = 0;$$

allora, per la (110), sarà anche

$$(112) \qquad \lim_{n=\infty} \sigma_{k_2}[m_{k_2}(n)] = 0.$$

Come caso particolare, per $k_3 = 2$, $k_2 > 2$, $k_1 = k_2 + \delta$, $m_{k_2}(n) = M_2(n)$, si ha la proposizione δ).

Nel caso generale, indichiamo ancora con $m'_{k_2}(n)$ una funzione di n tale che sia

$$(113) \qquad \sigma_{k_2}[m'_{k_2}(n)] \leq \sigma_{k_2}[m_{k_2}(n)].$$

Sarà allora, per la (112), anche

(114) $$\lim_{n=\infty} \sigma_{k_2}[m'_{k_2}(n)] = 0$$

e, per l'applicazione del teorema α), pure la funzione $m'_{k_2}(n)$ ammetterà un limite e sarà

(115) $$\lim_{n=\infty} m_{k_2}(n) = \lim_{n=\infty} m'_{k_2}(n)\,.$$

Come caso particolare, se $k_3 < 2$, $k_2 = 2$, $k_1 = 2 + \delta$, $m'_{k_2}(n) = M_2(n)$, si ha la proposizione γ).

Avremo occasione di ritornare sulle precedenti proposizioni γ) e δ) per le restrizioni poste e riflettenti la esistenza dei valori medî $\sigma_{2+\delta}$ e $\sigma_{k+\delta}$.

Terminiamo questo scritto osservando che sarà di qualche interesse esaminare sino a qual punto gli ordinarî teoremi sui limiti possano essere estesi alle successioni di variabili casuali che tendono ad un limite nel senso del calcolo delle probabilità.

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76) Parte 1ª Transunti.
2ª Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª Memorie *della Classe di scienze morali storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — Transunti. Vol. I-VIII. (1876-84).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali*
Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche*
Vol. I-XIII.

Serie 4ª — Rendiconti. Vol. I-VII. (1884-91).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I-VII.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-X.

Serie 5ª — Rendiconti *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali*
Vol. I-XXV. (1892-1916). Fasc. 8°. Sem. 1°.
Rendiconti *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-XXIV. (1892-1915).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali*
Vol. I-XI. Fasc. 7.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-XII. Vol. XIV. Vol. XV. Fasc. 1-2.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI
DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia è di L. 10; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

Ermanno Loescher & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*

Ulrico Hoepli. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

MEMORIE DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

(ANNO CCCXIII 1916)

SERIE QUINTA — VOLUME XI — FASCICOLO VIII.

RENATO PEROTTI

STUDI DI BIOLOGIA AGRARIA

IN RAPPORTO

AL BONIFICAMENTO DELL'AGRO ROMANO

SEP 25 1924
National Museum

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1916

RELAZIONE

letta dal Socio O. Mattirolo, relatore, a nome anche del Socio R. Pirotta, nella seduta del 3 maggio 1914, sulla Memoria del prof. R. Perotti, dal titolo: *Studî di biologia agraria in rapporto al bonificamento dell'Agro romano.*

La Memoria presentata dal dott. Renato Perotti, sulla importanza della quale la R. Accademia ci ha dato incarico di riferire, « *Studî di biologia agraria in rapporto al bonificamento dell'Agro romano* », ha per scopo di studiare la importantissima questione della migliore tecnica da seguire per giungere alla utilizzazione e alla bonifica dell'Agro romano, indipendentemente da preconcetti dottrinarî qualsiasi; ma mirando unicamente alla ricerca delle piante le quali, coltivate, costituiscono, come egli dice, le *macchine* meglio adatte per dare la massima produzione alle materie prime ad essa fornite (terreno, clima, lavorazione...).

Le premesse, molto ampie (talora, diremo anche, eccessivamente ampie), riguardano anzi tutto uno studio economico-agricolo, tendendo l'A. a dimostrare la opportunità di indagini esaurienti sulla questione, seguendo i concetti indicati e validamente propugnati dallo Strakosch per la ricerca della migliore « *macchina pianta* ».

Si tratta, in questo capitolo, di considerazioni di ordine, in parte, così strettamente economico, che non sempre è dato ad un biologo di seguirlo in tutti i particolari del ragionamento.

A questo primo capitolo seguono delle *Note storiche* nelle quali, con notevole erudizione, si studia l'origine della zona suburbana di Roma, nel raggio di 10 kil.: prendendo le mosse dagli sprofondamenti tellurici, i quali precedettero il manifestarsi dei fenomeni vulcanici nella regione laziale; e la storia procede così sino all'epoca di Roma repubblicana, seguendo a poco a poco i destini dell'Agro durante questo periodo e analizzando minuziosamente le cause che influirono sulle condizioni dell'Agro, allorchè, durante la Roma imperiale, la primitiva semplicità rustica della vita, con la dominazione del mondo e con il bottino delle guerre vittoriose, cedette a poco a poco di fronte al crescente lusso della società di Roma.

Coltivare, più non era necessario; dappoichè le provincie dovevano provvedere al mantenimento della città!

L'autore segue quindi i destini dell'Agro nell'evo di mezzo; e così via, sino alla enumerazione ed alla esposizione sommaria dei progetti e delle leggi dal Parlamento nazionale elaborate a favore dell'Agro romano.

Nel terzo capitolo, *Basi critiche e piano sperimentale delle presenti ricerche di biologia dell'Agro*, l'autore prende in esame la storia della coltivazione dell'Agro dall'epoca di Roma repubblicana sino ai nostri giorni; esaminando le relazioni tra la floridezza troppo decantata e la decadenza attuale troppo lamentata e i metodi culturali usati nelle differenti epoche.

Interessante è il ragionamento (fondato sopra basi storiche tratte da numerose fonti) per il quale l'A. cerca di sfatare le leggende che costituiscono un pregiudizio ben grave per l'avvenire economico della regione che lo interessa, la quale, in massima, era sotto i Romani, come sotto ai Papi, presso a poco nelle condizioni nelle quali oggi a noi si dimostra.

Secondo il Perotti, al disopra delle influenze sociali, del feudalismo, delle invasioni barbariche, della opulenza imperiale, delle guerre repubblicane, è d'uopo riconoscere che abbia frustrato tutti i provvedimenti delle autorità di Roma (dai re, ai consoli, agli imperatori, ai prefetti, al comune, ai baroni, ai papi) e abbia trionfato di tutti gli ostacoli il *prato romano*: il *prato naturale*, il *latifondo*, che sarebbe conseguenza e non causa del decadimento agricolo locale.

Nelle argomentazioni a favore delle opere di bonifica dell'Agro, si è partiti, secondo l'A., sempre da un falso presupposto, quello cioè che nella campagna romana fosse esistita nell'antico tempo una intensiva agricoltura, e che a questa, per volontà di uomini e per forza di leggi (senza tener conto degli speciali fattori naturali della produzione), fosse possibile di ritornare. Dalla mancata dovuta considerazione della influenza dell'ambiente sopra l'agricoltura dell'Agro. è scaturito l'altro sbaglio fondamentale, di volere introdurre in esso sistemi culturali prosperanti in altre regioni agrariamente fiorenti, appunto in causa delle loro ben diverse condizioni naturali.

L'A., è condotto a ritenere che anche lo studio preparatorio dei provvedimenti di bonifica debba essere oggi ripreso *ex novo*, e che convenga impostarlo sopra le sue vere basi, che sono quelle di una razionale agricoltura la quale si occupi dello studio del clima, del terreno, delle piante da usarsi, e tenga conto dei bisogni sociali.

Il capitolo, interessante, si chiude colla esposizione del programma che l'autore ha svolto nei sette successivi capitoli, che esamineremo succintamente.

Gli elementi non venali della produzione, quei fattori cioè che sfuggono alla contrattazione commerciale, che non hanno *prezzo* e che quindi non possono figurare nel conto di una azienda rurale (*temperatura — precipitazioni atmosferiche — luce solare — composizione dell'atmosfera*): cioè, in complesso. le condizioni climatiche della regione (perocchè la composizione chimica dell'atmosfera, alla quale accenna l'A. non è poi, come d'altronde è ovvio, da lui ulteriormente esaminata), sono oggetto del 1° capitolo originale.

A proposito delle risultanze dell'accurato studio dell'Autore (sulla base di una quantità grandissima di dati statistici), ci pare di poter osservare che, dopo la lunga discussione per giustificare di non aver tenuto in gran conto i dati di Tommasi-Crudeli, aventi troppo stretto riguardo alla igiene, e dopo aver riferito tante cifre, abbia egli paragonato una stazione di clima continentale (Milano) a due di clima marittimo (Roma e Siracusa); mentre nella abbondante serie di dati metereologici, da lui

riferiti, avrebbe pure potuto trovare nella valle padana una stazione a clima pure marittimo per fare confronti più interessanti.

Quivi pure i dati riportati si riferiscono a medie decadiche; ma non è mai accennato a cifre di *minima assoluta* che costituiscono uno degli agenti più efficaci per limitare la possibilità, o non, di una data coltivazione in una regione: dato tanto più importante, in quanto che la vita vegetale nell'Agro si esplica attiva anche nell'inverno.

Lo studio del *capitale-terreno* è oggetto del capitolo V, nel quale l'autore riferisce una considerevolissima quantità di risultati di moltissime analisi fisiche e chimiche, da lui eseguite sul suolo e sul sottosuolo. Esse costituiscono, senza alcun dubbio, un contributo di grande importanza per lo studio accurato dell'Agro.

Il movimento del capitale azoto (non considerato nel capitolo precedente) forma oggetto di ampia trattazione nel capitolo VI, nel quale sono riferiti i risultati di una lunghissima serie di analisi eseguite dall'Autore.

Pure facendo qualche riserva sul metodo seguìto dall'A. (*metodo di Kjeldahl*) per la determinazione dell'azoto (metodo il quale, come è noto, se non è modificato convenientemente, come ad es. ha proposto lo Jodlbauer, si dimostra poco adatto all'analisi dello azoto nitrico), riconosciamo interessantissimi i risultati ottenuti con tali ricerche, specialmente perchè, essendo state eseguite durante tutto il corso di una annata, dànno una chiara idea delle variazioni di questo importantissimo elemento in relazione alle variazioni climatiche.

Risulta da queste sue ricerche, sussidiate da altre già da lui precedentemente fatte di pubblica ragione, dimostrato, che sulla abbondanza dell'azoto nel terreno abbia importanza l'attività microbica, legata a sua volta alle condizioni del clima.

Nella stagione estiva infatti l'attività microbica viene ad essere ridotta al *minimum*, se non addirittura arrestata.

Da queste ricerche emerge che l'esercizio agricolo dei terreni della campagna romana, scarsamente provvisti di sostanze organiche, deve richiedere, fra i principali provvedimenti, quello di un ben regolato regime di approvvigionamento ed utilizzazione delle sostanze dell'umo.

Due tavole dimostrative illustrano i risultati analitici ottenuti dall'Autore, che nel capitolo VI imprende a trattare ed a studiare la *microflora* del terreno dell'Agro.

In questa parte del lavoro sono compendiati gli studî eseguiti dall'A. durante una annata intera, essendo egli riuscito a risultati che non solo sono la espressione delle proprietà differenti dei terreni in rapporto alla flora bacterica, ma sono anche quelli che hanno rapporto alla influenza dell'intero ciclo annuo delle vicende atmosferiche.

Le ricerche comprendono l'esame quantitativo e qualitativo dei bacterî; le variazioni che essi presentano nei differenti terreni, in relazione ai lavori culturali ecc.; lo studio delle forme e delle razze caratteristiche della regione. Numerose tabelle riassumono i risultati ottenuti in relazione alle differenti epoche dell'anno, alla profondità del suolo, alla varia natura dei terreni, alle pratiche culturali.

Interessante ed istruttivo è lo studio sistematico e descrittivo; importanti le considerazioni sulla diversa attività dei varî microorganismi che l'A. descrive in numero di 23 forme.

Passando dall'ambiente terreno allo studio delle piante che vengono coltivate nell'Agro, l'A. esamina in uno speciale capitolo (VIII) *i fieni e le culture a granella*, riferendo prima in una visione sintetica i risultati precedentemente da altri ottenuti, riassumendoli in tabelle dimostrative, alle quali fa seguire una relazione minuta dei risultati da lui stesso ottenuti. Così per ogni foraggio egli determina la quantità di albumina digeribile; fa la determinazione dei carboidrati, quella dei grassi, notando le specie predominanti delle piante nei differenti foraggi da lui esaminati in campioni di cinque diverse provenienze.

Un lavoro dello stesso genere, attento e minuzioso, tale che ci è impossibile di riassumere in brevi parole, l'A. ci presenta per le coltivazioni del frumento e della segala, di cui furono sperimentate numerose varietà, accuratamente scelte, in appezzamenti in diverso modo concimati o non concimati, riuscendo egli, colla scorta di numerose analisi, alla conclusione, che è la materia organica quella che fa difetto nei terreni dell'Agro. Egli fa rilevare che i migliori risultati si sono ottenuti coll'impiego di concimi organici e, fra essi, del *letame*.

L'esposizione dei risultati delle esperienze dirette dall'A., e il riassunto sintetico di quelle già da altri tentate, e in modo speciale dal Lazzari, assumono una reale importanza per la futura soluzione del problema che riguarda le specie e le varietà più adatte alla coltivazione dell'Agro.

Nel capitolo IX, l'A., prendendo a base i calcoli dello Strakosch, fissa i *valori di produzione* ed i *valori di consumo* del frumento, dell'avena e del fieno di 1ª 2ª e 3ª qualità, rilevando poi come i valori ottenuti dallo Strakosch per i terreni nordici non sieno riferibili esattamente a quelli dell'Agro romano, specialmente in relazione al movimento del capitale-terreno. Così egli rifà i calcoli stabilendo i valori reali di produzione e di consumo, ed il conseguente *effetto assimilatorio* per le tre specie di culture.

L'A. mette in rilievo il fatto che, dati il clima e le condizioni del terreno dell'Agro, si debba fare assegnamento non tanto sull'azoto fissato dalle leguminose, quanto su quello fissato invece dai microorganismi oligonitrofili, dell'effetto dei quali l'Autore si era già occupato in altri lavori e nei capitoli precedenti.

Confronta finalmente le cifre, ottenute col calcolo teorico, con i conti culturali fornitigli dagli stessi attuali coltivatori dell'Agro, e li paragona con quelli di un podere irriguo lombardo, di uno della valle di Elsa e di uno della maremma toscana, concludendo che gli avvicendamenti in uso nelle aziende romane (*terzeria*, *quarteria*, *avvicendamento decennale*), la pratica del maggese, il pascolo, sono i soli metodi di cultura che nelle attuali condizioni possono dare un rendimento, il quale è giudicato dall'A. inferiore bensì a quello della cultura intensiva del podere irriguo lombardo, ma superiore a quello estensivo, per es., della maremma toscana.

Il tipo di cultura adottato da una pratica secolare nelle aziende della campagna romana, col minor impiego di capitale e con i minori rischi, permette di ritirare, secondo l'A., il massimo utile economico.

I risultati, adunque, che emergono dal complesso delle minuziose ricerche dell'A., sono in massima la riabilitazione dei proprietarî e dei conduttori delle aziende agricole romane, dimostrando, essi, che, *allo stato attuale delle condizioni di clima*

e di terreno, il sistema del pascolo naturale, talora avvicendato col frumento o l'avena, è quello che meglio risponde agli interessi dei proprietarii — le piante ivi coltivate o lasciate spontaneamente sviluppare sono le *macchine* che dànno la massima resa di lavoro — nelle attuali condizioni.

Giunto a questo punto, l'Autore affronta la grave questione delle relazioni e dei doveri della proprietà fondiaria, di fronte alla questione sociale.

Egli si domanda se il tornaconto dei proprietarii che si avvantaggiano, nei modi indicati, del grande risparmio dei due elementi, *capitale* ed *uomo*, debba continuare indisturbato; o se, nell'interesse generale del progresso dei mezzi di sussistenza umana, non debba invece essere il massimo prodotto quello che deve esigersi venga ricavato dalla terra.

Egli domandasi se, per conseguenza, non debbano essere rimossi tutti gli ostacoli che inceppano il conseguimento di tale scopo, ciò che porta necessariamente ad un intervento di Stato per la limitazione dei diritti dei proprietarii allo scopo di metterli in armonia colla utilità generale del paese.

L'intervento statale, propugnato dagli economisti, sull'interesse generale politico e sociale dell'aumento della produzione agraria, non è ancora oggi regolato da forme e da misure razionali.

L'A., dopo aver citato opinioni e dati al riguardo, sostiene che la bonifica dell'Agro, prima di costituire un problema idraulico, igienico, di viabilità, finanziario, deve essere considerato come un problema biologico.

Se si vuole realmente giungere allo scopo di intensificare la coltivazione, anche nel periodo invernale, si deve essere in grado di provvedere a cinque impellenti necessità:

1) *all'umidità*;
2) *alla sostanza organica*;
3) *all'azoto*;
4) *all'ammendamento*;
5) *al dissodamento*.

Dove l'intervento supremo dello Stato può dare i frutti migliori, è, secondo l'A., nella provvista di acqua al terreno, che ne difetta massime nella stazione estiva.

Provvedendosi, da parte dei pubblici poteri, ad una regolare distribuzione dell'acqua nella campagna romana, si verrebbe a compiere un'opera la quale porterebbe seco la soluzione di quasi tutti gli altri problemi che si presentano, quando si voglia instaurare nell'Agro un proficuo regime di coltivazione intensiva.

Come primo risultato si verrebbe infatti ad eliminare quel lungo periodo di riposo estivo dell'Agro, che è economicamente più dannoso del riposo invernale nei paesi del nord, lasciando andare perduta una somma considerevolissima di energia solare.

Avendo a disposizione sufficiente acqua, sarà possibile nel periodo estivo far vegetare leguminose od altre piante a radici, e quindi fornire con questi mezzi, al terreno, azoto e sostanza organica, con vantaggio anche alle modificazioni meccaniche e fisiche del suolo.

La chiave del problema agricolo dell'Agro consiste secondo l'A., nel dare acqua, *possibilmente calcarea*, ai campi.

L'insuccesso dei tentativi, già fatti, di praticare nell'Agro le varie forme di agricoltura secca, delle quali ampiamente tratta l'A., costituiscono un valido argomento in favore dell'asserto dell'autore, il quale si diffonde nella spiegazione delle modalità tecniche colle quali si potrebbe riuscire nell'intento da lui propugnato.

Egli invoca un intervento statale, derivato da studî accurati positivi, da esperimenti ragionevolmente basati sulle leggi naturali, e non in opposizione ad esse.

Adottando provvedimenti razionali per risolvere il grande problema, verrà meno la necessità di ricorrere a costrizioni, a imposizioni extra-legali.

L'A. spiega in quali modi e sotto quali condizioni si dovrebbe provvedere alla irrigazione, all'impiego agricolo delle acque della fognatura cittadina che porterebbero umidità, sostanza organiche, azoto e calce in quantità rilevante ai terreni dell'Agro, favorendo il dissodamento, integrando il fabbisogno culturale.

L'autore chiude questa parte del suo accurato e minuzioso studio con la presentazione di una serie di calcoli dei redditi, che si potrebbero ottenere dall'Agro, qualora si adottassero i lavori di irrigazione da lui invocati per utilizzare le acque di fognatura.

È tutta una visione sintetica di grandiosi risultati che si potrebbero realizzare operando con criterii razionali, mentre al presente non ci rimane che da deplorare le ingentissime perdite subìte già dal bilancio dello Stato per la irrazionale condotta degli studî finora eseguiti e delle opere compiute, essendosi affrontate con mezzi inadeguati le incognite risultanti dalle iniziative fin qui escogitate.

All'A. pare evidente che, se si fosse impostata la questione della bonifica dell'Agro nei suoi veri termini (che si possono riassumere nella costruzione, per opera dello Stato, di una vasta rete di canali, per la distribuzione delle acque irrigue, accoppiata ai lavori di sistemazione e di drenaggio delle zone meno favorevoli), non si sarebbero spesi più di 100 milioni inutilmente, e si avrebbe già ora, anche nella zona dei 10 km. bonificabili, una grandiosa opera che potrebbe già essere fruttifera nelle sue mediate sociali conseguenze, giustificante eventualmente qualsiasi intervento costrittivo dei diritti di proprietà, per parte del Governo.

Egli si limita, concludendo, ad invocare uno esperimento condotto sopra queste basi, allo scopo di gettare il primo seme di un'opera per ogni riguardo promettente per l'avvenire dell'Agro; destinato a stimolare e ad interessare con vantaggi resi tangibili, la opinione pubblica e l'iniziativa privata. L'A. conchiude facendo sue le parole del Sombart: *Pochi intelletti illuminati e retti, messi al loro posto più conveniente; un centinaio di milioni di lire: ecco il farmaco per far sorgere nuovo alito di vita dalle rovine!*

Il poderoso lavoro presentato manoscritto dal Perotti, quale abbiamo tentato di riassumere nei suoi momenti principali, rivela nell'autore una lodevolissima, paziente, completa preparazione. Egli affronta il grandioso problema, intorno al quale si affaticarono elettissime menti, studiandolo sotto tutti i punti di vista, sviscerandolo e seguendolo nelle sue varie manifestazioni nel tempo, indagandolo nella storia, esa-

minandolo attentamente nelle presenti sue manifestazioni. L'autore ha il merito di esporre conclusioni esplicite, di indicare provvedimenti per la futura bonifica dell'Agro, i quali emanano e risultano dalle osservazioni proprie o da quelle già fatte da altri, e da lui criticamente esposte. Quantunque non si possa ritenere che il lavoro del Perotti sia sufficiente a risolvere la complessa questione dell'Agro, tuttavia noi, giudicando in base al manoscritto presentato, crediamo che esso meriti di essere preso in considerazione e pubblicato dall'Accademia, lieti di segnalare all'attenzione dell'Accademia stessa un'opera che riteniamo un utile contributo per giungere finalmente allo studio definitivo di una questione che interessa grandemente l'Italia tutta, e Roma in modo particolare.

Le ricerche, di cui presento i risultati e che sono state premiate in una pubblica gara indetta dalla Società degli agricoltori italiani (Boll. soc. agric. ital., n. 14, a. 1913), furono iniziate per incarico del Ministero di agricoltura, offertomi con lettera del 25 novembre 1909. In seguito ai cambiamenti ministeriali, che poco dopo sopravvennero, l' incarico stesso non mi fu confermato, per modo che gli studi, non solo non erano stati estesi a tutta la zona dell'Agro romano bonificabile, come era da me desiderato, ma erano rimasti incompleti anche in quella del raggio dei 10 km. considerata dalla vecchia legge del 1878.

Tuttavia, mi fu possibile di proseguire nello svolgimento del tema, giovandomi dei modesti mezzi, che il prof. G. Cuboni fu in grado di mettere a mia disposizione nel Laboratorio di batteriologia agraria annesso al proprio Istituto.

A lui rivolgo, quindi, i miei più affettuosi ringraziamenti: e non tanto per gli aiuti materiali fornitimi, quanto per il suo prezioso consiglio.

R. Perotti

Roma, 31 ottobre 1913.

Studi di biologia agraria in rapporto al bonificamento dell'Agro Romano.

Memoria di R. PEROTTI

presentata nella seduta del 3 maggio 1914

(con sei tavole)

I.

Alcune premesse di ordine economico-agricolo.

Fin quì il risultato economico di una coltivazione veniva calcolato sulle basi della quantità del raccolto e del relativo prezzo, in relazione al lavoro ed alla concimazione impiegati. Si è generalmente creduto che il privato interesse dell'agricoltore consistesse solo nell'ottenere il massimo prodotto al migliore prezzo, con una spesa relativamente moderata di mano d'opera e di materia prima. Ma al punto cui oggidì si è pervenuti con la conoscenza delle leggi naturali, che governano la produzione agricola, da un lato, e con lo sviluppo delle dottrine economiche, dall'altro, un importante fattore — il principale forse — ci siamo accorti che veniva trascurato nel calcolo della produttività delle nostre terre.

Già nell'ottavo Congresso internazionale di agricoltura, tenutosi in Vienna nel 1907, si pose molto chiaramente la questione, fino allora non trattata, nè dalla fisiologia vegetale, nè dall'agronomia, della *ineguale capacità di lavoro delle piante coltivate*. Sopra di essa riferì brevemente e lucidamente Siegfried Strakosch, che, poco più tardi, in forma migliore e più completa, espresse le proprie idee con una speciale pubblicazione (¹).

La ragion d'essere dell'agricoltura risiede nella capacità della pianta verde di formare sostanza organica, capacità che scienza ed arte procurano di aumentare e di sfruttare, rappresentando la condizione prima dell'esistenza degli animali e dell'uomo. Noi abbiamo riconosciuto nelle manifestazioni vitali di questi esseri la restituzione in forze vive di quella energia solare che si accumula nel corpo dei vegetali sotto forma di complesse, per quanto variate, combinazioni chimiche ricche di forze di tensione. È chiaro come la somma delle varie forme di energia che si manifestano negli animali, nelle più favorevoli circostanze, non potrebbe essere che uguale alla somma

(¹) S. Strakosch, *Das Problem der ungleichen Arbeitsleistung unserer Kulturpflanzen*. P. Parey, Berlin, 1907.

di quella immagazzinata dalle piante, le quali risultano, per tal modo, gli esseri che determinano non solo la possibilità, ma anche la efficienza della vita animale.

Però, varia molto l'attitudine, che le differenti piante posseggono, di produrre sostanza organica, d'immagazzinare energia, di fornire, per corrispettivo più o meno direttamente, un lavoro. Variazioni di tale natura si hanno con le diverse famiglie, con i diversi ordini e generi, con le diverse specie. Piante non appartenenti ad uno stesso gruppo, non solo producono quantità differenti di sostanza organica, ma anche combinazioni chimiche di un valore termodinamico molto differente. Accade, perciò, che con una eguale spesa di terreno, lavoro e capitale possono ottenersi non uguali quantità di sostanze organiche utilizzabili. Ciò che fa variare in tal modo i risultati economici di un sistema colturale è un coefficiente dato dalla utilizzazione di alcuni fattori che non si può dire abbiano per l'agricoltore un valore venale in stretto senso e che sono ripartiti con grande uniformità entro limiti di spazio molto vasti: acido carbonico, acqua luce solare. È con questi tre elementi che la pianta fabbrica la sostanza organica del proprio corpo a seconda di quella differente capacità, che la caratterizza e che si è convenuto di chiamare *effetto assimilatorio.*

Per questo s'intende: *il quoziente fra la quantità di sostanza utilizzabile, prodotta dalla pianta sopra una determinata superficie, e la quantità dei principî nutritivi sottratti al terreno.*

Da un'indagine, anche sommaria, risulta chiaro, come nel bilancio delle aziende agricole non si sia tenuto fin qui debito conto di un fattore di questo genere che rappresenta un mezzo potente, posto a disposizione dell'agricoltore, per l'aumento della produzione ed al quale si è, più o meno inconsciamente, rinunziato. Per addivenire a sicuri calcoli nello stabilire il valore della terra e della sua produzione, mi è sembrato che non potesse in alcun modo prescindersi dal prendere in considerazione idee siffatte e di valersi di esse nella trattazione di un argomento di natura essenzialmente economica, quale vuole essere, in ultima analisi, quello dello studio biologico dell'Agro romano in rapporto alla sua bonifica agraria.

Il valore della produzione si vuole oggidì ancora basare sopra dati che possiamo affermare siano inesatti. L'utile è il risultato della differenza fra entrata ed uscita: ma il calcolo sì dell'una come dell'altra va soggetto ad errori non lievi. Per quanto si riferisce alle spese, è qui appena il caso di ricordare la incostanza delle condizioni, nelle quali si esercita la industria agricola, la difficoltà della misura del valore delle materie prime in essa utilizzate e particolarmente del consumo del capitale-terreno. Per quanto si riferisce agli introiti, è poi da osservare che se, innanzi tutto, debbono figurare fra essi la quantità del prodotto ed il suo valore commerciale, non costituisce, però, questo solo l'effettivo utile ricavabile da una determinata superficie di terreno. L'entità del prodotto non è una stessa cosa con il suo valore di consumo: e, se questo non si prende nella voluta considerazione, potrebbe farsi valere in danno della nutrizione della comunità la mancanza di quel rapporto che deve esigersi necessariamente interceda fra il prezzo e la effettiva utilità di una merce. Lo sviluppo degli studî sociali viene in buon punto a sostenere queste idee e la tesi di un moderno indirizzo che dovrebbe governare l'arte dei campi. Nel concetto di *valore-utile* dovrebbe trovarsi la espressione di un sistema di coltura nel quale produttore e con-

sumatore non venissero danneggiati. Le condizioni, nelle quali si svolge una retta agricoltura, non potrebbero non assicurare una equa rimunerazione del lavoro e delle spese del coltivatore e la produzione al massimo buon mercato dei mezzi di nutrizione per i popoli.

È forse in queste condizioni che si è svolta per il passato la coltivazione nell'Agro romano? Il sistema di pascolo naturale o di fienagione, praticatosi quasi generalmente per anni e secoli, è forse quello che meglio risponde agl'interessi dei proprietarî o alla richiesta del mercato annonario locale o ad entrambe le circostanze nello stesso tempo? Non è esso, forse, la inevitabile conseguenza del clima e dei terreni romani, piuttosto che la espressione di uno stato di cose molto diverso da quello, che fosse possibile di instaurare sopra i cardini fondamentali della nuova agricoltura?

Il presente lavoro ha lo scopo finale di dare una risposta, per quanto possibile categorica, a tali quesiti, in base ad argomenti e risultanze sperimentali, tratti da nuovi studî di chimica agraria, batteriologia agraria e fisiologia vegetale, confortati dai dati economici ed agronomici raccolti dai tentativi colturali già praticati.

Come l'introduzione delle macchine ha cambiato fisionomia all'industria, così è alla macchina che deve richiedersi la trasformazione dell'arte di coltivare i campi.

Intendo qui parlare della prima e maravigliosa macchina che ha al proprio servigio l'agricoltore: la pianta. Vi sono piante, come ho già accennato, che molto differentemente approfittano della sorgente di energia ad esse fornita per la fabbricazione della sostanza organica. Sotto questo punto di vista considerata, la pianta si comporta appunto come una vera macchina, nello stretto senso meccanico della parola, capace di compiere un differente lavoro, a seconda della propria natura. È perciò elementare che l'agricoltore, al pari dell'industriale, ha tutto l'interesse di utilizzare il meccanismo più perfetto, quello che a lui può fornire il maggiore rendimento. Questo nella pianta è dato dal rapporto fra sostanza organica prodotta e capitale di esercizio impiegato. Ora, hanno mai misurato gli agricoltori dell'Agro romano tale rapporto o si sono almeno accorti di avere affidato il loro capitale ad una buona macchina, ovvero ad una macchina rudimentale, imperfetta, vecchia, o, in altri termini, con una cattiva resa funzionale?

La risposta a questo altro quesito è quella che più particolarmente mi sono proposto di dare con gli studî di cui vengo ora a riferire. La misura del rendimento delle piante ora coltivate nell'Agro romano dovrà fornire l'indice più sicuro per stabilire, sia i vantaggi e i danni dei sistemi attualmente in uso, sia la possibilità di mutarli ed il valore che le modificazioni stesse possono avere.

Nella valutazione del lavoro compiuto da una determinata pianta, o, per stare alla definizione premessa, del suo effetto assimilatorio, entrano due elementi di carattere molto comprensivo entrambi: il *valore di produzione* ed il *valore di consumo*. I nostri calcoli esigono di riferire i diversi termini di cui ciascuno di essi risulta, per quanto è possibile, ad un sistema unico di misura.

Incominciando dal valore di produzione della pianta, si tentò dapprima di calcolare la quantità di energia che le sostanze nutritive sono capaci di sviluppare nell'organismo, misurandola in calorie. Si trovò però, in seguito, che la utilizzazione delle

sostanze alimentari nel corpo vivente presenta limiti determinati, soprattutto, dal rapporto delle principali specie di combinazioni in esse contenute: albuminoidi, carboidrati, grassi. Un differente metodo di calcolo del valore della produzione vegetale consiste nel determinarne il quantitativo in composti nutritivi digeribili, riferiti ad un valore nutritivo unitario. Esso è certo migliore del primo, sebbene, prendendo in diretta considerazione l'uomo, deve necessariamente restringere il campo delle sue ricerche ad un numero molto limitato di alimenti e richiedere una tecnica sperimentale non facile. Avendo presente, inoltre, che gli organi digerenti umani non sono una medesima cosa di quei degli erbivori, come di quei dei carnivori, e che tutti i mezzi di nutrizione vegetale, in ultima analisi, direttamente o indirettamente, contribuiscono alla nutrizione dell'uomo, apparisce manifesto come negli studî eseguiti sopra gli animali dovrebbe cominciarsi dal fare astrazione dal loro differente regime, qualora si volesse non ritenere assurdo qualsiasi confronto.

O. Kellner [1], con i suoi pregevoli lavori, ha molto contribuito a dimostrare l'insufficienza di questi due metodi, riuscendo a proporne un terzo, mercè il quale, con ben maggior rigore, potersi determinare il valore effettivo della produzione vegetale. Come più semplice espressione di esso, il Kellner usa il termine *valore-amido* (Stärkewert), al quale, oltre quello dell'amido, può agevolmente riferirsi anche il valore di un'altra combinazione nutritiva: il grasso. Trovando egli che da 100 gr. di farina di amido e simili polisaccaridi si formano gr. 24,89 di sostanza grassa, basterà moltiplicare per 4 il grasso analiticamente determinato, per ottenerne il relativo valore-amido. E poichè la funzione della proteina digeribile non può essere sostituita da quella di altre categorie di composti nutritivi, e quindi non può ridursi alla stessa espressione numerica, il Kellner propone anche l'adozione del valore monenario. Sulla base dei prezzi medî commerciali raccolti dalla Società agraria tedesca, il valore di 1 kg. di albumina digeribile egli calcola a pfenn. 24,98 (= L. 0,308), e a pfenn. 15.67 (= L. 0,193) quello di 1 kg. di valore-amido. E poichè nella composizione dei prodotti, in generale, ad 1 kg. di albumina digeribile corrisponde 0.94 di valore amido, rimane stabilito, che il valore degli elementi nutritivi di un foraggio si ottiene aggiungendo al costo del valore-amido di 100 kg. di esso, calcolato a 15,67 pf., 10,25 pf. (= L. 0,126) per ogni kg. di albumina digeribile.

Un tale modo di valutare l'effettiva capacità nutritiva di un prodotto sembra anche allo Strakosch il più attendibile ed è a mezzo di esso, che io intendo calcolare il valore di produzione delle piante, che, da più o meno lungo tempo, formano oggetto dei sistemi agrari dominanti nell'Agro romano.

D'altro canto, abbiamo il valore di consumo della vegetazione.

A tale proposito, è necessario anzitutto non confondere, come spesso avviene, bisogno di concimazione e bisogno di sostanze nutritive, in quanto che solo questo secondo deve rappresentare il consumo della pianta, costituendo la quantità assoluta di elementi che con il raccolto viene sottratta al suolo. I concimi somministrati

(1) O. Kellner, *Untersuchungen ueber den Stoff- und Energieumsatz des erwachsenen Rindes u. s. w.*, Berlin 1900, id., *Die Ernährung der landw. Nutztiere*, Berlin 1906. Confr. anche le numerose comunicazioni nel « Landw. Versuchsstat », 47 (1906), 53 (1900), e nel « Landw. Jahrbücher », ecc.

vanno ad arricchire la riserva del terreno per le future raccolte: la spesa che essi importano deve quindi addebitarsi al conto « terreno » e non a quello « pianta ». Ciò premesso, è lecito di arguire come calcolare il valore di consumo della pianta sia più facile che calcolarne quello di produzione, poichè l'analisi chimica si presta a ridurre gli elementi nutritivi ad una comoda unità di misura. Si volle per tal modo stabilire la *unità di valore in concime* e la *somma del valore concimante*. Senonchè, il prezzo commerciale dei cosiddetti concimi artificiali può molto variare a seconda della diversità delle forme in cui i principî attivi — essi stessi di differente natura — vi sono contenuti. Numerose circostanze dovrebbero prendersi in considerazione qualora s'intendesse venire alla determinazione di una esatta unità di misura; circostanze, al contrario, che sono trascurate insieme con non poche altre riferentisi ai sottoprodotti ed ai rifiuti dell'azienda — il concime di stalla fra essi — che è molto difficile, se non impossibile di equamente valutare. È superfluo e forse fuori luogo quì il ricordare le discussioni sostenute per stabilire il valore concimante del letame che, per ragioni di comodità, più che per altro, si è convenuto di riferire alle stesse unità di misura dei concimi artificiali.

Ai fini del presente lavoro e per la determinazione dell'effetto assimilatorio, riterrò, con lo Strakosch, che basterà fissare la quantità degli elementi nutritivi sottratti al terreno, riferendoli ad un prezzo medio e limitando i calcoli ai tre soli fra essi — azoto, acido fosforico e potassa — che, per le proporzioni con le quali sono richiesti dal bisogno nutritivo della pianta e per la loro quantità, spesso scarseggiante nel terreno, rappresentano un valore rilevante, di fronte a cui passa in seconda linea quello degli altri elementi delle ceneri (solfo, ferro, magnesio e calcio). Quale prezzo sia poi da assegnare alle diverse unità di potassa, acido fosforico ed azoto è un'altra questione, che fu più volte dibattuta. L'Ebert (1) calcolava per una libbra (*Pfund*) di azoto pfenn 70, di potassio pfenn. 20, di acido fosforico pfenn. 25. Von der Goltz (2), in base all'esame delle medie di trenta anni, accettava i prezzi calcolati da E. Wolff e, cioè, per una libbra di azoto pfenn. 60, di potassa pfenn. 25, di acido fosforico pfenn. 20. Lo Strakosch (3), sulla scorta dei prezzi riferentisi al centro della Germania (1900-1905), stabilisce un prezzo netto medio per chilo, dei tre medesimi elementi, rispettivamente di pfenn. 121, 17,8, 28,2 (= L. 1,49, 0,22, 0,34). Volendosi dunque tradurre in cifre il valore di consumo di una pianta, basterebbe semplicemente moltiplicare per L. 1,49 il peso dell'azoto, per L. 0.22 il peso della potassa, per L. 0 34 il peso dell'acido fosforico sottratti al terreno, e addizionare i risultati. I calcoli anche per i prodotti del nostro Agro, nonostante le oscillazioni dei mercati, a mio modo di vedere, possono essere fatti accettando queste basi di misura (4).

(1) K. J. Ebert, *Die landw. Verhältnisse in vergleich. Darstellung f. d. prakt. Bedürfnis.* Leipzig, 1877.

(2) Von der Goltz, *Taxationslehre*, pag. 91.

(3) loc. cit., pag. 27.

(4) In Italia, i prezzi medi unitari dei tre principali elementi della fertilità debbono ritenersi effettivamente un poco superiori a quelli adottati dallo Strakosch. La differenza minore si verifica per il prezzo dell'azoto, che dovrebbe calcolarsi almeno di L. 1.50 al kg. Per gli altri due elementi,

Senonchè, è indispensabile fare un'osservazione di grande rilievo. Mentre l'analisi chimica del prodotto può rappresentare per gli elementi delle ceneri il consumo del terreno causato dalla pianta, la stessa analisi non può esprimerci il consumo della riserva azotata del suolo. Basta appena ricordare il caso delle leguminose, perchè non possa sfuggire la circostanza, che nella costituzione del corpo della pianta coltivata, come di quella spontanea, passa una più o meno notevole quantità dell'azoto sottratto all'atmosfera per processi che è difficile misurare e che permettono di non intaccare, se non al più in minima parte, il capitale-azoto del terreno. Nella determinazione del potere assimilatorio perciò lo Strakosch ritiene di commettere un piccolo errore, calcolando = 0 l'assimilazione dell'azoto del terreno da parte della leguminosa.

I due dati, con le rettifiche e le convenzioni di cui sopra, permettono senz'altro di ottenere il ricercato rapporto. Questo rappresenta adunque l'effettiva eccedenza in sostanze utili, che da una unità di superficie può ottenersi a spese degli elementi nutritivi del terreno: la proporzione nella quale una pianta questi stessi elementi utilizza. Data la variabilità, e molto spesso non piccola, del prodotto, l'effetto assimilatorio non dà che una nozione *relativa*, una misura della capacità di lavoro delle piante sviluppantisi nelle stesse condizioni, sullo stesso terreno e nel medesimo clima. Ciò deve evidentemente costituire una circostanza del massimo interesse nell'applicazione dei suesposti criterî allo studio dell'Agro romano che, è noto, si presenta in condizioni climatiche e geologiche ben singolari. Ad ogni modo, le differenze del valore di consumo e del valore di produzione di determinate piante, tenuto conto della media dei raccolti e della composizione media dei prodotti, non possono variare oltre certi limiti; e lo Strakosch ha eseguito i suoi calcoli producendo alcune tabelle [1], nelle quali, in definitiva, la capacità di lavoro delle piante viene riferita all'unità dell'effetto assimilatorio della segale (= 3,7) preso = 100.

Ad es., questo autore trova che, con un consumo di sostanze nutritive del terreno dal valore di una lira, le differenti piante coltivate producono sostanza organica fisiologicamente utilizzabile del valore seguente:

Cereali	segale	(*Secale cereale* L.) . . .	lire	3,7
»	frumento	(*Triticum vulgare* L.) . .	»	3,8
»	orzo	(*Hordeum vulgare* L.) . .	»	4,6
»	avena	(*Avena sativa* L.) . . .	»	3,5
»	mais	(*Zea Mays* L.).	»	7,4

deve notarsi che il prezzo della potassa in Italia è superiore a quello dell'acido fosforico, mentre in Germania verificasi il contrario. Le differenze di prezzo possono elevarsi a cent. 5 per l'acido fosforico, ed a cent. 20 e più per la potassa.

[1] Loc. cit., pag. 42-47.

Piante radici od a tuberi	patate	(*Solanum tuberosum* L.) .	lire	5,5
"	topinambour	(*Helianthus tuberosus* L.) .	"	6,2
" . . .	barbabietola da zucchero	(*Beta vulgaris* L.) . . .	"	9,5
"	barbabietola da foraggio	(id. id.) . . .	"	2,8
"	carota	(*Daucus carota* L.) . . .	"	3,9
Foraggere	loglio	(*Lolium perenne* L.). . .	"	1,7
"	fleo	(*Phleum pratense* L.) . .	"	2,5
"	mais verde (in fiore)	(*Zea Mays* L.).	"	4,6
"	trifoglio rosso (id.) . .	(*Trifolium pratense* L.) .	"	14.9
"	erba medica	(*Medicago sativa* L.) . .	"	12,6
"	trifoglio incarnato . .	(*Trifolium incarnatum* L.)	"	22,8
"	lupinella	(*Hedysarum Onobrychis* L.)	"	20,9
"	serradella	(*Ornithopus sativus* Brot.).	"	6,2
"	fava verde	(*Vicia sativa* L.)	"	11,7
Leguminose. . . .	pisello	(*Pisum sativum* L.) . . .	"	21,4
"	fava	(*Vicia faba* L.)	"	14,3
"	lupino (giallo) . . .	(*Lupinus luteus* L.) . . .	"	15.5
"	soia	(*Soia hispida* Mönch.) . .	"	24,7

Le leguminose risultano, adunque, molto chiaramente, essere le macchine moderne dell'agricoltura, quelle che con una spesa = 1 possono fornire un utile 10, 20, 25 volte maggiore. Tutto consiste nella possibilità che i fattori naturali od artificialmente modificati permettano ad esse di economicamente funzionare. Il punto fondamentale del presente studio consisterà quindi nello stabilire quale rendimento nelle naturali condizioni dell'Agro le leguminose presentano, in confronto alle altre specie di piante, ed in quali casi e con quali limitazioni il rendimento stesso sia sfruttabile.

Nelle attuali condizioni della economia sociale è, però, chiaro, come un regime colturale costituito soltanto di leguminose sia assolutamente irrealizzabile. Sarebbe molto lungo e superfluo sia pur accennare a tutte quelle cause, le quali, mentre da da un lato hanno determinato la intensificazione della coltura, dall'altro hanno imposto una grande varietà di coltivazioni. Lo sviluppo delle industrie e la necessità di provvedere alle materie prime ad esse occorrenti, l'aumento del consumo dei prodotti animali, la concorrenza internazionale nelle diverse produzioni, l'aumento del valore della mano d'opera, in particolar modo, hanno portato a fissare una ben regolata successione delle piante. Il concetto e la pratica della *rotazione*, nel corso di neppure un secolo, hanno subìto una grandiosa evoluzione, nella quale troviamo, in una forma sempre migliore, l'espressione di un compromesso, che nell'agricoltura razionale ha dominato in relazione ai bisogni vitali delle piante coltivate e alle condizioni economico-sociali.

Il Thaer ([1]), uno dei più grandi riformatori dell'agricoltura, riuscì a dare una prova luminosa dell'aumento che, con l'avvicendarsi della leguminosa, poteva ottenersi

([1]) Thaer, *Einleitung zur Kenntniss der englischen Landwirtschaft*, I; id., *Grundriss der rationellen Landwirtschaft*, § 32.

nel prodotto e del grande significato economico della pratica, basata, del resto, sulla conoscenza, allora più o meno progredita, delle leggi di biologia vegetale. Di fronte a lui sta un altro grande agronomo, Justus von Liebig, il quale tentò di sottrarre alla dipendenza delle leggi naturali della rotazione la pianta succedente, introducendo nell'uso i concimi artificiali. Ma la teoria minerale dimostrò ben presto la insufficienza congenita, soprattutto nei riguardi delle proprietà meccaniche e fisiche, del mezzo di sviluppo della pianta. Il ritorno al concetto thaeriano della successione delle colture, migliorato dalle nuove conquiste delle scienze biologiche, fu, o, per meglio dire, va divenendo, una lucida dimostrazione della *fondamentale importanza che i fattori biologici hanno nel determinare la produttività della terra.*

Tra questi fattori, quei che regolano anche lo sviluppo della vegetazione spontanea sono principalmente due: 1°) gl'ineguali bisogni vitali delle piante; 2°) l'influenza della pianta precedente (Vorfrucht) sulle esteriori condizioni di esistenza della pianta succedente (Nachfrucht). Del resto, non tutte le proprietà biologiche, che potrebbero completamente illuminare il maraviglioso reciproco comportarsi delle piante di una medesima specie od anche di specie differenti, ci sono note; ma tale circostanza non può menomare il valore di tutte quelle conoscenze, acquisite in relazione ai fatti di cui ora è discorso e che consistono nell'azione del calore, dell'ombra, dell'umidità, del movimento dell'aria, del potere di putrefazione del terreno, e, più in genere, del contenuto di esso in batterî, della forma del sistema radicale, delle leggi, soprattutto, della selezione naturale [1] ecc., e che dimostrano come uno stesso terreno possa modificarsi naturalmente per differenti colture. Nonostante i limiti che queste modificazioni certamente hanno; nonostante anche i limiti che l'adattabilità della pianta alle modificazioni stesse presenta, un fatto di capitale importanza per la coltivazione e per la economia umana si verifica: la eterogeneità della flora. Questo fatto deve sfruttarsi a seconda degli ultimi risultati della scienza, avendo presente tutti quei fattori biologici che lo influenzano e che sono da ritenersi la base di una razionale rotazione. Lo studio biologico dei terreni del nostro Agro s' impone quindi, allo scopo speciale di stabilire quale valore abbia e di quali miglioramenti sia suscettibile quella rotazione, che in talune località di esso praticasi da lungo tempo.

Di particolare interesse deve quindi riuscire il mettere in relazione le conoscenze acquisite e divulgate dallo Strakosch, intorno al diverso potere assimilatorio delle varie specie vegetali, con lo studio delle coltivazioni proprie della campagna romana, in quanto soprattutto si riferisce alla successione di esse, sì che nuovi lumi possano trarsene per il bonificamento agrario. Dovrà prendersi in grande considerazione la flora prativa, tanto diffusa e sfruttata nel regime agrario dei nostri terreni, particolarmente perchè fra essa possono trovarsi specie buone e cattive lavoratrici. Dai dati sul rendimento economico di queste piante, calcolati con i nuovi criterî suesposti, si rileverà la grande differenza che può aversi anche fra specie di una stessa famiglia: ad es., fra le stesse leguminose. Tuttavia non dovrà e non potrà sfuggire come, nella scelta delle erbe da prato e delle proporzioni nelle quali esse possono svilupparsi in

(1) Rümher, *Ueber die Fruchtfolge*, Berlin 1906.

una determinata località, sia il caso di prender le mosse da altri punti di vista e non solo da quello dei differenti effetti assimilatori.

I terreni tenuti a prato rappresentano un capitale, il quale, nonostante si voglia generalmente ritenere incapace di subire un rapido e notevole impoverimento perchè può dare un raccolto copioso anche senza uso di concime, deve formare oggetto di particolari cure. È stato calcolato, dallo Strecker [1], che da una stessa superficie di terreno si asporta con il fieno una somma di elementi nutritivi notevolmente superiore a quella che si asporta con una raccolta di frumento. Il fatto troverebbe spiegazione nella più lunga durata del periodo di vegetazione delle erbe da prato, nella maggiore profondità e grossezza delle loro radici ed in altri fattori di un razionale sfruttamento della terra, che è necessario disciplinare per raggiungere quel fine economico che è il fondamento di ogni coltura. I signori romani non hanno forse trovato nella diffusione dei terreni prativi il modo di sfruttamento di qualche speciale fattore naturale, del quale è necessario tener conto, in confronto dei principî discendenti dalle conoscenze sopra la ineguale capacità di lavoro delle diverse piante? Hanno eglino in effetto raggiunto un esercizio di coltivazione prativa nel quale siano eliminati i pericoli che essa generalmente presenta? Che se altre specie di piante risultasse opportuno introdurre nel ciclo delle colture o consociare ad esse, particolare riguardo meriterebbe quella categoria di leguminose, nella quale rientrano il fagiuolo, il trifoglio incarnato, la lupinella, la soia, ecc., che godono di un effetto assimilatorio particolarmente elevato.

Oltre a questa proprietà, dovrà tenersi gran conto delle modificazioni apportate alla natura fisica del suolo dalle radici delle leguminose e, più ancora, alla trasformazione dei composti nutritivi difficilmente solubili, a mezzo della sostanza organica lasciata con i loro resti nel terreno. Le leguminose rappresentano, in genere, un gruppo di piante capaci di una notevole adattabilità, che solo la patata può superare, e che godono di una molto larga distribuzione geografica. Come vi sono specie che si coltivano fino al 67°17′, così altre ve ne sono, che resistono ai climi caldi e più o meno aridi. La possibilità di sviluppo di queste piante in sfavorevoli condizioni climatiche contribuisce a facilitare lo sviluppo di piante succedenti nella rotazione, che nello stesso ambiente non troverebbero adatte condizioni di accrescimento. L'aridità del clima e la elevatezza della temperatura, verificantisi per un periodo molto prolungato dell'anno, costituiscono certamente delle circostanze molto gravi nel trattare della coltivabilità dell'Agro romano. Ed a questo punto torna acconcio il rammentare come la soia (una pianta che va acquistando una importanza sempre maggiore nella agricoltura moderna) sia una leguminosa che, oltre a presentare il più elevato effetto assimilatorio ed a produrre senza concimazione fino a 100-150 semente, gode di uno straordinario potere di adattamento al terreno ed al clima; che resiste al gelo ed alla siccità estiva meglio del mais, ed alle malattie più che tutte le altre della stessa famiglia. Nonostante le difficoltà che s'incontrano per il suo attecchimento nelle località dove mancano i batterî specifici dei tubercoli, deve

[1] Strecker, *Kultur der Wiesen*, 2. Aufl., Berlin 1906.

ritenersi, che detta pianta occupi un posto notevole nella nuova economia dei campi, e merita di essere sperimentata anche presso di noi.

Dal punto di vista della coltivazione delle piante particolarmente produttrici di sostanze idrocarbonate — che, a mio giudizio, rappresentano uno dei principali motori della vegetazione, in quanto che, portate nel terreno, costituiscono il materiale sorgente di energia per quei microorganismi, dai quali dipende il naturale arricchimento del suolo in elementi nutritivi ed il passaggio, da parte di quelli esistentivi, a forme più facilmente utilizzabili ([1]), — dovrà nella rotazione farsi largo posto alle piante-radici.

Lo sguardo che poco innanzi è stato dato all'effetto assimilatorio delle specie, che con esse hanno affinità, appunto come produttrici, in misura elevata, di sostanze amilacee e zuccherine, permette di assegnare a tali piante un posto intermedio fra quello delle graminacee e quello delle leguminose. Il calcolo dell'effetto assimilatorio della patata, della barbabietola da zucchero e da foraggio, del topinambour e della carota, conferma l'importanza che a queste piante, in specie negli ultimi tempi, è stata attribuita nella economia umana; nè, dagli stessi studî dello Strakosch, risulta molto inferiore l'effetto assimilatorio di altre piante-radici.

Peraltro, mi cade opportuno di far qui notare, come non sia sufficiente il calcolo di questo solo elemento per stabilire, anche solo approssimativamente, il valore reale da attribuirsi a tali piante introdotte nella rotaziono; poichè, venendo adibite come produttrici di materiale termodinamogeno per la microflora, causa di tutti quei fenomeni conosciuti come proprietà biologiche del terreno, esse piante esaltano l'attitudine di questo a render possibile, con un massimo vantaggio, la successione della graminacea alla leguminosa, di una pianta spossatrice ad una miglioratrice. Nella funzione della sarchiata noi troviamo un grande coefficiente biologico per assicurare la fertilità del suolo in determinate regioni, forse più e meglio che prendendo in considerazione il suo effetto assimilatorio. Nella campagna romana, difatti, si pratica con successo il sovescio di piante-radici lasciate sviluppare nel periodo autunnale-vernino, e sarà interessante di fissarne il giusto significato agrario.

Le graminacee sono le piante cui spetta il meno elevato effetto assimilatorio, e che dovrebbero perciò subire la sorte delle macchine che forniscono un cattivo rendimento. Esse però rappresentano i mezzi di nutrizione, che per l'uomo hanno il massimo valore, ed il fine principale, cui la produzione in una ordinata economia rurale deve mirare, sapientemente sfruttando le piante sarchiate e leguminose. Va però notato che il mais, fra esse, presenta il massimo effetto assimilatorio; oltre a ciò, la sua capacità di lavoro si manifesta in una eccedenza del valore di produzione sopra quello di consumo, eccedenza che viene superata solo dalla barbabietola, e da nessuna altra pianta è raggiunta. L'entità del raccolto, come pure la qualità che esso può dare, variano, del resto, entro limiti alquanto estesi, particolarmente anche per il fatto che è difficile trovare un'altra specie, il cui rendimento sia altrettanto dipendente dalla scelta della varietà adatta.

([1]) R. Perotti, *Le condizioni del clima-terreno per l'induzione dell'azoto e la dissoluzione dell'acido fosforico nel suolo*. Rend. soc. chimica ital., vol. II, fasc. 6°, an. 1910.

Nei riguardi del nostro Agro, dovrà anche molto apprezzarsi il vantaggio, che esso offre, di richiedere poca mano d'opera, di non avere, rispetto al terreno, speciali preferenze, e, nei climi caldi, un grande potere di accomodamento alle loro perturbazioni.

Una vecchia sentenza vuole che, per coprire il bisogno in paglia in una determinata regione, si deve coltivare con piante a culmi una metà dei buoni terreni (1). Questo fatto aggiunge un nuovo titolo alla necessità di coltivazione delle graminacee, devolvendo ad essa tutte quelle risorse che possono trarsi da altre piante a più elevato effetto assimilatorio od anche da peculiari circostanze naturali. Segale, frumento, orzo ed avena — così disposte nell'ordine decrescente di produzione della paglia —, non ostante il basso costo colturale, offrono una molto modesta capacità di lavoro fisiologico. La segale e l'avena sono vicine nel più basso posto; il frumento e l'orzo sono primi. I risultati colturali però subiscono con i climi oscillazioni tali da spostare sensibilmente l'ordine suddetto. Così può verificarsi che (come appunto accade nelle regioni settentrionali) debba porsi innanzi a tutti la segale, che ad es. è per la Germania la pianta nazionale e non per l'Italia. Peraltro, la natura dei terreni può rendere la segale, nello stesso clima germanico, non adatta ad una rimunerativa coltivazione. Nella storia colturale delle graminacee soprattutto, mentre da un lato si ha la dimostrazione dell'importanza dell'effetto assimilatorio della pianta anche nei rapporti della rotazione agraria, dall'altro si raggiunge la prova che le singole colture avvicendantisi non presentano alcunchè di fisso e prestabilito. Nelle coltivazioni a granella dell'Agro romano troveremo un luminoso esempio di tutto ciò.

Come sul principio ho accennato, impellenti motivi di ordine generale e sociale impongono l'aumento dei prodotti e, nello svolgimento così dell'agricoltura come delle industrie, la sovrapposizione degl'interessi collettivi a quelli individuali. Se i signori proprietarî delle vaste distese dell'Agro romano hanno fin quì trovato il loro tornaconto nel lasciare incolte e nelle condizioni di un regime apparentemente primitivo le loro terre, le mutate condizioni generali della società e quelle specialissime che hanno restituito all'Italia il naturale centro coordinatore delle nazionali energie, sì che Roma non potrà non emulare in avvenire il suo storico, fiorente passato, impongono ai proprietarî medesimi di mettere il proprio tornaconto in perfetta armonia con quello delle masse, che per la fatalità delle leggi naturali sono destinate a popolare, almeno nei limiti calcolati da Roberto Malthus, anche le deserte lande della campagna romana. Il recente intervento del potere legislativo nella soluzione del problema agricolo romano trova il suo elevato fondamento etico in ciò: che esso rappresenta una impellente necessità perchè sia provveduto, con razionali leggi di bonifica, al migliore sfruttamento delle limitate estensioni di terreno. L'importanza di favorire il prodotto agricolo, di cui il terreno può essere capace, cresce nella stessa misura con la quale il consumo mondiale aumenta di fronte alla mondiale produzione; e costituisce uno dei fondamentali cardini della politica interna di ogni Stato, poichè il possesso delle fonti di nutrizione vuol significare, senza meno, la potenza economica e politica di una nazione.

(1) Novacki, *Getreidebau*, 4. Aufl., Berlin 1905,

La produzione agricola dell'Italia nel decorso anno 1911, quale risulta dalle cifre ufficiali pubblicate dal Ministero di agricoltura, limitatamente alle principali coltivazioni e nelle diverse regioni, è la seguente ([1]):

([1]) Min. di agric. industria e commercio. — *Notizie periodiche di statistica agraria*, anno II, fasc. 2, 3, 4, an. 1912.

Nella tabella è data la produzione agraria propriamente detta (cereali e legumi) e le cifre sono riportate o dedotte con le riserve generiche fatte dal Ministero stesso. Di più, è a notarsi, che nel prodotto del mais è compreso quello maggengo come quello cinquantino e quarantino complessivamente, e che mancano le cifre della superficie di ciascuna delle colture di leguminose a granella, avendosene soltanto la totale, ammontante ad Ea. 742.000, con una produzione di Qli 2.617.000, inclusavi quella dei ceci, delle cicerchie, delle lenti e della veccia. Nel calcolo della superficie coltivata per regione, quella a fagiuoli piselli e lupini è stata valutata pari ai due terzi della totale delle leguminose a granella.

N.	COMPARTIMENTI DEL REGNO	SUPERFICIE totale Ea.	SUPERFICIE coltivata Ea.	RAPPORTO sup. totale sup. coltivata	Frumento Ql.	Segale Ql.	Orzo Ql.	Avena Ql.	Riso Ql.	Mais Ql.	Patate Ql.	Bietola zuccherina Ql.	Fava da seme Ql.	Fagiuoli Ql.	Piselli Ql.	Lupini Ql.
1	Piemonte	2.937.800	665.950	4.4	3.524.000	600.100	12.900	267.200	2.031.900	2.322.000	1.904.000	264.000	36.600	115.000	47.000	13.000
2	Liguria	527.800	51.370	10.2	236.000	2.500	1.400	1.500	—	72.000	1.285.000	—	37.200	21.000	7.000	—
3	Lombardia. . . .	2.431.700	674.380	3.6	4.088.000	389.300	7.800	534.300	2.068.300	5.587.000	1.629.000	565.000	18.700	18.000	1.000	6.000
4	Veneto	2.454.800	810.300	3.0	4.561.000	42.000	10.400	231.700	379.400	4.962.000	931.000	5.085.000	—	186.000	35.000	—
5	Emilia	2.069.000	737.110	2.8	7.004.000	23.000	105.500	249.300	295.800	2.367.000	605.000	6.521.000	96.000	95.000	2.000	1.000
6	Toscana	2.410.400	612.700	3.9	3.949.000	28.000	42.300	437.700	14.600	1.520.000	1.182.000	434.000	264.400	121.000	—	11.000
7	Marche	974.800	399.680	2.4	2.795.000	2.500	18.000	9.200	—	995.000	420.000	87.000	86.800	5.000	—	—
8	Umbria	970.900	287.860	3.3	1.752.000	3.400	17.500	47.000	—	332.000	680.000	330.000	117.500	—	—	—
9	Lazio	1.208.100	335.480	3.6	1.683.000	10.000	29.300	458.500	—	954.000	387.000	35.000	145.500	—	—	—
10	Abruzzi e Molise . .	1.652.900	742.290	2.2	3.238.000	16.200	66.600	112.500	800	1.630.000	3.228.000	768.000	165.400	69.000	1.000	1.000
11	Campania	1.629.900	740.830	2.2	2.900.000	106.000	42.100	401.000	400	2.254.000	2.909.000	315.000	203.600	360.000	35.000	43.000
12	Pnglie	1.911.000	696.830	2.7	4.029.000	—	308.200	1.580.700	—	47.000	173.000	—	231.800	—	—	—
13	Basilicata	996.200	290.430	3.4	1.394.000	7.200	7.700	669.700	—	187.000	173.000	—	71.900	5.000	—	—
14	Calabria	1.507.500	332.390	4.5	1.596.000	84.400	63.600	531.600	—	443.000	1.266.000	—	48.000	84.000	6.000	63.000
15	Sicilia	2.574.000	1.152.810	2.2	7.379.000	31.000	962.800	413.600	1.000	38.000	50.000	—	3.291.900	16.000	11.000	18.000
16	Sardegna	2.407.800	342.290	7.0	2.234.000	—	673.300	1.800	—	86.000	90.000	—	353.100	19.000	—	—
	REGNO	28.663.900	8.872.700	3.2	52.362.000	1.345.600	2.369.400	5.947.300	4.792.200	23.796.000	16.922.000	14.404.000	5.168.400	1.114.000	145.000	156.000
	Ripartizione della snperficie coltivata per culture. . Ea.				4.751.600	122.290	247.600	514.160	144.500	1.645.640	288.169	53.120	611.070		494.660	

Considerando come il rapporto della superficie coltivata con le stesse piante a quella totale in Germania sia approssimativamente di 2,7, mentre in Italia esso è solo di 3,2, si scorgerà la maggiore necessità, che noi in confronto abbiamo, di favorire l'aumento della produzione agricola propriamente detta. Indici eloquenti di siffatta circostanza sono. da lunga serie di anni, l'emigrazione e, più di recente, l'espansionismo coloniale.

Considerando poi i singoli rapporti tra superficie totale e superficie coltivata nei diversi compartimenti del Regno, emerge quale basso posto spetti al Lazio in confronto delle altre regioni per quanto si riferisce a produzione di cereali e di legumi. Ora, il provvedere all'aumento di essa in generale, e nella campagna romana, in particolare, quali sacrificî non rappresenta per tutti i fattori del reddito agricolo? Quale sproporzionato aumento di spese ciò importa?

L'industria ed il commercio esercitano una grande concorrenza all'arte dei campi traendo a sè gli agricoltori migliori e più intelligenti. I restanti contadini sono i meno pratici; i lavori non sempre possono eseguirsi a tempo; i salarii, le tasse e le spese in genere aumentano. Il concime azotato — di quell'elemento, cioè, che può ritenersi il massimo regolatore della economia rurale [1] — va rincarando di giorno in giorno. In questo stato di cose la conoscenza della ineguale capacità di lavoro delle piante coltivate apre all'agricoltura un nuovo orizzonte. Con l'applicazione di essa si rende possibile un aumento della produzione interna, senza aumento di spese nè maggiore consumo di capitale-lavoro.

Partendo dalle sopra riportate cifre della superficie attualmente coltivata in Italia e dalla produzione che da essa si ricava, procedendo al calcolo del valore di produzione, come di quello di consumo delle piante. secondo i criteri, dello Strakosch, abbiamo:

Colture	Superficie coltivata Milioni di Ea	Prodotto per Ea Ql.	Valore di produzione per Ea L.	Valore di produzione totale Milioni di lire	Valore di consumo per Ea L.	Valore di consumo totale Milioni di lire
Frumento	4.75	11.0	203	964.2	54.9	260.7
Segale.	0.12	11.0	167	20.0	44.4	5.3
Orzo	0.24	9.5	198	47.5	42.3	10.1
Avena	0.51	11.7	212	108.1	61.7	31.4
Riso	0.14	33.1	666	93.2	62.5	8.7
Mais	1.64	14.4	488	800.3	65.3	107.0
Patate	0.28	58.7	251	70.2	45.3	12.6
Bietola zuccherina . .	0.05	271.1	1180	59.0	476.5	23.8
Fava da seme . . .	0.61	8.4	169	103 0	11.9	7.2
Fagiuoli	0.40	2.7	58	23.2	2.6	1.0
Piselli	0.04	3.6	70	2.8	3.2	0.1
Lupini	0.04	3.9	93	3.7	5.8	0.2
Totali . . .	**8.82**	—	—	**2295.2**	—	**468 1**

[1] R. Perotti, *Il problema dell'azoto*. Boll. soc. agric. italiani, 1909.

Resterebbe per tal modo assodata una differenza di valore-utile di L. 1827 milioni. Esso rimunera con L. 3,9 il valore di una lira di capitale-terreno consumato. Ma, ora, sol che per poco si sposti la ripartizione della stessa superficie coltivata in relazione alle diverse piante e se ne introducano di queste altre capaci di un maggiore effetto assimilatorio, rimanendo inalterata la somma del valore di consumo, potremmo stabilire il seguente prospetto della produzione principale d'Italia:

Colture	Superficie coltivata Milioni di Ea.	Prodotto per Ea Ql.	Valore di produzione per Ea L.	Valore di produzione totale Milioni di lire	Valore di consumo per Ea L.	Valore di consumo totale Milioni di lire
Frumento	3.00	11.0	203	609.0	54.9	164.7
Segale	0.15	11.0	167	25.0	44.4	6.6
Orzo.	0.25	10.0	209	52.2	45.3	11.3
Mais	2.00	14.4	488	976.0	65.3	130.6
Bietola zuccherina . .	0.10	275.0	1202	120 2	484.6	48.4
Carota	0.05	450.0	893	44.5	225.9	11.2
Topinambur	0 10	200.0	1139	113.9	182.4	18.2
Piselli	1.00	15.0	294	294.0	13.5	13.5
Fagiuoli	1.00	25.0	508	508.0	35 5	35.5
Soja	1.17	22.0	622	727.7	25.1	29.3
Totali . . .	**8.82**	—	—	**3470.5**	—	**469.3**

In questo caso la differenza segnante il valore-utile sarebbe di milioni 3001 di lire; *ogni lira, quindi, in forma di elementi nutritivi del terreno, avrebbe prodotto 6,3 lire di sostanza fisiologicamente utilizzabile.* Una siffatta ipotetica produzione, in confronto di quella realmente verificantesi, rappresenterebbe per la nazione un vantaggio annuo di oltre un miliardo, senza aumento di spese e al di fuori di qualsiasi intervento delle azioni fisiche e chimiche del terreno che ne diminuiscano il capitale-terreno.

Tutto il mio studio porterà, in ultima analisi, a determinare, da un lato, il valore totale di produzione, che nelle attuali condizioni agricole offre l'Agro romano; dall'altro, il valore totale di produzione che troverebbe il suo fondamento nelle differenti attitudini biologiche delle piante coltivate e che l'Agro stesso, con un migliorato regime agrario, potrebbe in un non lontano avvenire offrire. Due termini verranno posti di fronte: l'Agro romano attuale, *reale*; l'Agro romano *ipotetico*, sì che venga messa in rilievo la distanza che fra essi intercede. Avvisare ai mezzi con i quali, sulla scorta delle idee che son venuto fin qui esponendo, tentar di avvicinare l'Agro romano reale a quello ipotetico, è lo scopo pratico, finale della mia opera.

Ogni clima, ogni terreno, ogni situazione economica possiede le sue buone e le sue cattive piante lavoratrici. La chiave della soluzione del grande problema del bonificamento agrario della campagna romana deve, quindi, trarsi dalla esatta conoscenza di tutti quei fattori climatici, agronomici ed economici, che ne sono la ca-

ratteristica e che rappresentano per la pianta l'ambiente, nel quale essa deve poter svolgere le proprie attitudini fisiologiche. Il grosso della mia Memoria sarà quindi costituito da una particolareggiata relazione dello studio più completo possibile di quell'ambiente, che si è voluto fin qui considerare in un modo eccessivamente superficiale, pur assumendo, a termini di legge, quelle gravissime responsabilità di fronte ai proprietarî dei fondi, come al pubblico ed al Paese, che sono coinvolte dalle opere di bonifica, senza aver presente che, prima di essere una questione idraulica, sanitaria, di viabilità, legislativa, ecc.; la bonifica medesima è una questione biologica. L'agricoltura — come ho detto fin da principio — trova la condizione prima della sua esistenza nella capacità che le piante verdi hanno di assimilare, di formare, cioè, con l'acido carbonico dell'aria e con acqua, la sostanza organica. Questo fatto noi dobbiamo sempre aver presente: tutte le manifestazioni vitali e tutte le coltivazioni sulla terra provengono dal sole, ed i primissimi intermediarî nella trasformazione dell'energia da esso emanata sono appunto le piante verdi.

Lo Strakosch, nel chiudere la sua monografia, afferma che solo quella nazione, la quale saprà valersi delle piante che sono le migliori lavoratrici, occuperà il suo giusto posto sotto il sole. Con non minore convinzione potrei io soggiungere che, se Roma e la sua campagna, di fronte alle altre regioni italiane ed insieme con queste in cospetto delle altre nazioni, vorranno occupare quel posto che ad esse compete, dovranno innanzi tutto contare sulla capacità produttrice di quelle piante, che nel miglior modo usufruiscono della energia solare!

II.

Note storiche.

Le condizioni economico-agricole, nelle quali ci è concesso di osservare e di studiare oggidì la campagna e che debbono costituire uno dei punti di partenza dei presenti studî, sono evidentemente il risultato di un complesso di fatti, in gran parte naturali, i quali costituiscono la storia della importante e caratteristica regione.

Non è tuttavia la storia naturale dell'Agro quella che offre le maggiori particolarità. È una storia, anzi, relativamente semplice e comune a molte altre regioni di recente formazione, prossime al mare, ricche di acqua, e nella quale, turbandosi la primitiva isostasia delle rocce, si determinò una delle tante simili *frane a bacino* (¹). I materiali trasportati dalle acque telluriche, depositandosi sopra il fondo marino attiguo, raggiungendo un peso tale da vincere la resistenza ad essi offerta dalla crosta terrestre, produssero in questa una frattura verso la quale s'inabissarono, mentre dal lato opposto si elevarono. Gli strati di essi risultarono più o meno deformati o ripiegati, ed in parte vennero più o meno ad emergere dal pelo acqueo marino. In corrispondenza della frattura, rimanendo interessati gli strati più profondi,

(¹) M. Neumayr, *Erdgeschichte*, Bd. I. Leipzig, 1886.

aventi un grado geotermico elevato, poichè venne a mancare la pressione, si ottenne la liquefazione e la volatilizzazione dei materiali rocciosi, con conseguenti eruzioni ed esplosioni; in altri termini. si ottenne la formazione di un vulcano. I diversi materiali da questo eruttati, sovrapponendosi a quelli di origine idrica, contribuirono ad aumentare le emersioni ed a conferire un carattere geologicamente più recente alla regione, ma non ancora definitivo. Le acque superficiali hanno compiuto nella quarta epoca l'opera trasformativa, erodendo le rocce autoctone sul posto ed a monte, trasportando da questo materiali di altra natura, mescolandoli a quelli locali, alterandone la configurazione, trasformandone la composizione; e ciò, a grado a grado, attraverso il periodo storico e con azione continuata fin sotto i nostri occhi.

I monti sabini, tiburtini e lepini marcavano nel pliocene la linea del mare sul cui fondo andavano a depositarsi quelle *marne* che ora sono visibili alla base dei colli Gianicolense, Vaticano, di monte Mario e che affiorano anche nella regione che si distende fra Monterotondo e Mentana ed alle pendici dei Lucani e Corniculani. Un perturbamento, sopravvenuto forse in seguito alle prime manifestazioni vulcaniche laziali, portò alla sovrapposizione di *sabbie grigie* e *gialle* alle marne nelle dette località. Presso le spiaggie ed i corsi d'acqua si ottennero le *ghiaie*, dove s'incominciano ad osservare i residui fossili di grossi mammiferi terrestri.

Sopravviene il turbamento della isostasi della regione, causata da tali profonde modificazioni. A nord avvengono esplosioni in corrispondenza degli attuali Sabatini; a sud, in corrispondenza degli attuali Laziali. I materiali semifluidi e pesanti costituiscono l'ossatura di questi monti e si avanzano in correnti. più o meno, verso la pianura; quelli lanciati in alto, e leggeri, cadono in pioggia sopra la intera regione, ricoprendo le irregolarità della crosta emerse, con più o meno potenti strati di materie vulcaniche. Lave di trachite si trovano al monte Calvario. alla Manziana, presso Tolfa, ecc.; di tefrite leucitica, nei monti Laziali (Squarciarelli-Tavolato); di leucitite alle Crocicchie, a Capo di Bove, a San Cesareo, ecc., ed è la più diffusa fra quelle sabatine e le laziali.

I tufi hanno una importanza molto maggiore. e vennero a coprire una grande superficie dell'Agro romano. Quello *litoide* è assolutamente caratteristico ed occupa un determinato posto nella stratigrafia. Del pari abbondanti sono quello *granulare* ed il *terroso*, che viene in seguito a confondersi con il terreno agrario.

Si posseggono prove di una conoscenza molto antica della natura del suolo romano e riferibili al periodo etrusco: terra vegetale, derivata da erosioni e da detriti vulcanici, sopra; sotto. immensi banchi di tufo con interruzioni di lave; ancora più profondamente, un letto di rocce tufacee disgregate e terrose (pozzolana) con interstizî di varie materie capaci di dare esito alle acque superficiali.

Fra le due catene di monti vulcanici vennero naturalmente ad incanalarsi le acque tellurirche per raggiungere il prossimo mare. Così venne a profilarsi il Tevere, che, dapprima erodendo, poscia sedimentando nella valle scavata gli abbondanti materiali da lontano trasportati, fu il coefficiente principale dell'attuale configurazione dell'Agro. Nell'età preistorica la sua foce fu prima presso l'odierno monte Mario, poi presso Ponte Galera; nell'epoca romana fu vicino l'antica città di Ostia, dalla quale ora si è allontanato già di circa cinque chilometri. Cooperarono validamente

il Tevere, nella sua azione trasformatrice, i numerosi corsi di acqua affluenti e sopra tutti l'Aniene; in seconda linea, i fossi della Magliana, di Affogalasino, della Crescenza, ecc., i quali vennero a laciniare in molte parti l'altipiano, incidendovi vallecole e valli di sempre maggiore importanza, che fanno capo a quella, vastissima, tiberina. Un quinto circa del terreno dell'Agro risultò alluvionale e quasi tutto in pianura: degli altri quattro quinti, solo una frazione molto piccola ha una pendenza superiore al 15 °/₀ (spallette).

Con il progresso della vita organica sul globo, incominciò a sua volta anche nella regione romana l'arricchimento in materie umiche dei materiali detritici originatisi dalla sovrapposizione delle multiformi azioni meccaniche, fisiche e chimiche dei periodi nettuniano, plutonico ed alluvionale della genesi dell'Agro, e quindi la costituzione, sopra una scala di sempre maggior perfezionamento, di quel *terreno agrario* che forma l'oggetto principale del presente studio.

Non meno degli agenti inorganici e degli organismi, in particolare, l'opera dell'uomo ha contribuito singolarmente a modificare la campagna romana, a formare di essa un ambiente caro agl'intenditori di archeologia ed ai ricercatori d'ispirazioni; ma, ciò che più importa in relazione ai bisogni della vita moderna, in condizioni economiche invero eccezionali. Lo studio delle sorti, che attraverso i tempi antichi e recenti si sono andate maturando per l'avvenire della città di Roma, ha contribuito a mettere in luce tali condizioni, suscitando numerose e dotte discussioni. Oggetto principale di esse fu naturalmente lo sviluppo che l'arte dei campi subì nell'Agro romano, nello intento di rivolgere gl'insegnamenti, che se ne sarebbero potuti trarre, a profitto dei bisogni avvenire. Si osservò però, subito, che gli avvenimenti politici dell'antica Roma intralciarono molto presto lo svolgersi della sua agricoltura, sovrapponendosi ad esso per modo che la storia agricola della regione divenne essenzialmente una storia civile.

Dalla migrazione, nella valle Padana, degli antichi costruttori di palafitte che facevano uso di strumenti di rame associati ancora a quelli di pietra; o, meglio, da quella più recente, fondatrice di *terremare* e facente uso di bronzo, che si staccò dalla bassa Austria, stabilendosi nell'Emilia e discendendo fino alla spiaggia tarantina, ove prese contatto con la civiltà micenèa, trasse origine la primitiva popolazione del Lazio e, quindi, della città di Roma (1). Sulla successione delle varie stirpi nella regione regna una grande oscurità e si dibattono tuttora vivaci polemiche. Forse primo popolo furono i Siculi; secondo furono i Pelasgi, dai quali probabilmente derivarono gli Etruschi, che furono anche chiamati Tirreni ed ai quali vanno riferiti i Falisci, i Fidenati, i Capenati. Costoro contrassero contatti con gli Umbri di origine celtica e con i Sanniti o Sabini di origine osca od ausonia, occupanti gli Appennini fino a che sopra ad essi ed ai rami, quasi paralleli, degli Equi, dei Volsci e dei Marsi, venne ad affermarsi la popolazione dei Latini, con la quale cominciano le prime, grandi leggende di Roma.

(1) Pigorini, *Discorso ai Lincei*, 1903.

Ciascuno degli antichi diversi abitatori del Lazio, costituendo dapprima i *pagi*, associandoli in *conciliabula*, dai quali derivarono gli *oppida*, centri fortificati, venne a possedere importanti città. Ciascuna di queste moltiplicò, può dirsi, la propria sede (*città sparse*); ma il nuovo comune di Roma, costituitosi dalla riunione dei pagi latini, sabini ed etruschi, venne a dominare dal Tevere e ad assorbire completamente il commercio e gl' interessi di esse fino a renderne talune, al tempo dell'Impero, deserte o scomparse (1). La presenza di tali numerosi e frazionati centri di popolazione, che non potevano non avere un carattere essenzialmente rurale, starebbe ad indicare che la campagna circostante a Roma fu, nell'antichità, molto popolata e coltivata più di qualunque altra regione d'Italia. Certo, speciali cause dovevano sussistere per rendere preferita dagli antichi popoli la dimora nel vecchio Lazio.

I suoi antichi abitatori erano, per forza naturale di cose, agricoltori; ed all'agricoltura s' inspiravano la religione anzitutto, la letteratura e l'antico ordinamento sociale romano. Roma non fu, allora, se non un aggregato di patriarcati agricoli (*gentes*) i quali, in seguito, si classificarono in tribù *urbane* e *rustiche*, che in origine furono 17 e poi crebbero fino a 31 nell'Agro *continenter habitatus* e, cioè, molto oltre i confini della città, acquistando una vera prevalenza morale ed economica sulle altre che furono e rimasero solo quattro (2). Gli scritti agricoli di una lunga schiera di scrittori e di storici misero in viva luce la predilezione e la cura che i Romani, i quali *assidue rusticabantur* (3), dimostrarono in ogni tempo per l'agricoltura, in genere, e per l'orticoltura ed il giardinaggio, in specie (4).

L'*Ager romanus antiquus* rimase costantemente circoscritto dai sacri confini dei fiumi *Cremera* (la Crescenza) ed *Allia* (Malpasso), dalla località *Festi* (presso Torre Nuova), dalle *fossae Cluiliae* (via Appia presso il 5° miglio), da un *terminus* anonimo verso l'*ager Laurentinus* e dal *lucus deae Diae* (sulla Portuense-vigna Pino-Lecce). In esso erano compresi gli antichi pagi abitati dagli *extramurani*, così detti in confronto degli *intramurani* o *montani*. Vi si distinguevano: la parte dell'abitato fuori le mura (*continentia aedificia*); la zona destinata ad orti e giardini (*suburbanum*); il vero Agro, più esteso, coltivato ed abitato in modo da far dire a Dionigi che Roma era divenuta una città di estensione infinita, e ad Orazio di lamentare che le case magnifiche non lasciavano più luogo ai lavori dell'aratro (5).

I romani concepivano di limitata estensione il fondo rustico; come Virgilio cantò:

> ..... *laudato ingentia rura,*
> *exigum colito.*
>
> (Georg. II, 412).

Un campo di piccola estensione era detto *agellus*; uno di maggiore, *ager*, cui in ordine di ampiezza succedevano il *praedium*, il *fundus*, il *latifundium*. Sopra di essi si esercitava una coltivazione varia, che talvolta si è voluta dire quasi intensiva

(1) A. Schulten, *Die Landgemeinden*, in « Phylologus », n. 33, an. 1894.
(2) Livio, I, 43.
(3) Plinio, *N. H.*, XVIII, 20.
(4) N. Jenson, *Rei rusticae scriptores*, Ven. 1472.
(5) Orazio, *Od.*; II, 15.

nel significato moderno della parola. Si avevano terreni irrigui anche nell'estate, derivandosi acqua dai fiumi, dai ruscelli e da speciali conserve di acqua pluviale (*piscinae*) costruite sui colli. Il pascolo era quindi regolato con sistema, razionale e non si aveva bestiame brado. Varrone ci attesta della esistenza di prati migliorati con erba medica [1].

Certo è che nella conduzione dei campi molto influirono le sapienti misure di bonifica idraulica dirette a governare la provvista e lo smaltimento delle acque, delle quali era singolarmente dotata la campagna romana, nell'intento di proteggere la popolazione dalla infezione malarica. Ed i lavori eseguiti dai romani a tale fine furono veramente colossali [2]: pavimentazione delle strade, fognatura degli acquitrini, perforando lo strato impermeabile sino a raggiungere quello assorbente, od anche canalizzazioni (*fossura*), fra cui primeggiano le vaste reti di *cunicoli*, e speciali tubi di drenaggio; infine, distribuzione di copiose e sane acque potabili. I numerosi acquedotti, costruiti dai romani con vasti cunicoli sotterranei o con grandiose arcuazioni sopra terra, furono ammirati fin dall'antichità e costituiscono una delle maggiori attrattive artistiche dell'attuale campagna. In più tempi si condussero a Roma le acque: Appia, Aniene, Marcia, Tepula, Giulia, Vergine, Alsietina, Claudia, Aniene nuova, Traiana, Antoniniana, Alessandrina, Algenziana [3]. L'ammirabile lavoro della sistemazione delle acque forma argomento per stabilire l'importanza del suolo romano ed il valore del suo effettivo popolamento.

La vigna fu una delle culture che nel Lazio prese un particolare sviluppo, così che nei primi anni dell'Impero si esportava vino in notevole quantità, e Domiziano, nell'anno 81, dovette porvi un freno per evitare danni alla coltivazione del frumento. Nei libri di Columella e di Catone si ha una singolare ricchezza di giuste norme, che, si può dire, formano anche oggi il corredo tecnico dei viticultori del Lazio: norme per la scelta delle terre e dei vitigni più acconci, per eseguire lo *scasso* (*pastinum*), per ottenere propaggini, piantare barbatelle, sostenere i ceppi, ecc.

La civiltà romana ebbe origine dai campi, ma dalle conseguenze di essa l'agricoltura ebbe a risentire un forte contraccolpo. La primitiva semplicità rustica della vita, con la dominazione del mondo e con il bottino delle guerre vittoriose, cedette a poco a poco di fronte al crescente lusso della società di Roma. Coltivare la sua campagna più non si dimostrava necessario, dappoichè le provincie dovevano provvedere al mantenimento della città. E questa, così, ebbe i suoi granai e si approvvigionò, da più o meno grandi distanze anche dei generi di maggior lusso. I vini forestieri giungevano specialmente dalla Spagna ed in quantità tale che gli avanzi delle anfore che li contenevano costituiscono, fra i parecchi altri, il notissimo monte Testaccio. Nel

(1) Varrone, I, 42.

(2) Lanciani, *Opere di risanamento dell'Agro romano eseguite dagli antichi*, Lincei, 1879; De la Blanchère, *Dictionn.* Daremberg et Saglio, vol. I, pag. 1591; C. Tommasi-Crudeli, *Della distribuzione delle acque nel sottosuolo dell'Agro romano, e della sua influenza nella produzione della malaria*, Memorie Lincei, CCLXXVI, 1878-79; Secchi, *Intorno ad alcune opere idrauliche rimanenti nella campagna di Roma*, Atti nuovi Lincei, 1876.

(3) G. Tomassetti, *La campagna Romana antica, medioevale e moderna*, Roma.

triste periodo del decadimento agricolo che accompagnò quello dell'Impero, solo la vigna romana passò con il minor danno nelle aziende medioevali.

La *familia castrensis*, che, domiciliata sul fondo, lo esercitava, venne a perdere gradatamente il suo antico carattere patriarcale per l'infiltrazione dell'elemento schiavo, alla cui opera andavasi sempre in maggior misura affidando il lavoro agricolo. Frattanto il *fundus* volgeva a divenire il *latifundium*, ed in questo venivano abbandonandosi tutte le altre cure per convergere le migliori attività sopra quei monumenti di arte, di gusto, di raffinatezza sociale che furono le ville romane. Numerose, sparse su tutto l'Agro, in pianura ed in collina, erano destinate all'ozio degli uomini politici ed alle orgie dei patrizî. Esse raggiunsero il massimo splendore con la costituzione del *patrimonium Caesaris*, il cui demanio, estendendosi dall'Esquilino al Celio, con le eredità forzate e le confische, invadeva in più direzioni l'Agro romano sino a Tivoli (villa Adriana), ad Albano (villa di Domiziano), al mare. Oltre ai magnifici fabbricati — abitazioni, terme, ninfei, terrazze, trofei delle glorie domestiche — le cui ricchezze d'arte vengono di giorno in giorno in luce, si avevano coltivazioni varie di fiori: animali utili al lusso ed alla mensa popolavano giardini e boschetti.

Ma, ormai, tutto questo non era più agricoltura! L'antichissimo Fauno luperco, il dio Silvano, la dea Dia, come le altre ben numerose divinità rustiche della religione romana — anteriori a quelle stesse d'importazione ellenica — erano tramontate; altre si erano trasformate. Il dio Marte, da tutelare della buona salute degli agricoltori [1], era divenuto il nume della guerra. Il procacissimo Priapo, il popolarissimo Bacco, dominavano gli spiriti dell'epoca. La dea Laverna proteggeva i ladri dei campi; il dio Termine non ne segnava più i sacri limiti. In quello sfacelo maraviglioso e fatale dell'anima civile romana, il misticismo del sorgente cristianesimo, riparatosi nelle catacombe, appariva come un punto in ignizione sotto le fredde ceneri delle remote eruzioni laziali e sabatine non più fecondate dalla fiaccata mano dell'agricoltore!

La eredità agricola che passò alle popolazioni dell'età di mezzo fu ben misera! Lusso, concorrenza delle provincie, speculazioni lontane e, sopra tutto, la illimitata libertà di commercio con tutto il mondo conosciuto [2] concorsero a darci quel progressivo stato di decadimento che raggiunse il suo culmine con il trasporto della sede imperiale a Bisanzio. L'onere delle imposte e dei gravami di Stato per la esenzione dal servizio militare divenne tale che la proprietà dovette perfino essere abbandonata al Fisco.

La nuova religione, che aveva tratto un'incredibile forza dagli editti di Galerio e di Costantino, fu certamente benemerita del risveglio agricolo del principio del medio evo, inquantochè, esplicando la sua opera di demolizione del paganesimo nelle campagne, contribuì alla creazione di centri religiosi, dapprima molto numerosi (le 50 piccole diocesi suburbicarie) e ad alimentare quello spirito agricolo, di cui la religione pagana si era giovata per la tutela della proprietà, dei contratti, delle selve, ecc.

(1) Catone, *De re rustica*, 141.
(2) L. Caetani, *Nineteenth century after*, 1908.

La sostituzione dei culti analoghi non fu facile, nè rapida; e di essi si hanno tracce profonde, ancora viventi, nelle leggende delle varie lecalità.

In parte dal *patrimonium Caesaris;* in parte dalla facoltà, concessa da Costantino, di legare beni alla Chiesa; in parte anche dalla impossibilità di trarre utile dalla conduzione delle campagne, venne sorgendo l'immenso patrimonio della Chiesa romana: ed allorchè questa, per i privilegî (*immunitates*) ottenuti da imperatori e re riuscì a stabilire le piccole diocesi ed a ripopolare alquanto i campi, verso il 7° secolo, si ottenne effettivamente una ripresa anche dell'agricoltura. Dall'abbandono poi dei beni pubblici o municipali, causato dalla deficienza di popolazione; dalle imposte eccessive; dalle incursioni barbariche e da altri fatti, dal secolo sesto al duodecimo ebbero origine i così detti *usi civici*, cioè i diritti di legnare, pascere, erbare e seminare a carico della proprietà altrui. Vescovi e signori, non sembra per usurpazione, ma per altri motivi e soprattutto per non abbandonare detti terreni di fronte all'avvilimento censuale della proprietà rustica, si assunsero l'impegno di farli coltivare e di difenderli contro gl'invasori, mentre gli abitanti si limitavano a goderne il frutto sufficiente per la loro esistenza, Da quì il diritto ad un corrispettivo perpetuo, analogo alle servitù del diritto romauo.

Proprietà rustiche di diversa natura ed importanza furono ordinatamente: la *massa*, aggregato topografico ed amministrativo di più fondi, centro agricolo di primo ordine; la *domusculta*, villaggio sparso, efficace misura adottata dai pontefici dell'8° e 9° secolo per rendere nuovamente abitata e coltivata la campagna romana [1]; la *colonia*, centro di lavoro e di abitazione rurale sôrto di preferenza sopra gli avanzi delle antiche ville; la *curtis*, gruppo di fondi rustici recenti, originati dalla riduzione delle democulte e di altri centri maggiori; la *sala*, abitazione campestre, destinata al governo di armenti; il *casale*, fondo o gruppo di fondi con più abitazioni, più limitato di una domoculta, dovuto ad iniziativa privata; la *plebs*, centro agricolo di dimora (parrocchia); il *fundus*, che rimase il vocabolo classico della piccola proprietà.

Tutto ciò dimostra un risveglio agricolo di Roma nel medio evo, sopra il quale vennero a premere le turbolenze religioso-politiche delle investiture (an. 1060-1122) e delle prepotenze feudali (an. 1150-1300). Ne seguì una nuova decadenza dell'agricoltura, ma non tanto rapida, osserva il Tomassetti [2], come generalmente si crede. La vite conservava il primo posto fra le coltivazioni, ed era limitata alle colline ed agli altipiani intorno ai centri abitati: il vigneto però venne ingombrato con ortaggi, e se ne trascurò l'alberatura per sostituirla con la canna. Si ebbe quindi distruzione di alberi; impianto di canneti nelle valli, con formazione di *pantani* e pantanicci.

Il Comune di Roma, circa il 1143, impegnandosi in lotte con il papato e con i baroni per rivendicare l'amministrazione del *districtus Urbis*, molto più vasto dell'attuale campagna, dimostrò d'interessarsi delle deplorevoli condizioni di questa, non solo seguendo una politica d'irrigazione (correzione ed introduzione dell'acqua

[1] W. Sombart, *Die römischc Campagna*, pag. 126; G. Pinto, *I centri abitabili dell'Agro romano*, Roma 1895.

[1] Tomassetti, loc. cit., vol. I, pag. 129.

Mariana), ma anche favorendo la costituzione dei sodalizî agricoli romani, gli *ortolani*, gli *olearii* e i *boattieri*, i quali ultimi acquistarono la massima importanza e vennero, col tempo, a rappresentare l'intera arte della campagna. Nelle lotte della democrazia comunale per l'ingerenza sull'andamento dell'agricoltura si ebbero tre momenti salienti corrispondenti ai senatori Benedetto Carushomo (1191), Brancaleone degli Andalò (1252) e Cola di Rienzo (1347), la cui azione si esplicò particolarmente nell'impedire le liti fra vassalli e signori, che fra il 1250 e il 1350 erano riusciti fino quasi a ripartirsi il territorio romano in vere, piccole sovranità, o ad esercitarvi un'autorità superiore col feudalesimo.

Non è possibile di prendere le difese della feudalità per i danni da essa arrecati alla economia ed alla agricoltura romana del medio evo. Una grave circostanza si ebbe in quell'*irraggiamento* — come lo chiama il Tomassetti (1) — della potenza baronale dalla città verso la campagna, e viceversa, in modo da potersi riconoscere in quello dei baroni un dominio più o meno continuato, in linea strategica, da Roma al loro quartier generale di campagna: il castello. Numerose zone e strade baronali venivano quindi a dividere l'Agro sino dal decimo secolo, nel quale appariscono le infeudazioni di vescovi e del papa nell'incipiente esercizio della sua dominazione territoriale. Il baronaggio divenne subito uno dei maggiori coefficienti di spopolamento della campagna: con la comparsa dei baroni si ottenne la fine delle piccole diocesi suburbicarie e l'inizio di una dominazione sempre più materiata di violenze e di danni alle proprietà rurali. Di fronte a questo stato di cose, era ben poca cosa la protezione accordata dai baroni agli agricoltori viventi nei loro castelli.

Intervenne allora opportunamente, insieme con la caduta dell'impero tedesco in Italia, grande sostenitore dell'aristocrazia, l'epoca dei *patti* e *statuti* dei comuni feudali. Provvedimenti a più diretto vantaggio dell'Agro furono: la cura delle strade; il regolamento dei corsi di acqua (*incastri*); non poche norme procedurali nelle liti e nelle vertenze. Per essi si ottenne che verso la fine del medio evo lo stato della campagna romana fosse più florido di quello che generalmente si crede (2), in specie per numero e qualità di abitazioni campestri.

Un atto della massima importanza chiuse la storia medioevale dell'agricoltura romana: e fu quello di Sisto IV, in data 10 marzo 1476, che, sopra la decadente autorità del Comune, afferma compiutamente la dominazione pontificia. In esso, deplorandosi la prevalenza del pascolo sulla coltura, per provvedere alla pubblica necessità « si permetteva a tutti e per sempre di arare e coltivare i campi dell'Agro « romano, della Tuscia, di Marittima e Campagna nella stagione opportuna e per la « terza parte; anche se le tenute fossero di luoghi pii e di Enti privilegiati » (3). Si ordinava quindi ai proprietarî di non impedire tale esercizio dell'agricoltura, comminandosi pene severe, e si costituiva una speciale magistratura di notabili per vigilare sulla esecuzione dell'atto. Il documento di Sisto IV fu notevole, non tanto per i suoi risultati (chè pochi e non duraturi ne ebbe), quanto perchè rappresenta la

(1) Tomassetti, loc. cit., vol. I, pag. 138.

(2) Tomassetti, loc. cit., vol. I, pag. 136.

(3) Theiner, *Cod.*, III, pag. 491. — C. De Cupis, *Le vicende dell'agricoltura e della pastorizia nell'Agro romano. L'annona di Roma.* (Sommario storico). Roma, 1911.

prima, solenne, diretta affermazione dei pubblici poteri, che, in una nuova forma, si dispongono a risuscitare l'agricoltura nell'evo moderno.

I numerosi atti pontificî in seguito emanati si riferiscono anzitutto a richiamare in vigore le disposizioni di Sisto IV. Nel 1519 si concessero numerose patenti a chiunque intendesse seminare la terza parte di qualsiasi tenuta. Giulio II, Clemente VII, Clemente VIII, nelle loro bolle, seguono la stessa politica. Ma lo spirito informatore di questa fu, in genere, quello circoscritto dell'annona e non della bonifica come è oggidì; troviamo, quindi, non poche disposizioni per favorire l'importazione, vietare l'incetta dei viveri, stabilirne il calmiere sul prezzo. L'energia di Sisto V si esplicò in particolare modo anche sopra l'esercizio dell'agricoltura; e fu deplorevole se, salvo un qualche atto di Clemente VIII, essa non trovò riscontro nell'opera di alcun altro dei suoi successori fino a Benedetto XIV.

Ogni provvedimento fu inutile. Nonostante i bandi e le leggi che si susseguivano quasi senza interruzione, la decadenza dell'agricoltura nella campagna romana era completa. Non è neppur necessario di ricordare i grandi disastri agricoli che furono l'invasione dell'esercito imperiale guidato dal Borbone nel 1527, la guerra tra spagnuoli e pontificî del 1557-1559, la peste bubonica del 1556-1557, l'infierire della malaria a partire dal secolo XVIII, per avere una spiegazione della inefficacia degli emanati provvedimenti. Nepotismo, corruzione, discordie intestine in occasione dei mutamenti di pontefici e di governo, erano veri flagelli della campagna. I proprietarî agivano a loro talento; sicchè, allorquando il governo pontificio incominciò a concedere il diritto di riserva per liberare i terreni dalle servitù civiche e sottoporli a coltura, eglino recinsero i fondi, li sottrassero alla servitù, ma non li coltivarono mai. La storia è ormai divenuta recente e l'assetto che subirono le tenute (catasto Piano del 1783), comprese le loro condizioni agrarie, è tale quale è dato ad ognuno, anche al giorno d'oggi, di osservare.

Per merito di Pio VII si ebbe l'importante *motu-proprio* del 15 settembre 1802, che stabilisce la zona di un miglio dall'estremo limite delle vigne suburbane, sulla quale impone la tassa di *migliorazione* di cinque paoli a rubbio, da togliersi ad avvenuto bonificamento. Si ordina anche il governo delle acque, il prosciugamento degli stagni e la costruzione di villaggi. Si cercò di promuovere la divisione dei fondi, autorizzandosi i possessori ecclesiastici a concedere in enfiteusi i loro beni, ecc. Anche tale documento rimase senza effetto, nonostante segnasse un grande passo verso l'adozione di alcuni criterî che sono stati presi a base dei contemporanei tentativi di bonifica dell'Agro.

Il risultato delle influenze storiche e naturali sopra le condizioni agricole della campagna romana è il seguente: Fuori della cinta della città, immediatamente, una zona estesa per circa 7000 Ea. nella quale si esercita una coltura relativamente intensiva con orti vigne, giardini, parchi e che forma il così detto *suburbio*; oltre, fino alle pendici della semicerchia montuosa degli Albani e dei Sabatini, degradante verso il mare, la zona maggiore e caratteristica nella quale si riscontra quella che il Sombart chiama *cultura da steppa* « per indicarne il carattere estensivo e la predominanza dell'allevamento del bestiame » [1]. Limitandoci alla zona non troppo

[1] W. Sombart, loc. cit., pag. 35.

lontana dalla città, si trova in una parte il pascolo perpetuo con pregevole bestiame equino bovino ed ovino; in un'altra parte, meno estesa, il prato si esercita a periodi di sei, sette, otto e più anni a seconda della qualità dei terreni, alternandovi coltivazioni cereali precedute da maggese; infine, vi sono luoghi dove, sempre insieme col pascolo, si ha un ciclo regolare di colture della durata di tre o quattro anni, cui si dà il nome di *terzeria* o *quarteria*, secondo i seguenti schemi:

	Terzeria	Quarteria
1° anno	frumento sul maggese	frumento sul maggese
2° "	frumento o avena sul colto	frumento o avena sul colto
3° "	pascolo	pascolo
4° "	—	pascolo

Con l'aratro rudimentale, già descritto da Virgilio, e, solo dalla metà del secolo XIX, con la *perticara* si compiono i sei lavori che costituiscono il maggese (rompitura in febbraio, riquotitura in aprile, rifenditura in giugno. riquartatura in agosto, rinfrescatura in settembre, solco della semina in ottobre a luna calante). Il frumento si semina appunto in ottobre; l'avena in novembre; il mais, nei terreni umidi e bassi, in marzo. A questo si fanno due lavorazioni; agli altri una in gennaio o febbraio che è detta *terranera* ed è caratteristica nella regione. A metà giugno incomincia la mietitura; e per essa, con le trebbiatrici, hanno fatto la prima comparsa nell'Agro le macchine agricole moderne.

L'ordinamento economico e sociale delle aziende agrarie romane non ha subìto variazioni da molti secoli a questa parte e, certamente, per lo meno dalla fine del medio evo. Esse si distinguono in *tenute* ed in *pediche*, che sono poco estese e quindi appendici delle prime, le quali sono veri latifondi, originatisi dalla concentrazione della proprietà nelle mani dei pochi e dimostranti tuttora la medesima tendenza. Le rendite dei terreni sono realizzate generalmente mediante l'affitto e l'affittuario stesso, a sua volta, affida la coltivazione ad un suo impiegato superiore, riservando a sè la parte commerciale ed il contenzioso della sua vasta azienda, che spesso abbraccia più tenute. Ciò ha creato il così detto *mercante di campagna*, nella cui persona si accentrano più fitti, come in quella del proprietario più proprietà. Solo di rado, oggidì, contrariamente a quanto verificavasi per l'addietro, si ha il subaffitto. Questo viene, più che per altro, esercitato parzialmente nella tenuta per il pascolo iemale ai pastori che scendono con il loro gregge dalle vicine montagne e con i quali si stabiliscono quei contratti « a male e bene », « a patto stucco », « a capo saldo » ecc. [1], rivelanti un'organizzazione minuziosa e pratica, che, se ha difetti, possiede anche pregî, perchè permette ai piccoli pastori (*moscetti*) di prendere parte alla grande pastorizia. Ciò nonostante, questa ultima categoria tende a scomparire. Oggi si ha il predominio della grande *masseria*, unità di pascolo nomade, della quale, alla dipendenza del *capo-vergaro*, fanno parte 30-35 pecorai con 2000-3000 pecore, 20-25 cavalli, muli, cani da guardia, ecc. Il personale trova ricovero nelle ben note

[1] Min. di agric. ind. e comm. *Inchiesta agraria*, vol. XI, pag. 598.

capanne e gode appena del minimo necessario per condurre una vita sacrificata e di miseria.

Tra la masseria e l'amministrazione generale del latifondo, sia diretta, sia per affittanza, esistono gli agenti o sorveglianti, il *fattore* ed il *ministro* che fanno capo al casale ed hanno cura anche di tutto quanto riguarda il resto dell'azienda. Il *massaro* sovrasta ai vaccari, il *capoccia* ai bifolchi; i *guardiani* sono incaricati della custodia e della polizia dei campi e dei casolari. A seconda della qualifica viene passato a questo personale alloggio, vitto e mensile ben scarso, di fronte al quale trattamento le condizioni fatte agli operai giornalieri, cui è necessario di far ricorso per i diversi lavori, appariscono anche più meschine. A causa dello spopolamento locale, i caporali riuniscono sui monti vicini un certo numero di braccia e scendono con esse in ottobre al piano, alloggiando i contadini in tugurî dove con gran frequenza cadono vittime di malattie ed in particolare delle febbri malariche.

Dopo l'atto di Pio VII, la storia dei provvedimenti a favore della campagna romana non ci presenta altro di notevole, nè per opera del governo francese, che si limitò a dettare norme per il governo dei boschi, nè nel breve periodo della seconda repubblica romana e che corrispose tuttavia ad un momento di generale risveglio, anche in fatto di riforme economiche, in Italia.

Certo una nuova èra si apre, per l'avvenire dell'Agro, con l'instaurazione del governo italiano, che fra le sue prime cure pose appunto quella della redenzione di esso dall'incuria e dell'abbandono.

E sebbene l'opera da esso esplicata, come apparirà anche dal presente studio, non sia scevra di gravi critiche e di non poche manchevolezze, tuttavia è giusto di riconoscere che il grande problema venne abbordato con una larghezza di vedute molto maggiore di quella dimostrata dai precedenti governi, e con una lena che non peteva esser certo degna di migliore causa.

Con regio decreto del 20 novembre 1870 venne nominata una Commissione, della quale fecero parte i più insigni idraulici italiani, con l'incarico di studiare e proporre i provvedimenti per il bonificamento. Le proposte però si fecero attendere finchè il senatore Salvagnoli prese l'iniziativa di un primo disegno di legge « nell'interesse igienico ed economico della Città e della campagna di Roma », presentandolo l'11 maggio 1876 al senato, che lo prese in considerazione. Circostanze di vario genere (ristrettezze finanziare, difficoltà intrinseche nella compilazione di buoni provvedimenti, divergenze sôrte in seno alle commissioni) ritardarono fino all'11 dicembre 1878 l'approvazione della prima legge nazionale per la bonifica dell'Agro.

Il progetto del Salvagnoli si limitava a stabilire il prosciugamento, per cura dello Stato, degli stagni e delle paludi, e per cura dei consorzî la sistemazione degli scoli, senza occuparsi punto del bonificamento agrario; ma i deputati Cadolini, Ruspoli, Di Carpegna ed altri, il 3 giugno seguente, presentarono un altro disegno di legge allo scopo d'intraprendere immediatamente gli studî ed i progetti di tutte le opere di risanamento e così dar luogo ad una legislazione organica e completa. Ma lo scioglimento, della Camera e le successive elezioni, nelle quali furono riconfermati solo tre dei dieci proponenti, impedirono che la legge venisse condotta in porto. Il

Salvagnoli, però, il 20 febbraio 1877 riprodusse il suo primitivo progetto, sul quale riferì il senatore Vitelleschi con la sua importantissima relazione del 17 aprile successivo, nella quale con vastità di studio fu tracciata la storia dell'Agro romano e, analizzandosi le presunte cause delle attuali sue condizioni agricole ed economiche, si avvisò ai rimedî. La chiusura della sessione non permise la immediata discussione del progetto, che richiese una nuova presentazione da parte del proponente, il 1° maggio 1878, ed una nuova relazione da parte del Vitelleschi. Il 28 maggio il disegno di legge fu presentato alla Camera elettiva, relatore Guido Baccelli, cui spetta il merito di aver dimostrato la necessità di compiersi, nella zona del raggio dei 10 km., anche il bonificamento agrario, proponendone la relativa aggiunta. E la Camera approvò, così emendato il progetto, che, tornato al Senato, dietro nuova relazione del Vitelleschi, divenne la legge dell'11 dicembre 1878.

Questa raggiunse lo scopo di agevolare il bonificamento idraulico, ma non quello agrario. Esso coinvolgeva la diretta cura dello Stato nella trasformazione agricola dei fondi: e ciò accresceva la difficoltà di un'impresa per la quale il Governo non poteva avere quella attitudine e quella capacità che spetta solo ai privati.

Attraverso le vicende della presentazione del nuovo progetto di legge (22 dicembre 1880) per la ripartizione delle spese contemplate nel primo; della discussione, avvenuta in base alla relazione Marchiori, in seno alla Giunta, per la creazione dei centri abitati al limite della zona dei 10 km.; in seguito ai voti del Comizio agrario di Roma e alle manifestazioni della pubblica opinione, pur contenute nella relazione municipale del 7 aprile 1883, stesa dal Ceselli, si arrivò alla legge dell'8 e 9 luglio 1883.

L'on. Berti aveva presentato alla Camera, fino dal 2 dicembre 1882, un nuovo disegno di legge con la mira di stabilire l'obbligo, ai proprietarî dei fondi compresi nella zona, di eseguirne il bonificamento agrario secondo una stabilita procedura. Il relatore on. Peruzzi ebbe il merito di far sostituire alla disposizione dell'art. 9 (con la quale si autorizzava il temporaneo possesso governativo del fondo per l'esecuzione dei lavori, ed il reintegro, nei venti anni successivi, della spesa occorsa da parte del proprietario) la espropriazione a tenore della legge 25 giugno 1865, n. 2259. Con questo emendamento la legge fu approvata ed ebbe la sua caratteristica appunto nell'obbligo, imposto ai proprietarî, di eseguire il bonificamento agrario sotto minaccia di espropriazione: imposizione grave, certo, che venne magistralmente difesa dal ministro per l'agricoltura, on. Pessina. D'altra parte, ai fondisti si concedevano molte facilitazioni: facoltà di contrarre mutui fondiarî con gl'Istituti di credito (art. 16); di esenzione per 10 anni dalla imposta sui nuovi fabbricati (art. 17) e per 20 anni sugli aumenti di reddito derivanti dal bonificamento.

Un altro disegno di legge fu presentato alla Camera dal ministro Baccarini il 12 marzo 1883, disegno inteso a provvedere alla ripartizione delle spese ed ai contributi degli Enti morali. Il 31 maggio riferiva su di esso l'on. Peruzzi; e la Camera l'approvò, ottenendosene, dopo il voto del Senato, la promulgazione in data 9 luglio 1883. Ulteriori atti in dipendenza di queste leggi furono: il r. decreto del 3 gennaio 1884 per l'approvazione del regolamento sul bonificamento agrario; il r. decreto 26 agosto 1885 per l'approvazione del regolamento di polizia rurale e d'igiene sull'Agro ro-

mano; il r. decreto 15 luglio 1886 relativo all'organico dell'Ufficio d'ispezione e di sorveglianza; il r. decreto 7 maggio 1891 per l'approvazione del regolamento per le anticipazioni della Cassa depositi e prestiti al ministero di agricoltura; i regî decreti concernenti il piano tecnico per l'ordinamento dei consorzî ed alcuni concorsi a premio; le leggi 8 luglio 1888, 8 agosto 1895, 18 giugno 1899 per i diversi stanziamenti delle spese necessarie.

Le tre leggi principali costituiscono, si può dire, un corpo unico, in base al quale, cominciando dal 1881, si regolarono i lavori per un periodo di circa venti anni. Di fronte a tutti i precedenti atti dei passati governi, esse presentano la caratteristica di fondarsi sopra un'operazione di credito che porgeva certo all'industria agraria un aiuto notevole. I risultati che se ne ottennero furono particolarmente istruttivi poichè, giunti al 1900, una Commissione nominata dalla Società degli agricoltori italiani, presidente e relatore l'ing. G Cadolini, constatava, con rincrescimento, che « i risultati ottenuti apparivano molto inferiori alle concepite speranze; sicchè è comune « e vivo il lamento che non siasi raggiunto il fine, dappoichè..... la fisionomia della « campagna romana è pur sempre la stessa, e la trasformazione agraria non ha fatto « che i primi passi » (¹).

Lo stesso Governo, in base all'obbligo fattogli dalle leggi di bonifica, aveva presentato alla Camera una serie di relazioni sull'andamento dei più importanti lavori eseguiti od in corso di esecuzione. Più che quella della Commissione idraulico-economica sul progredito bonificamento idraulico, interessa, ai fini del presente studio, ricordare quelle relative al bonificamento agrario. Una prima relazione fu quella del 18 gennaio 1886, del ministro Grimaldi; la seconda, quella del 23 maggio 1888 dello stesso ministro; la terza, quella del 30 aprile 1890 del ministro Miceli. A questo punto sappiamo che un solo proprietario aveva completamente ottemperato alle leggi nella sua tenuta. Sulla scorta della quarta relazione del 29 maggio 1894 (del ministro Boselli), si apprende che nella zona dei 10 km. si hanno 2000 Ea. a produzione spontanea; che in soli 1800 si sono finora eseguite vere trasformazioni agrarie; che in 4363 si sono fatte opere meno importanti; negli altri, ancora nulla. Il Monaldi, ispettore della bonifica, ammise che questi fossero buoni risultati (²).

La quinta relazione venne presentata alla Camera il 2 dicembre 1900 dal ministro Carcano, e servì come caposaldo alla Commissione d'inchiesta degli agricoltori italiani, che d'altro canto si valse non poco delle notizie che il ministero mise a sua disposizione, e del diretto esame locale dei lavori, per redigere l'elaborato e veramente importante documento. Insieme con le numerose proposte che ivi si contengono quale epilogo delle avvenute discussioni, si rileva il fatto che il bonificamento agrario, contrariamente a quanto si verificò per quello idraulico, non progredì, perchè la legge del 1883, oltre a non essere applicata con la necessaria energia, « *non fu preceduta* « *dagli studî tecnici che si richiedevano per dettare disposizioni corrispondenti*

(¹) G. Cadolini, *Il bonificamento dell'Agro romano* (Relazione della commissione d'inchiesta, incaricata dalla Società degli agricoltori italiani di riferire sui risultati ottenuti nell'Agro romano con l'applicazione delle leggi che ne regolano il bonificamento, in relazione coi provvedimenti dovuti all'iniziativa privata). Roma, 1901.

(²) L. Monaldi, *Rass. sett. univ.* 1896, n. 4.

« *alle speciali condizioni del luogo*, e non si tenne conto di quelle modificazioni « suggerite dall'esperienza e che potevano efficacemente vincere le riluttanze dei pro- « prietarî, senza ricorrrere all'inviso provvedimento della espropriazione ». Le conclusioni della Commissione, che era una diretta emanazione degli agricoltori italiani; i giudizî degli studiosi sull'argomento nella Camera e fuori; l'opinione molto chiaramente espressa dall'on. Niccolini nella sua relazione al bilancio 1898-99, che invitava il Governo « a rivolgere l'attenzione alla legge del 1883, la quale non risponde punto allo scopo che si propone », preludevano ai nuovi provvedimenti che, infine, si deliberò di adottare.

Il 26 novembre 1902 venne perciò presentato alla Camera dei deputati, dal ministro Baccelli, un disegno di legge per modificazioni ed aggiunte alla legge del 1883, e sopra il quale riferì una Commissione presieduta dall'on. Chimirri. Disegno e relazione s'informarono in buona parte alle due proposte di leggi sul bonificamento dell'Agro romano pubblicate dal Cadolini nel Bollettino della Società degli agricoltori italiani dello stesso anno. La legge che ne seguì, del 13 dicembre 1903 (che, unitamente alla precedente, venne coordinata nel Testo unico approvato con r. decreto del 10 novembre 1905) stabiliva le seguenti disposizioni principali: si estese la zona soggetta a bonifica a tutta la parte del bacino dell'Aniene compresa nell'Agro romano (art. 2, T. un.); si autorizzavano mutui, ad un tasso di favore ed a lunga scadenza, per i lavori occorrenti (art. 29, T. un.); si costituì una Commissione di vigilanza per l'esecuzione della legge stessa (art. 33, T. un.). In dipendenza delle nuove disposizioni legislative, si ebbero: il regolamento della bonifica agraria, del 20 novembre 1905; quello per i servizi di polizia e d'igiene e per le scuole rurali, del 3 settembre 1906; infine, quello per il bonificamento idraulico, dell'8 ottobre dello stesso anno.

La relazione successiva a questi provvedimenti, fatta dal ministro Cocco-Ortu alla Camera il 3 aprile 1909, constata il progresso delle opere di bonifica, valutandosi ad oltre 43 mila ettari la estensione dei terreni nei quali essa era ultimata od in via di compimento. Incoraggiati, anzi, dai risultati ottenuti, con la ulteriore e recente legge del 17 luglio 1910, si estendevano ancora i beneficî delle precedenti dispesizioni a tutti quei terreni dell'Agro, i cui proprietarî si fossero assoggettati agli obblighi con esse imposti o nei quali il Governo con sua facoltà avesse riconosciuto la possibilità di eseguire una utile trasformazione agraria (art. 1). Si completano, inoltre, le misure di bonifica con provvedere alla costituzione dei centri di colonizzazione o borgate rurali (art. 2), alla costituzione di un Istituto zootecnico laziale (art. 6) e ad una Cassa di colonizzazione (art. 2) per elargire premî e sussidî ai coltivatori, alle loro associazioni, ai privati ed a tutti coloro che si facessero iniziatori di opere, la cui natura rientra nello spirito informatore delle leggi suddette.

Secondo le ultime comunicazioni del Ministero di agricoltura, i risultati, ottenuti da tutto il complesso dei provvedimenti escogitati, si riassumono nelle seguenti cifre [1]:

[1] Ministero di agric. ind. e comm., *Sullo stato dei lavori nell'Agro romano al 30 giugno 1911*: Relazione del direttore generale dell'agricoltura e del pressidente della Commissione di vigilanza a S. E. il ministro. Boll. uff. X (c), fasc. 12.

Tenute completamente o quasi bonificate, n. 31 = Ea. 2391; con lavori molto progrediti n. 31 = Ea. 5194; con lavori bene avviati, n. 44 = Ea. 11,255; con lavori da poco iniziati, n. 57 = Ea. 17181; rimanenti non bonificate nella intera zona soggetta alle ultime leggi, n. 194 = Ea. 7152. Le opere fin qui eseguite riguardano più specialmente la costruzione di nuove abitazioni e di nuove stalle, il bonificamento idraulico e la provvista di acqua potabile. Non si potrebbe, però, assicurare in quante tenute si sia già adottata una razionale rotazione agraria.

III.

Basi critiche e piano sperimentale delle presenti ricerche di biologia sull'Agro.

W. Sombart, che si è dimostrato fra i più competenti nello studio delle condizioni economiche della campagna romana ([1]), prende le mosse dal presupposto che « tutte le manifestazioni morbose dell'organismo sociale ed amministrativo di essa « non debbono ricercarsi nella conformazione naturale del terreno e nel clima »; poichè, mentre ciò vorrebbe significare « condanna ad un'eterna ed immutabile ste- « rilità e desertitudine », egli crede poter asserire esser di fatto che « una riforma « sociale ed agricola della campagna romana è affatto indipendente dalle condizioni « climatologiche e geologiche che esistono oggi in quel territorio ».

Secondo il Sombart, non la malaria, il maggiore pretesto senza posa invocato per giustificare lo spopolamento e l'abbandono dell'Agro; non la esiguità e la poca profondità dello strato arabile, che è fatto locale e sporadico; non il supposto malgoverno papale, che pur in altre regioni ha permesso il fiorire dell'agricoltura, furono le cause dell'attuale stato della campagna romana. Egli tenta uno schizzo storico dello sviluppo dell'agricoltura in questa regione, con il quale viene a concludere: che la campagna di Roma, « a diverse riprese, in epoche determinate, indipen- « dentemente dal suo clima, che è rimasto sempre il medesimo, fu coltivata inten- « sivamente, ed intensivamente popolata ».

A dir il vero, questa non è una conclusione che caratterizza il lavoro di questo scrittore, bensì una idea, che si è fatta strada più o meno facilmente attraverso tutti gli studî eseguiti sopra il nostro Agro e che è riuscita a far proseliti in ogni classe di persone: dai dilettanti in materia di Agro romano, ai reggitori delle sue sorti. E costituisce, a mio modo di vedere, un pregiudizio ben grave per l'avvenire economico della regione, perchè dall'idea stessa vorrebbe trarsi la inoppugnabile dimostrazione che le terre dell'Agro potranno essere, senza meno, restituite a quello che fu il loro passato stato di floridità.

Ora, la mia tesi — per quanto strana possa apparire ed in perfetta antitesi con quanto fino a qui si è creduto, con buone ragioni, di sostenere — vuol asserire precisa-

([1]) W. Sombart, *Die römische Kampagna*. Leipzig, 1888.

mente l'opposto; poichè non reputo ammissibile il grande progresso agricolo dei tempi passati di Roma, e molto meno sostenibile la possibilità del ritorno ad esso sulla scorta di argomenti storici, quali sono quelli che si sono voluti far valere a sostegno dell'impresa del bonificamento dell'Agro. Contrariamente alla tesi del Sombart, credo di poter asserire che il clima e le naturali condizioni dei terreni da sottoporsi a coltura sono i fattori primi delle condizioni agricole di una qualsiasi regione, poichè l'agricoltura si presenta anzitutto come un quesito di biologia, del quale la soluzione deve trovarsi anzitutto nella capacità che le piante hanno, nell'ambiente naturale, alla produzione. Soltanto in appresso può trovar luogo la discussione sopra i mezzi artificiali con i quali assicurare che tale capacità si esplichi con maggiore o con minore tornaconto.

Rammento che le mie argomentazioni si riferiscono esclusivamente alla zona circostante alla città, zona alla quale ho fin da principio dichiarato di limitare il mio studio.

Anzitutto, a sostegno della mia tesi, merita una breve discussione l'asserita circostanza che le condizioni dell'antica campagna di Roma, dove i più sono d'accordo nell'ammettere una fiorente coltivazione delle terre, siano identiche a quelle di oggidì.

Se si vuol prestar fede alle neppur troppo scarse memorie lasciate dagli storici romani, dovremo ammettere che il clima fu, per lo passato, molto differente da quello attuale. Le frequenti ed abbondanti cadute di neve, che costituiscono oggi un fenomeno molto raro e di pochissimo valore, sono ricordate concordemente dagli antichi scrittori, e starebbero a indicare un ben altro regime termico ed udometrico dell'ambiente colturale romano. La ricchezza dei boschi nei dintorni dell'antica Roma, messa anch'essa fuori dubbio dalle concordanti testimonianze storiche, deve essere considerata non solo come una conseguenza di quel diverso regime, ma anche come una causa di profondi mutamenti nelle condizioni climateriche locali. Le terre romane dovevano risentire fortemente le influenze di un clima molto più fresco ed umido, e prestarsi, molto meglio che non attualmente, allo sviluppo di una flora spontanea ed all'esercizio di una redditizia coltura.

Ma non voglio neppur annettere grande importanza a quanto son venuto qui rilevando: voglio anche ammettere che le condizioni climateriche dell'antica Roma, pur dissimili da quelle odierne, abbiano limitatamente influito sulle sorti dell'agricoltura romana. È necessario, però, di esaminare più dappresso il reale stato di questa vagliandolo al lume di una critica un poco più rigorosa di quella che si è voluta fin qui adottare.

Dalle grandi linee della evoluzione agricola dell'Agro, che mi son provato a tracciare nel precedente capitolo, rileviamo come, nell'êra antica, due periodi si ebbero di maggiore prosperità nell'agricoltura: il primo all'epoca della repubblica. quando la campagna era coltivata dai piccoli possidenti, veri e proprî contadini che sul loro campo conducevano una vita morigerata e laboriosa; il secondo nel primo periodo dell'Impero, quando tale sistema patriarcale di coltivazione venne a subire una profonda trasformazione con il latifondo, il lavoro schiavo e la importazione (1).

(1) T. Mommsen, *Storia di Roma antica*. Roma-Torino, 1905.

I due momenti presentano un carattere proprio, ben distinto; ma in nessuno dei due potremo noi ravvisare un'agricoltura, non oso dire intensiva, ma neppure tale da permettere con razionali cure il miglior profitto dalla terra, come, sempre in rapporto ai bisogni sociali, deve potersi esigere.

L'agricoltura della prima Repubblica fu un'agricoltura primitiva; più che altro una orticoltura circoscritta negli angusti limiti di quegli aggregati di *gentes*, modesti centri, cui la famiglia del contadino provvedeva con il proprio lavoro e con i rifiuti della economia domestica, ritraendone i mezzi per la propria sussistenza. Un tale sistema di coltura non si può certo chiamare florido, in quanto che esso non offre l'esempio di quella divisione del lavoro che deve riscontrarsi in una organizzazione sociale. La ripartizione delle attribuzioni che è necessaria in questa ed è non dubbio indice di progresso, deve verificarsi anche nella coltivazione dei campi, e s'incominciò, difatti, ad ottenere anche nella vecchia Repubblica romana con la complicazione del suo organismo; ma essa portò con sè il decadimento di quella che si è voluta ritenere una fiorente agricoltura, mentre, pur trattandosi di opera data con assiduità ed amore ai campi circostanti Roma, specialmente in quella zona che costituisce l'attuale suburbio, non può essere ritenuta un'agricoltura razionale, una *grande* agricoltura, da fornire argomentazioni a profitto del moderno bonificamento dell'Agro. Nè deve essere dimenticato che, anche in quel periodo, la pastorizia era molto diffusa attorno a Roma. Gli scrittori contemporanei, o di poco posteriori, dai quali si sono tratte notizie sopra lo stesso periodo agricolo della campagna romana, furono in gran parte poeti, e ci hanno perciò tramandato notizie trasformate dalla ispirazione che li separava dalla realtà delle cose. Gli altri, che si occuparono più particolarmente delle faccende rustiche, furono molto più recenti ed in grado di lasciarci notizie molto vaghe intorno al periodo patriarcale dell'agricoltura romana, mentre i loro scritti si riferiscono in specie ai tempi imperiali.

L'epoca di transizione fra i due periodi è molto istruttiva; poichè, con il passaggio dalla piccola alla grande coltura, dimostrò le difficoltà che si fecero presenti, i provvedimenti che si escogitarono, gli insuccessi che in definitiva si ottennero. Il cosiddetto fiorire della coltivazione dei campi nel primo periodo dell'Impero non rappresentò alcunchè di meglio di quello che fu la coltivazione sotto la Repubblica: non si ottenne alcun effettivo, reale progresso; solo la dimostrazione della influenza, sopra l'agricoltura, dei naturali fattori costituiti dal clima e dal terreno.

Con il complicarsi dell'organismo sociale durante la repubblica romana cominciò ad apparire e ad affermarsi sempre più il *latifundium*. Molto è stato scritto sopra di esso e sopra la influenza, dai più ammessa, che il medesimo ha esercitato sulle sorti dell'antica agricoltura romana. Il notissimo passo di Plinio ([1]), *latifundia perdidere Italiam*, ha avuto differenti interpretazioni; esso costituì una formula che venne in prevalenza ciecamente adottata per spiegare tutte le evoluzioni dell'azienda agraria in Italia. Esso servì anche per illustrare le sorti dell'agricoltura romana; ma taluni scrittori, e fra essi il Sombart ([2]), si dichiararono dubbiosi in proposito.

([1]) Plinio, *N. H.*, XVIII, 6, 7.
([2]) W. Sombart, loc. cit., pag. 24.

Il Tomassetti, che è il più recente storico, il quale si sia a tale riguardo pronunciato ([1]), osserva che la frase non vuol significare un immenso podere come oggidì e che è applicabile ad altre località incolte anzichè alla campagna romana, dove prove storiche monumentali ed epigrafiche stanno in grande numero a deporre in favore della esistenza della piccola proprietà.

Ritengo, invece, che la sentenza pliniana sia particolarmente applicabile alla campagna romana in quel periodo aureo della dominazione di Roma, nel quale « Roma » voleva significare non più una città, ma buona parte di Italia; ed in questa si andava abbandonando la cõltura, traendosi i mezzi di sussistenza dai tributi delle immense provincie soggiogate. Il concetto espresso dalla famosa frase, a mio giudizio, non deve però, ad ogni modo, essere ritenuto giusto, qualora il latifondo voglia considerarsi come *causa* del decadimento dell'agricoltura durante la repubblica romana.

Nessuno, invece, mi sembra abbia fin quì a sufficienza rilevato come esso fosse un *effetto*, una *conseguenza* della decaduta agricoltura, che ne avrà peggiorato, insieme con altre circostanze, le sorti; non però che le abbia determinate, e neppure, in un primo stadio, governate.

E gli scrittori moderni non convengono quindi con Virgilio che, allora vivente, cantava le lodi del *buon tempo antico*; e sostengono piuttosto, a distanza di tanti secoli, che « l'azienda agraria della campagna romana funzionava tecnicamente nel modo più perfetto! ».

Il funzionamento di un'azienda è tecnicamente perfetto, razionale, quando esiste un tornaconto, anzi il massimo tornaconto del conduttore, provvedendosi in pari tempo, nel miglior modo, alle esigenze della vita della collettività.

Di povertà in Roma, invece, e di fame, ve n'era abbastanza a quei tempi! Augusto, seguendo l'esempio del suo prozio, ridusse a più di un terzo la misura delle largizioni frumentarie che si facevano per provvedere, insieme coi divertimenti, il vitto ai cittadini poveri. Allora erano in Roma circa 200,000 liberi cittadini che per vivere facevano assegnamento sulla gratuita distribuzione degli alimenti. E per il mantenimento di una così grande moltitudine di disoccupati, sopra una popolazione che si aggirava intorno al milione, senza riscontro in nessuna delle successive epoche nelle quali si ammette il deserto e l'abbandono del suolo vicino Roma, si provvedeva con la importazione che annualmente ammontava a 35.156 sacchi di grano ([2]). Quasi tutto il frumento si faceva venire dalla Sicilia, dall'Egitto e dall'Africa, trasportato dai bastimenti al porto di Ostia, e di là caricato sopra le barche del Tevere. Localmente non si esercitava altra coltura che quella degli orti, dove si aveva acqua e si erano praticati drenaggi; su larga scala era esercitato il pascolo, in gran parte brado; soprattutto le cure degli agricoltori erano rivolte alle ville, le quali effettivamente si estendevano in molte parti e per le quali si compivano anche opere pubbliche di risanamento, ma che non hanno nulla a che vedere con l'agricoltura, perchè con esse non si fa questione di tornaconto e le medesime non giovano in alcun modo alla comunità.

([1]) G. Tomassetti, loc cit., vol. I, pag. 63.
([2]) Cassel e C., *Storia universale illustrata*, Milano.

Ai tempi di Traiano e di Adriano si avevano magnifiche strade irradiantisi dal centro urbano, fiancheggiate da edificî e da sepolcri monumentali, da ville e parchi principeschi, e, verso l'interno, da orti, frutteti preziosi, e vasti giardini di rose e viole. Non altro, però; chè oltre seguivano i prati e le collinette seminudate anche dagli antichi boschi, in condizioni che debbono ritenersi molto simili a quelle odierne. Plinio seniore, sul grado di perfezione cui era giunta la coltura nei dintorni della Roma imperiale, si esprimeva con le parole « *nec quicquam amplius cogitari potest !* ». Ma queste ed altre simili espressioni degli antichi scrittori non possono contraddire la mia tesi, in quanto che l'esercizio agricolo di quei tempi, in massima parte, non doveva fornire un utile; che, anzi, assorbiva somme ingenti e mano d'opera schiava, senza risparmio: e, se un utile dava, trattavasi di un utile fittizio. È lecito, infatti, di arguire quale disastro subirono i piccoli proprietarî di orti e giardini allorchè venne a cessare lo splendore imperiale. Le condizioni agricole dei terreni di Roma dimostravano un solo fatto: la possibilità di ottenere da essi un prodotto; ma ciò nulla vuol dire, poichè la possibilità di coltivare si ha ovunque, anche nelle regioni più ingrate: è solo questione di spesa. Questa però, oltre un certo limite, non salva il principio del tornaconto; e noi non possiamo discutere, sopra una differente base, delle opere di bonifica agraria moderna dell'Agro in relazione a quelle antiche, anche del periodo ritenuto il più florido, poichè queste avevano un altro carattere e, soprattutto, un altro scopo. E, ad ogni modo, per stabilire la possibilità della coltivazione dell'Agro in tali condizioni, non è neppur necessario di risalire a tempi così remoti, perchè ville ed orti se ne hanno ancora tanti nell'attuale suburbio che non potrebbero desiderarsene di più da coloro che ai moderni provvedimenti di bonifica credono poter giovare con la tesi dell'esempio antico.

Ma un altro argomento può assumersi a favore della opinione che le condizioni della campagna della vecchia Roma non fossero molto dissimili dalle presenti: ed è quello della malaria.

Gli studî e le illazioni dello Sforza e del Gigliarelli (1); le osservazioni del Sombart (2), del Nissen (3) e del Sismondi (4) tendono a dimostrare che non esistano rapporti fra coltivazione e malaria. Il Sombart ritiene assolutamente erroneo che la presenza della malaria impedisca la coltivazione intensiva e il popolamento di una data contrada; che con la coltivazione si debelli la malaria e che la sparizione di questa sia sufficiente a restituire una località alla coltura. Non credo che si possano contraddire in modo assoluto queste deduzioni; ma che rapporti fra bonifica agraria e malaria debbano esistere, nel senso che questa sia un ostacolo più o meno grande per quella e la bonifica un mezzo di maggiore o minore valore per eliminare l'altra, non parmi che possa negarsi. Ed è perciò che a sostegno della mia tesi deve tornare utile di indagare in quali condizioni trovavasi, in rapporto alla malaria, la campagna di Roma nei suoi migliori tempi.

(1) Sforza e Gigliarelli, *La malaria in Italia*, Roma 1885.
(2) W. Sombart, loc. cit.
(3) Nissen, *Italische Landeskunde*, Berlin 1883.
(4) Sismondi, *Études*, II, 58 e 59.

Il Tommasi-Crudeli, nei suoi pregevoli studî sopra le acque del suolo romano [1], osserva giustamente che lo stato di esso rimase certo alterato per l'abbandono in cui per tanti secoli fu lasciato: ma che le condizioni fondamentali della presenza della malaria vi esistettero sempre. La città fu fondata sul colle Palatino, come osserva Cicerone, *locum in pestilente regione salubrem*. Dopo la rioccupazione di Capua (a. 413 di Roma), i legionarî romani, allettati dalle bellezze del suo suolo, tumultuando, domandavano se sarebbero dovuti tornare a lavorare il suolo sterile e pestilente di Roma: *in pestilente atque arido circa urbem solo luctari* [2]. In Giovenale si trova il passo:

.....iam letifero cedente pruinis
autumno, iam quartanam sperantibs aegris,
stridebat deformis hiems.....

(Satira IV, vv. 56 e segg.)

e che viene interpretato con l'affermazione di Celso che la quartana non uccidesse e che perciò i malati desiderassero che in essa si mutasse la terzana. Sotto lo stesso tempo di Augusto si lamenta la mortalità per febbri in ottobre, mese che, come dice Orazio, *adducit febres et testamenta resignat*. Forse di perniciosa morì Tito nell'81 di Cr.; e dieci anni più tardi si loda Nerva per avere provveduto contro la malaria: *quibus apud veteres urbis infamis aër fuit* (Frontino). Dunque il clima fu malsano anche quando la prosperità di Roma e le delizie signorili della sua campagna destarono lo stupore del mondo; e, per riflesso, il Tommasi-Crudeli, domandandosi se almeno il suolo fosse ubertoso, si esprime negando anche questo e riferendosi alle non poche prove contrarie raccolte dal Di Tucci [3].

Il Tomassetti lascia scorgere dai suoi scritti l'opinione che la malaria attorno a Roma non fosse nel passato un fenomeno di speciale gravità, quale indiscutibilmente si presenta oggi [4]. I documenti del medio evo attesterebbero la esistenza di vigne, case e chiese, come la redazione di atti pubblici e privati da parte di notai risiedenti in permanenza ad Ostia, a Castelporziano, a Ninfa, a Galeria, località dove la malaria si sarebbe recentemente imposta. A Ponte Galera, nel secolo IX, Gregorio IV aveva costruito un soggiorno estivo. Con questi ed altri argomenti il Tomassetti vuol dimostrare che l'abbandono della coltura suburbana non fu improvviso ed uguale ovunque, ma che, nel medio evo specialmente, la campagna fu generalmente abitata e salubre. Altrettanto però non può dire dell'età moderna, quando avviene l'abbandono di centri abitati come Monterano, Castel Savello e Ninfa. Egli ammette la comparsa della malaria fra il 1600 ed il 1750 circa, epoca a cui corrisponderebbe il più rapido spopolamento dell'Agro cominciato nel 1400.

[1] C. Tommasi-Crudeli, *Della distribuzione delle acque nel sottosuolo dell'Agro romano e della sua influenza nella produzione della malaria*. Memorie R. Accad. Lincei, serie 3ª, vol. III, 6 aprile 1879.

[2] T. Livio, *Historiae*, libro VII, cap. XXXVIII.

[3] P. Di Tucci, *Dell'antico e presente stato della campagna di Roma*, Roma 1878, cap. VIII.

[4] Tomassetti, loc. cit., vol. I, pag. 136.

A me, invece, sembra sostenibile una teoria nella quale, temperandosi la circostanza della naturale attitudine del suolo romano a permettere lo sviluppo della infezione malarica con quella della esistenza di periodi nei quali essa infierì in minor grado, si affermasse un'alterna vicenda nelle manifestazioni del flagello come sappiamo oggidì verificarsi per altre malattie di natura epidemica, senza dimenticare la possibilità dell'adattamento dell'organismo umano alla resistenza ad esse. In ogni modo mi sembra lecito di affermare che anche nei passati tempi, vantati migliori per l'agricoltura romana, per quanto si riferisce alla influenza sopra di essa esercitata dalla malaria, le cose non potevano esser andate molto diversamente da oggi.

Avvicinandosi alla epoca presente, gli scrittori sopra l'Agro ed i critici si trovano maggiormente d'accordo nel riconoscere nella campagna romana uno stato di incuria e l'applicazione di sistemi di economia agricola molto simili agli attuali Una maggiore vicinanza dei tempi permette un più sereno esame dei fatti, un più esatto apprezzamento della realtà.

Quello che si volle ritenere benessere nell'Agro romano durante i tempi imperiali, non rappresentò altro, in ultima analisi, che una vera bancarotta di quella stessa agricoltura che vorrebbe tanto vantarsi. E lo prova anzitutto la crisi che colpì la grandezza di Roma rapidamente, disastrosamente!

Se nella campagna fossero state esercitate le aziende con criterî razionali; se esse avessero di fatto risposto ai bisogni normali della popolazione, allorchè venne a cessare quell'opulenza che era derivata dai tributi e dai bottini delle passate conquiste, non sarebbero in così breve tempo mancati i mezzi di sussistenza alla città, nè sarebbe avvenuto quello spopolamento di essa, che all'arrivo di Alarico contava 300.000 abitanti, e sotto di lui scese a 200.000, come stima il Gregorovius (1).

L'individuo che nei tempi di Cincinnato e delle guerre sannitiche dedicava la propria opera al campicello che aveva installato nelle località che più si prestavano dell'Agro, dove non mancano e dove non sono mai mancate, venne distratto dalle sue occupazioni rustiche ed attratto alla città che andava maravigliosamente sviluppandosi, affermandosi nel mondo con la sua potenza ed offrendosi teatro delle complesse manifestazioni dell'urbanesimo. I campi vennero in parte abbandonati, in parte rilevati da altri che si erano andati formando una fortuna in città; e vennero fusi in unità di sempre maggior valore, fino a costituire il latifondo. Sopra questo, più non era, possibile di avere una coltivazione come quella esercitata nella piccola proprietà fino allora: il sistema di conduzione dei fondi doveva necessariamente mutare, ed acquistò, nel primo periodo dell' Impero, nuove caratteristiche.

Dal complesso di queste si volle giudicare che l'agricoltura nuovamente fiorisse. Ma se l'antica agricoltura repubblicana fu una pastorizia ed un'orticoltura individuale limitata a piccoli centri in condizioni eccezionalmente favorevoli e tale da non essere in alcun modo compatibile — come è stato detto — con una evoluta organizzazione sociale; l'agricoltura del principio dell' Impero, con il latifondo, nonostante le grandi pubbliche opere di iniziativa statale — canalizzazioni, acquedotti, strade — non si

(1) Gregorovius, *Geschichte der Stadt Rom*. Stuttgard, 1886-1887.

presenta sotto aspetti tali da meritare quelle lodi che tante volte le si vollero prodigare e che dovrebbero lasciar intendere come lo stato attuale della campagna sia una deplorevole conseguenza di errori e di incuria, anzichè delle naturali condizioni locali.

Anzitutto, dagli stessi scrittori romani troviamo ricordate zone di terreni veramente ingrati ed improduttivi: sono citati come tali, ad es., quei dei campi Vaticani e della tribù Papinia (odierna Torrenuova). Ci è stato anche tramandato con molta fedeltà il quadro di che cosa fosse una tenuta di quei tempi [1]. Catone parla di un podere di 240 iugeri (60 Ea.) messo a grano ed ulivi che comprendeva 13 uomini, 6 buoi, 4 asini, 180 pecore. Esso non può certamente esser preso a modello per una tenuta dei nostri tempi! Le opere di bonifica eseguite dai pubblici poteri, nonostante la maraviglia che possano in noi suscitare, debbono ritenersi invero limitate, e tali non solo da non risolvere il problema della bonifica, ma anche ben lungi dal presentare un interesse quale dovrebbero oggidì avere. Columella riferisce, in proposito, di essersi usati rimedî tradizionali, che, se non valevano a sopprimere le cause dei danni, riuscivano almeno a mitigarli: *quibus mitigetur pestifera lues.*

I sostenitori delle straordinariamente prospere condizioni agricole della campagna di quei tempi portano a sostegno della loro tesi il grande consumo delle uova con le quali si preparavano gli antipasti del mattino, delle carni di volatili, dei legumi, che dicono tuttavia prodotti nella valle del Tevere e ad Ostia; ci parlano di gorgheggi di uccelli, di grida di galli, di piccioni, di pavoni, di cigni, di cicogne e di uccelli esotici di ogni specie; non nascondono la esistenza di pascoli migliorati con *lucerna*, e non tacciono della grande produzione di formaggio di vacca e di pecora; aggiungono, infine, che sarebbe stato grossolano errore [2] quello di destinare il terreno alla coltura del grano quando un solo albero fruttifero dava una rendita di ben duecento lire annue!

Ma perchè la coltivazione dei dintorni di Roma serviva ai bisogni anormali e si valeva quindi di mezzi fittizî, tagliate le vie di approvviggionamento della città, subentrò la rovina. I coltivatori di fiori e gli allevatori di volatili più non trovavano compratori poichè il costo della loro produzione nelle condizioni naturali dell'Agro non poteva essere pagato dalla maggioranza la quale doveva provvedere alle improrogabili necessità della vita. Le ville romane andarono alla malora sotto le scorrerie dei barbari del nord e dei vandali di casa: non restarono che i latifondi con i loro pascoli naturali, dai quali era scomparsa qualsiasi traccia dei tentativi di migliorazione.

Il nuovo elemento che procurò di vivificare ancora una volta l'agricoltura romana fu la Chiesa, la quale, in parte costituendosi il suo immenso patrimonio, in parte assumendosi il còmpito di tutelare la proprietà abbandonata al beneplacito dei cittadini (usi civici), riuscì effettivamente, verso il settimo e l'ottavo secolo, a ripopolare in misura apprezzabile la campagna. I templi della nuova religione sorsero quà e là sulle rovine delle ville romane, e s'istituirono le numerose, piccole diocesi suburbi-

(1) Di Tucci, *Dell'antico e presente stato della campagna di Roma.* Roma 1878, pag. 115.
(2) W. Sombart, loc. cit., pag. 156.

carie, dalle quali partiva anche l'eccitamento e l'indirizzo dell'azienda agragria, che per la difficoltà delle comunicazioni doveva provvedere senza meno all'alimentazione cittadina. Ma il carattere di questo risveglio agricolo è in gran parte paragonabile a quello dei primi tempi della Repubblica: era la piccola possidenza che veniva richiamata in essere dall'individuo e dalla sua famiglia per ricavarne i mezzi alla propria sussistenza. Si dovrebbero quindi ripetere per esso le considerazioni già fatte a proposito dell'agricoltura dei tempi di Cincinnato, con la differenza che i risultati ottenuti furono inferiori a quelli antichi e che le conseguenze sulla economia della città appaiono di gran lunga minori.

Si suole discutere la portata delle incursioni barbariche nel disastro dell'agricoltura romana. Il Gregorovius ammette che i barbari devastassero a preferenza la campagna, anzichè la città. Altri invece opinano — e fra questi mi schiero anch'io — che l'attività saccheggiatrice dei Goti e dei Vandali si portasse piuttosto sopra i tesori accumulati nei palazzi e nelle ville, sopra le provviste dei granai e delle cantine, nonchè sopra le donne romane. Degli ulivi, anzi delle viti e della vegetazione, che si vorrebbero addirittura annientati dai barbari con un lavoro maniaco, enorme e vano, è ovvio di ammettere che esistesse attorno a Roma ben poco, e, ad ogni modo, di questo poco di vigne e di uliveti troviamo ancora memoria alla fine del sesto secolo in un antico atto di donazione di Gregorio I.

L'opera di demolizione della eredità artistica (e, in piccola parte, agricola) dell'Impero è responsabilità che spetta agli stessi romani. Trovo molto naturale che di un patrimonio, accumulatosi durante un periodo di auge politico da antenati che seppero ricavarlo in regioni ben diversamente ricche per produzione che non fosse l'Agro romano, si facesse scempio da coloro cui venne trasmesso e che per la decadenza economica si trovavano in bisogno. La città di Roma, anche sotto la grandezza imperiale, come sotto i papi — e come è al presente —, non fu mai un centro manifatturiero e di produzione, mentre i romani sentirono la necessità della conquista e divennero maestri nelle imprese di depredazione che eressero a sistema. L'impotenza dell'Agro ad alimentare la vita della città, e che si manifesta in tutte queste circostanze, deve trarre la sua origine da cause ben profonde, quali sono quelle delle sue naturali condizioni.

Così della agricoltura repubblicana, come di quella imperiale e di quella risorta sotto gli auspicî della Chiesa di Roma, trionfò il prato naturale, il latifondo, conseguenza e non causa del decadimento agricolo locale. Il feudalesimo frattanto sotto le vesti di protettore dei contadini, dei piccoli proprietarî, dei conventi, delle chiese, nonchè dello stesso Papato, interveniva peggiorando un tale stato di cose. Le feroci e lunghe lotte ingaggiatesi fra i varii protettori, e fra protettore e protetti, terminarono con la imposizione di canoni, con l'assorbimento dei piccoli e grandi fondi e con la costituzione di unità rurali sempre maggiori, sotto il vassallaggio di poche case, che per la loro egemonia avevano trasformato in sgherri armati i contadini. Dai vasti terreni dell'Agro scomparì, e questa volta per sempre, ogni traccia di coltura.

Sopra questo punto vi è l'accordo di tutti gli scrittori sulla campagna romana; solo gli apprezzamenti possono essere ispirati ad un senso di maggiore o minore pessimismo: ed il Tomassetti, ad es., si rivela fra i meno pessimisti, affermando che, per

opera della magistratura popolare governante il Comune, alla fine del medio evo, l'Agro si trovasse in condizioni più floride di quello che comunemente si vuol ritenere. Egli però mi sembra che non giustifichi troppo la propria asserzione, affermando, poco dopo, trattarsi di pastorizia ([1]). Comunque, resta sempre un fatto singolare: quello dei risultati che il feudalesimo, in opposizione a quanto si era verificato altrove, produsse nella campagna romana. In tutte le località d'Italia si verificarono nel medioevo analoghi sconvolgimenti di origine feudale: ma conseguenze così gravi e singolari non si ebbero se non intorno a Roma. Fu in Toscana, in Liguria ed in Lombardia che si determinò allora la coltura intensiva parcellare delle piccole possidenze; in Romagna, quella estensiva dei latifondi. La dimostrazione chiara di tale differenza manca negli storici e negli economisti che si sono occupati dell'argomento. Il Sombart ([2]), nel suo studio, crede poter affermare la esistenza di un diverso sviluppo sociale ed economico che segna anche oggidì una netta linea di demarcazione fra il settentrione ed il mezzogiorno d'Italia; ma non sembra, a lui, che tale fatto, il quale anche a me apparisce logico, non abbia la sua origine nella diversità di quelle condizioni climatiche e telluriche alle quali egli non vuol annettere importanza, e che contraddica alle sue premesse?

Nell'undecimo secolo i baroni, divenuti più potenti, erano già riusciti ad affermarsi signori dei nobili minori ed a costituirsi padroni assoluti dei loro possedimenti, determinando così le nuove condizioni agricole di Roma. L'imperatore, il papa, la nobiltà, il popolo, nelle contese per il potere, non erano in grado di reprimere il feudalesimo campagnuolo. Ad esso, che assurse a sempre maggior potenza, spetta molta della responsabilità di quelle condizioni più particolarmente create alla campagna, contro le quali il costituitosi potere temporale dei pontefici si provò più volte ad agire. Ma invano « chè era già troppo tardi », aggiunge il Sombart sostenendo con quei dati, che io del resto ho riassunto nel precedente capitolo, come non si debba al malgoverno dei pontefici la decadenza della campagna romana. Ed anche di questo si deve essere ben persuasi, non solo perchè le condizioni della campagna medesima, al principio della potenza dei papi, erano quelle di oggi, ma anche perchè condizioni uguali — secondo il mio assunto — sono sempre esistite, nonostante la presenza delle ville e degli orti imperiali e dei campicelli solcati dal tradizionale aratro virgiliano nei tempi patriarcali.

La politica agricola dei pontefici non può meritare biasimo. L'atto di Sisto IV, del 10 marzo 1476, e quello di Pio VII, del 15 settembre 1802, sono documenti tali che — anche a voler prescindere da tutti quegli altri, pur importanti e numerosissimi, emanati da Giulio II, Clemente VII, Sisto V, Clemente VIII, Paolo V, Pio VI, ecc. — assicurano al governo della Santa Sede, sotto questo riguardo, un giudizio equanime di provvidenza illuminata e di non piccola benemerenza.

Ben altro, al di sopra delle influenze sociali del feudalesimo, delle invasioni barbariche, della opulenza imperiale, delle guerre repubblicane, è d'uopo riconoscere che abbia frustrato tutti i provvedimenti delle autorità di Roma, dai re ai consoli,

([1]) Tomassetti, loc. cit., pp. 136-137.
([2]) Sombart, loc. cit., pag. 165.

agl'imperatori, ai prefetti, al Comune, ai baroni, al papa. Di tutti gli ostacoli trionfò il prato romano!

Risaliamo su, attraverso i secoli, dopo avere dato un solo sguardo all'attuale stato delle colline e delle valli che circondano la città. Nei *motuproprii* e nelle bolle dei pontefici, diretti al miglioramento delle colture dell'Agro, una constatazione viene ripetutamente fatta: quella, cioè, della preponderante estensione dei prati e dell'eccessivo sviluppo della pastorizia. Nel famoso atto di Sisto IV questa circostanza trova una solenne affermazione. E come le autorità, così gli scrittori ed i numerosi visitatori di Roma osservano costantemente la stessa cosa. Egidio, ad es. (1), trova che la città era circondata da greggi ed armenti: sicchè egli preferiva Venezia, *civitas quae hisce rebus caret.* I raccolti, invero, attorno a Roma erano assolutamente scarsi. È noto che nel 1300 i romani, vittoriosi del comune di Toscanella, imposero ad esso un tributo annuo di sole duemila rubbie di grano, ovvero di 1000 lire se il raccolto fosse stato sufficiente. Si consultino gli statuti e le memorie dell'importante sodalizio dei boattieri, allora dominante l'agricoltura, per convincersi della assoluta preponderanza della pastorizia nell'azienda rurale romana, i cui lavoratori si trovano classificati nelle seguenti categorie: *casarolae*, *bubulci*, *vaccarii*, *bufolarii*, *carrarii*, *iumentarii*, *garzarii pecudum*, *caprarii*, *porcarii*, *asinarii*, *mulatterii*, *buttarii*, *pastores*, *mundatores*, *seminatores*, *stirpatores*, *messores*, *adunatores*, *tragliatores*, *furcinatores*, *veturales frumentorum aut bladorum seu straminum.* E va anche ricordato che se la campagna, resa squallida dalle lotte medioevali, fu restituita ad un poco di vita ciò si deve ai pastori che discesero dagli Appennini con i loro armenti ed ai quali Bonifacio IX, nel 1402, con speciali disposizioni, dovette regolare il rilascio dei salvacondotti.

E risalendo ancora oltre e consultando gli scritti di coloro che si dimostrarono maggiormente entusiasti del fiorire agricolo dei tempi romani, troviamo continue prove della esistenza e del grande sviluppo dei prati. Anche a quei tempi, afferma lo stesso Sombart, « vastissime estensioni della campagna erano adibite al pascolo ed alla coltura dei prati ». In Plinio troviamo lunghe descrizioni dei vasti pascoli esistenti attorno Roma, dai quali la città ritraeva latte, burro, formaggi di qualità ottima ed abbondanti. È difficile di poter pienamente convenire con coloro i quali vorrebbero questi pascoli « aver raggiunto un grado d'intensività, di razionalità, come in nessun'altra epoca, presso nessun popolo civile ci è dato riscontrare » (come si esprime il Sombart), poichè i documenti mancano per affermazioni così spinte; ma una certa cura dei prati dovette anche aversi quale conseguenza della intuizione dei pratici circa la naturale attitudine dei terreni romani.

Avvicinandoci ancora alle origini di Roma, l'ammissibilità della importanza del pascolo incontra minori difficoltà poichè ci facciamo più dappresso alla primitiva agricoltura che fu pastorizia. E se una ragione noi vogliamo formarci della preferenza che gli antichi popoli ebbero per la campagna romana, preferenza che li indusse ad invaderla ed a fissarvi la loro dimora, io penso che debba farsi luogo alla ipotesi della bontà dei suoi pascoli ed all'attitudine dei suoi terreni per essi. Attraverso le generazioni

(1) Egidio, *Hist.*, XX, pag. 282.

i contadini romani si sono tramandati non solo la fama dei loro fieni, ma anche le località dove questi posseggono maggior valore. La tradizione della bontà dei nostri *mangimi* è così viva e così radicata nei produttori e nei consumatori romani, che anch'essa non può non aver peso nella presente discussione.

E le mie argomentazioni non voglio che restino limitate allo sviluppo storico delle aziende romane, ma voglio che vengano estese anche ai sistemi di conduzione proprî di ciascuna di essa; poichè là, dove noi non abbiamo esclusivamente il prato, troviamo che questo si alterna, fin dai più antichi tempi, con le colture a granella secondo un sistema, dai tedeschi chiamato *Feldgraswirtschaft* (¹), che ha caratteri speciali per cui s'adatta a terreni in speciali condizioni quali sono le nostre. Ho già ricordato i sistemi di *terzeria* e di *quarteria* in vigore nella campagna romana.

Questo ostinato riaffermarsi del prato nelle nostre aziende, e che sempre è stato interpretato come indice di decadimento dell'agricoltura locale, deve dimostrarci che, nella evoluzione di questa, al di sopra delle influenze umane — alle quali, del resto, io stesso non tolgo la loro parte di valore — debbono porsi le influenze del clima e del suolo. E ciò io voglio affermare recisamente, non perchè debba essere ritenuto nuovo un fatto che è infine tanto ovvio ed elementare, ma perchè tale influenza dell'ambiente nell'agricoltura della campagna romana, diretta e notevole, si è voluta da tutti negare. Ammettendo una tale dipendenza delle vicende agricole di Roma dai naturali fattori che caratterizzano le sue campagne, non può tuttavia accettarsi la conseguenza che i critici si riterrebbero autorizzati a trarre da essa: l'impossibilità, cioè, di mutare lo stato dell'agricoltura romana e di realizzare una vera bonifica. Le conclusioni di questo mio studio mi auguro che, invece, dimostreranno come, nonostante la influenza del clima e del suolo, non sempre favorevole, si potrà giungere a provvedimenti, con i quali anzi si trarrà, dalle speciali condizioni locali, non piccolo vantaggio.

Nelle argomentazioni a favore delle opere di bonifica dell'Agro si è partiti da un falso presupposto: che, cioè, nella campagna romana fosse esistita nell'antico una razionale egricoltura e che a questa, per volontà di uomini e forza di umane leggi, senza tener conto degli speciali fattori naturali della produzione, fosse possibile oggi ritornare. Ma io mi ero assunto di dimostrare ciò erroneo; e spero di esservi riuscito. Dalla mancata dovuta considerazione della influenza dell'ambiente sopra l'agricoltura del nostro Agro è scaturito l'altro fondamentale sbaglio di introdurre in esso sistemi colturali prosperanti in altre regioni agrariamente fiorenti, appunto per causa delle loro ben diverse condizioni naturali. Il concetto che mi sembra abbia dominato negli scrittori sopra la campagna romana — e che (ciò che più monta, per le disastrose conseguenze) ha ispirato i provvedimenti escogitati dai varii governi succedutisi in Roma, non escluso lo attuale italiano, per le opere di bonificamento — è che agricoltura settentrionale e meridionale, agricoltura della vecchia Roma e della nuova Roma, potessero essere confuse in una cosa sola.

Eppure non è mancato chi ha tentato di reagire contro assurdità simili. L'inchiesta del 26 aprile 1901, provocata dalla Società degli agricoltori italiani, è, a tale

(¹) Settegast, *Die Landwirtschaft und ihr Betrieb*, 3° Aufl., 5, pag. 256.

riguardo, veramente preziosa, poichè contiene una mèsse copiosa di osservazioni e di giudizî, ai quali anche un uomo di scienza, in linea di massima, deve fare omaggio, in quanto che muovono in gran parte da persone che hanno la *pratica* delle aziende rurali e possono fornire allo studioso la base di nuove indagini (1). Attraverso alle risposte formulate, ad es., dal Ghezzi, dal duca Grazioli, dal Pediconi, dal Galloni, dal Senni, ecc., apparisce la importanza che si attribuisce di fatto dai pratici a quelle condizioni naturali, delle quali non si tenne conto nei provvedimenti presi. E mi piace qui ricordare anche uno studio pubblicato da un agricoltore intelligente ed attivo, quale il Casorri (2), studio nel quale è sostenuto, con molto convincimento, specialmente per quanto si riferisce all'Agro, che « l'agricoltura è eminentemento locale ».

E nessuno io credo v'abbia che, dopo un equo esame, possa ammettere che nel clima romano sia il caso di coltivare come in quello milanese o continentale; che, ripristinando nei dintorni di Roma quella coltura, che almeno in parte vi fu nei tempi passati, si sia in grado di sopperire alle esigenze della vita moderna. Anzi, nella diversità fra le esigenze attuali e quelle di un tempo consiste una delle maggiori differenze che debbono ricercarsi fra la troppo vantata agricoltura delle più fiorenti epoche romane e quella che dovrebbe aversi oggidì: differenza che costituisce un altro argomento valido contro la tesi, da me combattuta, della esistenza di un'agricoltura razionale nella vecchia Roma, e della possibilità e convenienza di un semplice ritorno ad essa.

In un autorevole ed abbastanza recente scritto di A. Mortara (3) si trovano esposte idee che sono la moderna espressione del cammino fatto dalle teorie economiche nei tempi più recenti, e della speciale importanza che per l'Italia racchiudono i progressi con esse realizzati. Già qualche anno avanti, lo stesso autore si era occupato del problema agrario italiano (4), nel quale, per noi, non può non imperniarsi in modo affatto speciale la questione sociale, palesandosi, in maniera molto evidente, come una più umana retribuzione del lavoro, diretta al godimento di una giusta parte di beni terrestri, importi soprattutto l'aumento della produzione, raggiungibile solo allorquando l'interesse generale si sarà imposto al particolare, e la proprietà fondiaria si troverà convinta o costretta ad essere entro giusti limiti a questo asservita come al primo dei suoi doveri. Il Mortara illustra l'intervento dello Stato in rapporto ai piccoli ed ai grandi proprietarî, in rapporto ai lavoratori, e infine, in rapporto al capitale delle altre industrie. Le sue elevate idee e le sue ottime proposte — che meritavano di essere citate nel presente studio, dove è presa in esame la grande questione nazionale della bonifica dell'Agro romano, come quelle di una delle maggiori autorità nostre in materia economica — dimostrano chiaramente quale concetto *profondo* e *complesso* di moralità debba guidare oggi l'agricoltura moderna, cui spetterà il cómpito di assicurare la

(1) G. Cadolini, *Il bonificamento dell'Agro romano.* Allegato n. 9, pag. 261.

(2) V. Casorri, *L'Agro romano e le sue trasformazioni.* Roma, 1905.

(3) A. Mortara, *L'evoluzione economica del concetto politico di patria.* Nuova antologia, 1° febbraio 1908.

(4) Idem, *Sul problema agrario in Italia.* Giornale degli economisti, vol II, fasc. 5; vol. III, fasc. 2-3. Bologna, 1887-88.

pacificazione sociale. Ora, nessuna compatibilità noi troviamo fra questo concetto dal quale trae nuova forma l'istituto della proprietà fondiaria, e quello dell'antico giure quiritario. Nessun rapporto deve avere la moderna agricoltura con quella della Roma antica: confronti e paragoni non reggono a tale proposito in alcun modo.

Non argomenti storici, adunque, non argomenti tecnici, non etici possono essere tratti dai passati tempi per essere devoluti a vantaggio dei moderni provvedimenti di bonifica dell'Agro romano. Una sola circostanza deve affermarsi: quella, cioè, che la campagna, almeno nella sua parte prossima a Roma, ha sempre posseduto un carattere tutto speciale, derivato dalle sue caratteristiche naturali, origine di condizioni agricole molto simili, in ogni tempo, sopra le quali l'opera dell'uomo si è esplicata con risultati più o meno sfavorevoli, ma sempre limitati.

Lo studio preparatorio dei provvedimenti di bonifica deve, quindi, riprendersi *ex novo* ed impostarsi sopra le sue vere basi, che sono quelle di una razionale agricoltura: clima, terreno, pianta, bisogni sociali. Ed esso riuscirà effettivamente nuovo, poichè per l'Agro romano si può dire che sia stato fin qui quasi completamente trascurato. Delle condizioni fisiche, chimiche e biologiche dei terreni agrarî della campagna romana, come dei principali elementi del suo clima in rapporto ai bisogni della vegetazione, è noto così poco da far maravigliare come, senza una siffatta preparazione, si sia potuto tirare innanzi per quaranta anni, ingiungendo ed operando con quella autorità e con quei mezzi che provengono dalle leggi e che coinvolgono responsabilità ben gravi. Vero è che i risultati, non ancora troppo lusinghieri, delle opere di bonifica, fanno giustizia dei metodi seguìti; ma le conseguenze dei danni per il ritardo e per gl'insuccessi già ottenuti, e non esclusi anche pel futuro, non possono davvero riuscire di conforto a quanti al migliore avvento economico dell'Agro hanno sacrificato tempo, studio, lavoro, entusiasmo danaro, o considerino il problema attraverso nuove vedute e lo sentano tuttora vivamente nell'animo.

Ho posto in fronte a questa mia Memoria alcune considerazioni di ordine economico-agricolo, poichè mi piacque trattare il nuovo studio dell'Agro romano, seguendo quelle idee che lo Strakosch ha abilmente ordinato e che, mentre corrispondono, in fondo, ad una buona interpretazione del modo di procedere che l'agricoltore usa nella pratica della sua azienda, mi è sembrato che si prestassero in particolar modo al coordinamento delle varie e numerose mie ricerche di biologia dirette a stabilire la possibilità della vita delle piante nell'Agro ed i limiti della possibilità medesima in relazione all'utile dei produttore ed anche di quello del consumatore. Nel mio studio trova quindi posto la determinazione di tutti quegli elementi, in base ai quali è possibile il calcolo dell'effetto assimilatorio della flora spontanea dell'Agro romano, e che si raggruppano intorno alle due misure del valore di consumo e del valore di produzione. Seguendo i criterî oggi adottati per queste e già esposti nel primo capitolo, nella misura del valore di consumo saranno trascurati gli elementi chimici sottratti dalla vegetazione al capitale-terreno che non siano azoto, acido fosforico e potassa, i quali per quantità e valore commerciale sono preponderanti nel raccolto; nella misura del valore di produzione si comprenderà quella dell'albumina digeribile prodotta e del valore-amido.

Con questi dati potrà stabilirsi l'effetto assimilatorio delle colture a granella e dei fieni della campagna romana; ma ciò non costituisce che un'ultima parte del mio studio, l'ultimo capitolo della presente sua dettagliata esposizione, poichè la parte principale delle ricerche è indirizzata a determinare tutte quelle condizioni locali che hanno rapporto con il calcolo dello stesso effetto assimilatorio in quanto possono modificarlo più o meno profondamente e far variare il tornaconto colturale.

Il rendimento di una coltura in base al concetto dell'effetto assimilatorio trae la sua ragion d'essere nel maggiore o minore sfruttamento di quegli elementi della coltivazione che non posseggono un valore commerciale, che non sono venali, che rappresentano un capitale a libera disposizione dell'agricoltore, sopra i quali, in una bene ordinata azienda, deve potersi fare il massimo assegnamento. Sono essi i fattori del clima: luce solare, temperatura, precipitazioni, ai quali conviene aggiungere l'azoto e l'acido carbonico che entrano nella composizione dell'atmosfera, la cui mobilità ne permette una equa distribuzione che provvidenzialmente sfugge alle meschine convenzionalità umane. Un capitolo, quindi, che farà immediatamente sèguito nella presente trattazione, è quello nel quale ho procurato di riassumere i risultati degli studî eseguiti sopra gli elementi non venali della coltivazione nel nostro Agro.

L'utilizzazione dei mezzi gratuiti di produzione è naturalmente legata a varie circostanze e, principalissima fra esse, alla natura del terreno, il quale, morfologicamente come fisicamente, chimicamente come biologicamente, rappresenta nell'azienda agricola un *capitale* nel vero senso della parola, del quale, come di qualunque altro, è troppo chiaro che in un'azienda debba farsi il più fruttifero impiego. Un suolo ricco e adatto alla coltura permetterà un migliore sfruttamento dei coefficienti non venali di questa; quindi, trova subito posto uno studio il più completo possibile del capitale-terreno nella campagna romana. In appresso si farà luogo allo studio del capitale medesimo in relazione a tutti quei fattori dai quali dipendono la libertà del suo movimento, i limiti della sua disponibilità.

Le idee che io, basandomi sopra non poche ricerche di altri e mie, vado da parecchio tempo sostenendo circa l'attitudine che i terreni coltivabili presentano alla produttività, si riassumono nell'affermazione che il moderatore di essa sia l'elemento azoto, il quale, per la legge del minimo, determina e governa la circolazione di tutti gli altri elementi della fertilità [1]. È per tale motivo che ho voluto considerare nel terreno l'azoto come un capitale a sè, e studiare la mobilità di cui gode nelle speciali condizioni della campagna di Roma. E nello esame di questa mobilità ed anche di quella circolazione, come non trascurai i fattori fisici e chimici, così volli attribuire il giusto valore anche a quelli microrganici, così da poter essere in grado di esporre in un ulteriore capitolo i risultati di altre numerose ricerche riferentisi alla microflora dell'Agro, la quale, in rapporto alla preposta distinzione di fattori venali e non venali della produzione, si direbbe che rappresenti un elemento di contatto, determinante la reciproca messa in valore dei fattori medesimi.

Lo studio dei fieni, così botanico come chimico, allo scopo non solo di stabilire la composizione ed il valore intrinseco dei mangimi romani, ma soprattutto per raggiun-

[1] R. Perotti, *Il problema dell'azoto*. Boll. soc. agric. italiani, 1909.

gere gli estremi coi quali calcolare l'effetto assimilatorio della produzione locale, unitamente allo studio delle piante a granella coltivate presso di noi, completa la serie delle mie ricerche e trova la relativa esposizione in un penultimo capitolo.

Il riassunto dei risultati dell'intero lavoro; le deduzioni che essi hanno permesso di fare circa il valore dei metodi di coltura tradizionali della campagna romana, e le argomentazioni che possono trarsene circa la possibilità e l'opportunità di modificarli o di abbandonarli, costituiscono le conclusioni generali del presente scritto, alle quali, nell'interesse delle invocate opere di bonifica, fanno sèguito alcune concrete proposte.

Lo sviluppo delle mie ricerche di biologia sopra l'Agro romano è, adunque, segnato da queste grandi linee:

1) Gli elementi non venali della produzione.
2) Il capitale-terreno.
3) Il movimento del capitale-azoto.
4) La microflora.
5) I fieni e le colture a granella.
6) Il calcolo dell'effetto assimilatorio.
7) Conclusioni e proposte.

IV.

Gli elementi non venali della produzione.

Comprendo nella espressione di « elementi non venali della produzione » quei fattori di essa che sfuggono alla contrattazione commerciale, che non hanno *prezzo* e non possono, quindi, figurare nel conto dell'azienda rurale. Tali elementi sono dati principalmente dalla *temperatura*, dalle *precipitazioni*, dalla *luce solare*, e dalla *composizione dell'atmosfera*. La mia espressione è, adunque, più vasta di quella di clima in quanto che con essa si prendono in considerazione non solo i cosiddetti elementi meteorologici che sono un prodotto dei caratteri fisici dell'atmosfera, ma anche quelli dipendenti dalla sua costituzione chimica; la espressione medesima mi sembra, in pari tempo, anche più opportuna, poichè, mettendosi in rilievo il carattere saliente di cui godono alcuni fattori tra i principalissimi di un'industria che ha solo ragion d'essere in un utile economico (quel carattere, cioè, di essere alla portata di essa senza aver prezzo), se ne imposta lo studio sopra basi alquanto differenti da quelle fino al presente adottate, ed in armonia ai concetti di ordine economico-agricolo che ho a questo lavoro premessi.

Difatti, mentre fin qui si è sempre affermato che il clima deve essere subìto dall'agricoltore, e se ne trascurò una equa indagine, si omise anche di considerare la presenza, nell'atmosfera, dell'acido carbonico e dell'azoto, che non sono fattori climatologici, ma che posseggono per l'organismo vegetale un significato *positivo* e non

negativo come per l'organismo animale, e che, in uno studio fatto con intendimenti agricoli non si è in grado di lasciar figurare se non quasi esclusivamente sotto l'aspetto economico. Le relazioni intercedenti fra la pianta e l'atmosfera sono risultate, dal progresso degli studî, sempre più strette, sì che si è giunti alla dimostrazione che altri elementi (e, fra essi, anche quello ritenuto il più inerte, quale l'azoto), passando in forme attive più o meno direttamente nella pianta rientrano nel conto colturale di questa. senza però figurarvi in grazia della loro non venalità. Lo sfruttamento, quindi, di mezzi resi da tale circostanza invero preziosi per la coltivazione dei campi, s'impone tanto maggiormente, in quanto ne è stata riconosciuta e sperimentata la possibilità: e questa è strettamente collegata alla razionale utilizzazione dei veri fattori del clima il quale, al giorno d'oggi, più non è ammissibile che, almeno entro determinati limiti e neppur trascurabili, debba essere subìto. I rapporti che si determinano fra le proprietà fisiche e gli elementi chimici dell'atmosfera con i microrganismi del suolo e le piante superiori, e che contribuiscono alla realizzazione dell'utile colturale, mi è sembrato, perciò, che non potessero venire meglio indicati e riuniti che a mezzo di un'espressione, la quale indicasse nella origine e nel fine la prima qualità dei fattori colturali in discorso.

Il valore che gli elementi meteorologici ed i costituenti chimici dell'aria atmosferica posseggono, considerati dal nostro punto di vista, è tale che di fronte ad esso deve considerarsi nulla qualsiasi influenza essi possano esercitare sopra il valutamento del capitale-terreno. Non v'ha dubbio che il prezzo di questo varii con le latitudini, con le longitudini e con le altitudini; ma siffatte variazioni sono limitate per molte circostanze, e soprattutto per quella della facoltà di adattamento degli organismi all'ambiente, in conseguenza di che ogni clima possiede le proprie piante capaci di prosperare indipendentemente dai rapporti fra clima e terreno che possono cadere nella cerchia delle contrattazioni commerciali. Il terreno, quindi, rappresenta un capitale agricolo che deve essere considereto a sè e possedere un conto proprio. Il clima, d'altra parte, e con esso gli elementi chimici dell'atmosfera, non può avere un altro conto, non costituendo un capitale nel vero senso della parola, a causa della sua non venalità; ma nei rapporti con la pianta rappresenta tuttavia un *quid* che governa rigorosamente la produzione dei campi ed è origine di maggiori o minori utili economici. Da questo punto di vista se ne impone, adunque, un accurato studio.

Il clima della campagna che circonda la città di Roma venne preso in osservazione da qualche medico, e solo con intendimenti igienici. Si indagarono, più che altro, le condizioni di esistenza che esso offre alla dimora umana nella città, e si trattarono le gravi questioni che si riferiscono alla endemia malarica nell'Agro. Il Tommasi-Crudeli ci ha lasciato un trattato sopra il clima di Roma [1], che per pregio non ha riscontro in altre pubblicazioni successive, fatta eccezione per quanto riguarda la malaria, sopra la quale le recenti scoperte hanno gettato tutta una nuova luce. Ma le premesse che questo autore pone alle sue « conferenze » sopra ciò che deve intendersi per clima, mentre costituiscono un altro argomento a favore della oppor-

[1] Tommasi-Crudeli, *Il clima di Roma*: conferenze. Roma, Loescher, 1886.

tunità delle osservazioni da me innanzi fatte, lasciano scorgere i diversi intendimenti con i quali si sono fin qui esaminati i fattori meteorologici. Egli, difatti, sostiene — e, almeno dal proprio punto di vista, non sembra a torto — che per clima non debba solo intendersi il solo stato fisico ordinario dell'atmosfera, ma che nel concetto di esso rientrano le influenze di tutta la natura con la quale ha rapporto: terra, acqua, aria, umanità. Perciò lo studio che egli e gli igienisti hanno tentato di farne, mentre annette importanza a circostanze che dal punto di vista agrario hanno un subordinato interesse, trascura quei fenomeni, ai quali è strettamente legato lo sviluppo delle piante e connessa la industria della loro coltivazione. Così, per quanto si riferisce agli elementi meteorologici, a lui basta poter affermare che il clima di Roma è marittimo e temperato; che la temperatura media annuale è calcolabile a $+16^{\circ}.5$; la media della pioggia che vi cade nell'anno è di circa 800 mm.; che la pressione media della sua atmosfera è stata calcolata a 762 mm., e la media della umidità relativa della medesima a $66^{\circ}.6$. Ma ciò è giusto quando trattasi di considerare lo stato fisico dell'atmosfera in relazione agli organismi animali ed in specie all'uomo, sopra il cui sviluppo non influiscono in via diretta la temperatura, la pioggia che cade, la luce solare. Ma per la pianta, che si sviluppa tanto meglio, e per l'agricoltura, che può prosperare tanto più quanto maggiore è la quantità di questi fattori di cui usufruisce, si rende necessario uno studio più minuzioso e che per il nostro Agro è fin qui completamente mancato.

Sappiamo forse come son distribuiti il calore atmosferico, l'acqua meteorica e la luce solare nella campagna romana? Possediamo, invero, i dati raccolti per un lungo periodo di anni dal R. Ufficio centrale di meteorologia e geodinamica al Collegio romano, ma nessuno ha ancora tentato di riassumerli e di coordinarli in relazione alle esigenze agricole della interessante località. Eppure la condizione prima della esistenza della pianta risiede nella natura di siffatti elementi meteorologici.

Per stabilire, quindi, se il regime agricolo attuale della campagna romana è buono, o se e come debba mutarsi, e ciò sia possibile, uno dei primi assunti era quello di analizzare minutamente lo stato dei tre principali elementi meteorologici eseguendo quegli opportuni confronti, soltanto con i quali si sarebbe potuta ottenere una prima serie di non trascurabili conclusioni. E questo io mi son provato di fare.

Limitandomi allo studio delle temperature, delle precipitazioni e della luminosità dell'Agro, consultai la Rivista meteorico-agraria, pubblicata dal R. Ufficio centrale di meteorologia e geodinamica ([1]), traendo i relativi dati da quelli registrati per ciascuna decade nell'ultimo venticinquennio (1886-1910), oltre che per Roma (Osservatorio del Collegio romano), anche per Milano e per Siracusa; scegliendo, cioè, gli osservatorii di queste due città come termine di confronto di località, che, in relazione agli elementi meteorologici suddetti, si trovano in condizioni molto diverse — dirò, anzi, opposte — e che presentano un'agricoltura essenzialmente differente ([2]).

([1]) Ministero di agric. ind. e comm., *Rivista meteorico-agraria*, anni 1886-1910.

([2]) La posizione geografica dei tre Osservatori è la seguente:

Milano: $\varphi = 45^{\circ}28'$; $h =$ m. 14.71; $\lambda = 3^{\circ}18'$ W
Roma: $\varphi = 41^{\circ}54'$; $h =$ m. 50.6; $\lambda = 0^{\circ}0'$
Siracusa: $\varphi = 37^{\circ}3'$; $h =$ m. 23:3; $\lambda = 4^{\circ}46'$ E

Il periodo di tempo nel quale si raccolsero i dati meteorologici è garanzia sufficiente perchè si attribuisca alla media di essi non piccolo valore e ci si possa formare un' idea abbastanza esatta del significato dei medesimi nell'agricoltura locale.

Per incominciare dalla temperatura e per dare una prova del modo con il quale venne preso in considerazione questo importante fattore della coltivazione dei campi, ricorderò come il Sombart, nel suo precitato studio ([1]), credette sufficiente di riferire soltanto i seguenti dati termometrici che rappresentano la media del venticinquennio 1855-1879:

primavera	14°.02 C.
estate	23 .59
(luglio)	24 .60
autunno	16 .25
inverno	7 .40
nell'anno.	15°.32 C.

Ma siffatte medie non forniscono alcun indice del modo con il quale viene distribuita la temperatura nel corso dell'anno, in relazione alle esigenze delle diverse piante, dei diversi sistemi di coltura e degli altri coefficienti della produzione.

L'Eredia, assistente al R. Ufficio centrale di meteorologia e geodinamica, con un recentissimo lavoro ([2]), ha studiato la temperatura in Italia dal 1866 al 1906 in venti città per le quali si avevano 41 anni di osservazioni, ed in altre in cui questo periodo era inferiore, non mai però ad un quindicennio. Punto di partenza fu la decade ottenuta dalle medie giornaliere determinate in base alla combinazione $\frac{9^h + 21^h + m + M}{4}$; e, dove mancavano tutte le determinazioni, fece uso del coefficiente del Kaemtz. Egli riferì anche le medie delle località con più breve periodo di osservazione a quelle delle località con più lungo periodo, calcolando le *medie decadiche normali*. Da queste poi vengono dedotte le medie mensili, le stagionali e le annue. Sono studiate anche l'escursione annua, le deviazioni mensili, le zone termiche ecc. ([3]).

([1]) W. Sombart, loc. cit.

([2]) F. Eredia, *La temperatura in Italia*. Ann. dell'Ufficio centr. di meteor. e geod., vol. XXXI, pag. 1, an. 1909.

([3]) Per eseguire gli opportuni confronti, riporto qui appresso alcune delle cifre calcolate dall'Eredia per le località da me prese in esame:

Media delle medie decadiche.

Osservatorio ed anni	Decadi	Gennaio	Febbraio	Marzo	Aprile	Maggio	Giugno	Luglio	Agosto	Settembre	Ottobre	Novembre	Dicembre
Milano (1866-1906). .	1a	0.8	2.9	6.8	11 8	15.5	21.1	24.1	23 8	21.4	15.7	8.8	3.4
	2a	0.6	3.8	8.4	12.9	17.2	21.0	24.7	23.6	19.2	13.0	6.7	2.8
	3a	1.5	5.4	9.5	14.4	18.9	22.6	24.5	22.2	17 5	10·6	4.6	1.7
Roma (1866-1906) . .	1a	6.7	7.5	9.3	12.6	16.4	21.1	24.1	24.8	22.8	18.2	12.9	8.6
	2a	6.6	7.8	10.6	13.7	17.4	21.3	25.0	24.4	21.2	16.1	11.3	7.8
	3a	6·7	8.9	11.3	15.0	19.3	23 0	25.2	23.6	19.7	14.6	9.6	7.2
Siracusa (1879-1906) .	1a	11.0	11.0	11.8	13.9	16.7	20.9	24.6	26.2	24.8	21.4	17.0	13.1
	2a	10.7	10.8	12.7	14.6	17.5	21.8	25.6	25.9	23.7	19.8	15.5	12.2
	3a	10 5	11.6	13.5	15.6	19.2	23.4	26.1	25.6	22.4	18.6	14.1	11.5

Il lavoro ha un interesse generale per l'Italia, come gli altri, precedenti, del Cantoni ([1]), dal Millosevich ([2]) e del De Marchi ([3]); le ricerche che io invece ho fatto, sebbene limitatamente agli Osservatorii di Roma, Milano e Siracusa, per il venticinquennio 1886-1910, sono molto più dettagliate e si riferiscono non solo alle medie decadiche, ma anche ai massimi ed ai minimi della temperatura.

Nella seguente tabella ho riassunto le medie decadiche delle temperature minime, massime e medie degli Osservatorî di Milano, Roma e Siracusa nell'ultimo venticinquennio. Per maggiore intelligenza e per eseguire più comodamente i confronti, ho tradotto queste cifre nei grafici che, insieme con quelli degli altri elementi meteorologici, sono riportati nella tav. I.

Il calcolo delle *medie decadiche normali* nel nostro caso ha luogo soltanto per l'osservatorio di Siracusa, il cui periodo di osservazione è limitato a 28 anni ed ha fornito all'Eredia le seguenti cifre:

Siracusa	1a	10.8	10.5	11.7	13.6	17.0	21.0	24.6	26.2	24.6	21.1	16.7	12.9
	2a	10.7	10.9	12.6	14.5	17.7	22.1	25.7	26.0	23.5	19.6	15.3	12.1
	3a	10.5	11.6	13.1	15.7	19.4	23.9	26.2	25.6	22.4	18.4	13.8	11.5

Temperatura media mensile.

Osservatorio	Gennaio	Febbraio	Marzo	Aprile	Maggio	Giugno	Luglio	Agosto	Settembre	Ottobre	Novembre	Dicembre
Milano	1.0	4.0	8.2	13.0	17.2	21.7	24.4	23.2	19.4	13.1	6.7	2 6
Roma.	6.7	8.1	10.4	13.8	17.7	21.8	24.8	24.3	21.2	16.3	11.3	7.9
Siracusa	10.7	11.0	12.5	14.6	18.0	22.3	25.5	25.9	23.5	19.7	15.3	12.2

Dall'Eredia è stata calcolata la temperatura media delle stagioni in base alla convenzione « inverno $= \frac{\text{d. g. f.}}{3}$; primavera $= \frac{\text{m. a. m.}}{3}$; estate $= \frac{\text{g. l. a.}}{3}$; autunno $= \frac{\text{s. o. n.}}{3}$ ». Essa è la seguente:

Temperatura media delle stagioni.

Osservatorio	inverno	primavera	estate	autunno
Milano	2.5	12.8	23.1	13.1
Roma	7.6	14.0	23.6	16.3
Siracusa.	11.3	15.0	24.6	19.5

Le *temperature medie annue* dell'Eredia sono: Milano 12.9; Roma 15.4; Siracusa 17.6.

([1]) P. Cantoni, *Il clima d'Italia*, in «l'Italia agricola», Milano 1881.
([2]) E. Millosevich, *Climatologia generale*, in «la Terra» del Mannelli, vol. I, cap. VIII.
([3]) L. De Marchi, *Il clima d'Italia*, ibid., vol. IV, cap. I.

Tabella I.

Medie decadiche delle temperature minima, massima e media degli Osservatorii di Milano, Roma e Siracusa nel venticinquennio 1886-1910.

MESE	Decade	MILANO			ROMA			SIRACUSA		
		minimo	massimo	media	minimo	massimo	media	minimo	massimo	media
Gennaio	1ª	—3.8	7.5	1.1	—0.4	13.6	6.5	5.3	16.3	10.4
	2ª	—4.9	8.7	0.9	—0.7	13.6	6.0	5.1	16.1	10.2
	3ª	—4.5	9.8	1.5	0.0	13.7	6.7	4.2	15.7	10.3
Febbraio	1ª	—3.1	10.6	2.7	0.2	14.3	7.7	4.9	16.6	10.5
	2ª	—2.3	11.9	3.8	0.0	15.0	7.1	4.2	16.6	10.3
	3ª	—1.1	12.5	4.7	1.6	15.6	8.7	6.2	17.3	11.3
Marzo	1ª	0.2	15.1	6.4	1.4	16.5	8.9	5.6	17.3	11.2
	2ª	1.1	17.5	8 2	2.8	17.9	10.6	6 0	19.4	12.5
	3ª	2.7	19.4	9.8	3.7	19.1	11.4	6.8	20.0	12.9
Aprile	1ª	3.8	21.1	11.5	5.2	19.7	12.3	7.8	20.0	13.5
	2ª	5.2	22.6	12.8	5.2	21.1	13.4	8.3	21.9	14.4
	3ª	7.0	24.6	14.5	7.1	22.7	15.0	9.6	22.8	15.6
Maggio	1ª	7.8	25.5	15.6	8.3	24.0	15.9	10.5	24.3	16.5
	2ª	8.8	27.9	17 3	9.5	25 9	17.5	11.8	25.6	17.7
	3ª	10.1	29 9	19.0	10.8	27.7	19.2	13.1	27.1	19.3
Giugno	1ª	13.0	31.1	21.3	13.2	29.3	21.2	14.5	29.0	20.5
	2ª	13.1	31.2	21.1	13.5	28.6	21.0	15.9	29.3	21.8
	3ª	13.7	32.8	23.0	15.2	31,0	22.9	17.2	31.4	23.4
Luglio	1ª	15.1	33.6	23.6	15.6	31.8	23.8	18.5	33.1	24.8
	2ª	15.5	33.8	24.0	16.1	33.0	24.4	19.0	33.5	25.1
	3ª	15.9	34.0	24.4	16.9	33.4	25.1	20.2	34.2	25.7
Agosto	1ª	15.8	32.9	23.9	16.6	32.7	24.8	20.3	34.0	25.9
	2ª	15.4	32 5	23.6	16.2	32.5	24.3	20.1	33.8	25.8
	3ª	14.1	30 9	22.4	15.2	31.9	23.3	19.2	32.5	25.1
Settembre	1ª	13.8	30.0	20.7	14 8	30.5	22.8	19.1	32.0	24.6
	2ª	11.9	27.5	19.1	13.0	29.1	21.0	17 2	30.4	23.5
	3ª	11.1	25.1	17.6	12.2	26.4	19.4	16.7	28 8	22.2
Ottobre	1ª	9.3	23.3	16 1	11.7	25.7	19.0	15.9	27.4	21.5
	2ª	6.1	20.4	13.1	8.4	23.8	16.4	13.9	26.7	19.9
	3ª	4.7	17.6	10.6	7.1	22.1	15.0	12.3	24.0	18.1
Novembre	1ª	3.8	15.3	9.4	6.7	20.3	13.6	11.2	23.1	17.1
	2ª	1.7	13.3	6.5	4.3	18.6	11.7	9.6	21.5	15.5
	3ª	—1.0	11.2	4.4	2.0	16.2	9.2	8.2	19.5	13.4
Dicembre	1ª	—1.0	10.3	3.9	1 7	15.6	8.9	7.2	18.6	13.0
	2ª	—2.5	9.1	2.8	0.8	14.8	8.0	6.3	17.2	12 3
	3ª	—3.5	7.9	1.8	0.4	14.2	7.3	6.0	17 0	11.7

L'esame dei *minimi* permette di assegnare a Roma una media minima annua di 7°.67 C., a Milano di 5°.91 C., a Siracusa di 11°.60 C., e di rilevare perciò come la temperatura minima di Roma si presenti ben diversa da quella di Siracusa, ma vicina a quella di Milano. Ciò però non corrisponde alla realtà, per una circostanza che risulta molto chiara dal corrispondente grafico e che è di gran valore per i fini agricoli. Dal diagramma si rileva come le temperature minime di Roma e di Milano siano effettivamente simili per un periodo dell'anno il quale corre dalla seconda decade di aprile all'ultima di settembre; ma non nella rimanente epoca, dove la differenza si palesa molto grande. Scindendo in due periodi uguali l'anno (e cioè: in un periodo *invernale*, il quale decorre dall'ottobre al marzo, ed in un periodo *estivo*, che comprende dall'aprile al settembre), si ottengono le seguenti medie minime semestrali:

	Milano	Roma	Siracusa
Periodo invernale . . .	0°.10	2°.87	7°.71 C.
id. estivo	11 .72	12 .47	15 .50 C.

Nei mesi più caldi, quindi, le medie dei minimi di Roma e di Milano coincidono; negli altri mesi esse differiscono di quasi tre centigradi. E mentre i minimi invernale ed estivo di Roma si trovano entrambi in un rapporto molto simile con quelli di Siracusa (diff. = 4°.84 e 3° 04), dei minimi di Milano solo quello estivo gode della stessa proprietà (diff. = 3°.78): la media dei minimi invernali di Siracusa e di Milano differisce per ben 7°.61 C. Tali circostanze, mentre permettono di accertare fin da ora per Milano un inverno rigido, dimostrano che Roma gode di un inverno notevolmente mite. La conferma di siffatta deduzione si ottiene dall'esame dei rimanenti dati termometrici, che riesce istruttivo anche per altri riguardi.

Le medie dei *massimi*, difatti, si presentano essenzialmente differenti soltanto nelle epoche invernali che restano individualizzate con un periodo che ha una decorrenza uguale a quella già rilevata per le medie dei minimi. Le medie annue dei massimi, che sono di 22°.83 C. per Roma, di 21°.34 C. per Milano, e 24°.27 C. per Siracusa nulla ci dimostrano all'infuori del fatto che i massimi della temperatura di Roma si avvicinano più a quelli di Milano (diff. = — 1°.49) che non a quelli di Siracusa (diff. = + 2°.44), precisamente come verificasi per i minimi (diff. con Milano = + 1°.76; con Siracusa = — 3°.93); muta solo il segno delle differenze, che è contrario nei due casi. Le seguenti medie semestrali:

	Milano	Roma	Siracusa
Periodo invernale . . .	13°.41	17°.22	19°.44 C.
id. estivo	29 .27	28 .40	29 .05 C.

indicano, invece, che differenze notevoli non si hanno nei mesi caldi, ma solo in quelli più freddi. Le differenze delle medie dei massimi estivi nelle tre stazioni oscillano fra 0°.87 e 0°65 C.: intorno, quindi, alla metà di un centigrado. Quelle dei massimi invernali di Roma, invece, raggiungono il valore di 3°.81 in più di fronte a quelle di Milano, e di 2°.22 C. in meno di fronte a quelle di Siracusa.

A decorrere dalla terza decade del mese di marzo, i diagrammi dei massimi, pur non dimostrando di seguire un decorso molto differente, permettono tuttavia di rilevare alcune circostanze notevoli.

Anzitutto la brusca ascesa della temperatura di Milano, fra l'ultima decade di marzo e la prima di aprile; in tale periodo, infatti, essa temperatura, si mantiene ad un livello sensibilmente superiore, non solo a quella di Roma, ma anche a quella di Siracusa. Le medie dei massimi, difatti, nei quattro mesi di aprile, maggio, giugno e luglio sono per Milano, Roma e Siracusa, rispettivamente, di 29°.0, 27°.3, 27°6 C. La temperatura massima di Siracusa, in tale epoca dell'anno, è appena sensibilmente superiore a quella di Roma.

Anche l'esame dei massimi permette, adunque, di riconoscere che Roma gode di un inverno mite (più simile a quello di Siracusa) che il solo esame dei minimi non lasci a divedere, e di un estate con estremi termometrici non così frequenti ed elevati come in Milano.

Un migliore apprezzamento dei dati termometrici raccolti nell'ultimo venticinquennio, ed una migliore valutazione delle conseguenze che fin qui ho procurato di trarre per i fini agronomici del presente lavoro, sono certamente possibili allorchè si proceda all'esame delle temperature *medie* delle tre stazioni meteorologiche prescelte.

Le medie annue delle temperature medie in queste località, per l'ultimo venticinquennio, risultano le seguenti:

Milano	12°.86 C.
Roma.	15 .27
Siracusa.	17 .43

Quelle semestrali, calcolate in base alla divisione dell'anno precedentemente adottata (ottobre-marzo, aprile-settembre) sono le seguenti:

	Periodo invernale	Periodo estivo
Milano	5°.98	19°.74 C.
Roma.	10 .15	20 .40
Siracusa. . . .	13 .45	21 .41

Dividendo l'anno in un periodo invernale comprendente i mesi dal novembre al febbraio, in un periodo estivo comprendente quelli dal maggio all'agosto, ed in un periodo intermedio comprendente i mesi di marzo, aprile, agosto e settembre, si ottengono le seguenti medie quadrimestrali:

	Periodo invernale	Periodo di mezzo	Periodo estivo
Milano.	3°.62	13°.36	21°.60
Roma	8 .45	15 .43	21°.95
Siracusa	12 .16	17 .49	22 .63

Una più minuziosa analisi di queste temperature medie si presta sia alla conferma dei fatti fin qui rilevati, sia all'accertamento di altri nuovi.

Anzitutto è lecito di osservare come la media annua della temperatura di Roma, da me calcolata in 15°.27, corrisponde a quella ottenuta nel venticinquennio 1855-1879 (15°.32 C.) e nel più lungo periodo studiato dall'Eredia (15°.4 C.); ma, di fronte ad essa, deve ritenersi troppo elevata la cifra data dal Tommasi-Crudeli, di 16°.5 C. Il calcolo di tale media, però, se può avere un certo valore nell'apprezzare il *clima* come è inteso dagli igienisti, ne ha ben poco allorchè, attenendoci al concetto di *elemento non venale della produzione*, si voglia scendere a conclusioni d'interesse agricolo; ciò è tanto vero, che, mentre noi dovremmo aspettarci, per i tre luoghi presi in esame, un'agricoltura tanto più fiorente per quanto più elevata è la temperatura, invece troviamo che avviene, si può, dire il contrario. E tale circostanza non si verifica solo per causa di altri fenomeni concomitanti (ad es. pioggie), ma, in special modo, per la distribuzione della temperatura nell'anno agrario.

Le medie semestrali, ottenute seguendo il criterio da me esposto, dànno una parziale spiegazione della contraddizione che ho citato ad esempio, poichè dimostrano il fatto, già rilevato a mezzo delle medie degli estremi termometrici: della simiglianza, cioè, che nel periodo estivo, in rapporto alla temperatura, presentano i climi di Roma, Milano e Siracusa, e della differenza notevole che, invece, presentano i corrispondenti periodi invernali. Mentre la media del periodo invernale di Roma differisce da quella estiva per 10° 25 C., le medie corrispondenti di Milano differiscono per ben 13° 76 C., e quelle di Siracusa solo per 7° 96 C. Nel periodo estivo, quindi, le temperature tendono a livellarsi in tre località sotto molti riguardi differenti: e, se altri fattori non concorressero, potrebbero permettere in tutte una stessa agricoltura. Dove questa, invece, per la temperatura, dovrebbe essere essenzialmente diversa, sarebbe nell'inverno.

Anzichè ottenere altre medie in relazione alle stagioni, ho voluto ricavare una terza serie di dati ripartendo l'anno in tre periodi che mi è sembrato si potessero molto più utilmente individualizzare dando un primo sguardo al grafico della tav. I, temperatura media.

La divisione dell'anno in quattro stagioni non mi pare che segni altrettante epoche che alla vita delle piante offrano condizioni essenzialmente differenti di esistenza. La temperatura di un luogo dipende da un complesso di circostanze, e, fra queste, anche degli immagazzinatoi di calorico per i quali le stagioni estreme possono far risentire le loro influenze termiche durante un periodo che si prolunghi più o meno oltre il limite astronomico assegnato alle stagioni. Ora, è ovvio il riconoscere che da tale circostanza la vegetazione può trarre non insignificanti cause di prosperità o di danno.

La ripartizione dell'anno, quindi, nelle tre epoche da me stabilite, oltre che prestarsi ad una più esatta valutazione dei fatti, permette di determinare molto bene le affinità e le divergenze nel regime termico delle tre località. Nel periodo estivo le medie si presentano quasi le stesse: la differenza massima è di solo 1° 03 C. Essa, che corrisponde in gran parte all'epoca di coltivazione del frumento, si presenterebbe di ugual valore a Milano, come a Siracusa, come a Roma. Nei mesi di maggio e

giugno, specialmente, i grafici delle temperature medie delle tre località si confondono in uno. Le differenze di temperatura nel periodo invernale dei tre luoghi sono, invece, fortissime. Quella massima si ha fra le medie di Milano e Siracusa, ed è di 8°54 C. La media di Roma occupa un posto quasi di mezzo, differendo per 4°83 C. in più da quello di Milano, e di 3°71 in meno da quella di Siracusa. L'agricoltura quindi in tale periodo, sempre dal punto di vista termometrico, deve essere notevolmente differente nelle tre località.

Le differenze nell'epoca di transizione acquistano molto minor valore: il massimo si ottiene fra Siracusa e Milano, con 4° 13. La media di Roma si colloca esattamente nel mezzo delle altre due, differendo per 2° 07 in più da quella di Milano, e per 2° 06 in meno da quella di Siracusa. Se, adunque, nei riguardi della temperatura, potrebbero aversi in questi luoghi una stessa agricoltura estiva ed una essenzialmente diversa invernale, nel periodo intermedio non è possibile di emettere alcun giudizio senza prendere in esame altre circostanze.

A completare lo studio della temperatura di Roma in relazione a quella dei due termini di confronto prescelti, ritengo utile di calcolare anche le medie mensili desumendole dalla tabella delle medie decadiche e riportandole qui appresso:

MESE	MILANO			ROMA			SIRACUSA		
	minimo	massimo	media	minimo	massimo	media	minimo	massimo	media
Gennaio	— 4.40	8.66	1.16	— 0.36	13 63	6.40	4.86	16.03	10 30
Febbraio.	— 2.16	11.66	3.73	0.60	14.96	7.83	5 10	16.83	10.70
Marzo.	1.33	17.33	8.13	2 63	17.83	10.30	6.13	18.90	12.20
Aprile.	5.33	22.76	12 93	5.83	21 16	13.56	8.56	21.56	14.50
Maggio	8.90	27.76	17 30	9 53	25 86	17.53	11.80	25.66	17.83
Giugno	13 26	31.70	21 80	13.96	29.63	21.70	15.86	29.90	21.90
Luglio	15.50	33.80	24.00	16.20	32.73	24.43	19.23	33 60	25.20
Agosto	15.10	32.10	23 30	16.00	32.36	24.13	19.86	33.43	25.60
Settembre	12.26	27.53	19.13	13 33	28.66	21.06	17.66	30.40	23.43
Ottobre	6.70	20.43	13 26	9 06	23.86	16 80	14.03	26.03	19.83
Novembre	1.50	13.26	6.76	4.33	18.36	11.50	9.66	21 36	15.33
Dicembre	— 2.33	9.10	2.83	0.96	14.86	8.06	6.50	17.60	12.33

Esse possono servire alla conferma delle osservazioni innanzi fatte sulla scorta delle medie decadiche: preferisco però valermene per calcolare gli *scostamenti* di temperatura fra le medie di due mesi consecutivi. Detti scostamenti sono riportati nella seguente tabella e tradotti nel successivo grafico:

MESE	MILANO	ROMA	SIRACUSA
Gennaio.			
	+ 2.57	+ 1.43	+ 0.40
Febbraio.			
	+ 4.40	+ 2.47	+ 1.50
Marzo.			
	+ 4.80	+ 3.26	+ 2.30
Aprile.			
	+ 4.37	+ 3.97	+ 3.33
Maggio			
	+ 4.50	+ 4.17	+ 4.07
Giugno			
	+ 2.20	+ 2.73	+ 3.30
Luglio			
	— 0.70	— 0.30	+ 0.40
Agosto			
	— 4.17	— 3.07	— 2.17
Settembre			
	— 5.86	— 4.26	— 3.60
Ottobre			
	— 6.50	— 5.30	— 4.50
Novembre			
	— 3.93	— 3.44	— 3.00
Dicembre			
	— 1.67	— 1.66	— 2.03
Gennaio.			

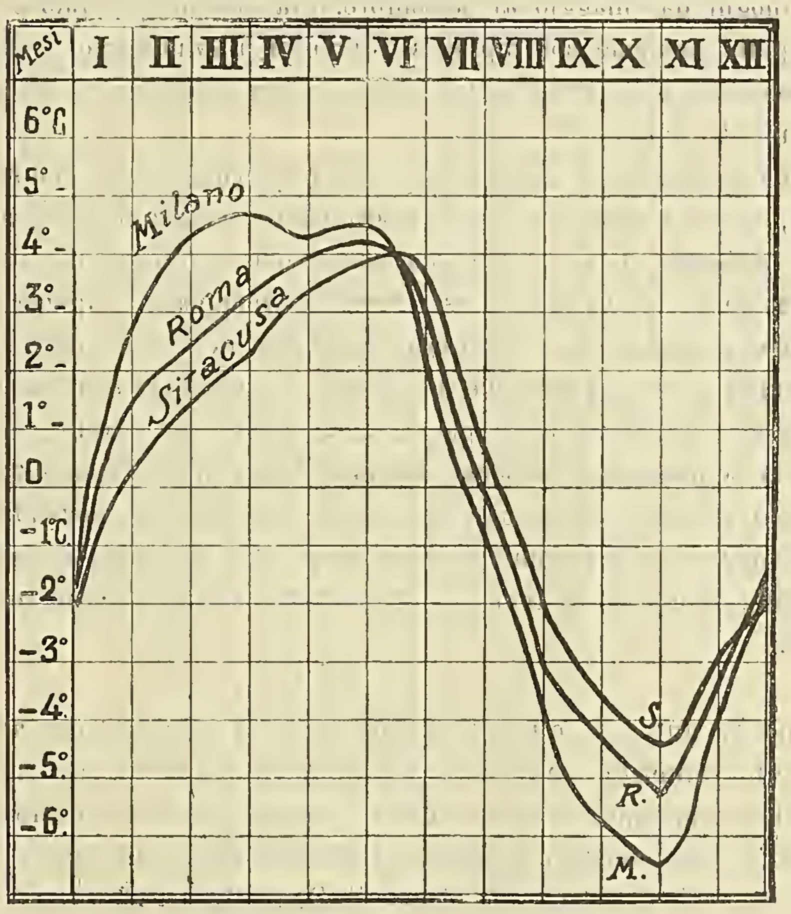


Fig. 1.

Il dislivello termico fra la media massima estiva e la media minima invernale si è voluto prendere a base della distinzione dei climi in *uniformi* o *costanti* o *marittimi* (fino a 10° C.); in *variabili* (10-20° C.) ed in *eccessivi* o *continentali* (oltre 20° C.). Milano è portato ad esempio di questi ultimi; Roma e Siracusa dei secondi. L'esame della tabella delle temperature medie mensili permette di fissare per le tre località in esame i seguenti estremi termometrici e la relativa *amplitudine annua*:

	Media massima estiva	Media massima invernale	Amplitudine annua
Milano . . .	24,4	0,9	23,5
Roma	25.1	6,0	19,1
Siracusa . . .	25,9	10,2	15,7

Ma tale distinzione poco o nulla significa dal punto di vista agricolo, poichè, mentre possiamo trovar classificato in uno stesso gruppo di climi località molto diverse, come ad es. quelle di Roma e Siracusa, l'esame degli scostamenti mensili permette di accertare la compensazione che si verifica nei climi eccessivi, nelle epoche intermedie ai periodi invernale ed estivo; compensazione termica, della quale effettivamente la vegetazione si benefica e che s'accoppia di solito a circostanze non meno favorevoli (pioggie). L'esame del soprariportato grafico (fig. 1) dimostra, in modo molto evidente, la esistenza di detta compensazione verificantesi nel breve termine dei mesi di febbraio e marzo in Milano, come la uniformità degli scostamenti termici nei tre ben differenti luoghi dal maggio al settembre, e la esistenza di quel periodo autunno-invernale nel quale, insieme coi rapidi scostamenti a svantaggio agricolo del clima milanese, restano segnalate ancora una volta speciali condizioni favorevoli all'agricoltura nei climi di Roma e di Siracusa.

È certo che dislivelli di temperatura così forti, come quelli che si verificano nei climi eccessivi, non potrebbero di per sè soli offrire condizioni del tutto favorevoli ad un regolare sviluppo della vegetazione quale può verificarsi nei climi costanti e, in certa misura, anche nei variabili: essi, però, si accoppiano, in genere, ad un regime pluviometrico delle località ben differente da quello dei climi dove la temperatura oscilla entro limiti più angusti e che, nonostante la maggiore somma annua di calorie di cui beneficiano, non presentano, per la coltivazione dei campi, altrettanti vantaggi. Benchè la temperatura in senso assoluto debba dirsi l'elemento meteorologico che per l'agricoltura possiede il massimo valore, pur tuttavia, dovendo introdurre nel nostro studio criterii di apprezzamento relativi, si deve far posto all'esame del regime udometrico locale, il quale, in tema di agricoltura, assurge ad un'importanza veramente capitale.

Quello, che fin qui si è voluto affermare sopra le precipitazioni atmosferiche che hanno luogo nella campagna romana, è ben poco. Il Sombart, nel suo che vorrebbe essere uno studio economico, trascura affatto l'argomento delle precipitazioni Eppure quanta importanza non posseggono queste nella economia di una regione! Al Tommasi-Crudeli, nelle sue indagini sopra il clima di Roma, basta affermare che ivi cadono annualmente 800 mm. di pioggia. Altri studî si hanno sopra le pioggie in Italia; e

fra essi è necessario di ricordare quelli del Millosevich (¹) e quello, più recente, dell'Eredia (²).

Mentre il primo era limitato a 78 città, il secondo venne esteso a ben 215, dopo che le stazioni termo udometriche furono moltiplicate, costituendo una fitta rete sulla nostra penisola, e poterono fornire un materiale sufficiente per indagini più particolareggiate. L'Eredia non fece ricorso ad alcun metodo per calcolare la pioggia in quelle stazioni dove si aveva un breve periodo di osservazioni: egli limitò il suo studio solo a quelle località che dal 1880 al 1905 offrivano una serie ininterrotta di dati sicuri. Sono studiate le medie mensili ed il totale annuo del valore delle precipitazioni e della loro frequenza; la distribuzione dei massimi e dei minimi; le escursioni mensili; infine, sono stabiliti sei tipi nell'andamento annuale delle pioggie.

Il lavoro dell'Eredia ha un valore generale per l'Italia, mentre io, limitando le ricerche alle stazioni di Milano Roma e Siracusa, ho voluto maggiormente approfondire l'esame della distribuzione delle pioggie in queste località, in relazione con il già eseguito studio delle temperature e per indirizzarlo a scopi agricoli. Come già per le temperature, ho preso in considerazione i dati raccolti dal R. Ufficio centrale di meteorologia e geodinamica di Roma nel venticinquennio 1886-1910. Le medie decadiche del valore delle precipitazioni e della loro frequenza sono riportate nella seguente tabella:

(¹) E. Millosevich, *Le pioggie in Italia*, 1884.
(²) F. Eredia, *Le precipitazioni atmosferiche in Italia*.

Allo scopo di poter eseguire gli opportuni confronti, riporto qui appresso le medie mensili ed il totale annuo calcolati dall'A. per il periodo 1880-1905.

(P = precipitazioni; F = frequenza)

Osservatorii	Gennaio		Febbraio		Marzo		Aprile		Maggio		Giugno	
	P.	F.	P.	F.	P.	F.	P.	F.	P.	F.	P.	F.
Milano	68.3	8.9	64.5	8.4	78.2	10.2	101.3	12.1	120.8	13.4	87.3	11.0
Roma	91.7	11.4	69.6	9.4	78.2	11.3	78.0	12.0	60.1	8.6	45.3	5.8
Siracusa	94.9	11.4	66.7	9.4	41.2	7.5	39.0	6.3	20.6	4.5	5.2	1.8

Osservatorii	Luglio		Agosto		Settembre		Ottobre		Novembre		Dicembre	
	P.	F.	P.	F.	P.	F.	P.	F.	P.	F.	P.	F.
Milano	72.0	8.3	74.3	7.7	93.8	8.3	126.5	12.0	106.6	10.8	78.2	9.6
Roma	21.1	2.0	26.5	2.9	76.7	6.3	135.2	12.0	114.7	12.3	104.7	12.2
Siracusa	7.5	0.9	7.1	1.7	48.5	4.8	92.9	8.5	108.8	9.8	104.5	12.2

Totale annuo per il periodo 1880-1895.

Osservatorii	Anno	
	P.	F.
Milano	1071.8	120.7
Roma	901.8	106.2
Siracusa	636.9	78.8

TABELLA II.

Medie decadiche delle precipitazioni e della loro frequenza, ottenute negli osservatorii di MILANO ROMA *e* SIRACUSA, *nel venticinquennio 1886-1910.*

MESE	Decade	MILANO		ROMA		SIRACUSA	
		Giorni di pioggia	Pioggia o neve fusa in mm.	Giorni di pioggia	Pioggia o neve fusa in mm.	Giorni di pioggia	Pioggia o neve fusa in mm.
Gennaio	1ª	3.1	21.1	4.2	33.3	3.8	32.7
	2ª	2.0	18.2	3.2	21.1	3.2	33.1
	3ª	2.4	19.2	4.3	29.5	3.2	32.7
Febbraio	1ª	2.7	18.1	4.5	32.1	3.2	23.2
	2ª	2.1	18.9	3.2	20.8	3.7	27.2
	3ª	2.5	24.7	4.1	27.9	2.2	19.8
Marzo	1ª	3.4	23.1	4.2	23.1	2.4	13.3
	2ª	3.5	35.0	4.6	32.5	1.9	7.9
	3ª	3.6	29.5	4.0	25.3	3.1	16.2
Aprile	1ª	3.0	19.4	4.2	29.9	2.2	14.2
	2ª	4.0	39.4	4.0	23.9	1.6	9.2
	3ª	4.4	33.6	3.7	21.7	1.7	11.8
Maggio	1ª	4.3	44.5	3.5	21.2	1.6	4.4
	2ª	3.8	29.0	2.8	18.2	1.2	7.4
	3ª	4.7	38.4	3.4	18.3	1.5	10.8
Giugno	1ª	3.7	26.1	2.3	10.4	0.8	1.8
	2ª	3.9	34.7	3.2	23.5	0.7	2.3
	3ª	3.2	23.8	1.8	9.4	0.2	0.4
Luglio	1ª	2.8	21.3	1.1	7.9	0.2	4.2
	2ª	2.4	30.5	1.4	11.8	0.2	2.4
	3ª	3.1	25.6	1.1	4.4	0.2	0.8
Agosto	1ª	2.6	21.0	1.0	2.0	0.3	2.5
	2ª	2.2	19.2	0.4	4.9	0.3	1.3
	3ª	2.8	22.0	1.6	14.7	0.7	2.8
Settembre	1ª	2.0	21.9	1.4	9.2	0.9	4.7
	2ª	2.8	25.8	2.5	24.5	1.6	13.6
	3ª	2.6	26.8	3.2	31.0	2.4	30.7
Ottobre	1ª	3.8	40.2	4.0	49.1	2.4	25.8
	2ª	3.4	34.3	4.1	54.5	2.9	25.3
	3ª	4.8	59.1	3.6	44.1	2.9	36.3
Novembre	1ª	4.2	48.5	4.7	56.5	2.8	27.1
	2ª	3.0	32.3	4.0	36.1	3.5	46.5
	3ª	2.9	26.2	4.1	38.5	3.3	38.5
Dicembre	1ª	3.2	30.3	4.4	37.3	3.6	39.5
	2ª	3.0	31.8	4.2	27.8	3.4	29.0
	3ª	3.2	25.3	4.1	46.0	3.6	40.6

Queste cifre ci lasciano scorgere come soltanto la frequenza delle precipitazioni di Siracusa differisca notevolmente da quelle di Roma e di Milano, che sono uguali. Difatti, mentre a Milano si hanno 115.1 giorni di pioggia in un anno, ed a Roma 116.1, a Siracusa se ne hanno solo 74.4. Considerando, però, il valore delle precipitazioni stesse, altre differenze si rilevano fra il clima di Milano e quello di Roma. Invero, abbiamo:

	pioggia o neve fusa, in mm., nell'anno
Milano	1038.8
Roma	922.4
Siracusa	640.0

A Milano cadono pioggie per circa $^2/_5$ superiori a quelle di Siracusa, e solo per circa $^1/_{10}$ superiori a quelle di Roma. Tenendo conto, però, della frequenza, a Roma sono pioggie le quali hanno un valore medio di mm. 7.9, a Siracusa di mm. 8.6, a Milano di mm. 9.0. A Roma, quindi, le precipitazioni sono distribuite più abbondantemente che non a Milano stessa, ma sono di una entità sensibilmente inferiore anche a quelle di Siracusa.

La quantità totale annua di pioggie che cadde a Roma nel venticinquennio 1886-1910 risulta alquanto superiore ai risultati del calcolo fatto dal Tommasi-Crudeli, ed in notevole accordo con i dati forniti dall'Eredia, ai quali si avvicinano anche quelli da me ottenuti per Milano e Siracusa.

Ma tutte queste cifre hanno un'importanza ben piccola in uno studio fatto con quegl'intendimenti che io mi sono proposto e per i quali interessa conoscere esattamente la distribuzione delle precipitazioni in modo che queste, mentre vengono riferite alle diverse fasi della vegetazione, possano anche mettersi in rapporto con tutti gli altri elementi meteorologici, non venali, cioè, della produzione.

Allo scopo di rilevare non solo le analogie e le differenze fra la distribuzione delle pioggie nelle tre stazioni termo-udometriche scelte a confronto, ma anche i rapporti con la distribuzione delle temperature e della luminosità nel decorso dell'anno, mi è sembrato che servissero molto bene i grafici che ho riunito nella tav. I e per i quali è stata fissata anche la corrispondenza di tempo. Da essi si scorge come i diagrammi delle precipitazioni presentino rapporti di contatto in corrispondenza della fine di settembre e della fine di marzo: mesi, questi, segnanti i limiti, in base ai quali venne bipartito l'anno per lo studio della temperatura. Ritenni quindi opportuno di calcolare la frequenza ed il valore delle pioggie separatamente nel periodo autunnale come in quello estivo dell'anno; ed ottenni questi risultati:

	Periodo invernale		Periodo estivo	
	Frequenza	Pioggia (mm.)	Frequenza	Pioggia (mm.)
Milano	56.8	535.8	58.3	503.0
Roma	73.5	635.5	42.6	286.9
Siracusa	56.1	514.7	18.3	125.2

Nel periodo invernale cadono in Milano ed in Siracusa quantità sensibilmente uguali di pioggia per un egual numero di giorni. In Roma la frequenza delle pioggie è molto superiore, sebbene non si presenti di un valore proporzionalmente elevato l'entità della loro caduta. Ciò vuol dire che nel clima di Roma le precipitazioni sono distribuite con migliore uniformità, avendo un valore medio di mm. 8.6, in confronto a quello delle pioggie di Milano e di Siracusa che è rispettivamente di mm. 9.4 e di mm. 9.1. Nei mesi invernali, adunque, nel clima di Roma l'agricoltura viene a benificiarsi di una circostanza molto favorevole che ha riscontro in quella della mitezza della temperatura e della quale nel clima stesso di Siracusa, che è ancora più mite, non si potrebbe nella stessa misura usufruire.

Di maggior rilievo sono le differenze fra le tre stazioni prese in esame nel periodo estivo. Mentre per Milano la media delle pioggie e della loro frequenza si mantiene quella stessa del periodo invernale, per Roma come per Siracusa si ottiene una diminuzione dei giorni di pioggia (e, in pari tempo, della sua caduta) veramente grande. I giorni di pioggia a Roma sono nell'estate la metà di quelli dell'inverno ed il numero dei mm. non è molto superiore a quello di un terzo. Mentre a Milano si hanno pioggie di mm. 8.6, a Roma si hanno di soli mm. 6.7, a Siracusa di mm. 6.8. Nel complesso le condizioni offerte dalla caduta della pioggia all'agricoltura che può svolgersi nelle campagne di Siracusa sono, quindi, anche peggiori di quelle che si presentano nella campagna romana, ma i risultati colturali non possono essere molto lungi dall'equivalersi. I fatti posti in rilievo intorno alle precipitazioni nelle terre milanesi rappresentano circostanze d'immenso valore agricolo che non trovano riscontro nelle altre regioni qui esaminate.

Il distacco tra il periodo estivo e quello invernale non è netto; e, per valutare ancora meglio le differenze e le analogie nelle regioni medesime, ho voluto distinguere per le pioggie, come già per la temperatura, quel periodo intermedio comprendente il marzo, l'aprile, il settembre e l'ottobre. I miei calcoli hanno portato a questi risultati:

	Periodo invernale		Periodo di mezzo		Periodo estivo	
	Frequenza	Pioggia (mm.)	Frequenza	Pioggia (mm.)	Frequenza	Pioggia (mm.)
Milano . . .	34.3	314.6	41.3	388.1	39.5	336.1
Roma. . . .	49.0	406.9	43.5	368.8	23.6	146.7
Siracusa . . .	40.5	389.8	26.0	209.0	7.9	41.1

Essi dimostrano come le precipitazioni in Milano siano distribuite con rilevante uniformità in tutto il periodo dell'anno, comunque esso venga ripartito: in Roma, uniformemente ripartite solo nel periodo invernale ed in quello intermedio; in Siracusa, molto diversamente ripartite nelle tre differenti epoche dell'anno. Non tenendo conto se non di tale elemento meteorologico, il periodo invernale e quello intermedio di Roma sarebbero paragonabili a quelli corrispondenti di Milano; il periodo estivo sarebbe simile a quello di mezzo di Siracusa. Mentre, adunque, per le temperature il clima di Roma e di Siracusa possono essere ravvicinati e riuniti nel gruppo dei climi variabili, le precipitazioni permettono di affermare una rilevante difformità dei

due climi con profondi riflessi nell'agricoltura locale. I tre climi, in quanto a frequenza ed a valore della caduta di pioggie, presentano un carattere proprio che meglio ancora potrà rilevarsi dall'esame dei relativi valori mensili qui appresso riportati:

MESE	MILANO		ROMA		SIRACUSA	
	Giorni di pioggia	Pioggia o neve fusa in mm.	Giorni di pioggia	Pioggia o neve fusa in mm.	Giorni di pioggia	Pioggia o neve fusa in mm.
Gennaio	7.5	58 5	11 7	83.9	10.2	98 5
Febbraio	7.3	61.7	11.8	80.8	5.1	70.2
Marzo	10 5	87.6	12.8	80 9	7.4	37.4
Aprile	11.4	92.4	11.9	75.5	5.5	35.2
Maggio	12.8	111 9	9.7	57.7	4.3	22.6
Giugno	10 8	84.6	7.3	43.3	1.7	4.5
Luglio	8.3	77.4	3.6	24.1	0.6	7.4
Agosto	7.6	62 2	3.0	21.6	1.3	6.6
Settembre	7.4	74 5	7.1	64.7	4.9	49.0
Ottobre	12.0	133.6	11.7	147 7	8.2	87.4
Novembre	10.1	107.0	12 8	131.1	9.6	112 1
Dicembre	9.4	87.4	12.7	111.1	11 6	109.1

Con questi dati si ottengono i seguenti grafici. (Non prendo in considerazione la frequenza, avendo essa un andamento molto simile a quello della caduta delle pioggie):

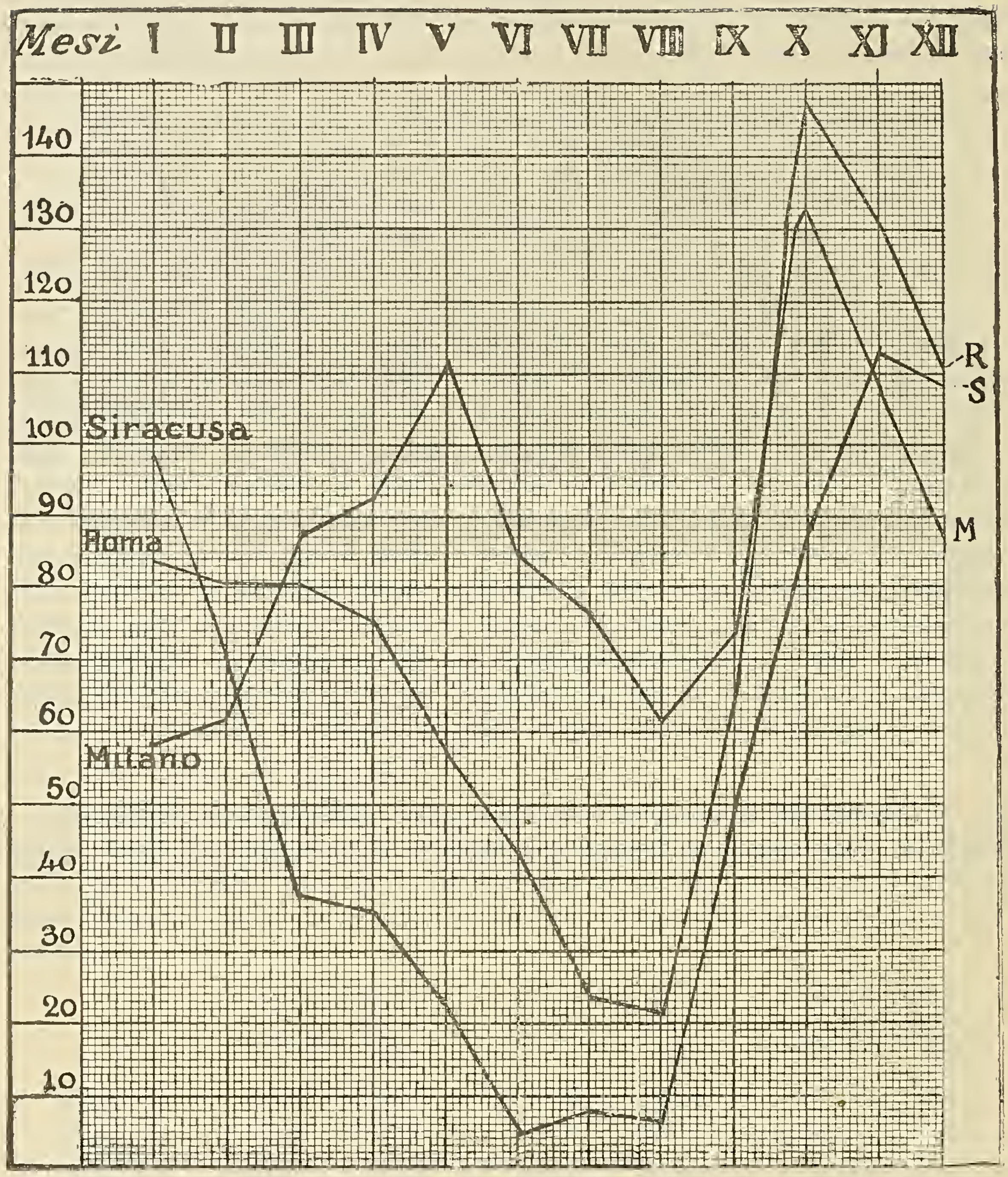


Fig. 2.

Avendo assegnato a ciascuna delle tre regioni un andamento caratteristico di pioggie, si ha la possibilità d'istituire utili confronti con l'andamento delle temperature medie. A tale fine giova aver presenti anche i grafici degli scostamenti mensili delle temperature medesime (fig. 1).

Dopo un periodo estivo di diminuzione delle pioggie che, sebbene di non uguale portata, rappresenta una circostanza comune per i tre climi, ha luogo in tutti un aumento autunnale di precipitazioni che raggiunge il massimo valore per Roma con

mm. 147.7, per Milano con mm. 133.6, per Siracusa con soli mm. 112.1. La temperatura, nella stessa epoca, va diminuendo, ma non con una legge paragonabile a quella mediante la quale avvengono gli aumenti delle pioggie. Alle pioggie minime di Siracusa corrispondono temperature minime; in relazione alle grandi pioggie dell'autunno romano, si hanno temperature di valore intermedio. Le condizioni degli elementi non venali di produzione, nel loro complesso, si presentano, in tale epoca, in Roma, come le più favorevoli.

Le cose, però, cambiano molto, proseguendo nei confronti per il successivo periodo dell'anno. A Siracusa, prima ancora che la temperatura riprenda la sua ascesa primaverile, le precipitazioni subiscono una diminuzione che si accentua rapidamente e raggiunge un così basso livello che non viene uguagliato da quello delle altre due località. A Roma il livello pluviometrico si mantiene elevato fino all'aprile, ma si abbassa non appena le medie termometriche, circa la stessa epoca, incominciano a presentare scostamenti maggiori che non nei mesi precedenti. La diminuzione estiva delle pioggie, se non raggiunge a Roma quella che si ha in Siracusa, le si avvicina molto. A Milano, aumentando la temperatura, aumentano le pioggie fino oltre il maggio: segue anche ivi un periodo di diminuzione durante i calori del giugno e del luglio, ma esso ha un valore minimo.

In conclusione, nel periodo invernale le curve della temperatura e delle precipitazioni segnano in tutte e tre le località un movimento *in opposizione*: il che costituisce una circostanza sfavorevole ma di portata limitata, in particolar modo per Roma che, con una temperatura mite, usufruisce delle più abbondanti pioggie. Nel periodo estivo, invece, le curve medesime ci presentano un movimento fortemente in opposizione solo per Roma e Siracusa, mentre per Milano esso si può chiamare *parallelo*. La regolata concorrenza delle meteore termiche e di quelle acquee in un clima riesce grandemente favorevole alla vegetazione ed all'agricoltura e, nel presente caso, segna fra il clima di Milano e quelli di Roma e Siracusa una profonda, netta linea di demarcazione.

Degli elementi meteorologici, non venali, della produzione agraria, che possono godere di un valore essenzialmente differente nelle tre località suddette, resta da esaminare la intensità luminosa. Disgraziatamente non abbiamo per questa misure dirette, sicchè è necessario di contentarsi di quelle cifre sopra la nebulosità forniteci dal R. Ufficio centrale di meteorologia e geodinamica del Collegio Romano, con un metodo nel quale ha larga parte l'apprezzamento individuale dell'osservatore.

Lo studio venne anche qui limitato alle stazioni di Milano, Roma e Siracusa nel venticinquennio 1886-1910, in modo che i risultati si corrispondessero e potessero confrontarsi con quelli già ottenuti per la temperatura e le precipitazioni.

Tabella III.

Medie decadiche della nebulosità media, ottenute negli osservatorii di Milano *Roma e Siracusa nel venticinquennio 1886-1910.*

MESE	Decade	Milano	Roma	Siracusa	MESE	Decade	Milano	Roma	Siracusa
Gennaio. . . .	1ª	6.8	5.4	6 2	Luglio	1ª	4 5	2.9	1.8
	2ª	6.5	4.5	5.9		2ª	4.4	2.0	1.6
	3ª	5.9	5.4	5.7		3ª	4.2	1 0	1.4
Febbraio . . .	1ª	5.4	5.4	5.8	Agosto	1ª	4.0	1.8	1.8
	2ª	5 5	5.0	6.0		2ª	4.1	2.0	2.1
	3ª	5.8	5.9	6.0		3ª	4.7	2.4	2.6
Marzo.	1ª	5.5	5.4	5.3	Settembre . .	1ª	4.4	2.7	2.8
	2ª	6.0	5 7	5.5		2ª	4.8	4.3	4.6
	3ª	5.5	5.3	5.7		3ª	5.5	4.1	5.0
Aprile.	1ª	5.5	5.7	5.7	Ottobre. . . .	1ª	6.2	4.9	5.1
	2ª	5.9	5.6	5.3		2ª	6.0	5.2	5.7
	3ª	6 3	5.5	5.4		3ª	6.8	5 2	5.6
Maggio	1ª	5.9	5.5	5.1	Novembre . .	1ª	7.2	5.7	5.9
	2ª	5.8	5.0	4.5		2ª	7.3	5.0	6.0
	3ª	5.9	5.1	4.8		3ª	6.4	4 9	5.8
Giugno	1ª	5 4	4.3	4.0	Dicembre. . .	1ª	6.5	5.6	6.3
	2ª	5.7	4.7	3.6		2ª	6.5	5.3	6.3
	3ª	4.8	3.2	2.0		3ª	6.9	5.8	6.5

Anche per la intensità luminosa di cui usufruiscono, le tre località prese ad esame differiscono notevolmente. A Milano si hanno, nell'anno, soltanto 160.5 giorni di sole; a Roma se ne hanno, invece, 201.6; a Siracusa 195.6. È già quindi un fatto importante quello di dover constatare come nella campagna di Roma si abbia un numero di giorni di sole molto superiore a quello che ha la campagna di Milano, superiore anche a quello del clima di Siracusa, nel quale la caduta delle pioggie ha un valore relativamente molto piccolo.

Ma altri fatti sorgono calcolando le giornate di sole in relazione ai periodi invernale ed estivo quali ho avuto già occasione di distinguere. Dall'ottobre al marzo le giornate di sole sono:

a Milano 69.8
a *Roma*. 86.9
a Siracusa 77.2

Dall'aprile al settembre risultano, invece,

a Milano 90.7
a *Roma*. 114.7
a Siracusa 118.4

Più che nel periodo invernale, le differenze si rendono evidenti in quello estivo. Nell'inverno Roma gode di un numero di giornate di sole alquanto superiore a quello di Siracusa stessa; e tale circostanza è in diretta relazione con la caduta delle pioggie, poichè, in Roma, nel corrispondente periodo dell'anno si ha una somma di precipitazioni maggiore che non nelle altre due località. Nell'estate i giorni di sole di Roma e di Siracusa si equivalgono, essendo, nei due casi, ancora molto superiori a quelli di Milano; ma il fatto è in rapporto inverso con le precipitazioni atmosferiche.

Anche per mezzo di queste risultanze viene ad acquistare maggior valore l'osservazione già fatta, che nel periodo invernale si verificano in Roma condizioni meteoriche essenzialmente favorevoli alla vegetazione, più favorevoli ancora di quelle proprie di climi più meridionali. Ad una particolare serenità di cielo si accoppiano, ivi, la massima caduta delle pioggie ed una temperatura mite.

Volendo spingere ancora oltre i confronti, in analogia con quanto è stato già fatto per gli altri elementi meteorologici, resta da calcolare la luminosità delle tre regioni anche nel periodo di transizione fra quelli invernale ed estivo. Si sono con tal mezzo ottenute le seguenti giornate di sole:

	Periodo invernale	Periodo di mezzo	Periodo estivo
Milano	44.9	53.4	62.2
Roma	57.7	62.2	81.7
Siracusa.	49.2	60.1	86.3

Da queste cifre risulta ancora più nettamente il vantaggio del clima romano per il maggior numero dei giorni di sole di cui esso gode nell'inverno, in confronto di quello di Siracusa e, molto più, di quello di Milano. Nel periodo di mezzo le differenze si attenuano grandemente, fin quasi a scomparire: nell'estate tornano ad essere di nuovo molto sensibili.

Ora non resta che da stabilire un parallelo finale fra i tre elementi meteorologici, temperatura precipitazioni e luce, nelle tre stazioni di Milano Roma e Siracusa, avuto riguardo al significato che essi hanno in agricoltura, in quanto possono essenzialmente favorirla a mezzo di una *giusta misura* e di una *regolata coincidenza*. A tale scopo ho voluto riunire nel seguente prospetto i risultati del presente studio, indicando con i segni + o — il valore degli elementi meteorologici suddetti, in corrispondenza delle tre principali epoche dell'anno che ho creduto fin qui opportuno di distinguere: periodo invernale, di mezzo ed estivo.

Stazioni	MILANO			ROMA			SIRACUSA		
Periodo	invernale	di mezzo	estivo	invernale	di mezzo	estivo	invernale	di mezzo	estivo
Temperatura. .	—	+	+	+	+	+	+	+	+
Precipitazioni. .	+	+	+	+	+	—	+	—	—
Luce	—	+	+	+	+	+	+	+	+

A Milano, adunque, il favorevole concorso dei tre elementi si ottiene soltanto nel periodo estivo ed in quello di transizione; a Roma in quello invernale ed in quello di mezzo; a Siracusa, nel solo periodo invernale. Mentre, quindi, a Milano, nelle *condizioni naturali*, può aversi un'*agricoltura estiva*, a Roma invece, più estesamente che non a Siracusa, può aversi un'*agricoltura invernale*. L'ambiente si presenta essenzialmente differente: e, in rapporto ad esso, molto diversi debbono essere i mezzi di cui possa disporsi con l'arte dei campi per il razionale sfruttamento delle sue favorevoli caratteristiche climatiche nelle epoche in cui fanno difetto le altre. Si potrebbe affermare di trovarci di fronte, a un dipresso, ai due tipi fondamentali di regioni: ad inverno freddo ed estate piovoso, e ad inverno mite ed estate secco; ma le proprietà del capitale terreno, quali ermegeranno dagli studî esposti nel seguente capitolo, dimostreranno come differenze molto più profonde si stabiliscano fra gli ambienti colturali qui presi in esame, e fra i quali per la sua singolarità viene a risultare quello dell'Agro romano.

V.

Il capitale-terreno.

Per la conoscenza di ciò che, in relazione ai fini colturali, è chiamato *capitale-terreno*, ho preso le mosse da quella esplorazione preliminare che ha per scopo di stabilire la omogeneità ed uniformità della natura di esso, necessarie al giusto prelevamento dei campioni da analizzarsi.

La storia naturale dell'Agro romano, della quale ho procurato di tracciare uno schizzo in principio di questa Memoria (cap. II), permette di rilevare due circostanze che costituiscono una caratteristica locale, uno stato di cose che si ripete ad ogni passo, attraverso la regione, ed è di grande ausilio per fissare la vera natura fisica e chimica di tutti i suoi terreni.

L'origine vulcanica della zona circondante Roma, e le vicende alluvionali cui essa posteriormente andò soggetta, hanno determinato, nella costituzione del suolo e nella sua configurazione, fatti tali che debbono essere tenuti presenti in qualsiasi ricerca sopra il terreno vegetale che dal suolo stesso deriva, come in ogni induzione sopra le vicende che esso può subire in relazione alle pratiche agricole.

Trovo opportuno, a questo momento, distinguere le seguenti rocce che s'incontrano nella zona sottoposta a studio: leucitite, tufo litoide, tufo granulare, pozzolane e sabbie gialle le quali sono quelle che, si può dire, hanno esclusivo rapporto con il terreno coltivabile. Sono caratteristiche: per la leucitite, la durezza, la *impermeabilità*, la ricchezza in potassa ($K_2O = 8{,}97\ \%$) e quantità non trascurabili di calce ($CaO = 10{,}47\ \%$); per il tufo litoide, la durezza media, la *quasi impermeabilità*, una media ricchezza in potassa ($K_2O = 3.81\ \%$) ed una notevole quantità di ferro ($Fe_2O_3 = 18{,}14\ \%$); per il tufo granulare, la friabilità, la *semi-permeabilità*, la

povertà in potassa ($K_2O = 0,76\ {}^0/_0$); per le pozzolane, la scioltezza, la *permeabilità*, la media ricchezza in potassa ($K_2O = 2,33\ {}^0/_0$) ed in ferro ($Fe_2O_3 = 14,05\ {}^0/_0$); per le sabbie, la scioltezza, la *permeabilità*, la povertà in ogni elemento della fertilità ($SiO_2 = 93\ {}^0/_0$) (1).

I rapporti che assumono queste diverse rocce, reciprocamente e con il terreno coltivabile, sono presentati in sezioni schematiche nella tav. II di questa Memoria, dove si riportano i principali casi di stratificazione in località caratteristiche, rilevati negli scavi eseguiti per il prelevamento dei campioni da sottoporsi ad esame, spingendo i saggi con una trivella fino ad una profondità di circa quattro metri.

In questa potenza, che è abbastanza considerevole in relazione ad uno studio del terreno coltivabile, troviamo anzitutto stratificazioni semplici formate esclusivamente, e per ordine di decrescente importanza, o da tufi granulari, o da pozzolane, o da sabbie gialle e ghiaie Gli esempî ne sono numerosi: del primo caso, nelle tenute di Casale Fiscale e di Ponte Nomentano; del secondo, nella più centrale parte della tenuta di Roma Vecchia; del terzo, nella tenuta di Acquatraversa (tav. II, sez. 2 e 4). Ma più comuni ed importanti sono i casi di stratificazioni composte, dove, sempre nella potenza di quattro metri, troviamo l'alternarsi di due, tre, e, a volte, quattro differenti materiali rocciosi.

Si hanno stratificazioni doppie: con terreno vegetale alluvionale e tufo granulare o pomiceo, come, ad es., nella tenuta di Pietralata (tav. II, sez. 1), nella Piana de' Condotti (tav. II, sez. 2) e nella valle della Crescenza (tav. II, sez. 3); con terreno vegetale alluvionale e pozzolane, come, ad es., nella parte della tenuta di Romavecchia più prossima alla via Tuscolana (tav. II, sez. 2); con terreno vegetale alluvionale e sabbie gialle, come, ad es,, nel fondo di Acquatraversa (tav. II, sez. 4); con tufo granulare e pozzolane, come, ad es., nella tenuta di Grotta di Gregna (tav. II, sez. 2). Più raramente si hanno stratificazioni di solo tufo granulare e tufo litoide.

Ancora più complicati sono i casi di stratificazioni triple, dove le roccie possono essere due, ed una ripetersi, od anche tutte e tre differenti. Ad es., nella tenuta di Pietralata, in corrispondenza del forte, troviamo due strati di tufo granulare separati da uno di tufo litoide; proseguendo verso Grotta di Gregna i due strati di tufo granulare sono, invece, intramezzati da uno di pozzolane (tav. II sez. 1). Nelle tenute di Tor Carbone e di S. Maria Nuova si ha una stratificazione molto singolare e che crea uno stato di cose ben grave al terreno vegetale, dove ad uno strato di tufi granulari se ne sovrappone uno di pozzolane e, a questo, uno di lava basaltica che intercetta ogni rapporto con essi del soprastante strato di umo (tav. II, sez. 2). Casi rari di stratificazioni sono: tufo litoide - pozzolane - tufo granulare e quelli di stratificazione quadrupla, limitati quasi esclusivamente ai punti dove i terreni alluvionali prendono rapporti con le stratificazioni triple.

Il sottosuolo della campagna di Roma si presenta, adunque, in condizioni singolari e non troppo variate, le quali spiegano in gran parte le proprietà fisiche e la

(1) G. De Angelis d'Ossat, *Confercnze geologico-agrarie sulla Campagna romana*. Raccolte dal dott. U. Azzali, Roma 1908.

costituzione chimica dei terreni coltivabili. espresse dalle tabelle che si faranno seguire.

A fornire una più completa idea della natura dei terreni medesimi, in quanto soprattutto riguarda la loro genesi, contribuisce la conoscenza della morfologia del sottosuolo che non è meno singolare ed importante delle sue proprietà.

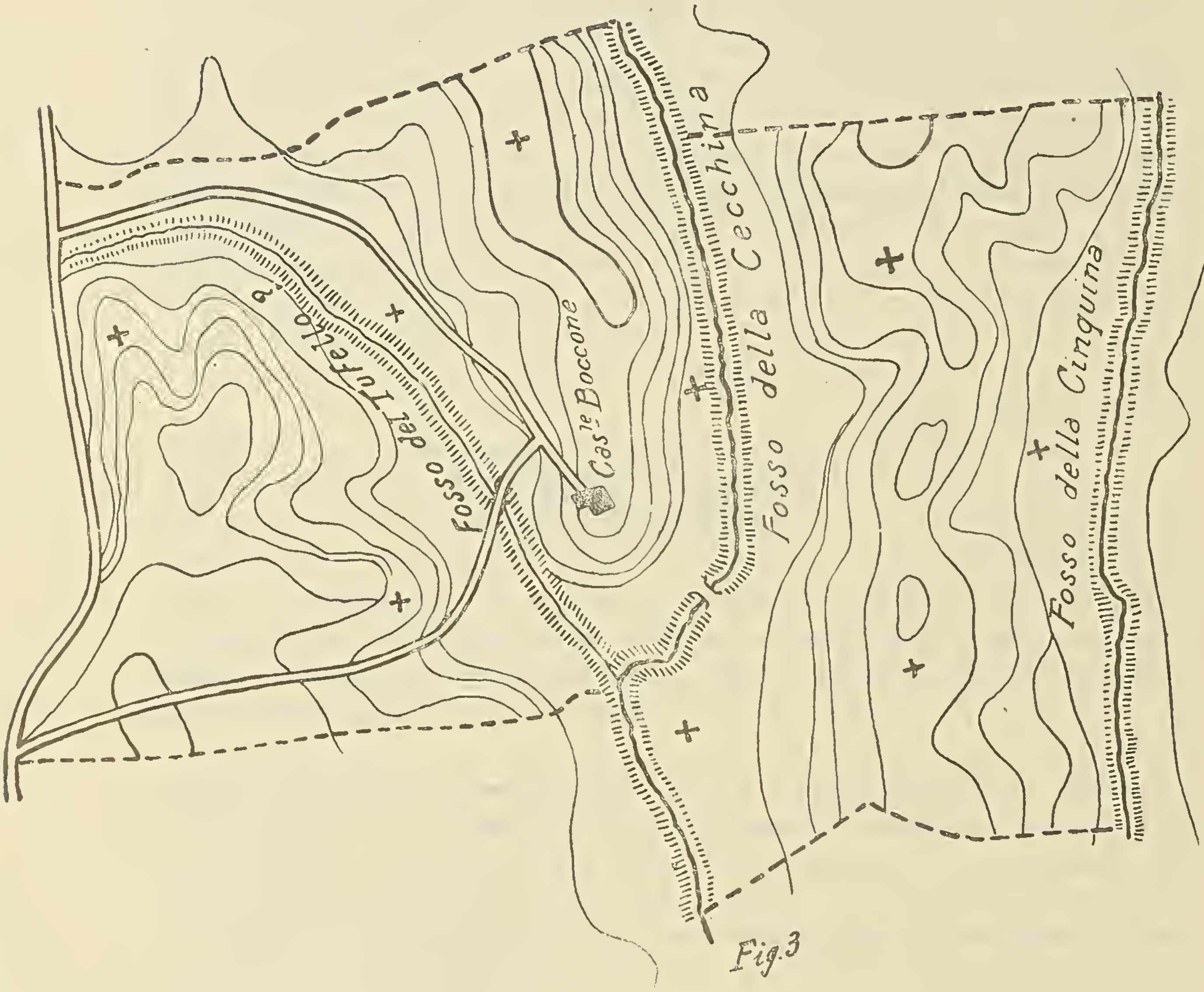


Fig. 3

L'altipiano che circonda Roma può concepirsi, nel suo insieme, come costituito da una cerchia di colline che presentano le maggiori quote verso NW, degradanti verso SE, dove la cerchia stessa si apre in una pianura che si estende fino al mare. Attraverso da N a S, si svolge il corso del Tevere, e nella direzione NE quello dell'Aniene. Le due valli, nelle quali questi due grandi corsi di acqua si adagiano, costituiscono una eccezione nel carattere di quasi tutta la rimanente campagna, poichè in questa troviamo ripetuta una naturale disposizione di cose che è all'incirca quella stessa riprodotta nella presente fig. 3, rappresentante una parte della tenuta di Boccone.

Ho scelto questo esempio come uno dei più istruttivi per illustrare i rapporti intercedenti fra natura fisica, composizione chimica dei terreni agrarî e morfologia del suolo che, all'infuori delle due valli dell'Aniene e del Tevere, è chiamato impropriamente *altipiano*, mentre risulta di colline e collinette, intersecate da piccoli corsi d'acqua, o *fossi*, a cui corrispondono altrettante *valli* dette appunto *di altipiano*. Ivi, difatti, troviamo disegnate tre colline distinte dai tre fossi del Tufello, della Cecchina e della Cinquina: di esse, le due più elevate e caratteristiche sono quella su cui trovasi il casale Boccone, e l'altra limitata dai due corsi di acqua maggiori: Cecchina e Cinquina. Tutte presentano una base molto stretta in relazione alla loro elevatezza, ed una modellazione conseguente alla facile alterabilità dei materiali tufacei che le costituiscono, così che la forma risultante potrebbe qualificarsi come quella di una *schiena d'asino*. Nello studio di questa località procedetti al prelevamento di campioni di terra nei diversi punti che sono segnati nella figura stessa da croci; e dal loro esame fisico, come dalla loro composizione chimica, potei formarmi un' idea dei rapporti nei quali si trovano i terreni di tali valli con quelli delle rispettive colline: rapporti che vennero confermati in tutti gli altri casi simili studiati nelle diverse parti della zona (ad es.: ad Acquatraversa, alla Maglianella, ecc.). Essi mi hanno giovato molto a completare razionalmente lo studio nei singoli punti della zona da bonificarsi ed a disegnare le carte agronomiche senza moltiplicare all' infinito il numero dei campioni da esaminarsi ed aggravare il lavoro non lieve che l'analisi chimica completa di ciascuno importa. Poichè — questo soltanto credo qui opportuno di affermare — la disposizione presentata dalla tenuta di Boccone, presa ad es., si ripete in quasi tutta la zona vicino a Roma, più o meno accentuatamente ed in condizioni non troppo comuni con quelle di altre regioni, essendo le colline romane di estensione limitata ma di forma caratteristica e costituite in prevalenza da materiali tufacei ed affini, soggetti con molta facilità a degradazione, e dotate in talune parti, di una quasi assoluta impermeabilità.

Due caratteri, adunque, ritengo necessario si debbano aver presenti nello studio fisico e chimico dei terreni coltivabili del nostro Agro; due caratteri salienti: la natura prevalentemente tufacea e la forma a schiena d'asino del sottosuolo.

Quanto fin qui era noto sopra la costituzione dei terreni coltivabili della campagna romana era ben poca cosa. Nè io posso dimostrarmi sospetto se a tale proposito rammento in quali termini il Viola si espresse in una sua relazione che fa parte di quella inchiesta che fu promossa dalla Società degli agricoltori italiani e presieduta dal Cadolini (¹). Ivi è detto che le *sette* analisi pediologiche, dal Viola stesso eseguite nell'Istituto geologico di Berlino per incarico del governo ed allo scopo di pubblicare una carta agronomica rimasta poi inedita, « sono le *uniche* complete e da « ritenersi come un saggio di ciò che rimane da farsi del lavoro cospicuo per tutto « il suolo e sottosuolo della Campagna romana ».

Invero, la stessa osservazione — in termini, anzi, presso a poco identici — venne fatta nella Relazione ministeriale alla Camera, dove si trovano riportate le molto

(¹) G. Cadolini, loc. citato.

poche analisi eseguite per cura della Commissione di bonifica dell'Agro romano. Alcune di queste sono dovute al prof. E. Bechi e sono riportate anche nella pubblicazione del Pareto ([1]) ed in quelle dei molti altri i quali si sono voluti occupare della nostra Campagna:

	Alluvione del Tevere nel 1870	Valle del Tevere al disotto della ultima alluvione	Collina di Valchetta	Valle della Lungara	Colline di Torre Nuova	
					1.	2.
Materie organiche	3.870	7.180	8.416	10.581	5.230	10.357
Acido fosforico	0.300	0.150	0.295	0.415	0 500	0.457
Zolfo	0.070	0.100	0 103	0.041	0.042	0.148
Carbone	4.650	3 870	0.417	0.786	0.495	0.307
Ammoniaca	0.250	0 770	0.310	0.500	0.853	0.200
Potassa	0 340	0.400	0.775	0.785	1.017	0.485
Soda	2.410	0.940	0.496	1 228	3.400	0.443
Calce	5.820	4.900	1.045	1.344	0.944	0.870
Magnesia	0.160	0.040	0.189	0.120	0.065	0.040
Comp: di alluminio e ferro	9 760	10.670	13.683	6 603	12.655	8.709
Residuo (rena, ecc)	69.652	68.654	73.037	75.738	72.905	75.881
Acqua non evaporata, a 100° C.	2 718	2.326	1.234	1.859	1.794	2.103
TOTALE	100 —	100 —	100 —	100 —	100 —	100 —

Si tratta, adunque, delle solite sei analisi, le quali risalgono a circa quaranta anni fa, e che fanno la loro comparsa, potrebbe dirsi, stereotipicamente anche sopra i libri più recenti — fra i quali, ad es., quello del Tomassetti — come tipo della composizione dei nostri terreni.

Anche nella R. Stazione chimico-agraria di Roma si è spesso avuta occasione di eseguire analisi di terreno dell'Agro, particolarmente per incarico di privati. Esse perciò sono limitate ai principalissimi elementi della fertilità (azoto, acido fosforico e potassa) riflettono piccole estensioni di terreno e sono rimaste inedite. Avrebbero, quindi, un'importanza molto relativa. Fra i lavori, però, pubblicati dalla stessa Stazione agraria, va ricordato quello del Sestini ([2]) sopra i tufi della campagna romana, nel quale si trovano riportati i risultati delle analisi eseguite sopra i principali costituenti litologici del sottosuolo e che servono a dare un'idea abbastanza giusta della natura e della particolare ricchezza dei materiali dai quali trae origine il terreno coltivabile romano. Tali risultati, che, a differenza di tutti quelli ottenuti dalle ricerche abbastanza numerose dei geologi ([3]), furono ricavati con intendimenti più particolarmente agronomici, meritano di essere qui riassunti:

([1]) Pareto, *Relazione sulle condizioni agrarie ed igieniche della campagna di Roma.* Firenze-Genova, 1872, pag. 65.

([2]) F Sestini, *Studio sui tufi della campagna romana.* Ann. Staz. sperim. agraria di Roma, fasc. 2°, pag. 53.

([3]) Confr. le conferenze geologico-agrarie sulla campagna romana, del prof. De Angelis, precitate.

	Tufo litoide		T. omogeneo		T. granulare anfigenico		T. scoriaceo		Pozzolana	
Acqua	9.644		9.942		19.590		5.590		6.876	
Materie min. sol. in aq. e organiche . .	0.365		0.110		0.830		0.320		0.080	
» » **in acido cloridrico** . . .	40.954		53.359		32.080		17.014		46.833	
Ossido di alluminio . .		11.144		15.153		11.000		4.009		12.227
» ferro		15.532		22.651		9.000		3.250		11.244
» manganese . .						8.000		tracce apprezzabili		tracce
» calcio		5.237		9.851		3.700		2.871		6.535
» magnesio . . .		0.175		0.353		300		0.823		2.562
» potassio . . .		2.574		2.342		tracce		1.183		2.333
» sodio		1.272		0.621		tracce		1.762		7.759
Anidride carbonica . . .		3.792		1.271		tracce		0.902		0.811
» solforosa . . .		0.289		0.459		0.080		0.466		0.984
» silicica		tracce		0.621		tracce		1.105		0.576
» fosforica . . .		0.609		tracce		tracce		0.240		0.044
Perdite		0.030		0.037		tracce		0.403		1.758
Materie min. insol. in acido cloridrico . .	49.047		36.589		47.500		77.076		46.211	
Ossido di alluminio . . .		2.616		tracce		1.060		9.517		0.548
» ferro		2.616		0.039		0.950		3.914		2.808
» manganese . .								tracce		tracce
» calcio		3.269		0.086		0.870		2.235		1.526
» magnesio . . .		0.477		tracce		0.490		0.215		0.452
» potassio . . .		1.241				0.760		2.135		tracce
» sodio		1.049				0.220		4.275		1.150
Anidride silicica		36.712		36.464		41.790		54.310		38.758
Perdite		1.067				1.360		0.475		0.969
Totale . . .	100 —		100 —		100 —		100 —		100 —	

Certo che il lavoro analitico più importante per la conoscenza del terreno agrario della campagna di Roma è quello compiuto dal Viola e che egli, appunto per la lamentata insufficienza dei dati di fatto posseduti sopra la natura chimica e fisica del terreno stesso, si decise a rendere di pubblica ragione solo molto tardi ([1]).

È importante lo studio del Viola, in quanto che per la prima volta ci viene presentato un esame meccanico e fisico quasi completo del terreno romano, essendosi determinati il peso specifico, la porosità la capacità per l'acqua e, all'apparato Schöneschen, la diversa grandezza delle particelle terrose costituenti appunto lo strato coltivabile. I risultati che egli ci presenta sono riuniti nelle seguenti tabelle:

LOCALITA	Peso specifico		Porosità		Capacità per l'acqua in ore				Grandezza delle particelle terrose				
	effet-tivo	appa-rente	pori	riempi-mento	7 cm.c	15 cm.c	25 cm.c	42 cm.c	sabbie sup. 2 mm.	sabbie 2-0.05 mm.	polvere 0.05-0.01 mm.	sotto 0.01 mm.	Somma
1°. Fra casa Cavallari e l'Aniene (a destra della via Tiburtina)	2.58	1.39	46 1	53.9	20	28	31	33.5	grande quantità di concrezioni				
2°. Pratalata	2.41	1.16	51.9	48.1	21.5	29	32	34	5.74	51.47	14.17	28.56	99.94
3°. Tor Sapienza . .	2.56	1.37	46.5	53.5	22	27	31.5	34	grande quantità di concrezioni				
4°. Grottaferrata. . .	2.47	1.10	55.5	44.5	23	27	28	29	2.00	41.25	25.46	31.18	99.89
5°. Casa Cimarra (sull'Ardeatina) . . .	2.42	1.15	52.5	47.5	14	22	27	32	19.48	49.87	13.30	17.39	100.04
6°. Vigna Murata . .	2.51	1.12	55.4	44.6	12.5	15.5	17	18	2.51	18.79	26.70	52.00	100.00
7°. Chiesaccia . . .	2.38	1.14	52.1	47.9	15	20.5	25	28	20.64	49.35	20.68	9.31	99 98

È anche importante lo studio analitico del Viola, perchè separatamente ci fornisce la quantità di elementi che passano in soluzione nell'acido cloridrico, nell'acido solforico diluito 1: 5, nell'acido fluoridrico e con la disgregazione al carbonato sodico. La somma totale dei componenti dei medesimi sette terreni coltivabili, di cui è parola, è la seguente:

	1	2	3	4	5	6	7
FeO	3.50	7.93	2.58	8.60	8.13	6.18	7.90
Fe_2O_3	1.37	2.29	1.39	0.81	3.03	4 24	0.26
Al_2O_3	11.11	19.33	11.61	21.51	19 55	19.86	20.62
CaO	24.48	5.83	24.34	4.87	7.96	4.78	8.69
MgO	1.96	5.42	1.85	2.12	3.81	2.64	3.91
K_2O.	1.26	1 46	1.06	1.58	1.45	1.47	1.96
Na_2O	0.96	0.63	0.72	0.45	0.56	0.52	0.89
SiO_2	29.33	44.79	29.34	46.72	43.07	48.05	43.00
CO_2	17.31	0.08	19.69	tracce	0.18	tracce	—
H_2O	4.44	9.27	4.88	9.36	8.44	11.44	9.58
Humus	1.17	1.95	0.88	1.05	2.20	0.62	2.24
P_2O_5	0.16	0.21	0.18	0.18	0.34	0 21	0.37
	97.05	99.19	98.52	97 25	98.72	100.01	99.42

([1]) C. Viola, *Acherbodenuntersuchung der römischen Campagna*. Zeit. für prakt. Geologie, 1895, h. 7, pag. 277.

Si deve però notare che in queste analisi, come in quasi tutte le altre sopraricordate, venne omesso di determinare un elemento che per la coltivazione presenta la massima importanza: l'azoto. Perchè questo venisse dosato nelle terre dell'Agro romano; perchè altre analisi venissero eseguite con metodi i quali meglio rispondessero ai criterî oggi dominanti per stabilire il grado di fertilità di un terreno; perchè con un numero molto maggiore di esse, condotte in condizioni paragonabili, fosse possibile di ottenere un'idea esatta e completa della zona da bonificarsi, da me impresa a studiare, ho ritenuto di grande interesse di dare allo studio chimico delle nostre terre una sufficiente ampiezza. Ho creduto, con ciò, non solo di attenermi a quel piano generale di ricerche economiche al quale volli informare l'intero mio lavoro, ma anche di rispondere ad una necessità reclamata dai coltivatori intelligenti i quali intendono procedere ad un razionale esercizio dei proprî fondi, e dagli studiosi e dai fautori di quei provvedimenti di bonifica che attendono da non pochi anni la loro attuazione.

Molto giustamente il Viola, nella ricordata sua Relazione sopra le carte agronomiche della campagna romana, allegata all'inchiesta della Società degli agricoltori italiani, dopo aver patrocinato la istituzione di un apposito ufficio per lo studio del terreno dell'Agro — e questo a me sembra, invero, un eccessivo frazionamento di attribuzioni — concludeva: « bisogna mettersi in mente questa verità: che *non si « riuscirà a dimostrare in breve tempo il tornaconto di nuove culture intensive, « senza la conoscenza completa del suolo* ».

Ciò premesso, passo ad esporre succintamente i metodi seguîti nell'esame fisico, come pure nell'analisi chimica dei terreni della zona dell'Agro romano da bonificarsi.

Siccome, a seconda dei metodi praticati, i risultati delle analisi delle terre possono variare molto, ho procurato di attenermi per quanto fosse possibile, a quelle istruzioni ufficiali impartite dal ministero di agricoltura [1], con le quali, soprattutto, si è voluto che i risultati medesimi dovessero rispondere a quegl'intendimenti pratici con i quali vengono ordinariamente eseguite le analisi delle materie di uso agrario, più che a speciali scopi puramente scientifici sopra le questioni generali nelle quali resta tuttora avvolta la conoscenza dei terreni coltivabili.

Il campione venne prelevato da me in persona sul posto, notando il punto preciso sopra una carta topografica, la profondità dello strato agrario, approfondendo lo scavo non oltre i cm. 50 nei casi di maggiore potenza dello strato coltivabile, e solo fino a non intaccare il sottosuolo, non ancora modificato dagli agenti esterni, nei casi di minore spessore. Ogni campione venne costituito dalla miscela di più prelevamenti eseguiti in parti ritenute omogenee sulla base dei criterî innanzi esposti e, liberato dai corpi accidentali (il che fu necessario molto di rado), venne fatto seccare all'aria separandone anzitutto lo scheletro dalla terra fina, e passando questa allo staccio con fori di un mm. di diametro.

Lo *scheletro* si pesò complessivamente, determinandosene la percentuale in rapporto alla intera quantità di terra secca all'aria. Non si ritenne opportuno di suddividerlo, soprattutto perchè esso nella campagna romana non è frequente, nè abbondante, e presenta caratteri speciali, incontrandovisi molto di rado ciottoletti di varie dimensioni e sabbione. Se ne distinse però approssimativamente la parte calcare, determinandosene la percentuale solubile in acido cloridrico diluito.

(1) Min. di agric. ind. e comm., *Metodi ufficiali per le analisi* ecc., in «Ann. di Agric. », 1905.

Con la terra fina, conservata durante le varie operazioni in vaso a tappo smerigliato, si procedette, quindi, alla determinazione delle proprietà fisiche. Se ne determinò il colore, avendo presente la seguente scala: grigio molto chiaro, grigio chiaro, grigio leggermente scuro, grigio scuro, grigio molto scuro; il *peso di un litro* misurandone il volume di mezzo litro senza compressione e raddoppiandone il peso. La *permeabilità all'acqua* fu determinata calcolando il tempo necessario perchè due litri di acqua attraversassero uno spessore di 15 cm. di terra fina compressa ad ogni carica di cm. 3, con un cilindro di legno dal peso di gr. 150, in una canna di cm. 2 di diametro chiusa inferiormente da tela metallica e superiormente da un tappo di *caoutchouc* a tenuta in comunicazione con una bottiglia di Mariotte, essendo il dislivello tra acqua e terra di cm. 10. *La imbibizione* fu calcolata pesando gr. 100 di terra secca a 110° C, agitandola con acqua in capsula di porcellana, facendo sgocciolare l'eccesso di acqua e notando l'aumento di peso. L'*attrazione capillare* si ottenne determinando il peso di acqua per cento della terra seccata a 110°, assorbita dal basso di una colonna di terra alta cm. 15, di cm. 2 di diametro, compressa come sopra per la permeabilità, prendendo inoltre nota dell'altezza raggiunta dall'acqua ogni due ore nella colonna. Per il *potere disseccante* si calcolò la perdita dopo permanenza di un'ora alla stufa a 40° C e con cloruro di calcio di un determinato peso di terra bagnata con acqua posta in una scatola metallica quadrata di cm. 7 di lato, 3 di bordo, col foro sul fondo e sui lati, in rapporto all'acqua totalmente contenutavi. La *tenacità* si determinò preparando con la terra bagnata parallelepipedi di cm. 2 di base, per cm. 6 di lunghezza, compressi con un peso di un kg. e, dopo asciugamento a 50° C., provandosene la resistenza al peso, riferito questo a quello necessario per spezzare un parallelepipedo di argilla pura, preparato nelle stesse condizioni, preso = 100.

Per l'esame fisico-chimico s'incominciò dal determinare l'*umidità* sopra gr. 10 di terra seccata all'aria e mantenuta in stufa a 110° C. fino a costanza di peso. Il residuo di questo essiccamento fu trattato in un bicchiere con acido cloridrico all'1 % fino a cessazione di sviluppo di gas, raccogliendo poi la parte insolubile sopra un filtro tarato ed essiccandola allo scopo di ottenere per differenza quella perdita che, detratta l'acqua igroscopica in precedenza determinata, si suole ordinariamente prendere come *carbonato calcare*. Nel filtrato con cloruro di bario venivano precipitati i *solfati*. Il residuo della filtrazione poi si fece bollire con acqua distillata in una capsula di porcellana, per un'ora, aggiungendo nuovo liquido a misura che svaporava quello precedentemente contenuto nella capsula stessa. Mediante successive, accurate e lunghe decantazioni, usando di vasi stretti ed alti — non potendosi disgraziatamente disporre di speciali apparecchi — si riusciva ad eliminare le materie argilliformi, lasciando indietro depositare le *sabbie* che si raccoglievano su filtro tarato, si seccavano e si pesavano. Le *materie argilliformi* erano ottenute per differenza dal peso del residuo del trattamento un acido cloridrico, detratto quello delle sabbie stesse.

A parte, sopra altri gr. 10 di terra fina seccata all'aria, si determinano le *sostanze organiche*, calcinando in crogiuolo di porcellana e ripristinando i carbonati con carbonato ammonico di cui si scacciava l'eccesso scaldando di nuovo al rosso scuro. Infine, sopra altri 10 gr. della stessa terra fina si dosava l'*azoto totale* con il metodo Kjeldahl.

Tutte le altre analisi venivano eseguite sopra l'estratto cloridrico della terra ottenuto nel seguente modo: In una Erlenmeyer di un litro erano pesati gr. 150 di terra fina seccata all'aria, e vi si aggiungeva, a poco a poco, agitando, mezzo litro di acido cloridrico di densità 1,115; indi si riscaldava moderatamente a bagno di sabbia fino ad ebullizione che si manteneva lenta e regolare per due ore. Al termine di queste, si faceva raffreddare il recipiente, si filtrava, ed il liquido, con le acque di lavaggio del residuo si portava al volume di cm. c. 500. In tal modo si conosceva il peso di terra fina corrispondente ad un'aliquota dell'estratto cloridrico.

In differenti parti di questo estratto — cm.^{3} 25,50 o 100 — si determinava l'*azoto ammoniacale* alcalinizzando con magnesia usta, e distillando; l'*anidride fosforica*, svaporando a bagno-maria, distruggendo la sostanza organica con ripetuti trattamenti all'acido nitrico, riprendendo con acqua e precipitandosi il fosfomolibdato con il reattivo molibdico, trasformando, infine, il fosfomolibdato in fosfato ammonico-magnesiaco che veniva calcinato e pesato come pirofosfato di magnesio; gli *ossidi di ferro* e *di alluminio*, trattando con ammoniaca il residuo dello svaporamento con acido nitrico ripreso con acqua; la *calce*, aggiungendo ossalato ammonico al filtrato del precedente trattamento; l'*ossido di potassio*, operando con la ordinaria tecnica sopra il filtrato dal quale era stata precipitata la calce, per ottenerlo e pesarlo allo stato di cloro platinato.

Il residuo della preparazione dell'estratto cloridrico servito alle precedenti determinazioni, lavato ancora con acqua distillata, veniva essiccato e pesato. Esso è indicato semplicemente come *residuo insolubile in acido cloridrico*.

Infine, altri gr. 10 del terreno venivano trattati con cm.^{3} 100 di acqua distillata, per 48 ore, a 25° C; e sopra il filtrato, riportato al volume primitivo, venivano determinati la *reazione* con carte di tornasole, i *nitrati* qualitativamente con soluzione solforica di difenilammina, ed i *sali solubili* svaporandone un'aliquota sopra capsula tarata.

La scelta, adunque, dei campioni che si sottoposero ai trattamenti analitici qui sopra descritti, fu fatta tenendo presenti tutte quelle circostanze geognostiche che già rilevai, in modo che il numero dei campioni stessi, dei quali sono in grado di produrre esame fisico, fisico-chimico ed analisi chimica completa, fornissero la conoscenza per quanto possibile esatta della intera zona sottoposta ai provvedimenti di bonifica, da me studiata. I risultati di queste mie ricerche si trovano ordinati nelle seguenti sei tabelle, in ciascuna delle quali ho procurato di riunire i dati di quei terreni che presentavano affinità reciproche, sulla cui base ho creduto opportuno di distinguere nella nostra campagna le seguenti regioni:

I. Valle del Tevere e dell'Aniene (tabella IV).
II. Regione NE, compresa fra la valle del Tevere e quella dell'Aniene (tabella V).
III. " E, dalla sinistra dell'Aniene alla via Appia antica (tabella VI).
IV. " SE, dalla via Appia Antica alla valle del Tevere (a valle di Roma), (tabella VII).
V. " SW, dalla valle del Tevere — a valle di Roma — alla via di Boccea (tabella VIII).
VI " NW, dalla via di Boccea alla valle del Tevere, a monte di Roma (Tabella IX).

Ai risultati di ciascuna analisi faccio precedere un cenno delle condizioni geognostiche e colturali del terreno cui appartiene il campione esaminato.

TABELLA IV.

Valle del Tevere e dell' Aniene.

	OGGETTO	I. — Serpentara. Valle del Tevere a nord di Roma: strato arabile, profondo oltre i m. 4; coltivato a frumento non concimato.	II. — Magliana. Valle del Tevere a sud di Roma: strato arabile, profondo, oltre i m. 4: prato naturale.	III. — Prati fiscali. Valle dell'Aniene: strato arabile, profondo circa m. 4; coltivato a frumento, non concimato.	IV. — Saccopastore. Valle dell'Aniene: strato arabile, profondo circa m. 4; coltivato a frumento, non concimato, e prato naturale.	V. — Ponte Mammolo. Valle dell'Aniene: strato arabile, profondo m. 3, a prato naturale.	Osservazioni
	I. — *Scheletro* . . . . %	1.8	2.5	—	—	—	
	Solubile in HCl . . »	1.2	2.0	—	—	—	
	II. — *Terra fina* . . . »	98.2	97.5	100 —	100 —	100 —	
Esame fisico	1. Colore	grigio molto chiaro	grigio-chiaro	grigio-chiaro	grigio-chiaro	grigio-chiaro	
	2. Peso di un litro . .	1190	1185	1180	1166	1145	
	3. Permeabilità. . . .	6540	6400	36	82	30	
	4. Imbibizione	51	52	62	53	70	
	5. Attrazione capillare .	44.1 (1)	40 2 (2)	44 (3)	38 (4)	35.5 (5)	
	6. Potere disseccante. .	7.8	7.9	6.3	7	5.7	
	7. Tenacità	42.0	39 5	24.0	36.0	20.0	
Esame fisico-chimico	1. Umidità . . . . %	9.50	8.20	7.75	7 60	7.10	
	2. Sostanza organica . »	5.35	4.80	12.55	7.25	5 22	
	3. Calcare . . . . »	20.00	21.50	17.20	10.40	25.10	
	4. Materie argilliformi »	59.80	60.15	50 35	63.52	49.25	
	5. Sabbie. . . . . »	2.95	3.25	11.80	9.47	10.40	
Analisi chimica	1. Azoto totale . . . »	0.168 0.161	0.160 0.159	0.196 0.190	0.170 0.168	0 170 0.165	
	» nitrico. . . »	tracce	tracce	tracce	tracce	tracce	
	» ammoniacale »	0 002	0.003	0.004	0 0012	0.004	
	2. Acido fosforico (P_2O_5) »	0 15	0.17	0.10	0.12	0.16	
	3. Ossido di ferro e all. »	1.25	2.20	10.50	7.35	12.15	
	4. Calce (CaO). . . »	10.41	11.30	6.63	6.90	13.05	
	5. Potassa (K_2O) . . »	0.35	0.32	0.40	0.42	0.84	
	6. Residuo insol. in HCl »	57 —	54 —	85 —	84 —	52 —	
	7. Reazione . . . . »	legg. alcalina	legg. alcalina	neutra	legg. alcalina	legg. alcalina	
	8. Sali solub. in acqua »	0.052	0.048	0.032	0.055	0 056	
	9. Cloruri (Cl) . . . »	tracce	tracce	tracce minime	tracce minime	tracce	
	10. Solfati (SO_3) . . »	0.008	0 009	0.004	0.003	0.004	

Osservazioni:

h.	Centimetri				
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
0	0	0	0	0	0
2	9	10	6	8	5.5
4	11.5	13	7.5	11	6.5
6	13	13.5	8.5	13.5	7
8	14	15	9.5	15	7.5
1	15				
12					

Tabella V.

Regione NE: compresa fra la valle del Tevere e quella dell'Aniene.

OGGETTO	VI. — Boccone. Collina: strato arabile, di profondità varia dai 5 ai 25 cm.; sottosuolo tufaceo-litoide; prato naturale.	VII. — Valle della Cecchina. Valle di altipiano: strato arabile, profondo oltre m. 2; in parte a frumento non concimato, in parte prato naturale.	VIII. — Boccone. Collina: strato arabile di profondità molto varia, non oltre i cm. 35: sottosuolo tufaceo-litoide; prato naturale.	IX. — Casale fiscale. Altipiano: strato arabile di profondità intorno ai cm. 30; sottosuolo di tufo granulare; coltivato a granella non concimato.	X. — Ponte Nomentano. Altipiano: strato arabile sopra tufo granulare, raggiungente quasi uniformemente i 50 cm.; prato naturale.
I. — *Scheletro* . . . . %	—	2.0	2.0	1.7	1.5
Solubile in HCl . . »	—	0.2	tracce	0.3	0.2
II. — *Terra fina* . . . »	100 —	98.0	98.0	98.3	98.5
Esame fisico					
1. Colore	grigio-chiaro (giallognolo)	grigio-scuro	grigio-chiaro (giallognolo)	grigio-scuro	grigio-legg. scuro
2 Peso di un litro . .	1080	1160	1155	1051	1058
3. Permeabilità. . . .	640	3600	960	108	122
4. Imbibizione	74	61	61	78	65
5. Attrazione capillare .	50 8 (1)	48.5 (2)	52 5 (3)	24 0 (4)	25.5 (5)
6. Potere dissecccante .	7.9	6 9	9.3	5.0	5.2
7. Tenacità	25.5	38.4	19.0	20.5	21.0
Esame fisico-chimico					
1. Umidità . . . . %	13.50	9 13	9.28	12.17	8.52
2. Sostanza organica. »	8.50	7.05	9.20	9.20	8.60
3. Calcare . . . . . »	0.50	0.55	0.54	0.45	0.62
4. Materie argilliformi »	47.00	71.80	47.25	56.80	64.86
5. Sabbie. . . . . . »	30.05	9.00	31.60	19.71	14.90
Analisi chimica					
1. Azoto totale . . . »	0.130 / 0.125	0.149 / 0.150	0.106 / 0 107	0.161 / 0.158	0.145 / 0.148
» nitrico . . »	tracce minime	tracce minime	tracce minime	tracce	tracce minime
» ammoniacale »	0 003	0.005	0.002	0.001	0.002
2. Acido fosforico (P_2O_5) »	0.16	0.18	0.09	0.55	0 39
3. Ossido di ferro e all. »	14.06	13.06	10.23	9.80	11.20
4. Calce (CaO) . . . »	0.55	0.42	0.39	0.43	0 54
5. Potassa (K_2O) . . »	0.30	0.22	0.24	0.30	0.42
6. Residuo insol. in HCl »	82 —	72 —	84 —	80 —	81 —
7. Reazione . . . . »	legg. alcalina	legg. alcalina	legg. alcalina	legg. alcalina	legg. alcalina
8. Sali solub. in acqua »	0.025	0.020	0.024	0.020	0.028
9. Cloruri (Cl) . . »	tracce minime	tracce minime	tracce minime	tracce minime	tracce
10. Solfati (SO_3) . . »	0.007	0.004	0.007	0.005	0.006

Osservazioni

h.	Centimetri (1)	(2)	(3)	(4)	(5)
0	0	0	0	0	0
2	11	10	11.5	8	8
4	15	13	15	11	10
6		15		13.5	12
8				15	13
10					
12					

TABELLA VI.

Regione E: dalla sinistra dell'Aniene alla via Appia antica.

	OGGETTO	XI. — Cervelletta. Altipiano: profondità del terreno vegetale intorno ai cm. 50; sottosuolo tufaceo; a frumento, non concimato.	XII. — Tor Sapienza. Altipiano: strato arabile, di rado profondo oltre i cm. 35; sottosuolo tufaceo litoide; prato naturale.	XIII. — Romavecchia. (a nord della Casilina) Altipiano: profondità del terreno vegetale intorno ai cm. 50; sottosuolo tufaceo litoide, prato naturale.	XIV. — Valle di Centocelle. (a nord della Casilina) Valle di altipiano: terreno vegetale profondo fino a m. 1,50; prato naturale.	XV. — Romavecchia. (a nord della Casilina) Altipiano: profondità del terriccio molto varia; spesso resta scoperto il sottosuolo tufaceo litoide; prato naturale.
	I. — *Scheletro* . . . . %	10.8	12.4	5.0	10.0	12.0
	Solubile in HCl . . »	0.9	1.5	1.2	1.3	1.8
	II. — *Terra fina* . . . »	89.2	87.6	95.0	90.0	88.0
Esame fisico	1. Colore	grigio-scuro (rossastro)	grigio-scuro	grigio-chiaro	grigio-scuro	grigio-chiaro
	2. Peso di un litro . .	1110	1070	1180	1140	1130
	3. Permeabilità . . .	142	227	576	109	575
	4. Imbibizione	60	65	57	62	55
	5. Attrazione capillare .	51.5 (1)	49.5 (2)	43.2 (3)	50.0 (4)	40.5 (5)
	6. Potere disseccante. .	8.9	6.8	6.0	9.5	8.6
	7. Tenacità	13.5	18.4	24.5	18.0	13.5
Esame fisico-chimico	1. Umidità . . . . %	6.16	6.05	8.26	6 15	6.96
	2. Sostanza organica. »	6.50	5.24	7.00	10.95	7.10
	3. Calcare . . . . »	0.42	0.38	0.58	0.51	0.65
	4. Materie argilliformi »	57.42	66.91	60.85	51.20	51.10
	5. Sabbie. . . . . »	24.50	17.52	18.20	20.60	21.70
Analisi chimica	1. Azoto totale. . . »	0.125 / 0.114	0.085 / 0.080	0.112 / 0.109	0.147 / 0.140	0.112 / 0.112
	» nitrico . . »	tracce	tracce minime	tracce minime	tracce	tracce minime
	» ammoniacale »	0.005	0.002	0.004	0.008	0.003
	2. Acido fosforico (P_2O_5) »	0.32	0.27	0.10	0.12	0.13
	3. Ossido di ferro e all. »	17.50	18.20	18.75	16.55	13.66
	4. Calce (CaO) . . . »	0 65	0.45	1.00	1.02	1.05
	5. Potassa (K_2O) . . »	0.42	0.32	0.37	0.52	0.30
	6. Residuo insol. in HCl »	74.5	72.5	69.5	76.0	80.0
	7. Reazione . . . . »	legg. alcalina	legg. alcalina	legg. alcalina	legg. alcalina	legg. alcalina
	8. Sali solub. in acqua »	0.045	0.018	0.023	0.020	0.022
	9. Cloruri (Cl) . . . »	tracce minime	tracce	tracce minime	tracce minime	tracce minime
	10. Solfati (SO_3). . . »	0.003	0.002	0.002	0.001	0.004

Osservazioni

h.	Centimetri (1)	(2)	(3)	(4)	(5)
0	0	0	0	0	0
2	9	8	9.5	8	10
4	13	9.5	15	15	15
6	15	12			
8		14			
10					
12					

Tabella VI (*sèguito*).

Regione E: dalla sinistra dell'Aniene alla via Appia antica.

OGGETTO	XVI. — **Prato di Centocelle.** Altipiano: strato arabile, profondo intorno a cm. 50; sottosuolo di tufo granulare; prato naturale.	XVII. — **Casale Romavecchia** (presso l'acquedotto) Altipiano: strato arabile, potente oltre cm. 50; prato naturale.	XVIII. — **Romavecchia.** (a nord della ferrovia) Altipiano: strato arabile molto vario, dai cm. 5 ai 40: sottosuolo tufaceo litoide; prato naturale.	XIX. — **Romavecchia.** (a sud della ferrovia) Altipiano: strato coltivabile molto vario, in media profondo cm. 30; sottosuolo litoide o tufaceo granulare; prato naturate.	XX. — **Arco di Travertino.** Altipiano: in genere strato arabile profondo oltre i cm. 40-50 (pozzolane); prato naturale.	*Osservazioni*
I. — *Scheletro* . . . . %	5.0	tracce	2.0	5.5	3.4	
Solubile in HCl . . »	0.6	—	0.2	0.8	0.3	
II. — *Terra fina* . . . »	95.0	110 —	98.0	94.5	96.6	
Esame fisico						
1. Colore.	grigio-scuro	grigio molto scuro	grigio-scuro	grigio-scuro (violaceo)	grigio-scuro (rossastro)	
2. Peso di un litro . .	1151	1156	1280	1320	1255	
3. Permeabilità . . .	840	252	872	611	521	
4. Imbibizione	63	74	53	52	44	
5. Attrazione capillare .	43.2 (1)	38.2 (2)	39.6 (3)	33.3 (4)	38.5 (5)	
6. Potere disseccante. .	10.3	11.3	7.7	7.6	9.4	
7. Tenacità	16.8	6.0	14.5	15.8	10,5	
Esame fisico-chimico						
1. Umidità . . . . %	9.60	12.04	9.55	9 57	7.25	
2. Sostanza organica. »	8.05	11.52	7.00	5.50	7.22	
3. Calcare . . . . »	0.61	0.50	0.42	0.40	0.53	
4. Materie argilliformi »	37.00	42 10	52.25	43.85	48.90	
5. Sabbie. . . . . »	39.40	33.81	28.30	34.75	38.90	
Analisi chimica						
1. Azoto totale. . . »	0.147 0.145	0.231 0.221	0.126 0.130	0.112 0.119	0.134 0.142	
» nitrico . . »	tracce	tracce sensibili	tracce	tracce minime	tracce	
» ammoniacale »	0.010	0.008	0.003	0.006	0.004	
2. Acido fosforico (P_2O_5) »	0.38	0.09	0.20	0.20	0.17	
3. Ossido di ferro e all. »	15.12	6.18	12.80	13.33	14.20	
4. Calce (CaO). . . »	0.92	0.23	0.90	0.93	0.60	
5. Potassa (K_2O) . . »	0.65	0.62	0.72	0.85	0.64	
6. Residuo insol. in HCl »	67 —	70 —	65 —	66 —	68 —	
7. Reazione . . . . »	legg. alcalina	neutra	legg. alcalina	legg. alcalina	legg. alcalina	
8. Sali sol. in acqua . »	0.022	0.020	0.016	0.018	0.025	
9. Cloruri (Cl) . . . »	tracce	tracce minime	tracce minime	tracce minime	tracce	
10. Solfati (SO_3) . . »	0.004	0.001	0.001	0.001	tracce	

Osservazioni:

h.	Centimetri (1)	(2)	(3)	(4)	(5)
0	0	0	0	0	0
2	15	10	15	14	12
4		12.5		15	13.5
6		15			15
8					
10					
12					

Tabella VII.

Regione SE: dalla via Appia antica alla valle del Tevere (a valle di Roma).

OGGETTO		XXI. — Grotta Perfetta. Altipiano: dissodato a cm. 50 con sottosuolo tufaceo, coltivato a frumento.	XXII. — Tre Fontane. Altipiano: strato arabile, di spessore variabile intorno a cm. 35-40; sottosuolo tufaceo litoide; prato naturale.	XXIII. — Sant'Alessio. Altipiano: strato arabile, di spessore vario intorno ai cm. 35-40; sottosuolo tufaceo litoide; prato naturale.	XXIV. — Cecchignola. Altipiano: strato arabile, profondo cm. 30-40; sottosuolo di tufo litoide; prato naturale.	XXV. — Valle di Acquacetosa. Valle di altipiano: strato coltivabile, superiore a m. 2 di profondità; coltivato a frumento.	*Osservazioni*
	I. — *Scheletro* . . . . %	11.2	7.0	4.8	6.6	5.3	
	Solubile in HCl . . »	0.4	0.3	0.2	0 3	0.4	
	II. — *Terra fina* . . . . »	88.8	93.0	95.2	93.4	94.7	
Esame fisico	1. Colore	grigio-chiaro	grigio-scuro	grigio-chiaro	grigio-scuro	grigio-scuro	
	2. Peso di un litro . .	1092	1145	1120	1150	1180	
	3. Permeabilità . . .	430	725	640	605	1838	
	4 Imbibizione	68	54	62	50	48	
	5. Attrazione capillare .	38.0 (1)	40.2 (2)	48.7 (3)	46.2 (4)	38.5 (5)	
	6. Potere disseccante .	8.5	7.0	7.4	7.6	5.4	
	7. Tenacità	12.0	14.5	13.6	11.6	16.9	
Esame fisico-chimico	1. Umidità . . %	7.25	8.15	9.05	6.70	5.98	
	2. Sostanza organica »	5.10	7.51	5.78	8.22	6.31	
	3. Calcare . . . . »	0 72	0.52	0.49	0.44	0.65	
	4. Materie argilliformi »	60.09	64.44	66.47	65.24	72.36	
	5. Sabbie. . . . . »	27.11	18.30	19.25	17.30	13.40	
Analisi chimica	1. Azoto totale. . . »	0.115 0.122	0.143 0.130	0.124 0.121	0.135 0.128	0.139 0.139	
	» nitrico . . »	tracce	tracce minime	tracce	tracce	tracce	
	» ammoniacale »	0 006	0.002	0.002	0.003	0.004	
	2. Acido fosforico (P_2O_5) »	0.41	0.37	0.25	0.42	0.26	
	3. Ossido di ferro e all. »	22.10	21 40	18.32	23.15	16.29	
	4. Calce (CaO). . . »	0.61	0.29	0.30	0.40	0.59	
	5. Potassa (K_2O) . . »	0 68	0.53	0.31	0.54	0.32	
	6. Residuo insol. in HCl »	68.5	71.4	73.9	72.9	66.6	
	7. Reazione . . . . »	legg. alcalina	legg. alcalina	legg. alcalina	legg. alcalina	legg. alcalina	
	8. Sali sol. in acqua. »	0.032	0.020	0.018	0 019	0.029	
	9. Cloruri (Cl). . . »	tracce	tracce	tracco	tracce	tracce	
	10. Solfati (SO_3) . . »	0.006	0.003	0.004	0.005	0.002	

Osservazioni:

h.	Centimetri (1)	(2)	(3)	(4)	(5)
0	0	0	0	0	0
2	10	10.5	11	11.5	9
4	13	15	15	15	11.2
6	15				13
8					14
10					15
12					

Tabella VIII.

Regione SW: dalla valle del Tevere (a valle di Roma) alla via di Boccea.

OGGETTO	XXVI. — Infernaccio. Colle: strato arabile, profondo circa 10-20 cm.; sottosuolo tufaceo; prato naturale.	XXVII. — La Pisana. Altipiano: profondità dello strato arabile varia fra cm. 15 e 40; sottosuolo tufaceo; prato naturale.	XXVIII. — Santo Spirito. Colle: profondità del terreno coltivabile molto varia, fra cm. 10 e 40; sottosuolo tufaceo litoide; incolto.	XXIX. Valle della Maglianella. Valle di altipiano: terreno profondo oltre m. 2; sottosuolo tufaceo; prato naturale.	XXX. — Valle di Acquafredda. Valle di altipiano: terriccio profondo oltre m. 2; sottosuolo tufaceo e sabbioso; incolto.	Osservazioni
I. — *Scheletro* . . . . °/o	4.8	6.4	4.2	5.0	9.2	
Solubile in HCl . . »	0.3	0.2	0.3	0.3	0.4	
II. — *Terra fina* . . . »	95.2	93.6	95.8	95.0	90.8	
Esame fisico						
1. Colore	grigio-chiaro	grigio-chiaro	grigio-chiaro	grigio-legg. scuro	grigio-legg. scuro	
2. Peso di un litro . .	1100	1128	1150	1080	1140	
3. Permeabilità. . . .	321	450	214	1720	1430	
4. Imbibizione	48	49	56	50	55	
5. Attrazione capillare .	42.0 (1)	39.0 (2)	44 5 (3)	38.0 (4)	41.0 (5)	
6. Potere disseccante .	8.4	8.2	7.5	6.2	6.9	
7. Tenacità	9.2	10.5	11.4	19.2	54.8	
Esame fisico-chimico						
1. Umidità . . . °/o	7.25	8.38	5.42	8 47	7.24	
2. Sostanza organica. »	5.50	6.10	4.65	4.02	8.84	
3. Calcare . . . »	0.45	0.60	0.51	0.75	0.66	
4. Materie argilliformi »	35.90	38.55	43.92	51.19	42.44	
5. Sabbie . . . . . »	51.10	44.87	45.20	32.17	42 80	
Analisi chimica						
1. Azoto totale . . . °/o	0 102 0.118	0.125 0.126	0.105 0.114	0.126 0.131	0.151 0 160	
» nitrico . . »	tracce minime	tracce	tracce minime	tracce	tracce	
» ammoniacale »	0.002	0.004	0.003	0.005	0.007	
2. Acido fosforico (P_2O_5) »	0.36	0.49	0 61	0.32	0.44	
3. Ossidi di ferro e all. »	14.05	13.21	12.25	9.05	15 21	
4. Calce (CaO) . . . »	0.40	0.35	0.34	0.70	0.72	
5. Potassa (K_2O) . . »	0.38	0.36	0.40	0.38	0.37	
6. Residuo insol. in HCl »	79 —	72.5	81 —	72 40	69.95	
7. Reazione . . . . »	legg. alcalina	legg. alcalina	legg. alcalina	legg. alcalina	legg. alcalina	
8. Sali solub. in acqua »	0.021	0.023	0.024	0.018	0.029	
9. Cloruri (Cl) . . . »	tracce	tracce	tracce	tracce	tracce	
10. Solfati (SO_3) . . »	0.002	0.004	0.004	0.006	0.005	

Osservazioni:

h.	Centimetri (1)	(2)	(3)	(4)	(5)
0	0	0	0	0	0
2	12.5	12	12	11	12
4	15	15	15	13	13.5
6				14.5	15
8					
10					
12					

Tabella IX.

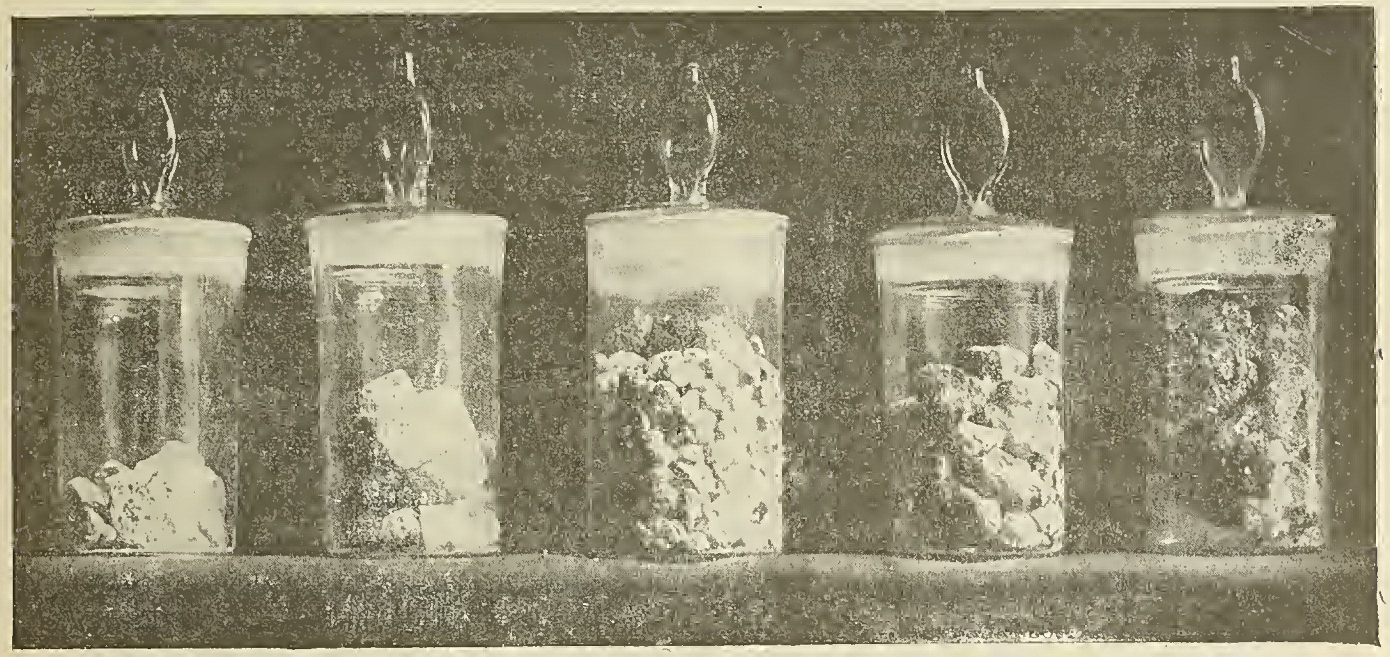
Regione NW: dalla via di Boccea alla valle del Tevere (a monte di Roma).

	OGGETTO	XXXI. — Piana di marmo. Altipiano: strato arabile, profondo intorno ai cm. 30-40; sottosuolo tufaceo; incolto.	XXXII. — Acquatraversa. Collina: strato arabile, di spessore intorno a cm. 15-40; sottosuolo di sabbie e tufi terrosi; bosco	XXXIII. — Monte dell'Ara. Colle: strato arabile di profondità molto varia, non superiore a cm. 40; talvolta è scoperto il sottosuolo di tufo litoide; prato naturale.	XXXIV. — Valle d. Crescenza. Valle di altipiano: strato arabile, di profondità superiore ai m. 2; coltivato a foraggere (leguminose e rape), non concimato.	XXXV. — Valchetta. Collina: strato arabile di varia profondità, di rado superiore ai cm. 50; sottosuolo tufaceo; prato naturale.	*Osservazioni*
	I — *Scheletro* . . . . %	5 6	3.5	6.2	2.3	3.5	
	Solubile in HCl . . »	0.6	0.4	0.5	0.3	0 4	
	II — *Terra fina* . . . »	94.4	96.5	93.8	97.7	96.5	
Esame fisico	1. Colore	grigio-chiaro	grigio-chiaro	grigio-chiaro	grigio-scuro	grigio-chiaro	
	2. Peso di un litro . .	1118	1085	1100	1185	1095	
	3. Permeabilità. . . .	340	210	672	2455	520	
	4. Imbibizione	57	54	67	52	72	
	5. Attrazione capillare .	42.5 (1)	40.7 (2)	42 5 (3)	39.5 (4)	48.0 (5)	
	6. Potere disseccante .	8.7	7.6	10.2	7.7	8.2	
	7. Tenacità	8.5	9.2	6.5	17.2	12.5	
Esame fisico-chimico	1. Umidità . . . . %	6.25	6.78	8.24	7.92	7.45	
	2. Sostanza organica. »	5.25	8 37	4.35	6.40	8.21	
	3. Calcare . . . . »	0.71	0.60	0 51	0.67	1.15	
	4. Materie argilliformi »	54.05	34.30	50.70	72.12	59.18	
	5. Sabbie. . . . . »	31.73	48.95	34.20	12.10	22.00	
Analisi chimica	1. Azoto totale. . . »	0.121 / 0.118	0.190 / 0 205	0.090 / 0 110	0.134 / 0.134	0.135 / 0.140	
	» nitrico . . »	tracce minime	tracce	tracce minime	tracce	tracce	
	» ammoniacale »	0.004	0.008	0 002	0.005	0.004	
	2. Acido fosforico (P_2O_5) »	0.31	0.22	0.29	0.21	0.32	
	3. Ossidi di ferro e all. »	10.25	11.47	14.22	15.30	14.62	
	4. Calce (CaO). . . »	0 42	0.51	0.60	0.74	0.94	
	5. Potassa (K_2O) . . »	0.38	0.32	0.44	0.42	0.68	
	6. Residuo insol. in HCl »	80 —	76.5	79 —	67 —	71 —	
	7. Reazione . . . . »	legg. alcalina	neutra	legg. alcalina	legg. alcalina	neutra	
	8. Sali sol. in acqua. »	0.019	0.025	0.018	0.030	0.034	
	9. Clorari (Cl) . . . »	tracce	tracce	tracce minime	tracce	tracce	
	10. Solfati (SO_3) . . »	0.004	0.002	tracce	0.004	0.005	

Osservazioni

h.	Centimetri (1)	(2)	(3)	(4)	(5)
0	0	0	0	0	0
2	11.5	12	11	9	10
4	15	15	13	12	13.5
6				13.5	15
8				15	
10					
12					

Lo *scheletro* dei terreni agrarî della nostra campagna è, in generale, molto scarso. Si hanno terreni dove si può dire che esso manchi completamente, mentre in alcuni altri supera di poco il 10 %. Esso è costituito o da ciottoletti e ghiaie, come accade d'incontrare nelle valli del Tevere e dell'Aniene (fig. 4*a*); o da frammenti di rocce dure e da pezzi estranei accidentali trasportati nelle antiche alluvioni, come si osserva spesso nella zona della Roma vecchia (fig. 4*b*); o, più frequentemente, da pezzi di tufo di varia natura ed in uno stato di maggiore o minore degradazione. È questa una circostanza la quale può assumere un certo valore nella costituzione dei terreni



a. *b.* *c.* *d.* *e.*

Fig. 4.

della Campagna romana, in quanto che vi sono dei casi nei quali lo scheletro risulta da nuclei piuttosto piccoli e scarsi, di origine tufacea, i quali per la loro speciale natura hanno resistito attraverso i tempi all'attacco degli agenti esterni: e ciò accade di osservare nelle località pianeggianti (fig. 4*c* e *d*). Vi sono anche altri casi nei quali lo scheletro è costituito da frammenti di tufo facilmente disgregabile, distaccantisi per varie influenze dalla roccia madre, destinato a compiere, sia pure transitoriamente, la propria importante funzione di solutore della continuità della terra fina. Nella fig. 4, in *e*, può osservarsi un esempio dello scheletro ricavato dai terreni della tenuta Boccone. Un siffatto materiale gode di proprietà scheletriche in grado più elevato di quello presentato dagli scheletri che più comunemente s'incontrano, poichè presenta grandi angolosità ed anfrattuosità; offre, però, lo svantaggio di un'esistenza temporanea, essendo destinato a trasformarsi, entro un lasso di tempo relativamente breve, in terra fina ricca di quegli elementi della fertilità di cui esso stesso abbonda. Nonostante questa caratteristica, al coltivatore è sempre possibile di mantenere con esso provvisto il suolo in quella misura che le speciali circostanze richiedono, regolando la profondità dei lavori di dissodamento.

Si suole distinguere nello scheletro la parte insolubile in acido cloridrico e quella in esso solubile. Tale ricerca, da me condotta anche nel presente studio, ha messo in luce come sia ben piccola e quasi trascurabile la frazione di scheletro solubile in tutti i campioni di terra, ad eccezione di quelli provenienti dalle valli dell'Aniene e del Tevere dove la solubilità stessa è in diretto e stretto rapporto con la natura calcare dei terreni.

L'esame delle proprietà fisiche delle terre romane ci presenta altre notevoli circostanze di fatto.

Le terre hanno generalmente un *colore* grigio, che dai toni più chiari. proprî delle valli del Tevere e dell'Aniene, attraverso una gamma continua, passa ad un bruno molto scuro, caratteristico di quelle località dove predominano le pozzolanelle. Sono frequenti anche le tinte giallognole o passanti al rossastro ed al violaceo, in dipendenza delle varie rocce tufacee originarie.

Il *peso* è stato trovato oscillare fra gr. 1054 e 1320 per litro di terra: e ciò con notevole concordanza con i risultati del Viola. Venne determinato solo quello apparente, in quanto che esso può bastare agli scopi del presente studio. I terreni più leggeri si sono dimostrati quelli di origine tufacea recente (ad es., quelli nelle località di Boccone, Casale Fiscale e Ponte Nomentano); i più pesanti sono quelli di alluvione antica (ad es., quelli di alcune parti della tenuta di Romavecchia). Occupano un posto di mezzo i terreni di alluvione recente ed i tufacei, antichi e potenti.

La *permeabilità* si trova in ragione inversa con il contenuto in materie argilliformi. I diversi valori di essa sono espressi con un numero di ore comprese fra 30 e 6500, necessarie al passaggio di due litri di acqua attraverso una colonna di terra di cm. 15 di altezza e cm. 2 di diametro. Il massimo numero di ore, e che denota perciò una permeabilità abbastanza piccola, si ha, ad es., per i terreni della valle del Tevere. Simili, sotto questo rapporto, sono, in genere, quelli delle valli di altipiano (ad es., della Crescenza, di Acquacetosa, della Cecchina, ecc.). Molto permeabili sono i terreni della valle dell'Aniene.

L'*imbibizione*, determinata con il metodo suesposto, presenta oscillazioni non molto notevoli e segue con una certa approssimazione l'attrazione capillare.

L'*attrazione capillare* è massima nei terreni tufacei, minima in quelli di trasporto (soprattutto nei recenti), e, fra essi, segnatamente in quelli delle valli del Tevere e dell'Aniene. Per il *potere disseccante* avviene il contrario: nei terreni tufacei si ha un rapido disseccamento.

La *tenacità*, infine, è generalmente grande nelle nostre terre. Più tenaci sono certo quelle dell'alluvione del Tevere e dell'Aniene; seguono, in ordine decrescente, quelle delle valli di altipiano quelle di alluvione antica (Romavecchia), i terreni di altipiano della sinistra del Tevere; da ultimo, quelli alla destra.

L'esame fisico-chimico rivela ancora altre particolarità delle terre dell'Agro.

Alla determinazione dell'*umidità*, od acqua igroscopica, dei campioni di terra fina preparati per lo studio, non voglio annettere molta importanza. Ciò che ha un grande significato è il contenuto effettivo di acqua dei terreni quale risultato, in relazione alle differenti epoche dell'anno, di quel complesso di circostanze di conformazione e di costituzione del suolo non meno che del sottosuolo, le quali

rappresentano la caratteristica della regione: ma di tale contenuto sarà parola in seguito.

Del tenore in *sostanza organica* è anche il caso di occuparci estesamente poi (cap. VI), in quanto che essa possiede un interesse generale e molto maggiore di quello che si vuole ordinariamente ammettere dai pratici stessi nel caso speciale della campagna romana.

Di *calcare* vi è grande penuria in tutti i terreni dell'Agro che non siano compresi nelle valli del Tevere e dell'Aniene. Qui abbiamo cifre intorno al 20-25 %, calcolate come carbonato calcare, che possono anche scendere al 10 % (Saccopastore); ma altrove si ottenne soltanto un massimo dell' 1.15 %, discendendosi fino ad un minimo del 0.38 %. Questo è un altro fatto veramente notevole che si verifica nella regione intorno a Roma e che, deve riconoscersi, ha avuto e deve tuttora avere una grande peso nelle condizioni agricole locali.

Abbondano, al contrario, le *materie argilliformi*, dalle quali dipende quella tenacità delle terre già rilevata. Con esse si raggiungono valori particolarmente elevati nelle località situate sulla sinistra del Tevere. Ivi tali materie costituiscono fino il 70 72 % della terra fina. Non molto al di sotto scendono le relative cifre per i terreni delle valli del Tevere e dell'Aniene. Un distacco molto forte si nota per le cifre riferentisi alle materie argilliformi degli altipiani a SW: il minimo trovato è, ad ogni modo, del 35.90 %.

Le *sabbie* abbondano in corrispondenza di questi ultimi terreni, fino a costituire il 50 e più per cento del peso totale, compreso in esso quello dell'acqua igroscopica. Scarse sono specialmente nelle località dell'altipiano sulla sinistra del Tevere, dove, è necessario di notare, non si tratta di silice come è prevalentemente sulla destra dello stesso fiume, ma di frammenti tufacei più coerenti e destinati a subire ulteriori, sebbene più lente, trasformazioni. Anche nelle valli del Tevere e dell'Aniene le sabbie sono scarse, anzi molto più scarse che non altrove, discendendo fino al 3 %.

I risultati dell'analisi chimica permettono di giudicare molto più da vicino il valore del capitale-terreno della nostra campagna, delle attitudini o meno ch'esso presenta alla coltivazione, delle pratiche agricole, delle quali può e deve formare oggetto.

In quasi tutte le analisi che si conoscono dei terreni della campagna romana è stata omessa la determinazione del principale elemento della fertilità. Allo scopo, quindi, di stabilire la provvista in essi dell'*azoto* nelle sue principali forme, ho eseguito analisi molto più numerose di quelle che sono riportate nelle precedenti tabelle: analisi, delle quali riferirò i risultati in seguito, valendomene per tracciare una speciale carta agronomica. Le ricerche eseguite sopra i trentacinque campioni di terreno, in condizioni geognostiche ben differenti, delle quali ho poco innanzi prodotto i risultati, bastano però a dimostrare la *generale povertà dei terreni dell'Agro per quanto si riferisce a quell'elemento che quasi normalmente è fra i principali moderatori della vegetazione sopra un determinato suolo.* Gr. 0.08 % a Tor Sapienza, 0.09 % all'Infernaccio, 0.10 %, a Boccone sono provviste di azoto totale effettivamente scarse in un terreno coltivabile che è, in genere, di poco spessore.

I più frequenti sono i terreni con un titolo di azoto compreso fra 0.11 e 0.15 %. Terreni con azoto totale superiore al 0.15 % sono localizzati nelle valli dei maggiori

corsi d'acqua perenni. Eccezionalmente troviamo raggiungersi e sorpassarsi un titolo del 0.20 % di azoto. Ciò avviene per circostanze strettamente locali: così, ad es., a Romavecchia; in appezzamenti adiacenti alla marrana dell'acqua Mariana protetti dall'ombra dell'acquedotto Felice; nella macchia di Acquatraversa; in alcuni punti acquitrinosi.

La forma ammoniacale dell'azoto è scarsissima ovunque: si tratta costantemente di piccole quantità, più sensibili però di quelle dell'azoto nitrico che, anche nelle epoche dell'anno più favorevoli alla nitrificazione (come sarà più estesamente detto in appresso), trovasi solo in tracce, talvolta, anzi, svelabili con difficoltà.

Fa singolare contrasto a questa povertà di riserva azotata la *ricca dotazione dei terreni romani in acido fosforico e potassa*. Tale fatto è spiegato dalla composizione chimica del sottosuolo originatosi per cause plutoniche, in condizioni nelle quali doveva essere certo difficile la ritenzione dei composti azotati. Nel sottosuolo della Campagna romana si hanno, in genere, piccolissime quantità di azoto, mentre le stesse rocce sono quasi tutte ricche di anidride fosforica e soprattutto di potassa, che abbonda allo stato di leucite, della quale non è infrequente il notare che grossi cristalli entrino a far parte dello scheletro. Per quanto si riferisce all'azoto, è possibile di trovare — come appresso si dirà — una norma di distribuzione nell'Agro, dalla quale ho anche tratto molto giovamento nel disegnare la relativa carta agronomica; ma per gli altri due elementi non può affermarsi altra circostanza che quella di essere largamente distribuiti nelle nostre terre. Difatti, se si eccettuano i terreni di trasporto della valle del Tevere e di quella dell'Aniene, dove la quantità di acido fosforico si aggira intorno a gr. 0.15 % di terra fina, in tutti gli altri, in specie in quelli autoctoni, la quantità della stessa sostanza scende raramente al di sotto del 0.20 %. Ciò accade solo nelle località dell'alluvione, sia antica sia recente, mentre altrove sono frequentissimi i valori intorno al 0.40 % e che raggiungono fino il 0.61 %.

Per la *potassa* si hanno cifre ancora più elevate. Il minimo nei terreni di trasporto è del 0.22 %; il massimo, in quelli su posto, è del 0.85 %. Anche nei terreni più poveri, che per il complesso di tutte le altre loro qualità si dimostrerebbero meno adatti alla coltura, è quasi costante il fatto della ricchezza in acido fosforico e potassa. Si osservino, ad es., i risultati delle analisi delle terre del monte dell'Ara' della stessa tenuta di Boccone che fa parte di una zona fra le più ingrate del territorio circostante a Roma ed in cui rientrano le tenute di Redicicoli, della Buffalotta ecc., delle quali è ben conosciuta la sterilità.

Il contenuto in detti elementi della produzione oscilla, come vedesi entro limiti piuttosto ristretti: tuttavia varia frequentemente da luogo a luogo, ciò che rende molto difficile il disegnare le relative carte agronomiche. Non ho creduto quindi opportuno di occuparmi di queste, avuto anche riguardo alla loro poca importanza pratica, non facendo difetto nell'Agro nè acido fosforico, nè potassa; e non è davvero imputabile ad essi la improduttività delle nostre terre od il sospetto della incapacità a divenire oggetto di una razionale coltivazione.

La *calce* è presente nella valle dell'Aniene e, più, in quella del Tevere; altrove, però, i terreni ne sono quasi sprovvisti o, ad ogni modo, ne sono forniti in misura inferiore al bisogno. È quanto è stato già detto a proposito del carbonato calcare

determinato negli stessi campioni di terra a mezzo dell'esame fisico-chimico. Trattasi di una circostanza molto grave.

Gli *ossido di ferro e di alluminio* sono abbondantissimi ovunque: nelle valli dell'Aniene e del Tevere sono però presenti in misura minore che non altrove.

Le determinazioni del *residuo insolubile* non si prestano a particolari riflessioni. Sono, invece, abbastanza importanti i dati ricavati dall'analisi dell'estratto acquoso dei terreni.

I *sali solubili* sono contenuti entro limiti assolutamente bassi. Di *cloruri* si hanno quantità piccolissime dappertutto: di *solfati* — passanti in soluzione nel trattamento con acqua leggermente cloridrica per la determinazione del carbonato calcare — se ne hanno, parimenti, solo piccole quantità.

Questi risultati mi sembra adunque che presentino un notevole accordo con quei pochi che fino ad ora si possedevano intorno alla composizione chimica dei terreni della Campagna romana. Solo è da osservare, per alcune divergenze con i dati analitici del Viola, che l'attacco acido da lui praticato sopra i suoi sette campioni è stato più energico di quello che ordinariamente si suole consigliare per il giudizio sopra il valore agricolo di una terra, mentre io credetti opportuno di effettuare un attacco più debole in quanto oggi si vuole che esso debba differire il meno possibile da quello di cui sono capaci gli agenti naturali del terreno e delle radici delle piante.

Le mie trentacinque analisi complete di terre, oltre che confermare alcuni pochi fatti già noti, dànno un'idea generale della natura chimica e quindi, in gran parte, dell'attitudine alla produzione della intera zona romana dei 10 km. sottoposta alle leggi di bonifica, poichè la scelta dei campioni venne fatta con criterî nei quali si tenne appunto conto delle due circostanze caratteristiche locali già da me rilevate al principio di questo capitolo. Dall'esame delle condizioni geognostiche si deduce, infatti, come il cosidetto altipiano romano sia inciso, o, meglio, più o meno profondamente laciniato da vallecole, le quali concorrono alle grandi valli del Tevere e dell'Aniene. Così riesce opportuna la distinzione morfologica del suolo romano in valle, valle di altipiano, altipiano, *spallette* (pendenze superiori al 15 %), a ciascuna delle quali località corrisponde un terreno coltivabile, rispettivamente profondo, semi-, o poco, o pochissimo profondo. Orbene, a tali diverse circostanze si accompagnano speciali caratteri di costituzione fisica e chimica, che possono desumersi dall'esame delle tabelle analitiche prodotte e formularsi nelle seguenti linee principali:

Valli del Tevere e dell'Aniene. — Terre chiare, povere di scheletro solubile, pesanti, poco permeabili e fortemente argillose, molto tenaci, profonde; scarseggianti di sostanza organica e di sabbie, ben provviste di carbonato calcare. L'azoto vi si trova in proporzioni medie; l'acido fosforico e la potassa vi si trovano in proporzioni minori; gli ossidi di ferro e di alluminio sono scarsi; di solfati, cloruri e sali solubili vi sono quantità minime.

Valli di altipiano. — Terre semiscure, povere di scheletro insolubile, mediocremente pesanti, mediocremente permeabili ed argillose, tenaci, semi-profonde; scar-

seggianti di sostanza organica e di sabbie, quasi prive di carbonato calcare: l'azoto vi si trova in proporzioni minori a quelle che si hanno nelle valli dell'Aniene e del Tevere; l'acido fosforico e la potassa, presso a poco nelle stesse quantità; vi abbondano gli ossidi di ferro e di alluminio; di solfati, cloruri e sali solubili si hanno solo tracce.

Altipiano. — Terre scure o con riflessi di vario colore, mediocremente provviste di *falso* scheletro insolubile, leggere (o pesanti nelle alluvioni antiche), permeabili, mediocremente argillose e altrettanto tenaci, poco profonde; in genere con mediocri quantità di sostanza e talvolta abbondanti di sabbie, quasi prive di carbonato calcare. L'azoto vi si trova in piccole quantità, mentre di acido fosforico e potassa sono abbondantemente provviste; gli ossidi di ferro e di alluminio sono in minori proporzioni solo dove abbondano le sabbie; di solfati, cloruri e sali solubili si hanno quantità piccolissime.

Spallette. — Terre semi-scure, mediocremente provviste di scheletro insolubile, leggere, permeabili, mediocremente argillose e tenaci, di profondità minima ed irregolare; poverissime di sostanza organica e di sabbie, quasi prive di carbonato calcare. L'azoto, l'acido fosforico e la potassa vi scarseggiano; gli ossidi di ferro e di alluminio sono presenti in media proporzione; i solfati, i cloruri ed i sali solubili, solo in tracce.

Volendo stabilire, in base a queste risultanze, una scala di fertilità, si debbono collocare in ordine decrescente: valli del Tevere e dell'Aniene, valli di altipiano, altipiano, spallette. Si noti, però, che la diminuzione della fertilità non è da ascriversi alle stesse cause. L'altipiano è costituito, in complesso, da terreni più ricchi di quelli delle valli del Tevere e dell'Aniene, nelle quali si trovano, in genere, terreni più poveri di quelli delle valli di altipiano. Di fronte ai terreni delle due maggiori valli della Campagna romana, tutti gli altri, dal punto di vista agricolo, presentano il grave difetto di essere *incompleti*. Qualora fosse possibile di ovviare a tale grave circostanza — ciò che in moltissimi casi, come in appresso si vedrà, deve esserlo — e si potessero avere, tanto sull'altipiano quanto nelle sue valli, terreni completi, la detta scala di fertilità verrebbe ad essere modificata come segue: altipiano, valli di altipiano, valli del Tevere e dell'Aniene, spallette. Questa potrebbe dirsi una scala dell'*attitudine colturale* dei terreni dell'Agro romano: della fertilità, cioè, di cui essi godono in potenza e che determina la maggiore o minore possibilità di formarne oggetto di cure di bonifica.

Come ho creduto opportuno di mettere i risultati delle mie analisi di terra in relazione con la morfologia del sottosuolo, così reputo necessario di mettere i medesimi in relazione con la natura dei suoi principali materiali costitutivi. In verità, i principali di essi non appartengono a categorie nè molto numerose, nè troppo diverse. Predominano i tufi; in seconda linea vengono le pozzolanelle; quindi le sabbie gialle; infine, limitati affioramenti di leucitite. Una differenza notevole venne, però, già notata da parecchio tempo dai geologi per quanto si riferisce soprattutto alla distribuzione di detti materiali in rapporto al corso del Tevere. Il De Angelis d'Ossat — il quale si è occupato più volte, con particolare competenza e speciale preferenza, delle questioni geologiche della campagna romana — ha contribuito validamente a stabilire la diffe-

renza fra la riva destra e la sinistra del detto fiume e che precisa nelle seguenti successioni stratigrafiche [1]:

Destra del Tevere:	Sinistra del Tevere:
tufi vulcanici,	formazione del Tavolato,
marne e sabbie fluviali,	colata di Capo di Bove,
ghiaie con molti elementi vulcanici,	pozzolane bigio-scuro a SW. del vulcano Laziale,
tufi vulcanici granulari o terrosi,	pozzolanelle,
sabbioni di duna, ocracei, con lenti argillose,	tufo litoide,
depositi di stagno marnoso-argillosi spesso intercalati da ghiaie,	pozzolane grigie,
ghiaie di spiaggia raramente cementate,	tufo giallo, conglomerato con tufi terrosi,
sabbie grigie e gialle, generalmente sciolte, marine; marne marine.	pozzolane rosse,
	lave di Casal Brunori, Vallerano, ecc.,
	tufi pisolitici,
	marne,
	sabbie e ghiaie,
	marne marine.

Predominio, adunque, di sottosuolo sabbioso e di tufi granulari sulla destra del Tevere; di sottosuolo di pozzolanelle e tufi litoidi sulla sinistra (confr. le sezioni della tav. II). Di conseguenza, si ha l'attitudine alla formazione di un terreno coltivabile più sciolto e meno ricco, a destra; di un terreno agrario, al contrario, meno sciolto e più ricco, a sinistra. E le mie analisi confortano questa deduzione, la quale fornisce un'altra base di giudizio per stabilire il valore agrario dei nostri terreni.

Dopo tutto ciò, appariranno sufficientemente giustificate la distinzione, che io ho fatta sul principio di questo capitolo, delle sei zone circondanti la città, e la classifica, da me stabilita, delle trentacinque analisi di terra da me eseguite.

Le principali caratteristiche delle zone sono riassuntivamente le seguenti:

1ª) *Valli del Tevere e dell'Aniene.* Pianura valliva: terreni profondi, calcareo-argillosi, completi, fertili.

2ª) *Regione NE.* Altipiano montuoso: terreni alquanto potenti nelle vallecole, altrove di poca profondità, argillosi, sprovvisti di calcare, incompleti, poco fertili [2].

3ª) *Regione E.* Altipiano pianeggiante: in parte costituito da antiche alluvioni, terreni mediocremente profondi, argillosi, sprovvisti di calcare, incompleti, mediocremente fertili.

[1] G. De Angelis d'Ossat, *I terreni acquitrinosi della campagna romana.* Boll. Soc. agric. ital., n. 11, an. 1902.

[2] I terreni di questa regione — poco fertili, come si è visto — fanno passaggio a quelli, ancora meno fertili, di una zona più distante, non compresa nel raggio dei 10 km. e che corrisponde alla tenuta della Bufalotta e del Quartaccio. Il suolo è ivi particolarmente ingrato: i pecorai stessi asseriscono che ivi « non cresce neppure l'erba! ». Per avere un'idea della cattiva qualità dei detti

4ª) *Regione SE.* Altipiano montuoso: terreni poco potenti, argillosi, sprovvisti di calcare, incompleti, mediocremente fertili.

5ª) *Regione SW.* Altipiano montuoso: terreni di potenza piccola e variabile, tranne che nelle vallecole, argilloso-sabbiosi, sprovvisti di calcare, incompleti, poco fertili.

6ª) *Regione NW.* Altipiano montuoso: terreni poco potenti, argillosi, con minore proporzione di sabbia che non i precedenti sprovvisti di calcare, incompleti, poco fertili.

---

terreni: prelevai due campioni di terra, uno, appunto, dal cosiddetto Quartaccio; l'altro vicino alla chiesuola della Bufalotta. I risultati ottenuti furono i seguenti:

OGGETTO	I. Quartaccio	II. Chiesuola Bufalotta
I. — *Scheletro* . . . . %	2.7	0.5
Solubile in HCl . . . . "	0.3	tracce
II. — *Terra fina* . . . . "	97.3	99.5
1. Colore	grigio chiaro	grigio molto chiaro
2. Peso di un litro	1200	1090
3. Permeabilità	5124	3200
4. Imbibizione	55	58
5. Attrazione capillare	25	21
6. Potere disseccante.	4.4	6.4
7. Tenacità	38.2	30.6
1. Umidità . . . . %	8.30	10.51
2. Sostanza organica . . . . "	5.87	5.26
3. Calcare. . . . . "	tracce	tracce
4. Materie argilliformi . . . . "	55.80	51.50
5. Sabbie . . . . "	29.85	32.60
1. Azoto totale . . . . "	0.092	0.070
" nitrico. . . . . "	tracce minime	tracce minime
" ammoniacale . . . . "	tracce	tracce
2. Acido fosforico (P_2O_5) . . . . . . "	0.04	0.09
3. Ossido di ferro e alluminio . . . . "	13.48	15.13
4. Calce (CaO) . . . . "	0.03	0.06
5. Potassa (K_2O) . . . . "	0.66	0.52
6. Residuo insolubile in HCl. . . . . "	78	82.5
7. Reazione . . . . "	neutra	neutra
8. Sali solubili in acqua . . . . . . "	0.12	0.14
9. Cloruri (Cl) . . . . "	tracce	tracce
10. Solfati (SO_3). . . . . "	0.006	0.005

Peggiorano, adunque, le condizioni già riscontrate per i terreni di Boccone in collina, specialmente per quanto riguarda l'azoto, l'acido fosforico e la sostanza organica, permane solo una notevole ricchezza in potassa.

Resta ancora da esaminare un'ultima circostanza, la quale è di grande significato per la giusta conoscenza del capitale-terreno, in quanto essa rifiette un altro dei suoi costituenti variabili a seconda di molteplici fattori e che per il suo ufficio agricolo è condizione prima perchè siano messi in valore tutti gli altri. Intendo parlare della umidità dei terreni: non di quella acqua igroscopica che posseggono tutte le terre in maggiore o minore misura, che venne già determinata a mezzo dell'esame fisico-chimico ed alla quale dichiarai di annettere poca importanza; ma di *quel contenuto effettivo in acqua* che è il risultato del complesso delle caratteristiche geognostiche, fisiche, fisico-chimiche e chimiche delle diverse terre, nonchè delle condizioni climatiche e, in particolar modo, dell'influenza degli elementi meteorologici, e che stabilisce, in definitiva, la coltivabilità o meno di determinate regioni. Volli, quindi, determinare il contenuto in acqua dei terreni delle regioni dell'Agro da me studiate, in relazione alle differenti epoche dell'anno, alla diversa natura dei terreni stessi, ed anche in rapporto alle diverse pratiche agricole delle quali essi formano oggetto. Esclusi da questo studio quelle zone acquitrinose non molto estese (neppure, però, infrequenti nella nostra campagna), dove a rendere possibile la coltivazione, sarebbe indispensabile di assicurare un normale regime idraulico. Prelevai i campioni in grande numero, nello intero strato arabile, non però oltre i cm. 50 quando tale profondità veniva superata: li rinchiusi in vasi a perfetta tenuta e li sottoposi ad analisi entro il più breve tempo. Questa venne eseguita determinando fino a costanza la perdita di peso in stufa a 110°C.

I risultati ottenuti si trovano esposti nella seguente tabella dove è notato il contenuto di acqua per cento di terra, nelle località di diversa natura, nei differenti mesi dell'anno, ritenendo superflua una ulteriore suddivisione (ad es., per decadi), stante il compenso dei possibili errori su di un numero non piccolo di analisi. Per la giusta interpretazione delle cifre ivi riportate, credo opportuno di far notare che la indicazione della « regione » si riferisce alla distinzione da me poco sopra fatta, e che la indicazione medesima vuol significare tutte quelle caratteristiche locali che ho dimostrato proprie di ciascuna. Faccio inoltre osservare che nella colonna delle « note sopra i terreni », dove non si ha alcuna indicazione contraria, deve intendersi terreno incolto o prato naturale e terre tufarine. Quando ivi è indicato soltanto « valle », ciò vuol significare trattarsi di valle di altipiano: le valli del Tevere e dell'Aniene sono specificate.

Per rendere più completi e significativi i confronti, ho voluto anche eseguire l'esame batteriologico degli stessi terreni già analizzati chimicamente; ed esso mi ha fornito i seguenti risultati:

Numero dei germi per centimetro cubo di terra

Profondità	I. Quartaccio	II. Chiesuola Bufalotta
Centimetri 10	157.500	50.000
" 20	217.500	122.500
" 35	40.000	60.000

Batteriologicamente considerati, questi terreni presentano delle condizioni che sono inferiori alla media; tuttavia esse sono relativamente migliori di quelle che presenta la composizione chimica, e potrebbero dimostrare un certo valore per lo sfruttamento agrario di azioni microrganiche.

Tabella X.

Località	Regione	Note sopra i terreni	Gennaio	Febbraio	Marzo	Aprile	Maggio	Giugno	Luglio	Agosto	Settembre	Ottobre	Novembre	Dicembre
Magliana	...	Valle del Tevere	...	...	...	...	...	...	...	...	12.40	...	...	...
"	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	13.28	...	...	...
Prati fiscali	...	" dell'Aniene colt. a cereali	25.34	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
"	...	...	26.24	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
Pedica della Signora	...	" " " "	...	29.90	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
" "	...	...	...	31.72	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
" "	...	...	...	27.65	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
Saccopastore	...	" " " "	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	21.94	...
"	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	22.46	...
Serpentara	...	" del Tevere " "	...	21.49	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
"	...	...	...	22.70	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
"	...	...	...	21.50	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
"	...	...	...	25.33	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
Boccone	NE	Collina	24.33	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
"	...	...	23.31	29.08	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
"	...	Valle coltivata a cereali	...	24.54	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
"	...	...	...	25.76	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
Colle fiscale	"	Collina	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	25.98
"	...	" coltivata a cereali	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	26.81
"	...	Spallette	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	28.89
Arco di travertino	E	Altipiano (pozzolanelle)	...	...	...	...	...	...	...	...	...	21.49	...	...
" "	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	16.26	...	...
Cento Celle	"	" "	...	...	21.76	...	...	...	...	...	...	...	...	...
"	...	...	...	...	23.88	...	...	...	...	...	...	...	...	...
Cervelletta	...	" coltivata a cereali	...	...	...	...	...	...	...	...	10.05	...	...	...
"	"	...	...	...	...	...	...	...	...	...	8.05	...	...	...
Pietralata	...	" coltiv. a leguminose	...	...	...	15.80	...	...	...	...	...	...	...	...
"	"	...	...	...	...	14.15	...	...	...	...	...	...	...	...
Romavecchia	"	Collina	26.86	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
"	...	...	26.47	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
"	...	...	23 83	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
"	...	...	22.62	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
"	...	Valle	20.85	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

"	...	...	27.26	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
"	...	Altipiano (pozzolanelle)	26.63	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
"	...	...	24.46	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
"	...	" "	...	...	16.67	...	...	...	...	...	...	...	...	...
"	...	...	...	...	16.55	...	...	...	...	...	...	...	...	...
"	...	...	...	...	16.13	...	...	...	...	...	...	...	...	...
"	...	...	...	...	18.50	...	...	...	...	...	...	...	...	...
Tor Sapienza	"	" "	...	...	...	...	...	...	...	...	8.14	...	...	...
"	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	6.98	...	...	...
Cecchignola	SE	" "	...	...	...	...	12.22	...	...	...	...	...	...	...
"	...	...	...	...	...	...	13.17	...	...	...	...	...	...	...
Tre Fontane	"	" (pozzolanelle)	...	...	...	...	...	8.40	...	...	...	...	...	...
"	...	...	...	...	...	...	...	9.75	...	...	...	...	...	...
Torrino	"	Collina	...	...	...	13.05	...	...	...	...	...	...	...	...
"	...	...	...	...	...	11.28	...	...	...	...	...	...	...	...
"	...	Spallette.	...	...	...	10.24	...	...	...	...	...	...	...	...
La Crescenza	NW	Valle colt. a cereali e legumi	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	26.72	...
"	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	28.40	...
(Monte dell'Ara)	"	Collina	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	20.60	...
"	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	20.55	...
Insugherata	"	"	...	...	...	...	...	...	...	...	24.56	...	...	...
"	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	26.30	...	...	...
Pascolaro	"	"	...	...	...	13.34	...	...	...	...	...	...	...	...
"	...	...	...	...	...	12.75	...	...	...	...	...	...	...	...
Acqua fredda	SW	Valle	...	...	...	...	...	...	...	9.45	...	...	...	...
"	...	...	...	...	...	...	...	...	...	11.20	...	...	...	...
Infernaccio	...	Spallette.	...	...	...	...	9.15	...	...	...	...	...	...	...
"	...	...	...	...	...	...	10.84	...	...	...	...	...	...	...
"	...	...	...	...	...	...	11.27	...	...	...	...	...	...	...
Maglianella	"	Valle	...	...	...	...	...	...	9.05	...	...	...	...	...
"	...	...	...	...	...	...	...	...	8.26	...	...	...	...	...
"	...	Collina	...	...	...	...	...	...	...	12.99	...	...	...	...
"	...	...	...	...	...	...	...	...	...	13.90	...	...	...	...
Pisana	"	"	...	...	...	...	...	9.25	...	...	...	...	...	...
"	...	...	...	...	...	...	...	10.45	...	...	...	...	...	...
Quarticciolo	"	"	...	...	...	...	12.00	...	...	...	...	...	...	...
"	...	"	...	...	...	...	10.55	...	...	...	...	...	...	...
Santo Spirito	"	"	...	...	...	...	...	...	...	13.00	...	...	...	...
"	...	...	...	...	...	...	...	...	...	10.10	...	...	...	...
		Medie	24.7	25.9	18.8	12.9	11.2	9.4	8.6	11.7	9.8	22.1	23.4	27.3

Queste cifre dimostrano come differenze poco sensibili si abbiano nel contenuto in acqua dei terreni dell'Agro, in relazione alla diversa natura di essi ed alle pratiche colturali cui vennero sottoposti. Soprattutto si manifesta l'influenza del clima: di fronte alla quale, qualsiasi altra viene a perdere quasi ogni valore. Differenze veramente sensibili si hanno solo in relazione alle differenti epoche dell'anno, ed esse stabiliscono un andamento nella umidità del suolo, indicato nella seguente curva:

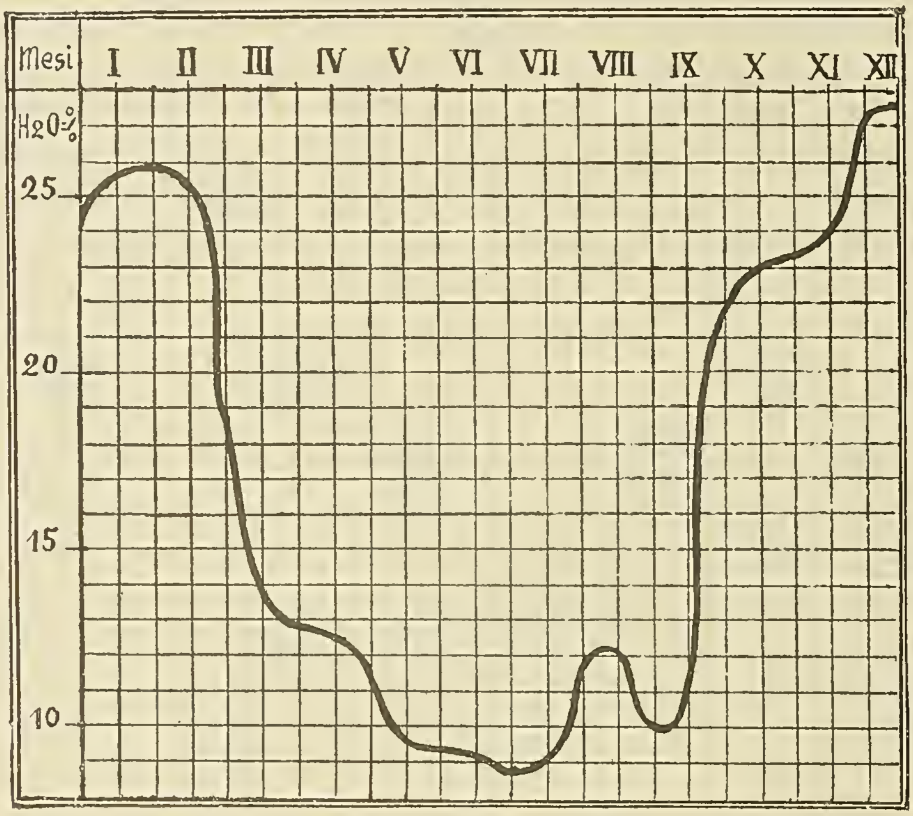


Fig. 5.

Lo studio, di cui in questo momento è questione, venne condotto per un solo anno solare; e non sarebbe stata agevole cosa il proseguirlo per un tempo maggiore, ad es. per un venticinquennio, come si è potuto fare con quello degli elementi meteorologici. Ma se tale circostanza non permette di attribuire un qualche valore alle piccole anse del grafico, essa però non toglie alcun significato al fatto principale che io voglio far rilevare e porre in relazione con un altro da me già reso noto.

Dall'esame della curva risulta molto evidente la *forte diminuzione che si manifesta nella umidità del terreno dell'Agro, a partire dal marzo fino al settembre.* Il limite massimo di secchezza delle nostre terre si raggiunge rapidamente, come subitamente si ripristina quel grado di umidità che, mantenendosi ad un livello poco oscillante, rappresenta la saturazione.

Detto periodo corrisponde perfettamente a quello individualizzato, con i valori delle precipitazioni atmosferiche e per le quali si è visto come dal marzo al settembre la vegetazione nella campagna romana debba svolgersi in condizioni assolutamente differenti da quelle settentrionali. Difficilmente potrebbe verificarsi altrimenti;

tuttavia è da notarsi che *il grado di secchezza che si raggiunge presso di noi è talmente basso e così persistente, senza dar luogo ad interruzioni di notevole durata*, che vengono messe ancora in rilievo quelle caratteristiche dei terreni riferite nel presente capitolo del mio studio e che — contrariamente anche a quanto si verifica per altre regioni meridionali — nelle condizioni naturali stabiliscono l'impossibilità dell'esercizio agricolo della campagna romana durante un prolungato periodo estivo.

Non basta quindi poter affermare che nella campagna romana si ha semplicemente a che fare con un clima ad inverno mite e ad estate secco, come già rilevai; ma devesi anche tener presente che si tratta di una località dove le particolari caratteristiche del suolo sono tali da esagerarne le dannose conseguenze.

Meccanicamente, il nostro suolo non è formato; *fisicamente, ha proprietà eccessive*; *chimicamente, non è completo*. Dove sono rocce dure o dove non è se non uno strato sottilissimo di terriccio; dove domina con grande prevalenza l'argilla, e manca quasi completamente la calce; dove, infine, scarseggia l'azoto e, più ancora, la sostanza organica, il suolo non può non risentire che fortemente delle sfavorevoli conseguenze di un clima meridionale. È quindi lecito di concludere come in tali condizioni si presenti ben singolare quel capitale-terreno che i proprietarî dell'Agro sono costretti a sfruttare, e come non comuni siano le esigenze cui i provvedimenti di bonifica debbono corrispondere.

VI.

Il movimento del capitale-azoto.

Ad eccezione dei terreni compresi nella prima regione da me distinta sulla base delle risultanze degli studî esposti nel precedente capitolo (e, cioè, di quelli giacenti nelle valli del Tevere e dell'Aniene), in tutti gli altri, circondanti la città di Roma, un fatto rilevasi, di capitale importanza per l'esercizio agricolo della campagna; *la dotazione delle terre in acido fosforico e potassa è, quasi senza eccezione, abbondante ed in misura tale da fare singolare contrasto con la scarsezza che nelle medesime riscontrasi della riserva azotata*. Non può affermarsi, tuttavia, che gli stessi terreni delle valli del Tevere e dell'Aniene difettino dei due principali elementi delle ceneri; dall'esame, però, delle tabelle analitiche innanzi riportate, la sproporzione fra contenuto in azoto delle terre e quello in acido fosforico e potassa risulta in maniera meno evidente che non per gli altri terreni, i quali rappresentano la parte preponderante della zona da bonificarsi, da me studiata, e che più abbisogna di avvantaggiarsi di quelle pratiche agricole che vi è possibilità di tradurre in atto.

Una siffatta circostanza rende la ricca riserva fosfatica e potassica inutilizzabile oltre quella misura che è consentita dall'azoto disponibile. Ho più volte manifestato le mie idee sopra l'importante ufficio regolatore dello sviluppo vegetale posseduto, in forza della legge del minimo, dall'azoto (1), ed ho procurato di appoggiare tali idee alle osservazioni ed alle esperienze di altri e mie.

(1) R. Perotti, *Il problema dell'azoto*. Boll. soc. agric. italiani, 1909.

Che l'azoto governi la produzione a causa della difficoltà con cui entra e si mantiene in quel circolo naturale della materia da cui trae origine la vita vegetale, è un fatto che oggi si vuole ammettere dai maggiori biologi. La provvista di esso nel terreno per effetto di molteplici circostanze, se non intervengono fatti speciali, è generalmente piccola. E piccola, invero, risulta la riserva per molti terreni della Campagna romana, e piccolissima appare di fronte al fabbisogno per una conveniente utilizzazione della riserva fosfatica e, ancora più, di quella potassica. Per la nostra campagna, quindi, il fatto generale del governo della produzione agraria a mezzo dell'azoto acquista speciale importanza, ed una legge fondamentale della natura fa risentire maggiormente nel nostro caso il proprio imperio. Solo da un esame molto accurato di quel fatto, come da una esatta interpretazione e razionale applicazione di questa legge, potrà trarsi qualche utile norma a vantaggio delle nostre opere di bonifica.

Nel presente capitolo riferisco, appunto, i risultati ottenuti esaminando il problema dell'azoto nelle condizioni speciali della Campagna romana. Ho voluto prendere le mosse dalla determinazione della entità della provvista azotata nei terreni della regione; ho voluto quindi studiare le variazioni — il *movimento* — che la riserva azotata medesima subisce, in rapporto ai differenti fattori della produzione; infine, ho voluto stabilire la capacità di mobilizzazione della quale la provvista azotata gode e, in relazione alle cause, procurare di fissare le norme per riconoscere o promuovere la capacità stessa.

Intrapresi a svolgere la prima parte di questo programma estendendo, per quanto si riferisce all'azoto totale, il numero delle analisi chimiche in modo da poter conoscere molto più da vicino il capitale-terreno delle nostre terre o, meglio, la distribuzione dell'azoto in esse, distribuzione che, dopo quanto venne innanzi detto, risulta essere il mezzo principale per metterle in valore.

La determinazione dell'azoto totale venne fatta seguendo il metodo Kjeldahl.

Il numero che di queste determinazioni posso produrre, sussidiato da quelle circostanze che ho rilevate sul principio del precedente capitolo sopra i rapporti fra morfologia e composizione chimica del suolo romano, mi permette di presentare uno *schema di carta agronomica dell'azoto della Campagna romana*. Feci già osservare come il disegnare carte agronomiche di altri elementi della fertilità, e segnatamente dell'acido fosforico e della potassa che pur sono fra i principali, non possa avere, per il nostro Agro, grande valore. Detti elementi trovansi ivi presenti in misura superiore al bisogno e — facendo sempre astrazione dalla calce — con una distribuzione che, a causa della loro poca mobilità, non risulta troppo uniforme e quindi non è facilmente rappresentabile.

All'atto pratico, ciò che soprattutto per l'acido fosforico e per la potassa importa conoscere è che ad essi non possa imputarsi la mancata produttività della Campagna romana. Per l'azoto, invece, non solo si verifica il fatto che le piccole quantità di esso, le quali generalmente sono presenti, conferiscono alla conoscenza della sua distribuzione una grande importanza pratica; ma ha luogo anche la circostanza che la mobilità di cui le varie combinazioni dell'elemento godono, consentendone una non

troppo ineguale ripartizione sopra grandi superfici, permette di disegnarne con una certa facilità la carta agronomica.

Tali, adunque, sono i motivi che mi hanno spinto a presentare quello schema di carta dell'azoto che ho costruito sulla base dei dati analitici riassunti nella seguente tabella. In questa i risultati delle determinazioni di azoto sono stati classificati, tenendosi in primo luogo conto della distribuzione delle sei zone da me precedentemante fatta; in secondo luogo, della ubicazione dei terreni in ciascuna; in terzo luogo, e soprattutto, di quelle circostanze naturali le quali consentivano di poter stabilire unità morfologiche e litologiche del suolo che sono base di un razionale prelevamento di campioni. Per questa operazione si scelsero di preferenza le epoche primaverile ed autunnale, osservandosi le norme già esposte nel precedente capitolo per ottenere i campioni di terra sottoposti allo studio completo. Le analisi si eseguirono, in genere, nelle ventiquattro ore consecutive al prelevamento, sopra la terra fina passata allo staccio di un mm.

Tabella XI.

Determinazioni di azoto totale nei terreni della Campagna romana.

Numero del campione	Provenienza – Regione	Provenienza – Località	Azoto per cento di terra fina – Valle	Azoto per cento di terra fina – Altipiano	Azoto per cento di terra fina – Spallette
1	Valli del Tevere e dell'Aniene.	Serpentara	0.168	...	...
2		»	0.161	...	...
3		Tor di Quinto	0.172	...	...
4		»	0.170	...	...
5		Prati Fiscali	0.196	...	...
6		»	0.170	...	...
7		Saccopastore	0.168	...	...
8		»	0.175	...	...
9		Magliana	0.160	...	...
10		»	0.159	...	...
11		Prati del Varco	0.185	...	...
12		»	0.168	...	...
13	NE	Boccone	...	0.130	...
14		»	...	0.125	...
15		»	...	0.106	...
16		»	...	0.107	...
17		Valle della Cecchina	0.149	...	...
18		» »	0.150	...	...
19		Castel Giubileo	...	0.119	...
20		»	...	0.120	...
21		»	...	...	0.075
22		»	...	...	0.100
23		Serpentara	...	0.129	...
24		»	...	0.135	...
25		Casale Fiscale	...	0.161	...
26		»	...	0.158	...
27		»	...	...	0 108
28		»	...	...	0.114
29		Ponte Nomentano	...	0 145	...
30		»	...	0.148	...
31		Aguzzano	...	0.150	...
32		»	...	0.142	...
33	E	Ponte Mammolo	0.165	...	...
34		»	0.175	...	...
35		Torre Cervara	...	0.120	...
36		»	...	0.116	...
37		Cervelletta	...	0.125	...
38		»	...	0.114	...
39		»	0.160	...	...
40		»	0.160	...	...
41		»	0.175	...	...
42		Tor Sapienza	...	0.100	...
43		»	...	0.098	...
44		»	...	0.098	...
45		Acqua bollicante	...	0 135	...
46		»	...	0.142	...
47		Marranella	0.184	...	...
48		»	0.176	...	...
49		Romavecchia (a nord d. Casilina)	...	0.112	...
50		» »	...	0.109	...
51		» »	...	0.112	...
52		» »	...	0.112	...
53		Valle di Centocelle	0.147	...	...
54		» »	0.140	...	...
55		Prato di Centocelle	...	0.147	...
56		» »	...	0.145	...
57		Casale di Romavecchia	...	0.231	...
58		» »	...	0.221	...
59		Romavecchia (nord Ferr.)	...	0.126	...
60		» »	...	0.130	...
61		» (sud Ferrovia)	...	0.112	...
62		» »	...	0.119	...
63		Arco di Travertino	...	0.134	...
64		» »	...	0.132	...
65	SE	Grotta Perfetta	...	0.115	...
66		»	...	0.122	...
67		»	0.220	...	...
68		»	0.215	...	...
69		»	0.165	...	...
70		»	0 180	...	...
71		Tre Fontane	0.143	...	...
72		»	0.130	...	...
73		»	...	0 120	...
74		»	...	0.118	...
75		S. Alessio	...	0.125	...
76		»	...	0.138	...
77		Casa Ferratella	...	...	0.080
78		»	...	...	0.095
79		»	0.160	...	...
80		»	0.185	...	...
81		Cecchignola	...	0.120	...
82		»	...	0.125	...
83		Valle di Acquacetosa	0.139	...	...
84		» »	0.139	...	...
85	SW	Casetta Mattei	0.165	...	...
86		»	0.160	...	...
87		»	...	0.135	...
88		»	...	0.140	...
89		»	...	...	0.075
90		»	...	...	0.075
91		»	...	0.150	...
92		»	...	0.140	...
93		Bravetta	...	0.128	...
94		»	...	0.145	...
95		La Pisana	0 148	...	...
96		»	0.150	...	...
97		»	...	0.120	...
98		»	...	0.120	...
99		Santo Spirito	...	0.105	...
100		»	...	0.114	...
101		»	...	...	0.060
102		»	...	...	0 075
103		Valle d. Maglianella	0.126	...	...
104		» »	0.131	...	...
105		Valle di Acquafredda	0.152	...	...
106		» »	0 160	...	...
107	NW	Piana di Marmo	...	0.121	...
108		»	...	0.118	...
109		»	...	...	0.090
110		»	...	...	0.080
111		Acquatraversa	...	0.105	...
112		»	...	0.112	...
113		Sepoltura di Nerone	...	0.125	...
114		» »	...	...	0.065
115		» »	...	...	0.075
116		Monte dell'Ara	...	...	0.090
117		»	...	...	0.100
118		Valle della Crescenza	0.134	...	...
119		»	0.135	...	...
120		Valchetta	...	0.120	...

Dopo quanto ho premesso, ritengo il numero di queste analisi sufficiente perchè, riportandosene i risultati con colori convenzionali sopra una carta topografica della regione, possa ottenersi una rappresentazione grafica della distribuzione dell'azoto nella Campagna romana. Come carta topografica mi valsi di quella dello Stato maggiore italiano all' 1 : 25.000, dalla quale ne ricavai una all' 1 : 75.000, comprendendovi soltanto la parte soggetta a bonifica — esclusa quella situata nel bacino dell'Aniene, di là dalla zona dei 10 km. — ed escludendovi il suburbio, attraverso cui ho condotto solo le tracce delle classiche vie romane, e la città, della quale ho segnato solo la cinta del piano regolatore 1908 e tracciata la ultima cerchia delle mura. Come capisaldi di riferimento delle località ho preso le principali arterie, i più importanti fabbricati, nonchè i confini catastali delle tenute, a ciascuna delle quali ho attribuito il numero dell'elenco ufficiale del Ministero di agricoltura [1].

[1] Denominazione delle tenute che vennero sottoposte a studio, con riferimento ai numeri riportati nelle carte agronomiche dell'azoto e della sostanza organica.

1. Valchetta - Piacentini Pio.
2. Valchetta - Piacentini A.
3. Sepoltura di Nerone.
4. Ospedaletto Marziali.
5 Inviolata, Inviolatella.
6. La Crescenza.
7. Valchetta o Grottarossa.
8. La Lucchina.
9. Monte Arsiccio.
10. Insugherata.
11. Acquatraversa.
12. La Torricella.
13 Tor di Quinto - Demanio.
14. Tor di Quinto - Lazzaroni.
15. Tor di Quinto - Mazzanti.
16. Tor di Quinto - Torri.
17. Palmarola.
18. Casal del Marmo.
19. Sant'Agata.
21. Mimmoli.
25. Torrevecchia.
26. Primavalle.
27. Pineta.
28. Porcareccia.
29. Valcanuta.
30. Monachina.
31. Massa Gallesina.
32. La Maglianella.
33. Acquafredda.
34. Maglianella - S^{to} Spirito.
35. Maglianella - Pedica.
36. Casal della Morte.
37. Torretta.
38. Brava.
39. S^{ta} Maria Nuova.
40. Pisana.
41. Torretta Massimi.
42. Bravetta.
43. Casetta Mattei.
44. C. Mattei - Benvenuti.
45. C. Mattei - vigne Battaglia.
46. C. Mattei - vigne Pozzi.
47. C. Mattei - Giorgi.
48. C. Mattei - Arioli.
49. C. Mattei - Torretta.
50. La Magliana.
51. Monte delle Piche.
52. Pian due Torri.
53. Tor di Quinto - Toni.
54. Villa Spada.
55. Serpentara.
56. Torricella Boschetto.
57. Redicicoli Ricci.
58. Redicicoli Accoramboni.
59. Pedica S. Andrea.
60. Valle Melaina.
61. Boccone.
81. Quarto di P^{te} Salario.
82. Prati Fiscali - Torlonia.
83. Prati Fiscali - Lofari.
84. Prati Fiscali - Tanlongo.
85. Quarto del Tufello.
86. Casal Fiscale.
87. Cecchina.
88. Ponte Nomentano.
89. Casal de' Pazzi.
90. Aguzzano.
91. Rebibbia.
92. Vannina.
94. Monastero Colamello.
95. Pratolungo.
106. Saccopastore.
107. Pietralata - Torlonia.
108. Pietralata - Trezze.
109. Portonaccio.
110-114. Grotta di Gregna.
115-117. Sant. Anastasia
118-119. Bocca di Leone.
120. Cervelletta.
121. Cervara.
122. Rustica.
123. Ponte di Nona.
124. Acquabollicante.
125. Marranella-Auconi.
126. Marranella-Caracciolo.
127. Pedica Tor Tre Teste.
128. Tor Sapienza.
129. Tor Tre Teste.
140. Centocelle.
141. Quarticciolo.
142. Casa Calda.
156. Prati del Varco.
157. Grotta Perfetta.
158. Tor Marancio.
159. Caffarella.
160. Arco di Travertino.
161. Statuario.
162. Romavecchia
164. Quadrato.
166. Ponto Fratta.
169. Tre Fontane.
170-183. S. Alessio e Vigna Murata.
184. S. Alessio - Campo sperim.
185. Riserva-Giraud.
186. San Cesareo.
187. Tor di Valle.
188. Torrino.
189. Mostacciano.
190 Acquacetosa.
191. Casa Ferratella.
192. Massina.
193. Cecchignoletta.
194. Cecchignola.
195. Tor Carbone.
197. Torricoli.
209. Castel Giubileo.

I risultati delle analisi ho riunito nei seguenti cinque gruppi, assegnando a ciascuno una delle cinque gradazioni differenti di colore verde a seconda del seguente contenuto in azoto:

1°	Terre	con contenuto	in azoto di	50-100	mg. °/₀
2°	"	"	"	101-125	"
3°	"	"	"	126-150	"
4°	"	"	"	151-200	"
5°	"	"	" superiore a	200	"

Non tenni conto dei casi, limitatissimi invero, in cui il suolo conteneva meno di mg. 50 di azoto per cento di terra fina, in quanto che, affiorando ivi tufi litoidi o leucitite, il terreno vegetale non vi esiste quasi affatto, e, dovendosi procedere ad opere di dissodamento, scomparirebbe venendo ad essere ricoperto da un terriccio avente una composizione media molto vicina a quella del terreno circostante. Così anche non ritenni opportuno di specificare i casi di un contenuto in azoto superiore a mg. 200 per cento di terra fina, perchè solo eccezionalmente — e, di preferenza, nelle limitate zone acquitrinose degli altipiani — questa percentuale viene raggiunta ed oltrepassata. Ho distinto, invece, le terre con un contenuto in azoto di mg. 101-125 e 126-150 per cento, essendo fra esse compresa la grande maggioranza dei terreni dell'Agro studiato. Dei risultati delle diverse analisi, eseguite su campioni provenienti dalle diverse parti di una stessa località geologicamente uniforme, si è presa la media.

Nelle valli del Tevere e dell'Aniene troviamo una quantità di azoto compresa fra mg. 151 e 200 per cento gr. di terra fina. Nelle valli di altipiano l'azoto è normalmente oscillante fra mg. 126 e 150 °/₀. Nell'altipiano si ha una pari ricchezza azotata solo in limitate zone al NE ed al SW, dove trattasi di terreni piuttosto profondi. Altrimenti la percentuale dell'azoto sull'altipiano è compresa fra i 101 e 125 mg. Sulle spallette, in genere, si hanno solo mg. 50-100 di azoto per cento di terra fina. Le località dove l'azoto supera i 200 mg. per cento sono limitatissime.

Il capitale-azoto delle terre non rimane immobile, anzi va soggetto ad una *mobilità* superiore a quella di tutti gli altri elementi della produzione e, quindi, gode, per questa, della massima importanza. Attraverso i processi della mobilizzazione, specialmente per l'azoto, avvengono perdite e guadagni, sopra i quali sappiamo oggi bene che può ad arte influirsi per la realizzazione dei maggiori utili colturali. Studiare, adunque, detta mobilità nelle nostre terre; determinare le perdite ed i guadagni dell'azoto in rapporto agli altri coefficienti della produzione, non poteva non costituire un capitolo fra i principali del mio studio sopra la biologia dell'Agro ed in armonia con le idee da me più volte manifestate intorno al problema dell'azoto.

Per seguire il movimento della riserva azotata del terreno, possediamo oggi un metodo del quale siamo debitori soprattutto a Th. Remy e che, pur non rispondendo pienamente allo scopo, è sempre tale da permettere conclusioni da cui può trarsi non lieve profitto.

Il principio di mettere in evidenza le proprietà batteriche a mezzo delle soluzioni, sopra il quale il Remy ha inteso di basare il suo nuovo metodo di esame del

terreno, trova riscontro in procedimenti che sono antichi quanto la stessa batteriologia, e forse anche di più, poichè è nello stesso ordine di idee che, in ultima analisi, il Leeuwenhoek svolgeva i suoi studî sopra gl'*infusorii* delle acque putrescenti. Il Winogradsky, molto più tardi, per il suo celebre isolamento dei nitroso- e dei nitrobatterii, si valeva del materiale proveniente da colture in liquidi selezionanti (1); il Beyerinck, seguendo una via parallela, perveniva all'isolamento di parecchie specie di batterî oligonitrofili e segnatamente alla descrizione del suo *croococco* (2).

Fu il tentativo dello Jensen, eseguito nell'anno 1899 per misurare le proprietà nitrificanti di alcune terre della Danimarca (3), che trovò sviluppo ed illustrazione nelle ricerche sistematiche, estese poco dopo, dal Remy, al potere di denitrificazione ed a quello di ammonizzazione del terreno, il processo dal quale venne più propriamente tratta la tecnica del metodo. Il procedimento originale del Remy (4) venne a più riprese e da varî sperimentatori in seguito modificato per ottenere, soprattutto con la costanza dei reperti e con la speditezza nel ricavarli, un metodo che valesse a seguire sempre meglio la mobilizzazione degli elementi della fertilità causata dai microrganismi del terreno, dalla cui numerazione si soleva prima molto *indirettamente* dedurre.

Per caratterizzare il comportamento batterico dei terreni di fronte alla utilizzazione dei concimi, il Remy pensò, oltre che a numerare i germi, anche a provare il modo di comportarsi di essi verso le soluzioni di peptone, di solfato ammonico, di nitrito sodico e verso la soluzione di Giltay per i denitrificanti. Il Remy determinava il potere di ammonizzazione inoculando, con gr. 10 di terreno da esaminarsi, cmc. 100 di soluzione di peptone all'1 % e distillando l'ammoniaca prodotta dopo 4 od 8 giorni di coltivazione a 20° C.; il potere di nitrificazione, dosando per via colorimetrica l'acido nitrico prodottosi nella soluzione di Omeliansky, parimenti inoculata; il potere di denitrificazione, innestando con il 10 % di terra la soluzione di Giltay e calcolando il tempo occorso per la scomparsa della reazione del nitrato; il potere di fissazione dell'azoto elementare, valendosi della soluzione del Beyerinck alla mannite con aggiunta del 15 % di terra. Erano istituite prove di controllo con campioni di terreno di determinata provenienza ed attitudine produttiva.

Ma tale sistema di procedimento dette motivo ben presto ad osservazioni per parte di non pochi autorevoli sperimentatori che ne proposero modifiche.

F. Löhnis, in un suo primo studio (5), discusse la quantità del materiale d'innesto da usarsi, affermando come non possa discendersi sotto al 10 % di terra proposto dal Remy; che, anzi, per determinare il potere di nitrificazione e di fissazione dell'azoto occorressero quantità maggiori. Provò anche il comportamento degli ammo-

(1) Arch. des sciences biolog. de Saint-Petersbourg, VII, 1899, pag. 191.

(2) M. W. Beyerinck, *Ueber oligonitrophyle Mikroben*. Centr. für Bakt., *2*, VIII (1902), pag. 567.

(3) Tidsskrift for Landbrugets Planteavl., Bd. 5: *Salpeterbakteriernes Utbredelse i Danmark*, pag. 173.

(4) Th. Remy, *Bodenbakteriologische Studien*. Centr. f. Bakt., *2*, VIII (1902), pag. 660.

(5) F. Löhnis, *Ein Beitrag zur Methodik der bakteriologischen Bodenuntersuchung*. Centr. f. Bakt., 2, XII, pag. 262

nizzanti nel brodo di urea Beyerinck, ottenendo risultati non concordanti con quelli dati dalle soluzioni di peptone e perdite di ammoniaca.

Seguì un lungo ed elaborato studio dell'Ehrenberg (1), il quale, in confronto con i risultati ottenuti con prove di vegetazione, osservava che nel metodo non si tiene sufficiente conto della forma dei recipienti, come della umidità, dell'aereazione e della reazione del terreno. Alcune critiche di questo autore si riferiscono ai metodi delle analisi chimiche occorrenti. Con una Nota successiva (2), egli richiama in particolare l'attenzione sopra le perdite di azoto verificantisi nelle soluzioni di peptone in putrefazione, ritenendo opportuno che, per determinare l'ammoniaca in esse, si debba eliminare la filtrazione e l'impiego di parti aliquote. Non solo differenti terreni, ma anche uno stesso terreno trattato differentemente può presentare un comportamento molto diverso in rapporto al potere di putrefazione.

Il Buhlert e il Fickenday pubblicarono, poco dopo, un lavoro veramente importante (3). Eglino trovarono la causa principale dei difetti del metodo nella differente quantità di azoto che viene introdotta nelle colture con la inoculazione a mezzo del terreno, e nella circostanza che il materiale d'innesto è una quantità troppo piccola perchè con essa possano equamente valutarsi la composizione e lo stato di attività della microflora. La modificazione essenziale, che questi autori introducono nella tecnica del metodo, consiste nell'impiegare per l'innesto, in luogo del terreno, un *estratto* di esso ottenuto agitando per cinque minuti parti ugnali di terra e di acqua di condottura. Per la misura del potere di nitrificazione e di assimilazione dell'azoto impiegano, di questo estratto, $cm.^3$ 20 per quantità di soluzioni nutritive rispettivamente di 250 e 25 $cm.^3$; per la misura del potere di denitrificazione e di ammonizzazione ne impiegano soltanto $cm.^3$ 5 per una quantità di $cm.^3$ 10 delle rispettive soluzioni. Ciò permette a loro di ottenere risultati molto concordanti. Tale variante alla primitiva tecnica venne accettata dagli sperimentatori che si occuparono successivamente dello stesso argomento, ammettendosene gl'indiscutibili vantaggi.

Il Löhnis, dopo una seconda Nota, nella quale non veniva ad alcuna conclusione (4), ne pubblicò una terza in collaborazione con A. E. Parr (5), dove vuol negare la esistenza di un generale potere di putrefazione del terreno, e ritiene piuttosto sia, caso per caso, da determinare il comportamento dei diversi terreni, sotto le variabili influenze delle epoche dell'anno, della temperatura e dell'umidità, di fronte alle differenti sostanze putrescibili. Fra queste egli esperimenta i peptoni Witte, Schering e Merk, la farina d'ossa, di carne e di sangue; ottiene con ciascuna risultati differenti e lo sviluppo di specie batteriche dominanti.

(1) P. Ehrenberg, *Die bakterielle Bodenuntersuchung in ihrer Bedeutung für die Feststellung der Bodenfruchtbarkeit.* Landw. Jahrb. Bd. XXXIII.

(2) Id., *Stickstoffsverluste in faulenden Peptonlösungen: ein Beitrag zur Methodik der bakteriellen Bodenuntersuchung.* Centr. f. Bakt., 2, XV (1905), pag. 154.

(3) Buhlert u. Fickenday, *Zur Methodik der bakteriologischen Bodenuntersuchung.* Centr. f. Bakt., 2, XVI (1906), pag. 399.

(4) F. Löhnis, *Zur Methodik der bakteriologischen Bodenuntersuchung, II.* Centr. f. Bakt., 2, XIV. pag. 1.

(5) Id., u. A. E. Parr, *Zur Methodik der bakteriologischen Bodenuntersuchung, III.* Centr. f. Bakt., 2, XVII (1907), pag. 518.

Il Lippmann (¹) ottenne concordanze perfettamente soddistacenti fra i dati forniti dalla misura del potere di ammonizzazione ed i risultati delle prove in vaso. Rilevò, inoltre, che le soluzioni pure di peptone non si prestano così bene come quelle nelle quali si ottiene l'arricchimento del contenuto minerale con aggiunta diretta di terreno; che la scomposizione aumenta fin verso le 164 ore di coltura, per poi diminuire con sempre maggior discordanze nei risultati. Dopo alcune ricerche preliminari — eseguite impiegando, quali sostanze putrescibili, albumina e caseina — conclude affermando la esistenza di un rapporto fra la scomposizione dell'azoto nelle soluzioni di peptone e quella della parte azotata nel terreno.

Il Vogel e lo Zeller si dichiararono assolutamente contrarii all'impiego del peptone per gl'inconvenienti che esso presenta (quali la troppo facile scomponibilità, la grande dipendenza di questa dalle oscillazioni termiche, dagli errori analitici causati dal peso del corpo batterico). Sarebbe da preferirsi la farina di corno (²).

Un avversario dichiarato del metodo è O. Rahn, il quale pone in rilievo i facili errori derivanti dalle perdite dei liquidi colturali per volatilizzazione; dall'influenza, nei fatti colturali, della soluzione nutritiva che supererebbe quella del materiale d'innesto che può, del resto, modificare sensibilmente la soluzione stessa con le sostanze minerali che vi aggiunge; infine, perchè nessun criterio può trarsi dal procedimento sopra il numero dei germi del terreno e la loro caratterizzazione (³). Il Rahn è d'opinione che il giudizio sulla fertilità di una terra possa ottenersi molto più rapidamente e completamente a mezzo dell'analisi chimica.

Il Remy, in una sua ultima pubblicazione (⁴), risponde a queste obbiezioni e ad altre precedentemente sollevate, e sperimentalmente dimostra, nei riguardi del potere di putrefazione, l'influenza esercitata sopra la misura di questo dalla composizione chimica del terreno che serve d'innesto, nonchè l'influenza che sopra la medesima esplica il *clima-terreno* (reazione, aereazione, umidità, calore, sostanze acceleranti o ritardanti, ecc.); e, tenendo conto dei progressi che le numerose ricerche dei collaboratori e dei critici avevano indotto nella tecnica del metodo, avanza ulteriori proposte di migliorìe di esso (impiego di gelatina purissima per le prove di ammonizzazione) il cui razionale fondamento non può ritenersi in alcun modo scosso. La persuasione di ciò, acquistata dai numerosi studiosi, ha spinto taluni di questi a tentare una via parallela ed affine, stabilendo le migliori condizioni per seguire il circolo dell'azoto, non più nelle soluzioni, ma nel terreno stesso, aggiungendo ad esso la

(¹) Lippman, *Report of the soil chemist and bacteriologist.* XXVI. Annual report of the New Jersey State agric. exp. Stat. (Centr. f. Bakt. 2, XVIII, h. 22-23).

(²) Vogel u. Zeller, *Beiträge zur Methodik der bakteriologischen Bodenuntersuchung.* Mitt. a. d. Kaiser-Wilhelms-Institut für Landw. in Bromberg. Bd. I (1908), h 2, pag. 167.

(³) O. Rahn, *Bakteriologische Untersuchungen über das Trocknen des Bodens.* Centr. f. Bakt., 2, XX (1908), pag. 38.

(⁴) Th Remy u. G. Rösing, *Beitrag zur Methodik der bakteriellen Bodenuntersuchung.* Centr. f. Bakt., 2, XXIX (1911), pag. 36.

mermateria prima per attivarlo. In tale ordine di idee rientrano gli studî del Lemmann e collaboratori ([1]), del Koch e del Pettit ([2]) e, recentemente, del Vogel ([3]).

La discussione è, quindi, ancora aperta e per la sua importanza alimenta studî e ricerche diretti ad affrettare migliori conclusioni. Io stesso, in base alle numerose ricerche eseguite nell'Agro, applicando il metodo in discussione, fui posto in grado di fare alcuni rilievi ed alcune proposte di modifiche di cui detti comunicazione ([4]). Qui mi resta solo da osservare come il principio sopra il quale si fonda il metodo, sia stato quasi universalmente riconosciuto buono e che, tenendo conto dei miglioramenti apportati in questi ultimi nove anni alla sua tecnica, vi è possibilità di ottenere risultati che abbiano almeno un valore relativo e, cioè, permettano di affermare se in un terreno o in determinate circostanze culturali, l'azoto ammonizzi, nitrifichi, denitrifichi o si fissi più o meno che non in un altro od in altre condizioni; se esso goda di una mobilità maggiore o minore che stia in rapporto con tutti od almeno con parte degli altri risultati sperimentali e di osservazione. Con questo intendimento io feci impiego del metodo del Remy per l'esame batteriologico dei terreni dell'Agro, ed in esso mi attenni alle prescrizioni di Chr. Barthel, direttore del Laboratorio batteriologico dell'Istituto agricolo centrale presso Stockholm, al quale spettò l'ultima parola in proposito all'epoca in cui cominciai il mio studio ([5]). Mi attenni quindi alla tecnica da lui proposta, della quale con alcune ricerche preliminari volli rendermi perfetto conto e che per la confrontabilità dei reperti mantenni per tutto il lavoro nonostante i posteriori progressi.

In brevi termini, il metodo da me seguìto fu il seguente:

1°) *Potere di ammonizzazione*. Si misurano cm.^{3} 10 di una soluzione di peptone Witte all'1.5 $^0/_0$ in più provette che, dopo sterilizzazione, s'inoculano con cm.^{3} 5 di una diluizione a pesi uguali di acqua e terreno da esaminarsi. Le prove in quadruplo si coltivano a 20° C per quattro giorni: trascorsi, i quali si determina l'azoto ammoniacale prodottosi distillando sopra magnesia usta.

2°) *Potere di nitrificazione*. In piccole Erlenmeyer, munite di tappo a due fori (per i quali passano due canne di vetro piegate a squadra, una delle quali raggiunge quasi il fondo, mentre l'altra termina poco sotto il collo), si ripartisce nella misura di cm.^{3} 25 una soluzione acquosa al 2 $^0/_{00}$ di solfato ammonico e fosfato potassico con aggiunta del 40 $^0/_{00}$ di carbonato di magnesio in polvere. Si sterilizza e s'inocula con la diluizione di terreno di cui sopra. Dopo 20 giorni di coltivazione a 10° C

([1]) O. Lemmermann, H. Fischer, H. Kappen u. E. Blank, *Bakteriologisch-chemische Untersuchungen*. Landw. Jahrb., 38 (1909), pag. 319.

([2]) A. Koch u. Pettit, *Ueber die verschiedenen Verlauf der Denitrifikation im Boden und in Flüssigkeiten*. Centr. f. Bakt., 2, XXVI (1910), pag. 335.

([3]) Vogel, *Beiträge zur Methodik der bakteriologischen Bodenuntersuchung*. Centr. f. Bakt., 2, XXVII (1910), pag. 593.

([4]) R. Perotti, *Sopra i metodi di misura delle attività microbiche del terreno agrario*. Rend. R. Acc. Lincei, vol. XX, serie 5^a, 1° sem., fasc. 4, a. 1911.

([5]) Chr. Barthel, *Bodenbakteriologische Untersuchungen*. Centr. f. Bakt., 2, XXV (1909), pag. 108.

delle prove in doppio fatte attraversare da una lenta corrente di aria, si determina colorimetricamente l'acido nitrico prodottosi in confronto di quello iniziale (¹).

3°) *Potere di denitrificazione*. In ciascuna di parecchie piccole Erlenmeyer si versano cm.³ 50 della soluzione di Giltay leggermente modificata dal Barthel. Si sterilizza e s'inoculano le prove in triplo con cm.³ 10 della diluizione del terreno da esaminarsi. Si coltiva a 20° C e si determina qualitativamente, due volte al giorno, la presenza dei nitrati fino a loro totale scomparsa. Si notano le ore per questa occorse.

4°) *Potere di assimilazione dell'azoto*. In più Erlenmeyer da 1000 cm.³ si misurano 250 cm.³ di una soluzione acquosa al 20 °/₀₀ di mannite e al 0,2 °/₀₀ di fosfato bipotassico, più aggiunta di creta in ragione del 5 °/₀₀. Si sterilizza, s'inocula con cm.c. 20 della diluizione del terreno, si coltiva in doppia prova a 20°C e si determina l'azoto finale in rapporto a quello iniziale.

I risultati da me ottenuti, e che formarono già oggetto di una Nota preliminare (²), si trovano qui appresso riassunti in relazione alle differenti epoche dell'anno, alla varia natura dei terreni, alle diverse pratiche colturali, tenendo conto, com'era naturale, che in una determinata categoria di ricerche venisse esclusa l'influenza dei fattori che avrebbero formato oggetto principale delle altre.

A) In rapporto alle differenti epoche dell'anno. I numerosi dati analitici ottenuti da campioni di terreno di natura chimica e fisica simili, nonchè in condizioni esteriori per quanto possibile uguali, sono riuniti nella seguente tabella:

(¹) Il metodo usato per la determinazione dei nitrati è quello di Grundval e Lajoux, basato sul principio che, trattando i nitrati con acido fenolsoforico in eccesso, si forma acido picrico, il quale, per aggiunta di acqua e di ammoniaca, dà un sale di ammonio fortemente colorato in giallo. Il colore si confronta con quello di una scala empirica determinata sciogliendo gr. 7,22 di KNO_3 in un litro di acqua e preparando con questa soluzione varie diluizioni corrispondenti a mg. 0,0075, 0,0100, 0,0150, 0,0200, 0,0250, 0,0300, 0,0400 per litro. Si usano cilindri colorimetrici da 50 cm.³.

(²) R. Perotti, *Il movimento del capitale-azoto nei terreni della campagna romana*. Rend. R. Acc. Lincei, vol. XIX, serie 5ª, 2° sem., fasc. 12°, pag. 671.

	Gennaio	Febbraio	Marzo	Aprile	Maggio	Giugno	Luglio	Agosto	Settembre	Ottobre	Novembre	Dicembre
Potere di ammonizzazione	1.26	1.05	1.00	0.98	0.98	...	0.90	0.98	1.02	1.02	1.20	1.25
NH_3 mg. per litro:	1.36	1.15	1.10	1.00	0.98	...	0.95	0.99	1.05	1.07	1.34	1.15
	1.29	1.17	1.12	0.90	0.95	...	...	0.93	1.02	...	...	1.34
	1.19	1.10	1.02	0.95	0.92	...	...	0.90	0.95	...	...	1.42
	1.13	1.08	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
	1.26	1.10	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
MEDIE . . .	1.24	1.10	1.06	0.95	0.95	—	0.92	0.95	1.01	1.04	1.27	1.29
Potere di nitrificazione	0.025	0.005	0.005	0.005	0	...	0	0	0.013	0.015	0.022	0.017
HNO_3 mg. per litro:	0.010	0.015	0.005	0.000	0	...	0	0	0.017	0.018	0.018	0.022
	0.030	0.010	0.005	...	...	...	...	...	...	...	...	...
	0.015	0.010	0.005	...	...	...	...	...	...	...	...	...
	...	0.015	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
MEDIE . . .	0.020	0.011	0.005	0.002	0	—	0	0	0.015	0.016	0.020	0.019
Potere di denitrificazione	96	216	120	264	∞	...	∞	∞	192	144	120	144
Ore:	110	168	144	192	216	...	∞	∞	∞	120	144	∞
	96	∞	168	...	...	...	...	∞	216	...	...	120
	∞	144	144	...	...	...	...	∞	264	...	...	∞
	...	∞	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
(Il segno ∞ indica che nella coltura non si raggiunse la totale denitrificazione del nitrato contenutovi).	...	168	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
MEDIE . . .	100	174	144	228	216	—	0	0	224	132	132	132
Potere di assimilazione dell'azoto	0.064	0.048	0.061	0.055	0.046	...	0.030	0.041	0.051	0.055	0.054	0.053
N mg. per litro:	0.067	0.090	0.042	0.050	...	...	...	0.032	0.053	0.051	0.053	0.061
	0.056	0.050	0.053	...	...	...	...	...	...	...	...	...
	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
MEDIE . . .	0.062	0.062	0.052	0.052	0.046	—	0.030	0.036	0.052	0.053	0.053	0.057

I campioni provenivano dalle tenute: Acquafredda, Arco di Travertino, Boccone, Casale Fiscale, Cento Celle, Cervelletta, Crescenza, Maglianella, Pedica della Signora, Prati Fiscali, Romavecchia, Saccopastore, Santo Spirito, Serpentara, Tor Sapienza. I risultati da essi ottenuti permettono di osservare che:

il potere di ammonizzazione e di assimilazione dell'azoto diminuisce notevolmente a partire dal mese di marzo, per riprendere la sua ascesa in quello di ottobre;

il potere di nitrificazione, nella stessa epoca primaverile, trovasi fortemente diminuito ed è nullo durante i mesi più caldi, per riprendere debolmente in settembre;

il potere di denitrificazione è quello che in primavera si mantiene più a lungo ad un livello maggiormente elevato, sebbene durante i mesi estivi divenga anch'esso trascurabile.

In funzione delle diverse epoche dell'anno troviamo, adunque, che nella campagna romana si verifica normalmente un lungo periodo di circa sei mesi, ne quale le attività microbiochimiche che si esplicano sopra la mobilizzazione dell'azoto sono ridottissime o nulle.

B) In rapporto alla varia natura dei terreni. — Lo studio precedentemente fatto del suolo coltivabile romano ci ha permesso di rilevare differenze, non tanto nella sua composizione chimica, quanto nella sua natura fisica e conformazione morfologica. Anche le misure delle principali funzioni microbiologiche del terreno hanno dato per risultato valori diversi a seconda delle varie circostanze offerte dalle valli del Tevere e dell'Aniene, dalle valli di altipiano, dall'altipiano e dalle spallette. Nei riguardi del presente studio sul movimento del capitale azotato del terreno basta quindi aver presente come la valle sia caratteristica per la profondità dello strato arabile, per la presenza di quantità notevoli di calce e per una più complessa composizione chimica. La valle di altipiano è quasi priva di calce ed è di una natura chimica meno complessa. L'altipiano difetta anch'esso di calce ed ha uno strato arabile più o meno sottile. Le spallette risentono della natura dell'altipiano cui appartengono; hanno, però, variabilissimo lo spessore dello strato arabile e mostrano spesso scoperto il sottosuolo tufaceo litoide.

Ciò posto, le ricerche nelle tenute di Serpentara, Saccopastore, Maglianella, Tor Sapienza e Casale Fiscale hanno portato ai seguenti risultati:

	Valle	Valle di altipiano	Altipiano	Spallette
Potere di ammonizzazione	1.34	1.17	1.05	1.06
NH_3 mg. per litro:	1.42	1.10	1.15	1.16
	1.27	...	1.10	...
	1.27	...	1.08	...
Medie . . .	1.32	1.13	1.09	1.11
Potere di nitrificazione	0.016	0.010	0.005	0.007
HNO_3 mg. per litro:	0.045	0.015	0.016	0.005
	0.045	...	0.015	...
	0.040	...	0.015	...
Medie . . .	0.036	0.012	0.012	0.006
Potere di denitrificazione	120	144	168	∞
Ore:	∞	∞	∞	∞
	∞	...	96	96
	96	...	∞	∞
Medie . . .	108	144	132	96
Potere di assimilazione dell'azoto	0.061	0.050	0.048	0.042
N mg. per litro:	0.073	...	...	...
	...	...	...	...
	...	...	...	...
Medie . . .	0.067	0.050	0.048	0 042

Nelle valli dell'Aniene e del Tevere l'azoto si dimostra, adunque, dotato della maggiore mobilità; seguono, per decrescente mobilità dell'azoto, ordinatamente i terreni in valle di altipiano, in altipiano e, da ultimo, quelli delle spallette. Notevoli sono i risultati dimostranti la fissazione dell'azoto nei terreni calcari ed anche nelle valli di altipiano, nonchè la irregolarità delle funzioni interessanti la mobilità dell'azoto nelle spallette dovuta, è da ritenersi, alla irregolare distribuzione del terreno. L'attività microbiologica delle nostre terre, non esclusa quella dei denitrificanti (il che costituisce un punto che intendo chiarire in appresso) decresce ordinatamente al concetto formatosi dagli agricoltori locali sopra la fertilità di esse.

C) In rapporto alle pratiche colturali. — Nonostante che il regime culturale della campagna romana sia stato fino ad ora trascurato e trovisi notoriamente arretrato, mercè l'attività degli Ufficî di bonifica, in molte parti, sono state iniziate coltivazioni di cereali e di prati artificiali, con le quali si è riusciti a

modificare in parte la natura del suolo e ad ottenere risultati non scoraggianti per l'ulteriore incremento delle coltivazioni.

Ho voluto quindi esaminare, nei rapporti delle funzioni batteriche in discussione, alcuni terreni di uguale natura e di identica giacitura, in parte coltivati e non concimati, in parte ancora non dissodati. Così, ad es., ho studiato il terreno dei Prati Fiscali, che è posto nella valle dell'Aniene, tanto nella parte lavorata come in quella lasciata a prato naturale; e l'altipiano della Cervelletta lavorato o no. I risultati comparativi sono riuniti nella seguente tabella:

	Terreno non dissodato	Terreno coltivato
Potere di ammonizzazione	1.25	1.34
	1.15	1.42
NH_3 mg. per litro:	1.07	1.07
Medie . . .	1.15	1.27
Potere di nitrificazione	0.016	0.025
	0.012	0.019
HNO_3 mg. per litro:	...	...
Medie . . .	0.014	0.022
Potere di denitrificazione	144	120
	∞	∞
Ore:	144	120
Medie . . .	144	120
Potere di assimilazione dell'azoto	0.061	0.053
	0.055	0.050
N mg. per litro:	...	...
Medie	0.058	0 051

Nei terreni incolti il potere di fissazione dell'azoto è leggermente superiore che non in quelli coltivati. In questi, invece, le attività microbiochimiche sono più attive per quanto riguarda l'ammonizzazione, la nitrificazione e la denitrificazione. I fatti credo che vadano spiegati soprattutto con l'influenza della maggiore o minore quantità dell'ossigeno che nei due casi si verifica per effetto della lavorazione del terreno.

Queste mie ricerche, in conclusione, mi sembra che dimostrino alcuni fatti molto importanti, i quali, mentre spiegano il vecchio sistema di conduzione delle aziende agricole della campagna romana ed illustrano le basi naturali del regime colturale dei terreni dove questo ha luogo, sono tali da gettare qualche luce sopra i provvedimenti di bonifica che è il caso o meno di adottare.

Anzitutto, esaminando le diverse funzioni microbiochimiche di per se stesse, è lecito di osservare come il potere di fissazione dell'azoto sia uno fra quelli che hanno la maggiore importanza.

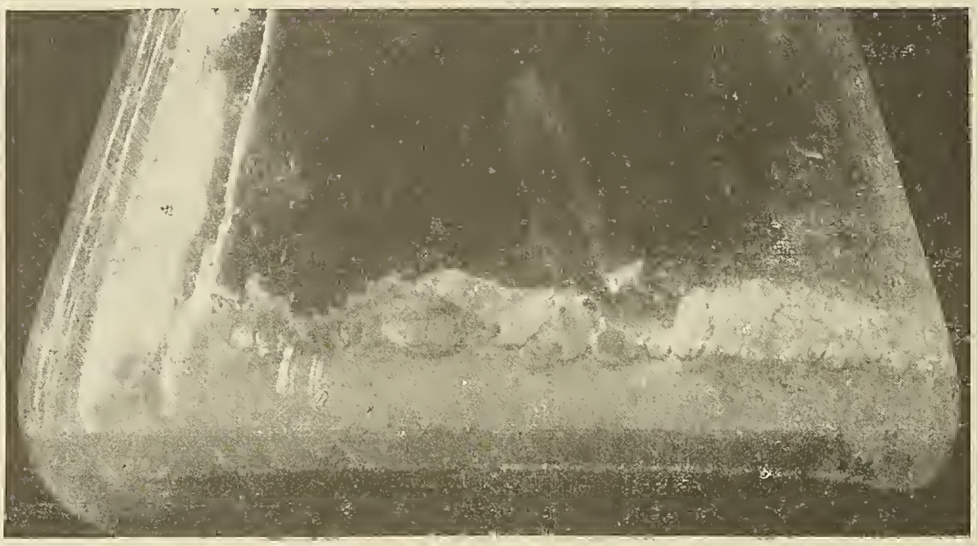


Fig. 6.

La fig. 6 rappresenta una coltura bruta di giorni 20 nella soluzione alla mannite del Beyerinck, allestita mediante l'innesto di un campione prelevato da una collina della tenuta Boccone corrispondente ad una delle zone di terreni più ingrati dell'Agro bonificabile da me studiato. Lo sviluppo di oligonitrofili è veramente abbondante; e la fissazione conseguita dell'azoto è notevole, rappresentando essa mg. 0.15 per litro. L'altra fig. 7 dà l'aspetto di una piastra all agar Beyerinck di 20 giorni, ottenuta nei lavori di isolamento delle forme dalla stessa coltura bruta: in essa si presenta un ricco sviluppo di specie oligo- e mesonitrofile.

Fig 7.

Il fatto delle speciali attitudini oligonitrofile dei terreni dell'Agro romano, e la importanza di cui esso gode, vennero da me rilevati già da qualche tempo, allorchè, incominciando ad occuparmi di studî di biologia relativamente al nostro Agro, mossi alla ricerca della distribuzione, in esso, dei batterî oligo- e mesonitrofili, avviandomi verso una serie di ricerche che erano destinate a stabilire quale fondamento avesse la pratica del *maggese* che è ivi in uso da tempo antichissimo [1]. Allora descrissi le forme di batterî fissatori di azoto più diffuse nella campagna romana e delle quali è

[1] R. Perotti, *Bacterii oligo- e mesonitrofili della campagna romana*. Rend. Acc. Lincei, vol. XIV, 2° sem., fasc. 11° pag. 623.

ancora parola nel seguente capitolo di questo lavoro. Ora ho potuto dare qualche misura del valore che il medesimo potere di fissazione dell'azoto raggiunge, e addurre un'altra prova a favore di quella ipotesi che già da sei anni ho formulato: che, cioè, il maggese, nelle condizioni naturali di clima e di terreno della campagna romana, deve compiere un grande ufficio.

Non è fuori luogo far qui rilevare come molti sperimentatori, i quali hanno eseguito misure sopra il potere di fissazione dell'azoto dei terreni, abbiano trovato valori superiori a quelli da me ottenuti con le terre dell'Agro romano. Non credo, però, che sia il caso di annettere grande importanza a queste differenze, perchè le cifre ottenute non possono avere un valore assoluto. L'attuale tecnica del metodo, come pure il numero non piccolo dei fattori dai quali dipende il verificarsi del fenomeno, non autorizzano a conferire ai risultati un significato il quale non sia relativo, mentre i risultati stessi debbono servire soprattutto ad essere paragonati con quelli dei valori delle tre altre principali funzioni microbiochimiche del terreno agrario: ammonizzazione, nitrificazione, denitrificazione.

Le misure eseguite sopra il potere di ammonizzazione nel suolo dell'Agro hanno portato alla conoscenza che esso gode di un valore superiore a quello della nitrificazione, poichè si verifica soprattutto il fatto che esso è sensibile, indistintamente per la generalità dei terreni, anche in quel periodo estivo dell'anno nel quale gli altri tre poteri sono ridottissimi o nulli. Si confrontino, difatti, le seguenti misure eseguite in due epoche opposte dell'anno:

	NH_3 mg. per litro: gennaio	luglio
	1.19	1.00
	1.27	0.98
	1.15	0.95
	1.32	0.92
MEDIA	1.23	0.95

e le altre eseguite nel mese di gennaio per terreni di differente natura:

	NH_3 mg. per litro: T. calcare-argilloso profondo	T. argilloso-calcare profondo	T. argilloso-umoso di media profondità	T. argilloso poco profondo
	1.27	1.34	1.36	1.03
	1.27	1.36	1.29	1.10
MEDIA	1.27	1.35	1.32	1.06

Influisce sopra questo fatto la natura del materiale usato nel metodo per ottenere la putrefazione [1]; certo, però, il fatto stesso dice pure che l'ammonizzazione è

[1] R. Perotti, *Sopra i metodi di misura delle attività microbiche del terreno agrario*, Rend. R. Acc. Lincei, vol. XX, serie 3ª, fasc. 4°, pag. 270.

una di quelle funzioni sulle quali nei nostri terreni si può fare il maggiore assegnamento.

In ordine di decrescente importanza segue la denitrificazione.

Sono in grado di mettere in evidenza i tre casi molto differenti che possono verificarsi in colture allestite secondo i precetti del Barthel, anche per campioni di terreno di natura non molto diversa e di posizione non molto lontana. Essi sono rappresentati dalla fig. 8 e vennero ottenuti nell'esame della parte della tenuta di Romavecchia, situata al nord della via Casilina, fra il suburbio e la tenuta del Quarticciolo.

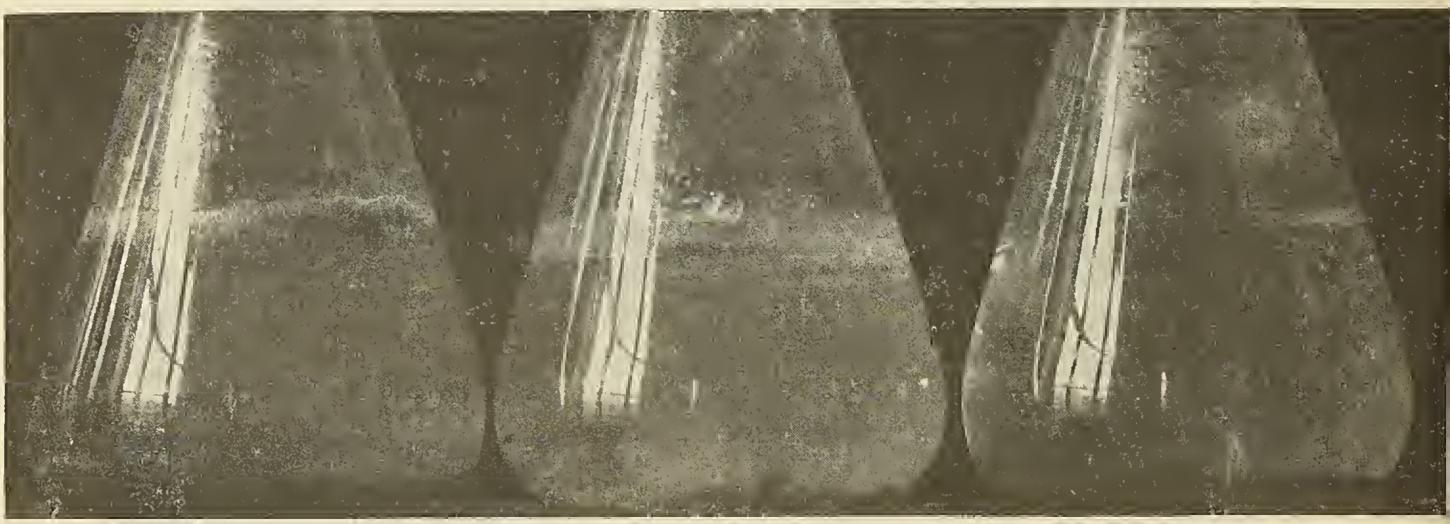


Fig. 8

Nella prima Erlenmeyer si ebbe una vera denitrificazione, con la totale scomparsa del nitrato; nella seconda si ebbe una denitrificazione parziale (indiretta), incompleta ancora dopo 308 ore di coltura, senza alcuno sviluppo di azoto; nella terza non si ebbe affatto denitrificazione, ma solo un principio di sviluppo, quasi subito cessato.

Ora, non può escludersi che l'ottenere risultati alquanto diversi per terreni in condizioni quasi uguali possa dipendere in parte dal metodo, il che feci rilevare nella mia poco innanzi citata Nota; deve però anche ammettersi che il comportamento generale delle colture allestite nella soluzione di Giltay è tale da permettere la deduzione che, in specie nel periodo estivo, nei terreni della campagna romana può verificarsi una abbondante denitrificazione. La poco netta reazione alcalina dei terreni che non sono compresi nella valle del Tevere ed in quella dell'Aniene può spiegare questo fatto che, d'altra parte, è in diretta relazione con il contenuto dei medesimi in sostanza organica, come risulta dalle seguenti cifre:

Ore occorse per la totale denitrificazione della soluzione di Giltay	Nei terreni:				
96	Prati fiscali:	sost. organica	=	12.55 %
120	Boccone	»	»	=	7.05 »
192	Romavecchia	»	»	=	7.00 »

Da ultimo, il potere di nitrificazione.

Esso è quello che gode della minore importanza. Le misure dànno piccoli valori nei mesi invernali, mentre nei mesi estivi è difficile di poter ottenere, da un innesto della soluzione di Omeliansky, solo un principio di nitrificazione. I terreni della campagna romana, eccettuati sempre quelli della regione valliva dell'Aniene e del Tevere, non presentano speciali attitudini alla nitrificazione. Sono poche e limitate le zone, nelle quali, per un complesso di circostanze favorevoli, pur in presenza di quantità non piccole di sostanza organica, essa si manifesta sensibilmente. Come esempio può citarsi il seguente:

	HNO_3 mg. per litro:	
	(sost. org. 10.5 %)	(sost. org. 8.8 %)
	0.035	0.015
	0.035	0.025
Media . . .	0.035	0.020

I risultati appartengono a due parti della tenuta di Romavecchia molto vicine, di eguale natura, aventi però un differente contenuto in sostanza organica.

È infine da notarsi come i fatti posti in luce da queste ricerche, sopra le attitudini dei terreni della campagna romana a fissare azoto, ad ammonizzare, a nitrificare e a denitrificare siano in armonia con il concetto formatosi dagli agricoltori romani sopra la fertilità dei loro terreni, e come diano ragione della pratiche colturali che ivi sono in uso da lungo tempo, dimostrando che effettivamente circostanze naturali, risiedenti nelle caratteristiche del clima e nella natura del terreno, hanno influito in non piccola misura sulle condizioni economico-agricole della regione.

Invero, i terreni della valle del Tevere e dell'Aniene, in accordo con le risultanze delle mie stesse ricerche, sono stati riconosciuti sempre più fertili di quelli delle valli di altipiano; questi più di quelli dell'altipiano stesso, e quest'ultimo più delle spallette. *Un lungo periodo di inattività microbiologica, o quasi, verificasi in tutti dall'aprile al settembre*, in corrispondenza di quella epoca dell'anno caratteristica per la penuria delle pioggie e la elevata temperatura, che acuiscono quel disgraziato stato di cose creato da terre non profonde, tenaci, incomplete, che mal si prestano a trattenere l'umidità ed a favorire il giuoco dell'ossigeno, condizioni prime di un regolato sviluppo batterico.

Non vedo come possa darsi facilmente ragione a coloro che, affermando la dipendenza delle condizioni agrarie della campagna romana da ben altre cause che non siano quelle date dal clima e dal suolo, giungerebbero fino a negare l'influenza di uno dei fattori principali della vegetazione. Perchè un terreno sia un buon terreno agrario, esso deve, anzitutto, presentare le condizioni favorevoli alla esistenza della microflora che nell'ordine naturale precede lo sviluppo della macroflora e, secondo le nostre ultime conoscenze, è mezzo indispensabile perchè questa possa avere alimenti in quella forma che risulta la più opportuna.

Una delle funzioni microbiochimiche del terreno è stata riconosciuta di una certa importanza per l'Agro romano, ed è quella della fissazione dell'azoto atmosferico. Gli

agricoltori romani lo avevano intuito fino dai più antichi tempi, e questa attitudine del suolo romano avevano sfruttato con la pratica del maggese. Nei moderni studî molto si è discusso sopra tale pratica: e fra essi mi piace ricordare quello, molto recente, dello Schneidewind (¹), direttore della Stazione chimico-agraria di Halle, il quale, dopo di avere discusso i risultati degli esperimenti istituiti in proposito a Rothamsted, a Lauchstädt, ad Halle ed a Pentkowo, conclude le sue note critiche affermando che « il maggese, in terreni ed in climi normali, non deve praticarsi, ma ritenersi come un male necessario in casi eccezionali, quando, cioè, si tratti di terreni tenaci, compatti, molto difficili a lavorare ed in condizioni climatiche sfavorevoli ». Ed è questo appunto il preciso caso della campagna romana. Le deduzioni dello Schneidewind hanno quindi una grande importanza per giudicare esattamente della nostra agricoltura, anche perchè ad esse egli è pervenuto senza tener conto della presente questione, anzi, credo, ignorando il grave problema dell'agricoltura romana.

Fra gli altri quesiti, dei quali questo importa la soluzione, vi è certamente anche quello di eliminare o, quanto meno, di restringere nei più angusti confini il maggese per dare campo ad una coltivazione intensiva; ma non mi sembra che tale risultato possa raggiungersi tanto facilmente, con provvedimenti ordinarî di tecnica agricola, stabilendo che le terre romane, tenacissime, senza calce, con poca sostanza organica, incapaci di trattenere umidità o da attrarne dal sottosuolo, debbano lavorarsi come la maggior parte delle altre, per le quali non sono da lamentarsi simili inconvenienti. Difatti, in questo studio sul movimento del capitale-azotato del terreno non ho mancato di prendere in esame l'influenza che sul movimento stesso viene esercitata dalle pratiche colturali. Le ultime ricerche, invero, dimostrano come queste possano sensibilmente modificare il naturale potere che i terreni hanno per l'ammonizzazione, la nitrificazione, la denitrificazione e la fissazione dell'azoto; ma tale influenza è piccola, ed apparisce, anzi, molto piccola se si considera quella, che ad essa si contrappone, della secchezza del clima e della impropria natura delle terre.

Non è però da escludersi che possano conseguirsi resultati con mezzi i quali meglio rispondano alle condizioni naturali dei luoghi e che in seguito passerò a discutere. Ora mi limito ad osservare come nell'attuale regime agricolo della campagna romana si tragga profitto da quelle attitudini microbiochimiche dei terreni, delle quali questi, nelle condizioni in cui si trovano, godono; che nel mutare sistema di conduzione delle aziende non possa non tenersi conto della necessità di mettere le attitudini stesse in armonia con le nuove esigenze della coltivazione moderna e di disciplinarle in modo che consentano la migliore mobilità — cioè in *misura*, come in *durata* — di quel capitale delle terre, dalla quale soltanto potrà ricavarsi il conveniente utile da quegli altri elementi della fertilità che non difettano nel nostro Agro.

Il governo del movimento del capitale-terreno, e soprattutto di quello azotato, dipende essenzialmente da una circostanza alla quale i pratici trascurano, in genere, di annettere importanza: dal contenuto, cioè, in sostanza organica. Nei dati chimici

(¹) W. Schneidewind, *Die Stickstoffquellen und die Stickstoffdüngung*, P. Parey, Berlino, 1908.

che si richiedono ai laboratorî di analisi manca, difatti, quasi sempre, quello che si riferisce alla determinazione di essa. Questa, invece, compie nel suolo l'ufficio di materiale termodinamogeno capace di attivare quelle funzionalità microrganiche dalle quali, è ormai assodato, dipende in gran misura la fertilità di un terreno agrario.

Un esempio veramente istruttivo della importanza dell'umo, specialmente per i nostri terreni, mi occorse di notarlo durante lo svolgimento delle presenti ricerche: e fu nella tenuta di Casale Fiscale, dove si procedette alla rottura di una parte dell'altipiano lasciato a prato naturale da molti anni e sulla quale fu possibile di ottenere, durante uno dei più secchi estati romani, una coltivazione veramente prospera di mais, mentre altrove i raccolti furono scarsissimi. Il terreno conteneva non meno del 12 °/₀ di sostanza organica.

Nel mio studio, quindi, ho fatto posto alla determinazione di questa e, estendendo convenientemente il numero delle analisi, ho procurato di fissarne la distribuzione nella zona dei 10 km. e di dare anche per esso uno *schema di carta agronomica*. Le due carte dell'azoto e della sostanza organica si presentano, quindi, in una opportuna correlazione, non solo perchè le determinazioni furono eseguite sopra gli stessi campioni, ma anche perchè effettivamente la capacità di movimento della scorta azotata di un terreno si trova in stretta relazione di dipendenza con la provvista di umo. È tuttavia da notarsi come il tenore in sostanza organica di un terreno possa variare entro limiti non troppo ristretti — e, forse, più ampî di quelli entro i quali può variare la riserva azotata — specie dopo una coltivazione di sfruttamento (*Raubbau*); è, però, anche indiscutibile che un determinato suolo, per un complesso di caratteri meccanici, fisici e chimici che gli sono proprî, presenta, nelle condizioni naturali, una determinata attitudine alla unificazione ed all'immagazzinamento della sostanza organica, ciò che può essere rappresentato con indicazioni convenzionali capaci di fornire qualche utile norma colturale.

Anche per il disegno della carta agronomica della sostanza organica mi valsi dell'aiuto di tutte quelle circostanze delle quali ho fatto cenno a suo luogo, allorchè riferii sopra i criterî con cui procedetti alla preparazione della carta dell'azoto. Perciò, nello estendere alle diverse località i risultati ottenuti dai campioni prelevati, tenni conto della conformazione morfologica dei terreni, della loro costituzione petrografica, della composizione chimica ecc.

Le analisi della sostanza organica furono eseguite sopra gli stessi campioni serviti per le analisi dell'azoto: ottenni quindi ugual numero di risultati distribuiti nelle medesime località. Essi sono riportati sopra una tabella uguale a quella nella quale sono riuniti i dati delle determinazioni azotate e che faccio seguire (tabella XII).

Fu praticato questo metodo: dosata l'acqua igroscopica sopra 10 gr. di terra fina, si calcinava in muffola rimuovendo verso la fine dell'operazione con filo di platino; dopo raffreddamento, si ripristinavano i carbonati con soluzione di carbonato ammonico purissimo, pesando dopo nuovo leggero riscaldamento.

Tabella XII.

Determinazioni di sostanza organica nei terreni della Campagna romana.

Numero del campione	Provenienza: Regione	Provenienza: Località	Sostanza organica per cento di terra fina: Valle	Altipiano	Spallette
1	Valli del Tevere e dell'Aniene	Serpentara	4.70	. . .	. . .
2		»	5.25	. . .	. . .
3		Tor di Quinto	5.00	. . .	. . .
4		»	4.45	. . .	. . .
5		Prati fiscali	9.85	. . .	. . .
6		»	12.55	. . .	. . .
7		Sacco pastore	7.25	. . .	. . .
8		»	8.72	. . .	. . .
9		Magliana	6.80	. . .	. . .
10		»	6.75	. . .	. . .
11		Prati del Varco . . .	7.00	. . .	. . .
12		»	6.20	. . .	. . .
13	NE	Boccone	. . .	8.40	. . .
14		»	. . .	9.20	. . .
15		»	. . .	8.10	. . .
16		»	. . .	7.48	. . .
17		Valle della Cecchina .	7.05	. . .	. . .
18		» » .	6 28	. . .	. . .
19		Castel Giubileo . . .	. . .	6.20	. . .
20		» . . .	. . .	5.40	. . .
21		» . . .	. . .	. . .	4.22
22		» . . .	. . .	. . .	3.90
23		Serpentara	. . .	7 58	. . .
24		»	. . .	8.05	. . .
25		Casale Fiscale . . .	. . .	9.20	. . .
26		» . . .	. . .	8.25	. . .
27		» . . .	. . .	. . .	5.00
28		» . . .	. . .	. . .	4 30
29		Ponte Nomentano . .	. . .	8.60	. . .
30		» . . .	. . .	8 25	. . .
31		Aguzzano	. . .	6.10	. . .
32		»	. . .	6 55	. . .
33	E	Ponte Mammolo . . .	10 00	. . .	. . .
34		» . . .	9.50	. . .	. . .
35		Torre Cervara . . .	. . .	6.40	. . .
36		» . . .	. . .	6 75	. . .
37		Cervelletta	8.40	. . .	. . .
38		»	7.55	. . .	. . .
39		»	9.20	. . .	. . .
40		»	. . .	7 80	. . .
41		»	. . .	7.10	. . .
42		Tor Sapienza	. . .	7.60	. . .
43		»	. . .	7.25	. . .
44		»	. . .	6.90	. . .
45		Acqua bollicante . . .	. . .	7 50	. . .
46		» . . .	. . .	7.05	. . .
47		Marranella	9.32	. . .	. . .
48		»	9.05	. . .	. . .
49		Romavecchia (a nord d. Casilina)	. . .	6.66	. . .
50		»	. . .	6 62	. . .
51		»	. . .	6.00	. . .
52		»	. . .	6.29	. . .
53		Valle di Centocelle .	12.10	. . .	. . .
54		» » .	8.55	. . .	. . .
55		Prato di Centocelle .	. . .	8.05	. . .
56		» » .	. . .	7.22	. . .
57		Casale di Romavecchia .	. . .	11.60	. . .
58		» » .	. . .	11.05	. . .
59		Romavecchia (nord Ferr.)	. . .	4.37	. . .
60		» » .	. . .	7.15	. . .
61		» (sud Ferrovia) .	. . .	5.65	. . .
62		» » .	. . .	5.60	. . .
63		Arco di Travertino . .	. . .	6.42	. . .
64		» » . .	. . .	5.80	. . .
65	SE	Grotta Perfetta . . .	. . .	5.10	. . .
66		» . . .	. . .	5.65	. . .
67		» . . .	12 25	. . .	. . .
68		» . . .	12.10	. . .	. . .
69		» . . .	8.80	. . .	. . .
70		» . . .	9.12	. . .	. . .
71		Tre Fontane	6.25	. . .	. . .
72		»	6 25	. . .	. . .
73		»	. . .	7.05	. . .
74		»	. . .	6.80	. . .
75		S. Alessio	. . .	5.85	. . .
76		»	. . .	6.66	. . .
77		Casa Ferratella . . .	. . .	. . .	4.48
78		» . . .	. . .	. . .	4.42
79		» . . .	6.72	. . .	. . .
80		» . . .	6.70	. . .	. . .
81		Cecchignola	. . .	6.50	. . .
82		»	. . .	7.20	. . .
83		Valle di Acquacetosa .	5.90	. . .	. . .
84		» » .	6.80	. . .	. . .
85	SW	Casetta Mattei . . .	6.50	. . .	. . .
86		» . . .	6.75	. . .	. . .
87		» . . .	. . .	8.20	. . .
88		» . . .	. . .	9.15	. . .
89		» . . .	. . .	. . .	3.81
90		» . . .	. . .	. . .	4.25
91		» . . .	. . .	7.80	. . .
92		» . . .	. . .	8.62	. . .
93		Bravetta	. . .	8.00	. . .
94		»	. . .	8.20	. . .
95		La Pisana	6.60	. . .	. . .
96		»	7.22	. . .	. . .
97		»	. . .	7.05	. . .
98		»	. . .	6.80	. . .
99		Santo Spirito	. . .	6.00	. . .
100		»	. . .	6.25	. . .
101		»	. . .	. . .	3.33
102		»	. . .	. . .	4.70
103		Valle d. Maglianella .	6.50	. . .	. . .
104		» » .	6.60	. . .	. . .
105		Valle di Acquafredda .	7.12	. . .	. . .
106		» » .	7.25	. . .	. . .
107	NW	Piana di Marmo . . .	. . .	5.25	. . .
108		» . . .	. . .	6.10	. . .
109		» . . .	. . .	. . .	4.40
110		» . . .	. . .	. . .	5 00
111		Acquatraversa . . .	. . .	6.45	. . .
112		»	. . .	6.00	. . .
113		Sepoltura di Nerone .	. . .	6 25	. . .
114		» .	. . .	. . .	5.00
115		» .	. . .	. . .	4.30
116		Monte dell'Ara . . .	. . .	. . .	4.35
117		» . . .	. . .	. . .	4.50
118		Valle della Crescenza	6.40	. . .	. . .
119		» »	6.12	. . .	. . .
120		Valchetta	. . .	6.66	. . .

Le analisi della sostanza organica dimostrano per essa una distribuzione più variabile che non per l'azoto, sebbene i limiti, entro cui i dati oscillano, siano meno ampî. È facile a verificarsi come nella perdita ottenuta sui campioni di terra riscaldati al rosso scuro si ottengano valori alquanto diversi, anche in una stessa località, alla distanza soltanto di pochi metri. Questa circostanza, mentre spiega qualche discordanza fra le determinazioni della sostanza organica riportate nel presente capitolo ed i risultati di quelle eseguite sui campioni di terreno sottoposti allo studio completo, consiglia di doversi attenere con grande rigore alla media dei diversi risultati ed alla esatta indicazione dei luoghi. Allo scopo di riportare i risultati medesimi sulla carta, devesi inoltre notare come la circostanza medesima non permetta di riunire i reperti delle analisi in gruppi più numerosi di quelli stabiliti per le determinazioni di azoto; trovo quindi opportuno di fissare tali gruppi nei quattro seguenti, non tenendo conto delle terre con contenuto di sostanza organica oltre il 12.5 %.

1°) Terre con contenuto in sostanza organica compreso fra gr. 0 e 5 %
2°) Terre con contenuto in sostanza organica compreso fra gr. 5 e 7,5 %
3°) Terre con contenuto in sostanza organica compreso fra gr. 7.5 e 10 %
4°) Terre con contenuto in sostanza organica compreso fra gr. 10 e 12.5 %

Dall'esame della tabella, come da quello della carta, si rileva che nelle spallette si hanno le più basse percentuali di sostanza organica, e cioè quelle comprese al di sotto del 5 %. Nella valle del Tevere a nord di Roma si ha una uguale ricchezza di umo; più abbondante esso è nella valle del Tevere a sud della città, essendo ivi l'umo compreso fra il 5 ed il 7.5 %. A questa stessa categoria appartiene la maggior parte dei terreni di altipiano e delle valli di altipiano. Dove lo strato coltivabile è notevolmente profondo, abbiamo percentuali di sostanza organica comprese fra 7.5 e 10 % e che si riscontrano anche nella valle dell'Aniene. Molto limitate sono le zone dove si hanno maggiori quantità di sostanza organica.

Dei molti studiosi delle condizioni agricole delle nostre campagne uno solo, il Desideri [1], ha intuìto la grande importanza che per la loro coltivazione razionale presenta la sostanza organica, ed ha ricordato come questa riesca utile a rendere solubili i silicati doppî di allumina, potassa, soda, magnesia e, più raramente, di calce. Citò non soltanto la opinione del Risler e del Grandeau sulla importanza di essa per la scomposizione dei silicati, ma si riportò anche ai risultati delle esperienze del Lawes e del Gilbert con le quali si è dimostrata l'influenza della sostanza organica nel favorire la igroscopicità del suolo e nel trattenervi i principî nutritivi solubili. Da queste considerazioni il Desideri trae la conclusione della necessità di escogitare la maniera più economica di condurre nel terreno i materiali organici che vi difettano e, per tal modo, scongiurare i perniciosi effetti della siccità estiva ed assicurare la conservazione come anche il progressivo aumento della fertilità della terra.

(1) C. Desideri, *Bonificamento agrario della campagna romana*. Roma 1883, pag. 52.

Dall'epoca, in cui il Desideri sosteneva tali idee, fino al giorno d'oggi, gli studî sopra l'ufficio della sostanza organica del suolo hanno fatto molto progresso. Non solo si è meglio precisata la funzione di essa nel terreno coltivabile, ma si è soprattutto dimostrata la capitale importanza di cui essa — senza nulla togliere al valore delle pure azioni chimiche o fisico-chimiche — gode per la moltiplicazione e la funzionalità della microflora che è l'esponente del movimento del capitale-terreno e, in specie, di quello azotato.

Il Remy, nel suo recente studio sopra l'influenza del *clima-terreno* (¹) nei processi di fissazione dell'azoto (²), illustra i risultati delle numerose ricerche, condotte da lui stesso durante gli anni dal 1903 al 1907, per stabilire i rapporti intercedenti fra questa capitale funzione e l'ambiente che il terreno agrario offre ai microrganismi. Egli riferisce di avere accertato la esistenza di detti rapporti e di essere riuscito ad esaltare artificialmente il potere fissatore dell'azoto, traendo profitto dalle conoscenze alle quali era pervenuto. Un acconcio materiale sorgente di energia è la condizione prima perchè si verifichi tale fenomeno. Io stesso, con un precedente mio lavoro, contemporaneamente al Remy, sono riuscito a mettere in evidenza fatti e circostanze analoghe, verificantisi per la dissoluzione dell'acido fosforico nel suolo (³). Dal mio studio risultano i diretti, immediati rapporti esistenti fra soluzione di acido fosforico e clima-terreno.

In un terreno provvisto di materie dinamogenetiche i fosfati si disciolgono, sopra tutto, perchè esse rappresentano una sorgente di energia per i microrganismi. Aggiungendo queste sostanze in varia misura e in differente forma al terreno: modificando, per usare i termini del Remy e del Delbrück, il clima-terreno, si riesce ad ottenere fenomeni solutivi di detto fra i principali elementi della fertilità, rilevanti e praticamente sfruttabili.

Fatti non dissimili emergono dai miei studî in corso sulla solubilizzazione microrganica dei composti di potassa.

Il complesso delle conoscenze, ormai acquisite, sopra la parte che i batterî prendono nei fenomeni biologici di cui è sede il terreno agrario, richiede di venire coordinato e completato, ed è ciò che io sto tentando di fare con il gettare le basi di una *teoria microrganica* delle concimazioni del suolo (⁴). Quello che frattanto può ritenersi assodato è che « dal quantitativo e dalla qualità della sostanza organica, « esistente, nel terreno dipende essenzialmente quel che è stato chiamato *clima-terreno* « e, di riflesso, la natura della microflora che al terreno stesso conferisce la parte

(¹) Il complesso delle condizioni di vita, che nei mezzi in fermentazione si offrono ai microorganismi, venne chiamato *clima* da M. Delbrück (*Wochenschr. f. Brauerei*, 1905, pp. 65 e segg.). Per esso si verifica che, a seconda dei differenti casi, solo determinate specie batteriche possono acquistare o perdere la prevalenza. *Clima-terreno* è la espressione del concetto medesimo applicato al suolo, considerato quale ambiente di sviluppo della microflora.

(²) Th. Remy, *Untersuchungen über die Stickstoffsammlungsvorgänge in ihre Beziehung zum Bodenklima*. Centr. f. Bakt. *2*, XXXII, pag. 561 (1909).

(³) R. Perotti, *Sul ciclo biochimico dell'anidride fosforica nel terreno agrario*. Roma 1909.

(⁴) R. Perotti, *Le condizioni del clima-terreno per l'induzione dell'azoto e la dissoluzione dell'acido fosforico nel suolo*. Rend. Soc. chimica ital., II, fasc. 6, (1910).

« prevalente della sua fertilità, in quanto che dai processi microrganici possiamo « fino ad ora ritenere siano strettamente dipendenti le principali funzioni vitali del « suolo coltivabile ».

È quindi evidente come tali conoscenze impongano una nuova direttiva nella teoria come nella pratica delle concimazioni, in quanto che occorre favorire gli scambî di energia nel terreno aumentando l'uno e favorendone la scomposizione, in maniera, però, che dai prodotti derivantiue possano trarre profitto le specie di microrganismi utili e non quelle indifferenti o nocive. È anche evidente come con tutto questo si venga ad assegnare alla sostanza organica del suolo un significato molto più generale di quello che poteva ad essa attribuirsi trenta anni addietro, quando non ancora si parlava di batteriologia e, molto meno, si discuteva di questioni batteriologiche del terreno.

L'esercizio agricolo dei terreni della campagna romana, che si sono dimostrati così raramente provvisti di sostanza organica, mi sembra adunque che richiegga fra i principali provvedimenti quello di assicurare un ben regolato regime di approvvigionamento ed utilizzazione delle sostanze dell'umo. Questo richieggono sia le condizioni generali create nel suolo dalle leggi che governano lo sviluppo della microflora, sia le speciali condizioni della località che trovasi ad essere dotata di una riserva fosfatica e potassica tale da poter assicurare risultati colturali non comuni.

Molti esempî si hanno della singolare produttività della campagna romana, allorchè in quei cosiddetti avvicendamenti, nei quali ha larga parte il maggese, si fa luogo ad un periodo colturale, ovvero si procede a speciali prove di campo. Ma tali risultati hanno la caratteristica della *intermittenza* e della *irregolarità*. Lo stesso non può verificarsi allorchè l'esercizio agricolo trae profitto anche da un ordinato sfruttamento della riserva organica del suolo, come in appresso verrò meglio dicendo.

VII.

La microflora.

Gli studî da me eseguiti sopra la microflora della Campagna romana, e che ora passo ad illustrare, hanno per scopo di far conoscere gli agenti di quei fenomeni, importantissimi per l'agricoltura, dei quali mi sono occupato nel precedente capitolo, in quanto sono il risultato delle speciali condizioni locali ed in particolare del relativo clima-rerreno, gl'intermediarî dello sviluppo e della prosperità della flora superiore, spontanea e coltivata, della quale resta ancora da trattare.

Studî siffatti vennero, fino al presente, quasi completamente trascurati, anche nella preparazione di quelle leggi di bonifica dell'Agro le quali non tutte sono più antiche delle scoperte sopra l'intervento dei microrganismi nella coltivazione dei campi. G. Baccelli, che intuì l'aiuto che si sarebbe potuto trarre dalle conoscenze

batteriologiche nel provvedere al risorgimento economico della Campagna romana, volle fondare un apposito laboratorio che si occupasse di studî di batteriologia applicati all'agricoltura, annettendolo provvisoriamente alla R. Stazione di patologia vegetale di Roma, diretta dal prof. G. Cuboni. Da questo laboratorio, delle cui tristissime vicende non è qui il luogo di occuparci, uscì tuttavia il primo lavoro di batteriologia risguardante i terreni circondanti la città, eseguito dal Faelli nell'estate e nell'autunno dell'anno 1903 (1).

Con esso si venne alla conclusione che le *tufarine*, le *pozzolanelle* ed i terreni pliocenici sono ricchissimi di microrganismi, fra i quali si contano micrococchi, bacilli, fermenti dell'urea, protei, sarcine; che il numero dei microrganismi stessi è minore alla superficie che non a cm. 30, e diminuisce approfondendo di più la presa del campione; che il 15 % circa è costituito da ifomiceti e da saccaromiceti.

Solo due anni appresso, io detti alle stampe quel mio lavoro sopra i batterî oligo- e mesonitrofili della Campagna romana (2), nel quale misi in evidenza la diffusione e l'importanza che i batterî fissatori di azoto posseggono nei nostri terreni, in relazione specialmente alla locale e vecchia pratica del maggese. Una ulteriore illustrazione della batteriologia della Campagna romana fu l'altro mio lavoro sopra la *Pseudomonas leuconitrophila* n. sp., in essa diffuso e da me descritto (3). Gli ulteriori miei studî sopra il movimento del capitale-azoto nei terreni romani e sopra i metodi di misura delle attività microbiche, innanzi citati, sono nuove contribuzioni alla conoscenza della microflora dell'Agro, in quanto si riferiscono alla funzionalità di essa.

Ritenni tuttavia necessario di procedere ad un più completo studio della microflora della Campagna romana in occasione delle presenti ricerche di biologia dell'Agro, con le quali era mio intendimento di venire alla conoscenza di tutti i fatti naturali che ivi governano lo sviluppo naturale delle piante, e di trarne eventualmente conclusioni a vantaggio delle misure di bonifica da adottarsi. Mentre nel precedente capitolo esposi la parte fisiologica dello studio della microflora propostomi, nel presente vengo ad esporre la parte morfologica delle ricerche stesse eseguite durante l'intero anno 1910, ottenendo così risultati che sono la espressione non solo delle proprietà dei differenti terreni, ma anche dell'intero ciclo annuo delle vicende atmosferiche.

Queste ricerche comprendono:

1°) l'esame quantitativo dei batterî e le variazioni che il numero di questi presenta con i differenti terreni, con i lavori, ecc.;

2°) l'esame qualitativo in relazione alle circostanze medesime;

3°) lo studio delle forme o delle *razze* caratteristiche della regione.

(1) G. Faelli, *Ricerche di batteriologia agraria fatte nell'Agro romano*. Arch. di farm. sperim., III, 1904.

(2) R. Perotti, *Batteri oligo- e mesonitrofili della Campagna romana*. Rend. R. Acc. Lincei, XIV, 2° sem., fasc. 11, pag. 623.

(3) Id., *Su una nuova specie di bacterii oligonitrofili*. Ann. di botanica, vol. IV, fasc. 3.

L'esame quantitativo dei batterii venne eseguito con il metodo della numerazione dei germi sviluppantisi nelle colture a piatto allestite con il mio agar all'estratto di torba, del quale avevo avuto più volte occasione di sperimentare l'efficacia (¹).

Gr. 100 di buona torba (sost. org. = 80.86 %), seccata all'aria, si facevano bollire a fiamma diretta, per due ore, insieme con cmc. 500 di acqua; ed altri 100 gr. della stessa si lasciavano digerire per due ore in autoclave a 120 C° con altri cmc. 500 di acqua. Filtrato il liquido, si pressava il residuo, aggiungendo un poco di acqua di lavaggio, e si riuniva il nuovo liquido al primo determinando nel risultante le ceneri. In base al contenuto in cenere di esso, si diluiva il liquido sino ad un tenore dell'1 ‰ di sostanze minerali, vi si aggiungeva l'1 % di glucosio e si agarizzava all'1.3 %.

Si allestivano piastre di cm. 15 di diametro, in doppia prova, per ogni campione di terra prelevato in conformità alle ordinarie norme, a profondità variabili a seconda dei casi; si tenevano a temperatura ambiente, e la conta veniva eseguita dopo 20 giorni di coltura.

In una Nota preliminare resi succintamente conto di alcuni dei principali risultati ottenuti con lo studio della microflora della Campagna romana durante l'anno 1910 (²): ora, passando ad una più dettagliata esposizione di questa parte delle mie ricerche di biologia, riunisco anzitutto nella seguente tabella i dati ricavati dalla numerazione dei germi in trentadue campioni di terreno. Ivi è tenuto conto dell'epoca dell'anno, della profondità, della varia natura dei terreni e delle pratiche colturali a cui essi vennero sottoposti.

(¹) R. Perotti, *Per l'esame bacteriologico-agrario del terreno*. Rend. R. Acc. Lincei, vol. XVI, 1° sem., fasc. 1, pag. 67.

(²) Id., *Sopra la microflora della Campagna romana*. Rend. R. Acc. Lincei, vol. XX, 1° sem., fasc. 9, pag. 690.

Tabella XIII.

Campione	Profondità cm.	Numero dei germi per cm.c. di terreno (media di due esami) Gennaio	Febbraio	Marzo	Aprile	Maggio	Giugno	Luglio	Agosto	Settembre	Ottobre	Novembre	Dicembre
Valle del Tevere e dell'Aniene.													
1. Serpentara	10	...	...	340.000	...	...	...	...	...	...	...	...	...
Coltivato a cereali	20	...	...	340.000	...	...	...	...	...	...	...	...	...
non concimato	50	...	...	20 000	...	...	...	...	...	...	...	...	...
2. Serpentara	10	...	...	264 000	...	...	...	...	...	...	...	...	...
Coltivato a cereali	20	...	...	300.000	...	...	...	...	...	...	...	...	...
(più tenace del prece-									...	...	...	...	...
dente camp.)	50	...	...	20.000	...	...	...	...					
3. Prati fiscali . . .	10	178 000	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
Coltivato a cereali	20	140.000	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
non concimato	50	145.000	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
4. Prati Fiscali . . .	10	117.500	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
Prato naturale	20	64 000	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
	40	73.000	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
5. Pedica della Signora	10	...	210 000	...	...	...	...	14.500	...	...	...	...	...
Prato naturale	20	...	180.500	...	...	...	...	13 250	...	...	...	...	...
(ricco di umo)	50	...	200 000	...	...	...	...	82.500	...	...	...	...	...
6. Pedica della Signora	10	...	175.000	...	...	...	...	...	...	...	...	420.000	...
Prato naturale	20	...	167.000	...	...	...	...	...	...	...	...	130.000	...
	50	...	65.500	...	...	...	...	...	...	...	...	35.250	...
7. Saccopastore . . .	10	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	130.000
Prato naturale	20	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	95.000
	50	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	110.500
8. Saccopastore . . .	10	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	420.000
Coltivato a cereali	20	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	130.000
	50	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	35.250
Regione NE.													
9. Colle Fiscale . . .	10	15.500	...	...	...	...	...	...	...	...	...	72.500	...
Altipiano - prato naturale (tufarine)	20	18.500	...	...	...	...	...	...	...	...	...	85.000	...
	35	28.500	...	...	...	...	...	...	...	...	...	—	...
10. Colle Fiscale . . .	10	7.500	...	...	...	...	...	...	...	...	...	39.500	...
Spallette (tufo)	20	12.500	...	...	...	...	...	...	...	...	...	21.000	...
	50	—	...	...	...	...	...	...	...	...	...	—	...
11. Colle Fiscale . . .	10	48.000	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
Altipiano coltivato a	20	11.500	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
frumento (tufarine)	50	—	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
12. Boccone	10	165.000	500.000	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
Colle - prato naturale	20	187.000	625.000	...	...	...	...	...	...	262 500	...	...	...
(tufarine)	50	—	—	...	...	...	...	...	...	195.000	...	...	...
13. Boccone	10	160.500	...	...	...	...	...	...	...	35.000	...	...	...
Colle - prato naturale	20	125.000	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
(tufarine)	50	242.500	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
14. Valle della Cecchina	10	...	321.500	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
Valle di altipiano col-	20	...	37.500	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
tivata a frumento	50	...	25.000	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
Regione E.													
15. Cervelletta . . .	10	...	...	...	...	75.500	...	...	...	175.000	...	...	...
Altipiano - coltivato a	20	...	...	...	...	90.000	...	...	...	260.000	...	...	...
cereali (tufarine)	35	...	...	...	...	37.500	...	...	...	70.500	...	...	...
16. Tor Sapienza . . .	10	...	...	...	...	...	...	...	...	162.000	...	...	...
Altipiano - prato natu-	20	...	...	...	...	...	...	...	...	85 000	...	...	...
rale (tufarine)	30	...	...	...	...	...	...	...	...	65 000	...	...	...
17. Centocelle	10	...	...	57.500	...	...	...	...	...	...	265.000	...	...
Altipiano - prato natu-	20	...	...	15.000	...	...	...	...	...	...	157.500	...	...
rale (pozzolanelle)	40	...	...	15.000	...	...	...	...	...	...	75.500	...	...
18. Valle di Centocelle	10	...	875.000	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
Valle di altipiano	20	...	250.000	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
Prato naturale	50	...	365.000	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

(*Segue*) TABELLA XIII.

CAMPIONE	Profondità cm.	Gennaio	Febbraio	Marzo	Aprile	Maggio	Giugno	Luglio	Agosto	Settembre	Ottobre	Novembre	Dicembre
		NUMERO DEI GERMI PER CM.C. DI TERRENO (MEDIA DI DUE ESAMI)											
19. ROMAVECCHIA (a nord													
della Casilina). . .	10	...	80.000	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
Altipiano - prato natu-	20	...	39.500	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
rale (tufarine)	50	...	10.000	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
20. ROMAVECCHIA (a nord													
della Casilina). . .	10	...	107.500	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
Altipiano - prato na-	20	...	145.000	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
turale (tufarine)	50	...	—	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
21. ROMAVECCHIA. . . .	10	5000	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
Altipiano - prato na-	20	4000	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
turale (pozzolanelle)													
terreno ricco di umo	50	—	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
22. ROMAVECCHIA. . . .	10	175 000	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
Altipiano - prato natu-	20	25.000	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
rale (pozzolanelle)	50	87.500	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
23. ROMAVECCHIA. . . .	10	...	...	...	190.000	...	...	...	...	...	...	...	...
Altipiano - prato na-	20	...	...	...	47.500	...	...	...	...	...	...	...	...
turale (pozzolanelle)	50	...	...	...	87.500	...	...	...	...	...	..	...	...
24. ROMAVECCHIA. . . .	10	...	...	...	234.000	...	...	...	...	...	...	...	...
Altipiano - prato natu-	20	...	...	...	75.000	...	...	...	...	...	...	...	...
rale (pozzolanelle)	40	...	...	...	37.500	...	...	...	...	...	...	...	...
25. ARCO DI TRAVERTINO	10	...	...	...	...	...	...	...	...	...	365.000	...	...
Altipiano - prato natu-	20	...	...	...	...	...	...	...	...	...	57.500	...	...
rale (pozzolanelle)	50	...	...	...	...	...	...	...	...	...	37.500	...	...
Regione SE.													
26. CECCHIGNOLA. . . .	10	...	...	100.500	...	...	...	...	...	...	...	...	...
Altipiano - prato na-	20	...	...	25.000	...	...	...	...	...	...	...	...	...
turale (tufarine)	35	...	...	17.000	...	...	...	...	...	...	...	...	...
27. GROTTA PERFETTA . .	10	...	...	...	95.500	...	...	...	...	...	...	...	...
Altipiano coltivato a	20	...	...	...	25.000	...	...	...	...	...	...	...	...
cereali (tufarine)	50	...	...	...	40.500	...	...	...	...	...	...	...	...
Regione SW.													
28. VALLE DI ACQUAFREDDA	10	...	...	...	...	...	...	..	68.500	...	...	...	...
Valle di altipiano	20	...	...	...	...	...	...	...	76.500	...	...	...	...
prato naturale	50	...	...	...	...	...	...	...	72.500	...	...	...	...
29. MAGLIANELLA . . .	10	...	...	...	...	...	...	...	99.500	...	...	...	...
Collina - prato natu-	20	...	...	...	...	...	...	...	56.500	...	...	...	...
rale (tufarine)	35	...	...	...	...	...	...	...	41.500	...	...	...	...
30. SANTO SPIRITO . . .	10	...	...	...	...	...	...	43.500	...	...	...	...	...
Collina - prato natu-	20	...	...	...	...	...	...	34 200	...	...	...	...	...
rale (tufarine)	30	...	...	...	...	...	..	42.500	...	...	...	...	...
Regione NW.													
31. VALLE D. CRESCENZA .	10	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	119.000	...
Valle di altipiano col-	20	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	200.500	...
tivata a cereali (tufa-													
rine)	50	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	85.000	...
32. MONTE DELL ARA . .	10	..	...	...	...	...	...	...	...	...	...	39.500	...
Collina - prato natu-	20	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	72.000	...
rale (tufarine)	35	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	44.000	...

A) In rapporto alle differenti epoche dell'anno. — Dall'esame delle precedenti cifre rilevasi, anzitutto, che il numero dei germi contenuti in un cm^3 dei medesimi terreni, ed in terreni simili, varia notevolmente durante il periodo di un anno. Per mettere meglio in essere questo fatto, ho calcolato le medie di tutti gli esami batteriologici eseguiti in ciascuno dei mesi dell'anno, non tenendo conto nè della qualità dei campioni prelevati, nè della profondità da cui essi provenivano. Ho soltanto escluso dai computi tre esami i quali hanno dato risultati estremamente bassi, non perchè essi non dovessero influire sopra i risultati medî, ma solo perchè essi non avrebbero potuto figurare ed influire nelle medie di tutti i mesi, in modo da escludere la possibilità di giungere ad apprezzamenti troppo inferiori al giusto in quelle epoche nelle quali gli esami stessi vennero eseguiti. I tre esami esclusi furono quelli praticati per le spallette di Colle Fiscale (n. 9) e per l'altipiano di Romavecchia (n. 21), in prossimità del casale omonimo, dove verificasi una reazione del terreno con tendenza all'acidità e molta sostanza organica.

Si deve inoltre notare come il numero degli esami sia piuttosto vario a seconda dei mesi, essendomi trovato nella possibilità di dedicarmi con una maggiore attività allo studio nel periodo invernale. Così si hanno nel mese di gennaio 9 esami, in quello di febbraio 7, in marzo 4, in aprile 3, in maggio 1, in giugno nessuno, in luglio 2, in agosto 2, in settembre 3, in ottobre 2, in novembre 4, e nel mese di dicembre 2. Essi, anche in tal modo distribuiti, permettono di scendere alle conclusioni che faccio seguire dopo aver riportato le medie mensili da me calcolate:

gennaio	-	germi	per cmc.	. . .	105.684
febbraio	-	»	»	. . .	402.921
marzo	-	»	»	. . .	126.166
aprile	-	»	»	. . .	92.500
maggio	-	»	»	. . .	67.666
giugno	-	»	»	. . .	—
luglio	-	»	»	. . .	38.408
agosto	-	»	»	. . .	69.166
settembre	-	»	»	. . .	145.555
ottobre	-	»	»	. . .	132.333
novembre	-	»	»	. . .	118.431
dicembre	-	»	»	. . .	153.458

A colpo d'occhio, anche avuto riguardo al numero dei germi del terreno, resta nettamente individualizzato quel lungo periodo estivo già messo in rilievo allorchè si trattò, in questo stesso lavoro, degli elementi non venali della produzione e, in particolare, delle precipitazioni atmosferiche e del tenore in umidità del suolo. Il numero dei germi nei terreni dell'Agro diminuisce rapidamente nell'aprile, come aumenta altrettanto rapidamente nel settembre. Questo fatto è un nuovo indice della *persistente inattività microbiologica estiva* dei nostri terreni; e riesce tanto più significativo in quanto, come appresso si vedrà, le specie di microrganismi, che in detto periodo dell'anno vi trovano favorevoli condizioni di sviluppo, sono ifomiceti e, cioè,

non quelle che godono del massimo valore agricolo. Nel periodo invernale il numero dei germi è piuttosto elevato. Le cifre talvolta raggiunte (ad es., di 625.000, 875.000) sono non troppo comuni anche nei migliori terreni di altre regioni, ed indicano che, pur incompleti e non formati, i nostri terreni si presentano abbastanza ricchi di quegli elementi che contribuiscono alla prosperità della loro microflora. Il Reimers, nei terreni coltivati presso Berlino, trovò un massimo di 1.514.800 germi per cmc. (1); il Fraenkel, nei dintorni di Potsdam, un massimo di 300.000 (2); il Kramer, presso Dresda, un massimo di 650.000 (3); il Miquel, presso Parigi, un massimo di 718.000 (4), ecc. Il Faelli (5) trovò nell'Agro un minimo di 32.000 germi a cmc. ed un massimo di 1.800.000. È sul principio della primavera che, secondo le risultanze dei miei studî, troviamo verificarsi il massimo numero di germi.

B) In relazione alla profondità. — Il Faelli fece notare come dai suoi studî, contrariamente a quanto ritenevasi per lo innanzi, risultasse che i microrganismi sono in minor quantità alla superficie che non a cm. 30 di profondità, e diminuiscono al di sotto. I dati di cui io mi trovo in possesso mi permettono di stabilire altri fatti di cui dò ragione più appresso.

Eliminando dai computi i risultati degli esami eseguiti sopra le spallette di Colle Fiscale (n. 9), con il terreno di Romavecchia, presso il casale (n. 21), e quelli della valle di Cento Celle (n. 18), per aver valori estremi, calcolai le medie dei 29 esami rimanenti, in relazione alla profondità; ed ottenni queste cifre:

a cm.	10	di profondità	- germi	per cmc.	168.291
"	20	"	"	"	120.304
"	30	"	"	"	(53.750)
"	35	"	"	"	(39.833)
"	40	"	"	"	(55.700)
"	50	"	"	"	77.527

Non è il caso di discutere le medie del numero dei germi a cm. 30, 35 e 40 di profondità, perchè, essendo state ottenute da un troppo limitato numero di analisi, non possono essere paragonate con quelle del numero dei germi a 10, 20 e 50 cm. di profondità. In complesso, il numero dei microrganismi a cm. 10 di profondità risulta sensibilmente superiore a quello che si ha a cm. 20; la differenza, per altro, non è troppo grande, il che induce a ritenere che possa verificarsi il contrario in alcuni casi, i quali, influendo troppo sulle medie, rendono necessaria una distinzione. Difatti, esaminando la tabella XIII, troviamo che una maggior ricchezza di germi a cm. 20 di profondità si ha con prevalenza nei terreni meno potenti e costituiti

(1) Reimers, *Ueber den Gehält des Bodens an Bakterien.* Zeitschr. f. Hygiene, VII, an. 1889.

(2) Fraenkel, *Untersuchungen über das Vorkommen von Mikroorganismen in verschiedenen Bodenschichkten* Zeitschr. f. Hygiene, II, an. 1887.

(3) Kramer, *Die Bakteriologie in ihren Beziehungen zur Landwirtschaft.* Wien, an. 1890.

(4) Miquel, *Sur la longévité des germes des bacteries dans les poussières et dans le sol.* Ann. de micr, 1897.

(5) Faelli, loc. cit.

da tufarine, oltre che nei tenacissimi terreni della valle del Tevere (Serpentara). Le medie dei risultati degli esami in questi casi sono le seguenti:

a cm. 10 di profondità	germi per cmc.	161.833
" 20 "	" "	199.958
" 50 "	" "	49.928

In generale, adunque, dove ha luogo un facile disseccamento del soprassuolo, il numero dei microrganismi è superiore, ad una certa profondità, anzichè in superficie, come asserì il Faelli; ma negli altri casi, stando ai risultati delle mie ricerche, è da ritenersi il contrario. Anche il Faelli prelevò i campioni da tre differenti profondità: a 50 cm., a 30 ed in superficie; ma questo ultimo prelevamento fu certo fatto in uno strato troppo dipendente dagli agenti esteriori, e quindi è molto giusto ch'egli trovi con una maggiore costanza di me, che eseguii il prelevamento a cm. 10, il numero dei germi inferiore in superficie, piuttosto che a cm. 30 di profondità.

Si è tutti d'accordo nell'ammettere il numero dei germi molto ridotto a 50 cm.

C) In rapporto alla varia natura dei terreni. — Per giudicare della ricchezza in germi dei terreni dell'Agro a seconda della loro varia natura (in accordo ai risultati da me precedentemente esposti), trovo opportuno di distinguere i terreni nelle valli del Tevere e dell'Aniene, quelli di tufarine, quelli di pozzolanelle, quelli sabbiosi della zona SW e, in ciascuna delle tre ultime categorie, quelli di valle di altipiano e quelli di altipiano. Anche qui non tenni conto dei risultati estremi dati dagli esami degli stessi campioni che vennero esclusi anche dai precedenti computi. Le medie del numero dei germi per cmc. di terra nelle varie specie di terreni furono le seguenti:

Valli del Tevere e dell'Aniene	germi per cmc.	153.858
" di altipiano di tufarine	" "	129.916
Altipiano di tufarine	" "	115.975
Valle di altipiano di pozzolanelle	" "	(496.666)
Altipiano di pozzolanelle	" "	102.127
Valle di altipiano dei terreni sabbiosi (SW)	" "	75.200
Altipiano dei terreni sabbiosi	" "	52.950

Ritengo la media relativa alla valle di altipiano di pozzolanelle non giusta, per essere data esclusivamente dai risultati di un solo campione (n. 18); e di essa, quindi, non voglio tener conto. Le altre medie, però, dimostrano in modo molto chiaro come i terreni delle valli del Tevere e dell'Aniene, completi, calcari, precedano di gran lunga tutti gli altri, anche per quanto si riferisce alla ricchezza in germi. Seguono, ad una certa distanza, anzitutto i terreni piuttosto sciolti originatisi dai tufi; e, fra essi, si presentano più ricchi quelli delle valli di altipiano. I terreni di pozzolanelle, astrazion fatta da quelli vallivi, sono ancora più poveri di germi; chiudono, però, la serie i terreni magri e sabbiosi della regione a SW di Roma. Sulle spallette il contenuto in germi è assolutamente basso, come dimostrano i risultati degli esami al n. 10.

Altre circostanze, riferentisi ai rapporti fra natura del suolo e contenuto in microrganismi, sono poste in essere dalle analisi dei singoli risultati esposti nella precedente tabella.

Una notevole ricchezza in umo ed una maggiore scioltezza di una parte della tenuta della Pedica del Prato della Signora (n. 3) han portato a rilevare un numero di microrganismi molto superiore a quello contenuto nel resto della tenuta ed anche nelle altre parti della valle dell'Aniene, cui la tenuta medesima appartiene. Oltre un certo limite, l'azione della sostanza organica, non temperata da quella della calce, porta ad una straordinaria diminuzione del numero dei germi: questo noi osserviamo in quella parte della tenuta di Romavecchia prossima all'omonimo casale (esame n. 21) dove la sostanza organica raggiunge circa il 12 °/₀ ed il terreno tende alla reazione acida.

Una maggiore o minore tenacità e compattezza può portare, anche in una stessa tenuta, a sensibili differenze nel numero dei germi. È per questo che nella parte di terreno più tenace, esaminato nella tenuta di Serpentara (n. 2), il numero dei germi a cm. 20 di profondità è alquanto inferiore a quello che si ha a pari profondità nella regione di suolo meno tenace.

Tali risultati dimostrano, in conclusione, un accordo esistente fra le leggi, che governano in natura la distribuzione dei microrganismi nel suolo, ed i fatti che si verificano nel caso speciale dell'Agro romano, accordo dalla cui conoscenza potranno trarsi deduzioni utili nella pratica.

D) In rapporto alle diverse pratiche colturali. — Le osservazioni da me fatte sopra le variazioni nella distribuzione del numero dei germi nei terreni dell'Agro, tenendo conto delle diverse pratiche cui erano stati sottoposti, sono tali da permettere ancora qualche altro giudizio circa i vantaggi che dalle pratiche stesse si è in grado di trarre favorendosi la cooperazione dei batterii nella coltivazione. Una sola circostanza ho preso in esame: quella, cioè, dei resultati possibili ad ottenersi nel numero dei germi con i lavori del terreno, in confronto del numero dei germi esistenti nei terreni incolti lasciati a prato naturale. Le medie, da me calcolate a tale riguardo con le cifre precedentemente esposte e dalle quali ho escluso quelle stesse di cui non ho tenuto conto anche nelle altre medie, sono le seguenti:

Terreni lavorati (non concimati) - germi per cmc.		145.657
» a prato naturale	» »	123.130

Nei terreni lavorati, adunque, si ha un numero di germi sensibilmente superiore a quello dei terreni lasciati a prato naturale. Ma per meglio valutare il significato di tali risultati, stimo opportuno di classificare i risultati a seconda delle sei diverse regioni nelle quali distinsi la zona da bonificarsi, da me studiata, e calcolare separatamente le medie dei germi contenuti nei terreni coltivati ed in quelli incolti per ciascuna di esse. Le medie ottenute sono:

	terreni lavorati (non concimati)	terreni a prato naturale
Valli del Tevere e dell'Aniene . . .	194.354	133.000
Regione NE	(86.900)	192.071
» E	150.125	106.454
» SE	(53.666)	(62.750)
» SW	—	64.457
» NW	134.833	55.750

Faccio osservare che nella regione NE avevo esaminato un solo campione di terreno coltivato e sei di terreni a prato naturale: i risultati medî non sono quindi paragonabili, e non è il caso di tenere conto di quello avuto dal campione di terreno coltivato. È anche da osservarsi che nella zona SE, per tutte e due le categorie di terreni, fu esaminato un solo campione: anche a queste cifre non può quindi annettersi gran significato. Per i terreni coltivati della zona SW mancano esami. Ciò che in tali condizioni è possibile di dedurre si è che la lavorazione del terreno porta notevole vantaggio sull'aumento del numero dei germi, soprattutto nelle valli del Tevere e dell'Aniene, nelle quali, avendosi terreni completi, si riscontra la massima attitudine a subire l'influenza dei mezzi per indurre variazioni nella distribuzione dei germi del suolo. Differenze notevoli fra il numero dei germi nelle due categorie di terreni da me considerate si riscontrano anche nelle medie degli esami dei campioni provenienti dalle regioni dell'E e del NW che sono fra le migliori della zona bonificabile. I risultati dei lavori, però, non possono ritenersi così sensibili come per i i terreni completi o, per meglio specificare, ben provvisti di calcare.

Ancora una considerazione è lecito di fare per quanto si riferisce all'influenza della lavorazione sul numero dei germi a varie profondità. Ho calcolato, a tale scopo, le medie per le tre profondità a cui fu prelevata la maggioranza dei campioni (cm. 10, 20, 50); ed i risultati ottenuti furono questi:

nei terreni	coltivati	a cm.	10:	germi	per cm.^{3}	184.318
"	"	"	20	"	"	139.500
"	"	"	50	"	"	52.964
"	a prato naturale	"	10	"	"	155.000
"	" "	"	20	"	"	107.555
"	" "	"	50	"	"	92.704

La lavorazione del terreno induce quindi un notevole aumento nel numero dei germi, alle profondità di cm. 10 e 20. Alla profondità di cm. 50, dove i lavori ordinarî non arrivano, si noterebbe, invece, un fatto contrario, che sarebbe difficile di spiegare qualora non volesse ammettersi che la facilitata penetrazione dell'aria negli strati meno superficiali del terreno ostacoli la moltiplicazione di quegli anaerobii più o meno obbligati che trovano condizioni di sviluppo maggiormente appropriate nel terreno non smosso e del quale, per la secolare incoltura, si sono costituiti un ambiente particolarmente adatto.

Concludendo, in quanto a ricchezza di germi, si rileva che occupano il primo posto i terreni della valle del Tevere e di quella dell'Aniene; alquanto dietro vengono tutti gli altri terreni dell'Agro, fra i quali, tuttavia, per maggior numero di germi primeggiano gli altipiani di pozzolanelle e le valli di altipiano di tufarine. Sulle spallette il contenuto dei germi è assolutamente basso. In linea generale, si osserva una grande differenza tra il numero dei microrganismi dei terreni lavorati e di quelli lasciati a prato naturale. I lavori favoriscono notevolmente la moltiplicazione dei germi anche nelle nostre terre. Circa le variazioni quantitative del contenuto batterico con l'avvicendarsi delle stagioni, troviamo il fatto dell'aumento dei germi nel periodo invernale, decorrente dal settembre al marzo; in quanto, però, alla

distribuzione, con la profondità troviamo irregolarità frequenti. In linea di massima, mi sembra, che non possa affermarsi la circostanza che nei nostri terreni, nelle profondità medie (cm. 30-35), si abbia il maggior numero di batterii.

Passo ora a riferire i risultati ottenuti nell'esame qualitativo della microflora dell'Agro.

Per questa parte del mio studio, che si riferisce all'isolamento ed alla identificazione delle specie, mi valsi, non solo delle piastre all'agar di torba già usate per la numerazione dei germi, ma anche di quelle ottenute dalle soluzioni selezionanti servite alla misura dei poteri di ammonizzazione, nitrificazione denitrificazione e di fissazione dell'azoto, ricerche delle quali ho già trattato. I substrati, con i quali allestii da detti liquidi le colture a piatto o in superficie, furono i seguenti:

1°) agar nutritivo al peptone;

2°) gelatina nutritiva (1);

3°) agar di fagiuoli, preparato dal relativo brodo agarizzato all'1.3 %, ottenuto facendo bollire per circa mezz'ora i fagiuoli in cinque parti di acqua;

4°) agar Beyerinck alla mannite, che aveva la seguente composizione: acqua 100, mannite 2, fosfato bibasico di potassio 0,02, agar 2.

L'agar nutritivo al peptone e la gelatina nutritiva erano usati per l'isolamento delle specie dalle soluzioni in putrefazione impiegate per la misura del potere di ammonizzazione; l'agar di fagiuoli veniva usato per l'isolamento delle specie dalla soluzione denitrificante del Giltay; l'agar Beyerinck per l'isolamento delle forme oligonitrofile sviluppatesi nel relativo liquido selezionante

I campioni esaminati furono tutti quelli con i quali si eseguì la numerazione dei germi; e cioè trentadue, scelti dalle diverse regioni della zona da bonificarsi, da me studiata.

La figura 9 dà l'aspetto, sotto il quale si presentavano generalmente le colture in superficie sopra agar al peptone (A) e sopra agar di fagiuoli (B e C). La coltura A è stata ottenuta dal liquido selezionante delle prove di ammonizzazione; quella B dal liquido selezionante delle prove di denitrificazione; quella C, direttamente inoculando l'agar con la soluzione acquosa del campione di terra.

La microflora della Campagna romana è risultata, in complesso, *molto uniforme e caratteristica di terreni piuttosto magri.*

Sopra i substrati al peptone ottenni singolare sviluppo di *Bac. fluorescens liquefaciens* con molte varietà, di *Bac. fluorescens putridus* (Flugge) e, più raramente, di *Bac. piocyaneus* e di qualche *Proteus*. Sopra il substrato preparato con brodo di fagiuoli ottenni con prevalenza sviluppo di *Bac. subtilis*, *Bac denitrificans*, *Bac. megatherium*, *Sarcina lutea*, *S. aurantiaca*, *Bac. violaceus*, *Ascobacterium luteum.* Sopra l'agar Beyerinck ottenni sviluppo della mia *Pseudomonas leuconitrophyla* e di altre forme particolarmente adattate a substrati magri riferentisi al *Bac. fluorescens liquefaciens* nonchè all'*Azotobacter chroococcum.*

(1) Per la preparazione di questa seguii le norme di A. Meyer, *Prakticum der botanischen Bakterienkunde.* G. Fischer, Jena, 1903.

Sopra l'agar all'estratto di torba osservai una equa rappresentanza di quasi tutte le soprariferite forme, e di più, un ricco sviluppo d'ifomiceti, tra cui *Mucor mucedo*, *Penicillium glaucum*, *Aspergillus niger*, *Fusarium roseum*, *Cladosporium*, ecc.

Particolari osservazioni feci inoltre sopra la natura della microflora in rapporto alla qualità dei terreni, alle diverse epoche dell'anno ed alle pratiche di coltivazione. Esse sono le seguenti:

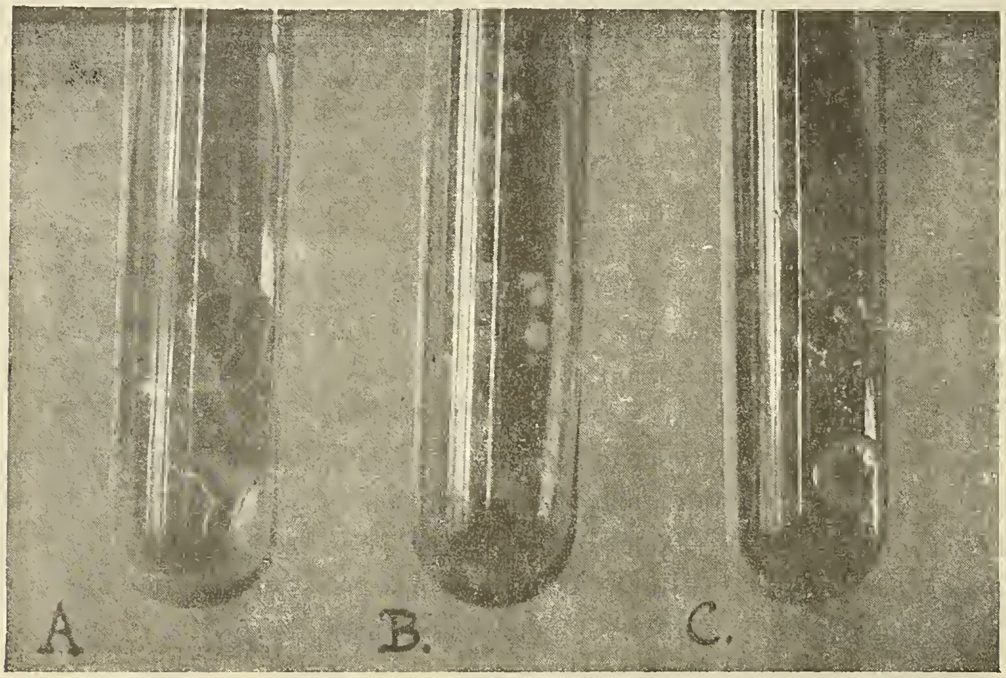


Fig. 9.

A) In rapporto alla qualità dei terreni. — Da innesti con campioni di pozzolanelle si ottengono, con una certa prevalenza, forme batteriche; da innesti con campioni di tufarine si ottengono, invece, molto più abbondanti le forme ifomicetiche. Questa è la principale circostanza che mi venne fatto di assodare nel ricercare le differenze della microflora nei varî terreni. Nella tav. V trovasi, difatti, la riproduzione fotografica di due colture a piatto, una proveniente da un campione dell'altipiano tufaceo nella tenuta di Boccone [1], l'altra da un campione di pozzolanelle nella tenuta di Romavecchia [2]. Le due piastre hanno la stessa età (giorni venti), e furono ottenute sullo stesso substrato — agar all'estratto di torba — e nelle identiche condizioni colturali. Nella prima predominano gl'ifomiceti, che presentano rapido ed abbondante sviluppo; nell'altra hanno il predominio le forme batteriche con sviluppo meno abbondante e più lento. In questa seconda coltura gl'ifomiceti si svilupparono molto più tardi ed in numero esiguo.

Nell'esame dei campioni provenienti dai terreni delle valli del Tevere e dell'Aniene, si ottenne uno sviluppo più vario che non in quello dei campioni di ogni altra provenienza. Povertà di specie si notò particolarmente nei terreni, più cattivi, della regione NE, ed in quelli non migliori, della regione SW. Ivi il numero degl'ifomiceti

è veramente preponderante e s'accoppia a specie provviste di forme durature, capaci di resistere alle sfavorevoli condizioni del clima-terreno.

Nella regione dell'alluvione antica è dove — all'infuori delle valli del Tevere e dell'Aniene — la microflora ha la composizione migliore.

B) In rapporto alle diverse epoche dell'anno. — Non sono sfuggite alla mia indagine le variazioni della microflora nei differenti tempi dell'anno: difatti, potei osservare, soprattutto, che il rapporto numerico fra le due categorie di microrganismi, batteriacei ed ifomicetei (che nei riguardi agronomici hanno ben diversa importanza), varia sensibilmente con essi. Tale circostanza venne da me in particolare notata per i terreni non compresi nelle grandi valli romane e fra quelli di peggiori composizione e struttura. In inverno le forme miceliche rappresentano il 15-20 °/₀ delle specie sviluppatesi sopra l'intera piastra; in estate esse possono raggiungere fino il 90 95 °/₀. La residua frazione, in estate, è data quasi esclusivamente da forme sporulanti e generalmente da *Bac. subtilis* e specie affini. Tale circostanza attesta che in detta epoca i terreni della Campagna romana possono godere di proprietà microrganiche molto differenti da quelle che si hanno in inverno: essa si nota a partire dal mese di aprile, e perdura, più o meno accentuata, fino al mese di settembre. Ciò è in accordo con le altre sfavorevoli condizioni, che già ho posto in rilievo, circa la secchezza del clima, l'aridità del terreno, l'immobilità del capitale-azoto, lo scarso numero di germi durante il periodo estivo nel nostro Agro.

C) In rapporto con le pratiche colturali. — Variazioni qualitative nella microflora della Campagna romana, dovute alle pratiche colturali, non furono da me osservate; forse il breve tempo che durarono le mie ricerche non era sufficiente a metterle in evidenza. In ogni caso è però da presumersi che tali variazioni debbano avere un valore limitato, se le pratiche non sono tali da indurre modificazioni profonde nel clima-terreno della regione. Ammendamenti, concimazioni, irrigazioni potrebbero certamente dar luogo a sensibili mutamenti nelle specie batteriche che dominano nei terreni dell'Agro; ma tali provvedimenti colturali — che si vedrà poi se e quanto possano riuscire utili — sono quasi sconosciuti presso di noi. Delle conseguenze della lavorazione dei terreni del nostro Agro sopra la sua microflora non è lecito, per ora, di affermare altro che esse sono di natura quantitativa, e precisamente quelle delle quali ho innanzi riferito.

Una molto importante circostanza di fatto resta ancora da notarsi relativamente alla composizione della microflora della campagna intorno alla città di Roma.

Ho già detto che la microflora stessa si presenta molto uniforme; che, in base alle mie osservazioni, non è il caso di presumere che variazioni della sua composizione qualitativa possano aver luogo senza profonde modificazioni, soprattutto nella natura dei terreni coltivabili. L'ambiente che l'Agro romano offre a tutti gli esseri viventi che hanno la loro esistenza strettamente legata ad esso, e, quindi, innanzi tutto ai microrganismi, è risultato da tutto il mio precedente studio così singolare, che è forza riconoscere come esso non possa non sostentare una flora di piccoli viventi con attitudini e caratteri proprî. La specie, che dal complesso dei risultati delle mie ricerche è fin qui risultata essere fra quelle che posseggono la maggiore importanza,

è il *Bac. fluorescens liquefaciens*. Esso, non solo ha una diffusione più che ordinaria, essendo particolarmente in grado di sostenere nelle condizioni locali la concorrenza vitale di tutte le altre forme; ma presenta anche un grande numero di varietà con marcato adattamento a moltiplicarsi sopra substrati magri, delle quali le principali figurano in quel quadro delle forme e razze caratteristiche della Campagna romana che faccio seguire.

Dette varietà fanno passaggio a quella mia *Pseudomonas leuconitrophyla*, che descrissi alcuni anni or sono ([1]), formante rapidamente, sopra agar Beyerinck, colonie molto grandi, rotonde, ad orlo intero o leggermente sinuoso, di color bianco-grigio, aspetto gelatinoso, trasparenti, finamente punteggiate, costituite da corti batterî di 0,7 - 1,0 μ di lunghezza per 0,4 - 0,6 μ di larghezza, unipolaritricati, i quali fluidificano solo molto lentamente la gelatina, si scolorano secondo Gram, non sporificano. Questa specie si sviluppa caratteristicamente in mezzi nutritivi poverissimi di azoto, vincendo la concorrenza vitale delle forme comuni saprofitiche: ivi dà luogo a sviluppo abbondante, con produzione di membrane gelatinose e fissazione di azoto elementare.

La esistenza di questa nuova specie e la diffusione delle altre forme che per le loro proprietà fanno capo all'*Azotobacter chroococcum* Bey., anch'esso molto comune nell'Agro ([2]), sono ulteriori dimostrazioni della importanza locale di quella oligonitrofilia, che ho già messo in rilievo nel precedente capitolo e che, trovando la sua pratica espressione nel maggese, costituisce, nelle naturali condizioni della nostra campagna, uno dei maggiori esponenti che, come in appresso si vedrà, non possono non affettare grandemente il calcolo dell'effetto assimilatorio delle sue coltivazioni.

([1]) R. Perotti, *Su una nuova specie di bacteri oligonitrofili*. Ann. bot., vol. IV, fasc. 3.

([2]) Id., *Bacteri oligo- e mesonitrofili della Campagna romana*. Rend. Acc. Lincei, vol. XIV 2° sem., fasc. 2°, pag. 623.

SPECIE E RAZZE DI MICRORGANISMI PIÙ FREQUENTI NELLA CAMPAGNA ROMANA

1. Bac. fluorescens liquefaciens [1].

Dalla tenuta di Saccopastore: piastre all'agar di torba (tav. V, n. 3).

Corti bacilli, riuniti a due, di μ. 1.0-1.5 × 0.6-0.8, che si scolorano col metodo di Gram, monopolaritricati.

In brodo dànno uno sviluppo molto abbondante, con formazione di deposito e forte intorbidamento del liquido che è fluorescente. In brodo glucosato lo sviluppo è ancora più abbondante, con pellicola incolore superficiale e mediocre deposito al fondo; il liquido è meno fluorescente. Anche in brodo di fagiuoli lo sviluppo è abbondante e si nota una membrana incolore superficiale. In acqua di peptone lo sviluppo è più scarso e si forma un deposito membranoso. Nella soluzione di Giltay il liquido diviene leggermente torbido ed altrettanto vischioso. Nessuno sviluppo si ottiene nella soluzione nitrificabile, e solo un principio di sviluppo in quella priva di azoto. Sopra agar nutritivo lo sviluppo è abbondante, in forma di patina semigelatinosa, lobata, che conferisce al substrato una colorazione fluorescente. Sopra agar glucosato si notano gli stessi caratteri, ma il substrato è pochissimo fluorescente. Mediocre sviluppo e lenta fluidificazione si ottengono sopra gelatina. Sviluppo abbondante, invece, come patina mucillagginosa ed incolore, si ha su patata e su carota. Su agar di fagiuoli lo sviluppo è abbondantissimo, costituente una patina di aspetto gelatinoso; su agar Beyerinck è mediocre, in forma di una patina sottile, punteggiata, incolore.

Le colture in infissione dimostrano mediocre sviluppo nella parte alta del canale, ed abbondante in superficie.

Il potere di fermentazione è nullo; produce ammoniaca nelle soluzioni di peptone.

Assenza di spore.

2. Bac. fluorescens liquefaciens [2].

Dalla tenuta di Saccopastore: liquido selezionante delle prove di ammonizzazione.

Corti e piccoli bacilli, riuniti a due, di μ 1.0-1.5 × 0.8; non prendono il Gram; sono monopolaritricati.

In brodo lo sviluppo è molto abbondante, con formazione di membrana superficiale e deposito al fondo. Il liquido è leggermente vischioso e presenta solo un

accenno di fluorescenza. In brodo glucosato lo sviluppo, con gli stessi caratteri, è ancora più abbondante: la fluorescenza manca completamente. In brodo di fagiuoli od in acqua di peptone si sviluppa come la forma n. 1. Lo sviluppo è mediocre nella soluzione di Giltay, con formazione di membrana superficiale, sottile, incolora. Nessuno sviluppo nella soluzione nitrificabile; leggero sviluppo in quella priva di azoto. Sopra agar nutritivo lo sviluppo è abbondante come patina incolora, lobata, leggermente gelatinosa: il substrato diviene debolmente fluorescente. La patina è più abbondante ed opaca su agar glucosato. Leggero sviluppo sopra gelatina. Su patata e carota si ottiene una patina poco mucillagginosa, discontinua, incolore. Su agar di fagiuoli essa è membranosa, striata, con piccoli lobi, non abbondante; su quello Beyerinck lo sviluppo è tenuissimo.

Le colture in infissione presentano lo stesso carattere della razza n. 1.

Nessun potere di fermentazione: produzione di ammoniaca nelle soluzioni peptonizzate.

Assenza di spore.

È forma adattata a mezzi più magri che non la precedente.

3. Bac. fluorescens liquefaciens [3].

Dalla tenuta di Saccopastore: liquido selezionante delle prove di ammonizzazione (tav. V, fig. 4).

Corti e piccoli bacilli abbinati, di μ 1.0-1.5 × 0.6-0.8, che non prendono il Gram, monopolaritricati. Nelle vecchie culture si presentano alcuni elementi di dimensioni sensibilmente maggiori: μ 1.5 × 2.5.

In brodo semplice ed in quello glucosato lo sviluppo è mediocre, con sottile membrana superficiale e piccolo deposito; in brodo di fagiuoli lo sviluppo è un poco più abbondante ed ha gli stessi caratteri. In acqua di peptone lo sviluppo si presenta come in brodo. Nella soluzione di Giltay si ottiene solo un accenno di sviluppo che manca completamente nella soluzione nitrificabile ed in quella priva di azoto. Sopra agar nutritivo si ha formazione di una tenue patina membranosa, incolora, con piccoli lobi anastomizzanti: essa è poco più abbondante sopra agar glucosato. Su gelatina lo sviluppo è quasi nullo; abbondante invece su patata e, più ancora, su carota, in forma di patina gelatinosa lobata incolora. Su agar di fagiuoli si ha una patina gelatinosa, bianco-latte, lobata; su agar Beyerinck la patina si ottiene membranosa e poco sviluppata.

Le colture in infissione dimostrano sviluppo nella parte alta del canale ed in superficie.

Potere di fermentazione nullo; produzione di ammoniaca dal peptone.

Assenza di spore.

4. Bac. fluorescens liquefaciens [4].

Dalla tenuta di Romavecchia (casale): innesto diretto con il terreno.

Corti bacilli riuniti a due, di μ 1.0-1.5 × 0.6-0.8, scolorantisi col metodo di Gram, monopolaritricati.

Lo sviluppo è più abbondante in brodo semplice che non in quello glucosato, con forte intorbidamento del liquido e deposito. In brodo di fagiuoli lo sviluppo è anche molto abbondante, ma si ottiene minore deposito al fondo. In acqua di peptone si sviluppa come in brodo. Lo sviluppo è leggero nella soluzione di Giltay come in quella priva di azoto; manca in quella nitrificabile. Sopra agar nutritivo si forma una patina sottilissima semigelatinosa, incolora, colante al fondo del tubo. Essa è più abbondante sopra agar glucosato. Sopra gelatina si ha un tenue sviluppo; su patata e carota, invece, si ottiene una patina abbondante mucillaginosa, bianco-latte. Sopra agar di fagiuoli si ottiene uno sviluppo migliore che non sopra tutti gli altri substrati solidi, con abbondanti produzioni mucillaginose. Su agar Beyerinck lo sviluppo è più limitato.

Dalle colture in infissione si ottiene soltanto una patina in superficie.

Nessun potere di fermentazione. — Assenza di spore.

Presenta spiccate attitudini oligonitrofile.

5. Bac. fluorescens liquefaciens [5].

Dalla tenuta di Saccopastore: su agar Beyerinck.

Corti e piccoli bacilli abbinati, di μ 1.0-1.5 × 0.6-0.8, scolorantisi col Gram. monopolaritricati.

In brodo semplice, e, più ancora, in quello glucosato, lo sviluppo è molto abbondante, con formazione di membrana superficiale incolora e deposito grumoso al fondo del liquido torbidissimo. In brodo di fagiuoli lo sviluppo è simile, e vi è leggera produzione di bollicine gassose. In acqua di peptone esso è come in brodo. È mediocre nella soluzione di Giltay, con formazione di qualche bollicina gassosa. Nessuno sviluppo si ottiene nella soluzione nitrificabile. Uno sviluppo leggero, con aspetto di sottile membrana superficiale, incolora, si ha nella soluzione priva di azoto. Sopra agar nutritivo ed agar glucosato lo sviluppo è abbondante, con aspetto di patina gelatinosa, leggermente lobata, di colore bianco-latte; il substrato è leggermente fluorescente. La patina, gelatinosa, incolora, è meno abbondante sopra gelatina. Sopra patata e sopra carota lo sviluppo è abbondantissimo, di aspetto mucillaginoso, semifluido, incolore. Su agar di fagiuoli si ottiene uno sviluppo abbondante più che non sopra tutti gli altri substrati: la patina mucillaginosa, incolora, invade tutta la superficie ed il substrato si colora in bruno. Su agar Beyerinck lo sviluppo è mediocre, ma ha questi stessi caratteri.

Le colture in infissione dimostrano sviluppo lungo la parte alta del canale.

Debole potere di fermentazione: si produce ammoniaca. — Assenza di spore.

Forma mediocremente adattata a vita oligonitrofila.

6. Bac. fluorescens liquefaciens [6].

Dalla tenuta di Casale Fiscale: su agar Beyerinck.

Corti e piccoli bacilli abbinati, di μ 1.0-1.5 × 0.5-0.8, non prendenti il Gram, monopolaritricati.

In brodo semplice, e, meglio ancora, in quello glucosato, si ottiene sviluppo abbondante, con membrana incolora superficiale e copioso deposito al fondo: colorazione fluorescente del liquido. In brodo di fagiuoli lo sviluppo è pure abbondante, senza membrana e con poco deposito. In acqua di peptone lo sviluppo è mediocre, con deposito grumoso. Abbondante è lo sviluppo nella soluzione di Giltay con leggera vischiosità del liquido. Nessuno sviluppo nella soluzione nitrificabile: accenno di sviluppo in quella priva di azoto. Su agar nutritivo si ottiene una sottile patina lobata incolore, più abbondante su agar glucosato; il substrato diviene fluorescente. Sopra gelatina si forma una patina mediocremente abbondante, seghettata. Sviluppo molto abbondante, mucillaginoso, incolore, su patata e su carota. Caratteri simili presenta lo sviluppo su agar di fagiuoli. Su agar Beyerinck la patina è tenue e membranosa.

Nessun potere di fermentazione.

Assenza di spore.

7. Bac. fluorescens liquefaciens [7].

Dalla tenuta di Boccone: su agar di fagiuoli (tav. V, fig. 5).

Corti e piccoli bacilli abbinati, di μ 1.0-1.5 $\times$ 0.6-0.8, non colorabili col Gram, monopolaritricati.

Sviluppo molto abbondante, con formazione di deposito e forte intorbidamento del liquido che non diviene fluorescente, si ottiene in brodo semplice e, meglio, in quello glucosato. In brodo di fagiuoli lo sviluppo è anche abbondante, con membrana superficiale incolora. Più scarso è nell'acqua di peptone, dove si forma un deposito membranoso. Leggero sviluppo nella soluzione di Giltay ed in quella priva di azoto; nessuno sviluppo nella soluzione nitrificabile. Sopra agar nutritivo e glucosato si sviluppa abbondantemente con aspetto di patina semigelatinosa e lobata, senza fluorescenza. Mediocre sviluppo e lenta fluidificazione si ottengono sopra gelatina. Su patata e carota lo sviluppo è molto abbondante, mucillaginoso, incolore. Similmente si sviluppa sopra agar di fagiuoli, mentre su agar Beyerinck lo sviluppo è mediocre e si forma una patina sottile, punteggiata, incolora.

Le colture in infissione dimostrano sviluppo nella parte alta del canale ed in superficie.

Potere di fermentazione nullo.

Assenza di spore.

8. Sarcina lutea.

Dalla tenuta di Saccopastore: su agar di torba (tav. V, fig. 6).

Pacchetti di elementi cocciformi, di μ 0.8-1.0 $\times$ 0.5-0.7, che si colorano con il Gram, immobili.

Su brodo lo sviluppo è abbondante, con formazione di deposito grumoso al fondo del liquido che diviene leggermente vischioso. Meno abbondante, ma con gli stessi caratteri, si presenta lo sviluppo nel brodo glucosato ed in quello di fagiuoli. Nel-

l'acqua di peptone si sviluppa come in brodo semplice. Nessuno sviluppo si ottiene nella soluzione di Giltay, in quella nitrificabile ed in quella priva di azoto. Sopra agar nutritivo lo sviluppo è mediocre, formandosi una patina lobata, semimucillaginosa, poco spessa, di colore bianco-giallognolo. Sopra agar glucosato lo sviluppo ha gli stessi caratteri, salvo che la patina è quasi affatto gialla. Su gelatina si ha quasi nessun sviluppo. Sopra patata e sopra carota lo sviluppo è abbondante, semimucillaginoso, di un bel colore giallo-cedro. Sopra agar di fagiuoli si sviluppa come su agar al peptone, ma la patina ha colore giallo-cedro. Sopra agar Beyerinck si ottiene una tenue patina incolora.

Le colture in infissione dimostrano sviluppo solo nella parte altissima del canale ed in superficie.

Potere di fermentazione nullo: produce ammoniaca nelle soluzioni di peptone.

Riproduzione scissipara secondo tre piani.

9. **Sarcina aurantiaca.**

Dalla tenuta di Saccopastore: su agar all'estratto di torba.

Pacchetti di elementi cocciformi, di μ 1-1.5 × 1.5, immobili.

In brodo si ottiene leggero sviluppo con tenue deposito; in brodo glucosato si sviluppa ancora di meno. In brodo di fagiuoli si sviluppa un poco più abbondantemente che non nei due precedenti substrati: il liquido si colora in giallo-arancio sporco. Nell'acqua di peptone si sviluppa come nel brodo semplice. Nella soluzione nitrificabile non si sviluppa affatto. In quella di Giltay, e in quella priva di azoto, si ottiene solo un principio di sviluppo. Mediocre sviluppo, in forma di patina sottile, lobata, rilevata al centro, di leggero colore giallo-arancio, si ottiene su agar nutritivo; un poco più abbondante, con aspetto di patina membranosa, quasi incolore, si ottiene su agar glucosato. Su gelatina si ha solo un principio di sviluppo. Sopra patata si ottengono piccole colonie membranose di colore arancio debole; sopra carota non si sviluppa quasi affatto. Anche su agar Beyerinck non si ha quasi alcuno sviluppo. Su agar di fagiuoli si ottiene, invece, il migliore sviluppo, in forma di patina, mucillaginosa, non lobata, di un bellissimo colore arancio carico.

Nelle colture in infissione lo sviluppo si ottiene solo nella parte alta del canale ed in superficie.

Potere di fermentazione nullo.

Riproduzione scissipara secondo tre piani.

10. Forma **A.**

Dalla tenuta di Saccopastore: su agar all'estratto di torba.

Elementi diplococciformi di μ 1.5 × 1.8: le forme più grosse e tipiche si ottengono su patata. Unipolaritricati.

In brodo semplice, come anche in brodo glucosato, lo sviluppo è quasi nullo; in brodo di fagiuoli si ha solo un leggero sviluppo con produzione di pellicole. Comportamento simile si ottiene con acqua di peptone, mentre nelle soluzioni di Giltay,

nitrificabile e priva di azoto, manca qualsiasi sviluppo. Sopra agar nutritivo si ha solo un inizio di sviluppo. Sopra agar glucosato si forma una sottile patina membranosa di colore rossastro. Sopra gelatina, sviluppo quasi nullo. Sopra patata e carota lo sviluppo è mediocre, formante una patina discontinua semimucillaginosa di colore rosso-vinoso. Sopra agar di fagiuoli si ha un leggero sviluppo in forma di patina, lobata, semimucillaginosa, rossa. Sopra agar Beyerinck la patina è molto tenue e rossastra.

Nelle colture in infissione si sviluppa nella parte alta del canale ed in superficie.

Potere di fermentazione nullo.

Assenza di spore.

Non pare abbia importanza agraria.

11. **Bacillus subtilis** [1].

Dalla tenuta di Santo Spirito: su agar all'estratto di torba.

Sottili e lunghi bacilli di μ 1-2 × 6-7, talvolta un po' raccorciati e grossi, colorabili col Gram. Ciliazione peritrica.

In brodo semplice e glucosato lo sviluppo è abbondante, con sottile coperta, vischiosità del liquido e molto deposito al fondo. In brodo di fagiuoli lo sviluppo presenta uguali caratteri. Nella soluzione di Giltay si ottiene solo una leggera opalescenza del liquido. Nessuno sviluppo nella soluzione nitrificabile ed in quella priva di azoto. Sopra agar nutritivo lo sviluppo è abbondante formandosi una patina a piccoli lobi, incolora, semimucillaginosa. Sopra agar glucosato essa è ancora più abbondante e di aspetto ancor più mucillaginoso. Su patata e su carota la patina è membranosa e raggrinzita. Sopra agar di fagiuoli essa è molto estesa, semimucillaginosa, di colore bianco-sporco; sopra agar Beyerinck è sottilissima, con piccoli lobi, incolora.

Nelle colture ad infissione si sviluppa solo in superficie.

Riduce i nitrati.

Sporifica.

12. **Bacillus subtilis** [2].

Dalla tenuta di Acquatraversa: su agar all'estratto di torba (tav. V, fig. 7).

Bacilli diritti o leggermente ricurvi, arrotondati alle due estremità, di dimensioni un po' varie, comprese fra μ 1 5 × 3.4-12, riuniti in fili di 5-8 elementi. Ciliazione peritrica.

In brodo semplice, glucosato, di fagiuoli ed in acqua di peptone, si sviluppa abbondantemente con coperta e deposito incolore al fondo del liquido. Assenza di sviluppo nella soluzione di Giltay, in quella nitrificabile ed in quella priva di azoto. Sopra agar nutritivo, e meglio ancora su quello glucosato, lo sviluppo è abbondante, in forma di patina incolore, lobata, semimucillaginosa, grinzosa. Su carota e patata lo sviluppo è molto abbondante, in forma di membrana a lobi rattratti. Anche su agar di fagiuoli lo sviluppo è particolarmente abbondante, con gli stessi caratteri di

quello su agar al peptone. Sopra agar Beyerinck si ottiene uno sviluppo discontinuo a punteggiature alonate, incolori.

Le colture ad infissione dimostrano sviluppo nella parte alta del canale ed in superficie.

Potere di fermentazione nullo.

Sporulazione.

13. Forma B.

Dalla tenuta di Colle Fiscale: su agar all'estratto di torba (tav. V, fig. 8).

Batterî abbastanza grossi, riuniti in fili di 2, 4, 6 e più elementi: misurano μ 1.5-2.5 $\times$ 4.5-5.5, e le dimensioni maggiori si ottengono nelle colture in brodo. Sono frequenti le forme d'involuzione, corte, grosse, rigonfie ad un'estremità, con lisi del plasma (fig. 10 *a*). Non prendono il Gram, non hanno movimento.

In brodo si ha uno sviluppo mediocre, con deposito rossastro; in brodo glucosato lo sviluppo è migliore e con gli stessi caratteri. In brodo di fagiuoli, come pure nell'acqua di peptone, lo sviluppo è mediocre. Nella soluzione di Giltay si ha solo un principio di sviluppo; nessuno sviluppo nella soluzione nitrificabile ed in quella priva di azoto. Sopra agar nutritivo si forma una patina rossa, poco mucillaginosa, leggermente lobata, discontinua. Sopra agar glucosato si ottiene uno sviluppo migliore del precedente, ma con minore colorazione. Sopra gelatina lo sviluppo è abbondante, mucillaginoso, di color rosso acceso. Sopra patata e carota si forma una patina abbondante grinzosa di color rosso-vinoso in un caso, roseo nell'altro. Sopra agar di fagiuoli lo sviluppo è particolarmente abbondante, semifluido, mucillaginoso, di colore roseo. Sopra agar Beyerinck esso ha gli stessi caratteri: il rosa, però, è più leggero, e la patina è più tenue.

Fig. 10.

Nelle colture ad infissione si ottiene sviluppo solo in superficie.

Non si ha potere di fermentazione.

Si moltiplica per scissione e per ringiovanimento del plasma che trovasi contratto di preferenza ai punti di attacco di due elementi (fig. 10 *b*).

14. Forma C.

Dalla tenuta di Romavecchia (casale): su agar all'estratto di torba (tav. V, fig. 9).

Sottili bacilli, riuniti in brevi fili di 2, 3, 4 elementi, misuranti μ 0.8-1 $\times$ 2.0-3.0, colorantisi con il Gram, bipolaritricati.

In brodo semplice, in quello glucosato, in quello di fagiuoli e nell'acqua di peptone si sviluppa limitatamente, con piccolo deposito incoloro e vischiosità del liquido. Si sviluppa mediocremente nella soluzione di Giltay rendendo anche qui vi-

schioso il liquido. Nessuno sviluppo nella soluzione nitrificabile; leggero sviluppo in quella priva di azoto. Sopra agar nutritivo si ha sviluppo molto limitato, semimucillaginoso; sviluppo abbondante, invece, in forma di patina lobata, di colore biancolatte, si ha sopra agar glucosato. Sopra gelatina lo sviluppo è scarsissimo. Su patata e su carota si ottiene una patina copiosa, lattescente. Su agar di fagiuoli lo sviluppo è molto abbondante, la patina è mucillaginosa, sprovvista di lobi, di colore biancolatte. Su agar Beyerinck lo sviluppo è ancora più abbondante e presenta gli stessi caratteri.

Nelle colture ad infissione si sviluppa nella parte alta del canale ed in superficie.

Potere di fermentazione nullo.

Assenza di spore.

Forma notevolmente adattata a vita oligonitrofila.

15. **Bacillus citreus.**

Dalla tenuta di ponte Nomentano: su agar all'estratto di torba (tav. V, fig. 10).

Piccoli e corti bacilli, quasi sempre abbinati, talvolta in corti fili di 3 o 4 elementi, avvolti da sostanza mucillaginosa. Misurano μ 1.0-1.5 $\times$ 0.5-0.8: nelle vecchie colture si hanno forme più lunghe e più larghe, presentanti fenomeni di autolisi (fig. 11). Movimento per ciliazione unipolare.

Fig. 11.

In brodo semplice si ha sviluppo abbondante con sottile coperta giallognola e deposito, al fondo, del liquido che è colorato in giallo. In brodo glucosato si ottiene un uguale sviluppo senza colorazione gialla. Anche in brodo di fagiuoli lo sviluppo è abbondante ed incolore. Nell'acqua di peptone si sviluppa come nel brodo semplice. Leggero sviluppo si ottiene nella soluzione di Giltay; nessuno sviluppo in quella nitrificabile ed in quella priva di azoto. Sopra agar nutritivo si forma una bella patina, sottile, semimucillaginosa, di colore giallo-croco. Sopra agar glucosato la patina è meno lobata, più mucillaginosa e solo leggermente gialla. Sopra gelatina si ottiene solo un leggero sviluppo. Abbondante, mucillaginoso di color giallo è esso, invece, su patata e su carota. Sopra agar di fagiuoli si ottiene un'abbondante patina mucillaginosa, incolora; sopra agar Beyerinck lo sviluppo ha gli stessi caratteri, ma è meno accentuato.

Nelle colture ad infissione si sviluppa solo in superficie.

Nessun potere di fermentazione.

Assenza di spore.

16. Forma D.

Dalla tenuta dei Prati Fiscali: su agar all'estratto di torba.

Corti e grossi bacilli, riuniti spesso in due od in corti fili di 4-6-8 e più elementi. Le dimensioni sono alquanto variabili: μ 4 5-7.0 × 1.8-2.5; nelle vecchie colture i bacilli sono più stretti e lunghi che non nelle giovani, e presentano fenomeni di lisi del plasma (fig. 12). Prendono molto bene il Gram e presentano un periodo di mobilità per ciliazione unipolare.

In brodo semplice si ottiene uno sviluppo notevole, con deposito grumoso, incolore; in brodo glucosato od in quello di fagiuoli lo sviluppo è ancora migliore e con uguali caratteri. In acqua di peptone esso è come nel brodo semplice. Notevole

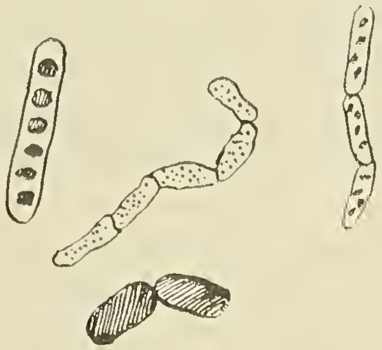


Fig. 12.

sviluppo si ottiene nella soluzione di Giltay, con produzione di bollicine gassose. Nella soluzione nitrificabile non si ha sviluppo alcuno; in quella priva di azoto lo si ha soltanto iniziale. Sopra agar nutritivo lo sviluppo è abbondante, in forma di patina semimucillaginosa, lobata, leggermente striata, incolore. Molto più abbondante è lo sviluppo sopra agar glucosato. e la patina è di colore bianco-lattescente. Sopra gelatina non si sviluppa quasi affatto. Sopra patata e carota si ottiene un'abbondante formazione di patina irregolare, semimucillaginosa, di colore bianco sporco. Su agar di fagiuoli lo sviluppo è molto più abbondante e mucillaginoso che non sopra agar glucosato, o no. Su agar Beyerinck la patina è sottile con piccoli lobi crenati, e di aspetto un poco mucillaginoso.

Nelle infissioni si sviluppa solo in superficie.

Riduce i nitrati.

Si riproduce per scissione e coartazione e ringiovanimento del plasma.

17. Forma E.

Dalla tenuta dei Prati Fiscali: dalla soluzione di Giltay.

Piccoli bacilli abbinati, di μ 1.0-1.5 × 0.6-0.8, colorantisi con il Gram, unipolaritricati.

In brodo lo sviluppo è abbondante, con deposito grumoso e vischiosità del liquido. In brodo glucosato ed in brodo di fagiuoli lo sviluppo è più abbondante, con sottile coperta e deposito. In acqua di peptone si sviluppa come in brodo semplice. Leggero sviluppo nella soluzione di Giltay; nessuno sviluppo nella soluzione nitrificabile e in quella priva di azoto. Sopra agar nutritivo ed agar glucosato si forma una tenue patina semimucillaginosa, a margini interi, bianca. Sopra gelatina non si sviluppa quasi affatto. Sopra patata e carota si forma una sottile patina di colore bianco-sporco. Sopra agar di fagiuoli la patina è striata, con piccoli ed irregolari lobi, di colore bianco-sporco. Sopra agar Beyerinck essa è sottile, non lobata, incolora.

Nelle colture ad infissione si sviluppa solo in superficie.

Il potere di fermentazione è nullo.

Non sporifica.

18. Torula.

Dalla tenuta di Cecchignola: su agar all'estratto di torba.

Cellule sferiche, del diametro di μ 8-12, colorantisi con il Gram, immobili.

In brodo semplice, glucosato, in quello di fagiuoli e nell'acqua di peptone si sviluppa pochissimo, con preferenza però in presenza di glucosio. Nessuno sviluppo si ottiene nella soluzione di Giltay, in quella nitrificabile ed in quella priva di azoto. Sopra agar semplice, e, meglio, su quello glucosato, si forma una patina mucillaginosa di colore bianco-latte. Sopra gelatina lo sviluppo è maggiore che non sopra gli altri substrati: sempre però mediocre, in forma di patina mucillaginosa a piccoli lobi. Sopra patata e sopra carota lo sviluppo è abbondante, mucillaginoso, bianco-latte. Su agar di fagiuoli si ottiene quasi nessuno sviluppo; su quello Beyerinck, solo mediocre con i soliti caratteri.

Nelle infissioni si sviluppa in superficie.

Potere di fermentazione nullo.

Riproduzione gemmipara.

19. Penicillium glaucum.

Dalla tenuta della Magliana: su agar all'estratto di torba (tav. V, fig. 11).

Micelio septato, a brevi segmenti di μ 3-5 di spessore.

In brodo forma una coperta abbondante, di colore bianco: in brodo glucosato essa è più abbondante, bianca di sotto, superiormente glauca. In brodo di fagiuoli si sviluppa come nel brodo glucosato; in acqua di peptone, come nel brodo semplice. Nessuno sviluppo si ottiene nelle soluzioni di Giltay, nitrificabile e priva di azoto. Sopra agar nutritivo, e, meglio, sopra quello glucosato, si sviluppa mediocremente, formando una tenue patina lanosa, bianca. Sopra gelatina lo sviluppo è molto abbondante, di colore glauco, e fluidifica energicamente. Sopra patata e carota si ha sviluppo abbondante glauco. Sopra agar di fagiuoli lo sviluppo è mediocre, con predominio della parte glauca: sopra agar Beyerinck ha gli stessi caratteri ma è anche meno abbondante.

Forma spore di μ 4 di diametro sopra rami conidiali a pennello.

20. Forma F.

Dalla tenuta di Bocca di Leone: su agar all'estratto di torba (tav. V, fig. 12 e 13).

Micelio septato a brevi segmenti di μ 2.5 - 3.5 di spessore.

In brodo si ha formazione di un'abbondantissima, coperta lanosa, bianca, e di molto micelio in seno al liquido. In brodo glucosato tali formazioni sono più copiose. Pel brodo di fagiuoli lo sviluppo è parimenti abbondantissimo in parte di colore bianco, in parte di colore rosso-cremisi. Nell'acqua di peptone è come in brodo semplice, incolore. Nella soluzione di Giltay si ottiene un mediocre svlluppo di micelio incolore. Nella soluzione nitrificabile non si ottiene alcuno sviluppo. Nella soluzione priva di azoto si formano piccoli brani di micelio incolore. Tenue sviluppo in forma di patina lanosa bianca si ottiene sopra agar nutritivo; più abbondantemente sopra agar glucosato, con colorazione bruna del substrato. Molto abbondante, lanoso, di color bianco, inferiormente rosso-bruno, si ottiene su gelatina che non viene fluidificata. Sviluppo abbondante, lanoso, rossastro, su patata; abbondante, lanoso, biancastro, su carota. Su agar di fagiuoli lo sviluppo è molto abbondante, lanoso, inferiormente di colore rosso-bruno; su agar Beyerinck è mediocre, incolore.

Spore rotonde, un poco irregolari, di μ 3.5 - 5.0 di diametro, riunite in grappoli all'estremità di corti rami conidiali.

21. Fusarium roseum.

Dalla tenuta di Casetta Mattei: su agar all'estratto di torba (tav. V, fig. 14 e 15).

Micelio septato, a segmenti di μ 3.5 - 5.5 di spessore.

In brodo si ha formazione abbondante di coperta di colore leggermente rosa e di brani di micelio in seno al liquido. Con gli stessi caratteri si sviluppa più abbondantemente nel brodo glucosato, ed in quello di fagiuoli. Nell'acqua di peptone si forma una coperta abbondante incolore, con punti bruni, ed il liquido stesso si colora in bruno. Un accenno di sviluppo si ottiene tanto nella soluzione di Giltay, quanto in quella nitrificabile ed in quella priva di azoto. Sopra agar nutritivo si ha formazione di patina grinzosa incolore: sopra agar glucosato la patina è più abbondante. Sopra gelatina si sviluppa in forma di abbondante patina, grinzosa, di colore leggermente, rosa che fluidifica energicamente. Sopra patata e carota si sviluppa abbondantemente a ciuffi come su agar di fagiuoli dove si ottiene un'abbondante patina, leggermente rosa, con formazioni dendritiche sulla linea mediana. Sopra agar Beyerinck la patina è più sottile, continua, decisamente di colore rosa. Spore su conidi fusiformi septati, di μ 30 - 60 $\times$ 4.

22. Macrosporium.

Dalla valle della Cecchina: su agar all'estratto di torba (tav. V, fig. 16).

Micelio septato, con articoli pronunciati; ramificato: rami conidiofori brevi e più grossi (fig. 13). Lo spessore del micelio è di μ 7.0 - 8.5.

In brodo si ha formazione di un sottile anello color marrone sui margini del liquido. In brodo glucosato ed in brodo di fagiuoli si ha la formazione di un' intera coperta di color marrone scuro. In acqua di peptone si ottiene una sottile coperta grigia. Principio di sviluppo nella soluzione di Giltay: nessuno sviluppo in quelle

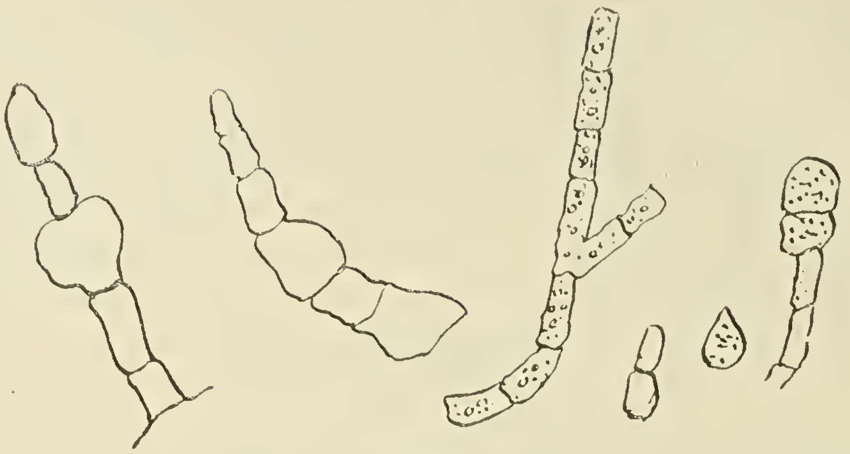


Fig. 13.

nitrificabile e priva di azoto. Sopra agar nutritivo si forma una sottile patina lanosa, superiormente bianco-grigia, inferiormente più scura. Sopra agar glucosato la patina

Fig. 14.

è un poco più sviluppata. Sviluppo molto abbondante, bianco grigio superiormente, più scuro inferiormente, si ottiene su gelatina che resta fluidificata. Sopra patata e carota si ottiene uno sviluppo abbondante, nero di sotto, grigio di sopra. Sopra agar di fagiuoli si ha uno sviluppo molto abbondante, lanoso, grigio-scuro superiormente, nero inferiormente. Anche su agar Beyerinck lo sviluppo è abbondante e molto scuro.

Spore fusiformi di μ 7 - 8 $\times$ 15 - 20.

23. Forma G.

Dalla tenuta di Tor Sapienza: su agar all'estratto di torba (tav. V, fig. 17-18). Micelio septato ed uniformemente ramificato, di μ 5-10 di diametro (fig. 14). In brodo semplice, glucosato, di fagiuoli ed in acqua di peptone si forma una abbondante coperta bianca con sclerozi di colore grigio. Nessuno sviluppo si ottiene nelle soluzioni di Giltay, nitrificabile e priva di azoto. Sopra agar glucosato si ottiene un'abbondante patina lanosa di colore bianco candido. Sopra gelatina la patina è abbondantissima, lanosa, bianco-sporca, non fludificante, senza sclerozi. Su patata o su carota lo sviluppo è abbondante, bianco, scuro nel centro, con sclerozi.

Sopra agar di fagiuoli la patina è uniforme, bianco-candida, grigio-giallognola inferiormente gli sclerozi sono numerosi.

Spore rotonde di μ 4-5 5 di diametro, formantisi lungo il micelio, senza conidiofori: sclerozi irregolarmente ovoidali.

VIII.

I fieni e le colture a granella.

Le coltivazioni tradizionali della Campagna romana, come è stato detto anche nei cenni storici, sono quelle del frumento, dell'avena e del mais, cui deve aggiungersi il prato naturale. Questo ha certo una maggiore estensione ed una maggiore importanza che non le altre culture propriamente dette, e trovasi in rapporto con la tradizionale pastorizia, che ha sempre dominato in queste terre, in dipendenza di speciali favorevoli condizioni di clima e di terreno.

I prati naturali romani, secondo quanto ci apprende la pratica, rendono un discreto e salubre pascolo autunno-invernale per gli ovini, equini e bovini; e, se alla fine di settembre ed ai primi di ottobre, con una temperatura mite, si ha una sufficiente pioggia, il pascolo è anche abbondante. I pascoli invernali durano fino al 15 maggio, dalla quale epoca in poi, fino al 24 giugno, vengono limitati ai prati meno produttivi allo scopo di eseguire la fienagione dei rimanenti. Le statistiche ci ci dicono che, su 204.351 ettari di campagna, 12.268 sono a prato, 54.035 a pascolo.

Per quanto si riferisce alla parte botanica, la flora della campagna romana venne studiata dal Pirotta e dal Chiovenda, che a più riprese si sono occupati dell'argomento, sia descrivendo piante nuove o rare della regione, sia illustrando antichi erbarii conservati presso di noi, destinando le loro ricerche per la redazione della « Flora romana » nel X vol. dell'Annuario del R. Istituto botanico di Roma [1].

[1] E. Chiovenda, *Piante nuove o rare della flora romana* (Malpighia, XII, an. 1898); R. Pirotta e E. Chiovenda, *Illustrazione di alcuni erbarii antichi romani* (Malpighia, XIII, an. 1899).

Gli agricoltori locali non pongono in dubbio che i fieni o, come dicono, *salimi* dei prati romani godano di buone proprietà. Se tagliati in tempo e saputi preparare, per la mescolanza di molte erbe, essi riescono salubri, aromatici, nutritivi, appetiti specialmente dal bestiame equino. Tuttavia gli studî diretti a controllare scientificamente questa diffusa opinione, ed a stabilire se e fino a qual punto essa debba ritenersi giusta e possa fornire criterî di miglioramento dei prati stessi, sono ben pochi. Anzi, possiamo dire che essi si riducano a due lavori modesti, ma non perciò di poca importanza, dei proff. Sestini, Misani e Marro, mentre è lecito di affermare che, per trovare utili norme relative alle coltivazioni foraggere nei climi meridionali, quale è il nostro, occorre risalire agli antichi georgici romani.

Il fine che mi ero proposto di raggiungere con gli studî, di cui riferisco nel presente capitolo, sia rispetto al prato naturale, sia per le colture cereali, in conformità delle premesse economico-agricole, è unicamente la misura della capacità di lavoro di cui godono le piante allevate nella campagna romana. Fin qui sono stati esposti i risultati di quelle ricerche con le quali si è illustrato l'ambiente naturale della Campagna romana in relazione all'oggetto finale dell'intero studio, ora restano, più particolarmente, da conoscersi quegli elementi da cui sarà possibile di trarre senz'altro la determinazione dell'effetto assimilatorio, del rapporto, cioè, tra il valore di produzione ed il valore di consumo delle piante coltivate. Da questo punto di vista, mentre possiamo trascurare gli scritti degli antichi georgici romani, dobbiamo fare un giusto calcolo degli studî del Sestini e dei suoi collaboratori già ricordati.

In una prima nota questi autori (¹) studiano sei foraggi il cui campione si prelevò sul posto nella prima metà del mese di maggio, e due altri che prelevarono in novembre, già confezionati e secchi, uno proveniente dallo Spedaletto, l'altro dai pressi di Grotta Rossa. Dei primi sei venne eseguito anche un esame botanico i cui risultati riunisco nella seguente tabella:

GRUPPI BOTANICI	1 Valchetta valle	2 Grotta Rossa valle	3 Ponte Molle valle	4 Porta S. Paolo ?	5 Ponte Nomentano altipiano	6 S. Agnese altipiano
Graminacee	45.3	13.4	62.1	47.4	17.9	55.1
Leguminose	14.8	5.5	8.0	11.3	19.7	16.9
Ombrellifere (foglie) .	2.5	13.6	2.1	14.8	. . .	2.0
Composite	9.4	33.3	11.1	8.4	11.3	18.2
Ranuncolacee (già in fiore)	7.5	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
Labiate (menta) . . .	3.2	. . .	. . .	. . .	4.0	. . .
Piantaggine (P. lanceolata dopo fioritura) .	2.0	. . .	. . .	. . .	3.5	. . .
Gigliacee	6.9	. . .	16.2	7.6	. . .	. . .
Geraniacee	1.7	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
Diverse (crucifere, convolvulacee ecc.) . . .	6.3	34.2	0.4	10.4	43.5	7.7
SOMME . . .	99.6	100.0	99.9	99.9	99.9	99.9

(¹) F. Sestini e M. Marro, *Studio sui foraggi della Campagna romana*. Ann. Staz. sperim. agr. di Roma, I serie, fasc. 4°, pag 30 (1873).

I risultati dell'analisi chimica furono i seguenti:

DETERMINAZIONI	1	2	3	4	5	6	7	8
Acqua igroscopica	14.278	16 942	13.989	12.912	13.465	12.437	15.529	12.892
Materie grasse	1 869	1.815	1 971	1.782	2.138	1 708	2.716	1.913
" proteiche (15.5 °/₀ di N) .	17.903	13.596	12 835	13.832	12.648	10.883	7.138	8 625
" minerali (cenere pura). .	9.194	10.375	9.148	10.297	8.691	9.612	8.101	9.244
Cellulosa	30.061	25.197	34.012	31 070	34.447	37.744	34.535	36.651
Altre sost. idrocarb. (amido, glucosio, ecc.)	26.695	32.075	28.045	30.107	28.611	27.616	31.981	30.675
	100 —	100 —	100 —	100 —	100 —	100 —	100 —	100 —
COMPOSIZIONE DELLE CENERI PURE (dedotta la CO_2)								
Cloro	9 630	10.115	8.534	10.525	9.258	7.010	7.481	6 120
Anidride fosforica	4.749	6.250	10.730	10.002	12.826	7.289	7 787	4 933
" solforica	4.478	6.638	3.907	4.764	2 826	4.427	2.642	2.059
Ossido di potassio	26 427	28.660	24.674	32.664	35.086	30.245	25.109	20.938
" sodio	10.748	4.214	4 637	5.763	3.898	5.780	6.078	4.118
" calcio	10.190	19.281	10.203	10.609	16.374	13.160	11.100	12.356
" magnesio	2 015	3.371	1.854	2.171	3 128	2.337	3.436	3.088
" ferro	1.467	1.546	1 677	1.597	1.171	1.319	1.285	0.614
Silice	28.667	19.071	32.652	21.604	14.619	27.781	34.448	44.965
Perdite	1 629	0.854	1.132	0.301	0.824	0 652	0.634	0.809
	100 —	100 —	100 —	100 —	100 —	100 —	100 —	100 —
Materie insolubili in acqua (per 100 di cenere)	39 350	57.812	41.317	55.121	67.889	53.465	30.567	27.573
Anidride carbonica (id. id) . . .	2.459	10.492	tracce	3.256	9.556	6.257	2.766	0.057

Il Sestini ed i suoi collaboratori si limitarono a trarre da questi studî la conclusione che, per quanto si riferisce alle sostanze organiche (tenuti presenti i dati medî di I. Kühn), i foraggi della Campagna romana sono, in genere, molto ricchi di materie plastiche; presentano i grassi sotto la media, ma sopra il minimo, ed un contenuto rilevante di cellulosa. Considerati poi i dati medî di E. Wolff, gli autori fanno rilevare che, per quanto si riferisce alle sostanze minerali, i fieni analizzati ne contengono grandi quantità; ed in esse la potassa supera la media, l'acido fosforico vi è piuttosto abbondante.

Nel successivo anno furono ripetute le ricerche, le quali formano oggetto di una seconda Nota pubblicata dal Sestini e dal Marro solamente [1]. Con esse si mirava a stabilire le variazioni che le diverse stagioni possono determinare nella composizione dei fieni medesimi. Di questi se ne studiarono 20 campioni, di cui 15 rappresentanti il prodotto di quattro prati e due pascoli, prelevando da ciascuno due o tre saggi in tempi differenti. I risultati ottenuti sono quelli qui appresso riassunti:

[1] F. Sestini e M. Marro, *Studio sui foraggi della Campagna romana*. Ann. Staz. sperim. agr. di Roma, I serie, fasc. 5°, pag. 47 (1874).

N.	LOCALITÀ	Acqua igroscopica %	Sostanze proteiche %	Sostanze grasse %	Cellulosa %	Altre materie idro-carbonate %	Sostanze minerali (ceneri der. CO_2) %	Osservazioni
1	Valle dell'Aniene	14.223	9.148	2.379	27.526	38.787	7.937	Fieno già secco e tagliato.
2	» »	13.217	10.532	1.216	37.006	29.808	8.221	» » »
3	Tre Fontane . . .	16.166	9.064	1.887	30.885	34.239	7.759	» » »
4	» »	14.206	6.884	1.851	29.609	38.666	9.084	» » »
5	Caffarella (collina)	14.063	10.732	2.385	32.281	33.100	7.439	» » »
6	Prato Risacco. . .	15.490	12.516	2.132	32.101	27.682	10.079	Prelev. 14 maggio.
7	» »	11.733	11.619	1.655	31.105	35.659	8.229	» 22 » (falciato il giorno innanzi).
8	» »	14.223	9.148	2.379	27.526	28.787	7.937	» 30 » (rimasto 10 giorni sul posto).
9	Destra dell'Aniene	14.931	11.023	1.523	37.832	26.498	8.193	» 14 »
10	» »	15.949	7.536	1.705	36.729	29.680	8.401	» 22 » quasi esclus. costituiti da avena selv., rara medica e trifoglio rosso.
11	» »	13.217	10.532	1.216	37.006	29.808	8.221	» 30 »
12	Prato Ortaccio . .	12.974	13.710	1.843	32.393	28.474	10.606	» 17 » (erba).
13	» »	16.166	9.064	1.887	30.885	34.239	7.759	» 25 » (fieno).
14	Pantanella	12.714	10.632	2.412	27.478	38.603	8.161	» 17 » (erba) molte leguminose.
15	»	14.206	6.884	1.851	29.609	38.366	9.084	» 25 » (fieno) » »
16	Caffarella (collina)	14.143	13.587	2.275	29.715	29.119	11.161	» 19 » con molti cardi e borragine.
17	» »	16.950	14.310	2.079	29.256	28.205	9.196	» 31 » » »
18	» »	14.063	10.732	2.385	32.281	33.100	7.439	» 16 giugno molte graminacee e leguminose.
19	» (piana)	16.562	13.000	2.152	28.050	30.583	9.653	» 19 maggio » »
20	» »	16.927	11.339	1.587	31.086	31.274	7.787	» 21 » » »

Queste altre cifre, mentre confermano, in linea generale, quelle ottenute nel precedente anno, non possono fornire un sicuro giudizio sull'aumentare o il diminuire delle materie grasse e degli altri principî ternarî a seconda delle circostanze in cui i fieni furono raccolti ed analizzati. Risulta però evidente la perdita delle sostanze proteiche che fu dappertutto notevole con la trasformazione dell'erba in fieno. La conclusione generale degli studî del Sestini e collaboratori è, quindi, che i fieni della Campagna romana siano effettivamente di qualità piuttosto buona, e sarebbero capaci di miglioramenti anticipando di un poco l'epoca della falciatura e se si adottassero metodi più razionali per la loro maturazione.

Ma non è tale conclusione che possa servire agli studî da me progettati. Con questi io miro alla determinazione della capacità, che le piante, coltivate nella campagna romana, hanno, di produrre sostanza organica, d'immagazzinare energia, di fornire, quindi, più o meno direttamente lavoro. In conformità delle mie premesse economico-agricole, intendo misurare detta capacità col mezzo dell'*effetto assimilatorio* dello Strakosch, che richiede il calcolo dei due fattori: il *valore di produzione* ed il *valore di consumo*. Sono appunto questi che ora io intendo calcolare per le piante della nostra campagna ad incominciare dal suo prodotto principale: i fieni. Il primo quesito che io mi propongo è quindi il seguente: *Qual'è, anzitutto, il valore di produzione; qual'è, in secondo luogo, il valore di consumo dei fieni della campagna romana?*

Ora, la risposta a queste due domande non ci è data dai soprariportati dati analitici: ed è perciò che io, da mia parte, ne ho voluto raccogliere dei nuovi in base a metodi differenti, meglio rispondenti al mio scopo.

La misura del valore di produzione si volle dapprima esprimere, secondo i criterî di M. Rubuer (1), con il numero di calorie che le sostanze nutritive sono capaci di sviluppare nell'organismo: ma in questa misura non si teneva conto dell'influenza che nella utilizzazione delle calorie medesime esercitano il rapporto e le trasformazioni fra i diversi costituenti le sostanze nutritive stesse. Più attendibile sembrò il metodo di determinare il contenuto di queste in composti nutritivi digeribili riferiti ad un *valore nutritivo unitario*. Esso fa capo ai lavori di E. Wolff (2), I. Kühn (3), del König (4), Emmerling, Fleischmann, Wagner, Heinrich, Henneberg ed altri (5), dai cui molto disparati apprezzamenti emergono difficoltà di varia natura e non piccola entità. Il Kellner, però, unitamente ad una sottile critica dei precedenti, ci ha dato recentemente un suo metodo nel quale trovano la più semplice espressione i diversi principî alimentari dei prodotti agrarî e, in particolare, dei foraggi (6); ed è a questo metodo appunto che io mi sono attenuto.

Esso importa, da un lato, la determinazione del *valore-amido* (Stärkewerk), e dall'altro quella dell'albumina digeribile; il primo, risultante a sua volta, oltre che

(1) M. Rubner, Zeitschrift für Biologie, Bd. 21, an. 1885.

(2) E. Wolff, *Landw. Fütterungslehre*. Berlino.

(3) I. Kühn, *Die zweckmässigste Ernährung des Rindviehes*. Dresda.

(4) König, *Die menschlichen Nahrungs- und Genusmittel*, Bd. II.

(5) Confr. S. Strakosch, loc. cit.

(6) O. Kellner, *Untersuchungen über den Stoff- und Energie Umsatz der erwachsener Rindes u. s. w.* Berlino, an. 1910.

dal valore dei carboidrati, anche da quello della sostanza grassa che corrisponde circa a quattro volte il valore di essi. I composti, quindi, da prendersi in esame sono tre: albumina digeribile, carboidrati, grassi; ed io li ho determinati con la seguente tecnica ([1]):

1°) *Determinazione dell'albumina digeribile.* — Il foraggio, finamente triturato, si tratta con acqua calda, vi si aggiunge il mezzo di precipitazione (solfato di rame + soda caustica), si raccoglie il precipitato ed in esso si determina l'azoto totale con il metodo Kyeldahl. Il calcolo della proteina *pura* viene fatto in base alla supposizione che il gruppo dei composti contenga in media il 16 °/₀ di azoto. Per la determinazione della digeribilità della proteina stessa, non essendo possibile l'esperimento fisiologico sugli animali, mi sono valso del *coefficiente di digeribilità* calcolato dal Kellner e riportato nella sua tabella n. II, riferendomi ai risultati della tabella n. I che più si avvicinassero ai miei.

2°) *Determinazione dei carboidrati.* — Li ottenni indirettamente detraendo da 100 la somma percentuale: acqua + proteina grezza + grasso + fibra bruta + ceneri. Per la determinazione della fibra bruta seguii il metodo König; per la determinazione delle ceneri, calcinai il residuo sino a completa bianchezza.

3°) *Determinazione dei grassi.* — Il foraggio, finamente triturato, secco, venne ripetutamente trattato con etere solforico anidro e privo di alcool, in un apparecchio ad estrazione. Si svaporò l'estratto etereo e si pesò.

Limitai a cinque il numero dei fieni studiati, poichè, nel corso del presente lavoro essendomi venuti a mancare i mezzi del Ministero, non mi fu possibile di estendere le ricerche sopra un materiale più copioso, richiedente spese e cure personali non piccole per la scelta, il prelevamento, il trasporto e la maturazione. I campioni furono raccolti da me personalmente, sul posto, alla metà di maggio 1909; si prelevarono in diverse parti di un determinato luogo dove si presentavano con una certa uniformità. Di essi si eseguì la miscela sul posto, asportandosene solo una parte che venne essiccata e lasciata leggermente compressa per un mese in piccole casse e che, infine, si triturò e si conservò, in barattoli chiusi, fino all'epoca dell'analisi.

La scelta dei cinque campioni venne fatta in modo che tra essi fossero rappresentate le principali qualità dominanti nella campagna delle vicinanze di Roma, nella zona da me sottoposta a studio. Due erano a predominio di leguminose, due a predominio di graminacee e, di ciascuna delle due qualità, uno costituito da erba di qualità migliore (cioè più alta e più fitta, proveniente da terreni di valle); l'altro di qualità più scadente, ottenuto da terreni in collina. Nel quinto campione di fieno erano in grande predominio erbe appartenenti nè a leguminose, nè a graminacee: il foraggio si presentava come di pessima qualità.

I risultati dell'esame botanico di questi campioni di fieno dette i seguenti risultati:

([1]) O. Kellner, *Grundzüge der Fütterungslehre*, 4 Aufl. P. Parey; Berlino, an. 1912.

N.	Provenienza	Specie botaniche dominanti: leguminose	graminacee	diverse	Rapporto: leguminose / gram. + div.
I.	Romavecchia . .	*Trifolium pratense - Trifolium repens - Medicago sativa - Lathyrus cicoria.*	*Avena pratensis - Bromus pratensis - Lolium italicum - Poa pratensis - Triticum repens.*	*Tussilago farfara - Taraxacum officinale - Bellis perennis.*	1:3
II.	Arco di Travertino	*Medicago falcata - Medicago sativa - Hedysarum onobrychis - Lotus corniculatus.*	*Avena elatior - Avena pratensis - Lolium italicum.*	*Borrago officinalis - Carum carvi - Isatis tinctoria.*	1:5
III.	Grottarossa . .	*Medicago sativa - Trifolium pratense.*	*Avena elatior - Avena pratensis - Triticum repens - Lolium italicum - Alopecurus agrestis.*	*Papaver rhoeas - Erigeron canadensis.*	1:20
IV.	La Magliana . .	*Vicia sativa - Trifolium pratense.*	*Avena pratensis - Festuca pratensis - Holcus lanatus - Phleum pratense - Poa pratensis.*	*Ranunculus arvensis - Tussilago farfara.*	1:25
V.	Boccone	*Trifolium repens.*	*Avena pratensis - Cynodon dactilus.*	*Tussilago farfara - Erigeron canadensis - Plantago lanceolata - Mentha piperita - Carum carvi - Isatis tinctoria - Bellis perennis.*	1:50

I risultati dell'analisi chimica furono questi altri:

Campione .		I	II	III	IV	V
Carboidrati	%	7.2	7.1	9.6	9.2	8.6
Grasso	»	0.85	0.83	0.48	0.52	0.40
Albumina digerib.	»	1.65	1.60	1.21	1.20	1.05

E ritenendo, in base ai rigorosi e numerosi esperimenti fisiologici del Kellner sopra i foraggi, che da 100 gr. di farina d'amido o di simili polisaccaridi si ottiene stesso effetto complessivo di produzione dato da gr. 24,89 di grasso, si potranno

ridurre i due termini, carboidrati e grasso, ad un unico termine di *valore-amido*, moltiplicando il secondo per 4. Così avremo:

Campione		I	II	III	IV	V
Valore-amido	%	10.6	10.5	11.6	11.3	9.8
Albumina digeribile	»	1.65	1.60	1.21	1.20	1.5

Una espressione unica del valore di produzione di questi fieni non potrebbe altrimenti ottenersi se non sulla base del valore monetario dei due elementi qui ricordati e che sarà calcolato in appresso.

Frattanto è necessario di passare alla determinazione degli elementi necessarî alla misura del valore di consumo dei fieni stessi.

È superfluo di ricordare quanto, del resto, feci notare nelle mie premesse economico-agricole: che, cioè, il valore di consumo delle piante non corrisponde al bisogno di esse in concimi, i quali non passano nella loro totalità nel corpo vegetale, ma restano in buona parte ad accrescere il valore del capitale-terreno. Il consumo della pianta è dato dal peso degli elementi chimici che essa sottrae al suolo e che può essere direttamente e facilmente conosciuto mediante l'analisi chimica. Questa può venire limitata a quei soli tre elementi che, per la quantità relativamente elevata in cui servono al vegetale e per la scarsezza con cui questo può averli a disposizione, godono anche di un valore commerciale notevole. Essi sono: potassa, acido fosforico ed azoto.

Procedetti alla determinazione di questi nei cinque campioni di fieno già studiati, per dedurne gli elementi necessarî alla conoscenza del valore di produzione. I metodi analitici seguìti, furono: per l'azoto, il metodo Kyeldahl-Ulsch con 1-2 gr. di sostanza; per la potassa e l'acido fosforico gli ordinarî procedimenti sopra le ceneri del foraggio. I risultati ottenuti sono riuniti nel presente prospetto:

Campione		I	II	III	IV	V
Potassa (K_2O)	%	0.88	0.84	0.92	0.94	1.07
Acido fosforico (P_2O_5)	»	0.20	0.16	0.18	0.20	0.20
Azoto (N)	»	0.56	0.60	0.50	0.57	0.56

Per il modo come questi dati furono ottenuti, possiamo affermare che essi si equivalgono a quelli del Sestini, del Misani e del Marro ricavati dai campioni di fieno da loro studiati e particolarmente da quei primi sei di cui eseguirono anche l'analisi delle ceneri. Per avere quindi un materiale di giudizio più abbondante, al fine di calcolare il valore di consumo dei fieni della campagna romana, farò tesoro anche dei risultati di quegli egregi sperimentatori, tenendo però conto che, relativamente alle determinazioni di azoto, è necessario di dedurne il quantitativo dai dati forniti delle materie proteiche, avuto presente che esse ne contenevano il 15,5 %.

Come per il valore di produzione, così anche per quello di consumo il riferimento al valore commerciale verrà fatto nel prossimo capitolo.

Un quesito affatto analogo a quello dei fieni mi sono proposto anche per le colture a granella che si hanno nella campagna romana. *Qual'è il valore di produzione, quale il valore di consumo dei cereali che si coltivano nella campagna romana?*

Il frumento, l'avena ed il granoturco si coltivano, nel nostro Agro, su larga scala e con una certa cura. Per essi tuttavia non si fa uso alcuno di concimi, pur praticandosi lavori speciali, quali ad es. la cosiddetta *terranera* per il frumento; si trae, invece, profitto di quella specie di avvicendamento a *terzeria* o *quarteria* nel quale alternasi, con quella cereale, la produzione naturale delle erbe. I raccolti, se non abbondanti, riescono discreti, sebbene il rischio maggiore sia per la coltivazione del *mais*.

Le mie indagini relative alla determinazione degli elementi con i quali dedurre l'effetto assimilatorio di queste colture furono limitate alle varietà di frumento *locale romano* ed a quella nostrale di avena. Della prima analizzai due campioni, che mi furono dichiarati come tali; della seconda uno solo, deplorando la mancanza di altre analisi delle piante nostrali di granella, mancanza alla quale, del resto, fa riscontro la pochissima conoscenza che si ha, in genere, dei cereali italiani.

I metodi seguìti furono quegli stessi dei fieni. Da un lato, per il valore di produzione, furono determinati: carboidrati, grassi (valore-amido), albumina digeribile; dall'altro, per il valore di consumo, potassa, acido fosforico, azoto.

I risultati furono:

	Frumento var. *locale romana*				Avena var. *nostrale*	
	I		II			
	granella	paglia	granella	paglia	granella	paglia
Carboidrati . . . %	66.6	10.9	66.4	10.8	43.7	17.0
Grassi . . . . . »	1.1	—	1.3	—	4.0	—
Valore-amido . . »	71.0	10.9	71.6	10.8	59.7	17.0
Albumina digerib. »	9.9	—	9.8	—	8.7	—
Potassa . . . . . »	0.58		0.62		1.21	
Acido fosforico . »	0.45		0.47		0.42	
Azoto . . . . . »	1.13		1.12		1.05	

Essi saranno adoperati per i calcoli dell'effetto assimilatorio che s'istituiscono nel seguente capitolo.

Mentre non possediamo ricerche sperimentali speciali dirette all'accertamento dei miglioramenti che, con l'applicazione dei moderni criterî, possono subire i nostri prati naturali, non mancano risultati di esperienze eseguite per conto del Ministero di agricoltura sopra la coltivazione dei cereali nella campagna romana, relativamente non solo alle differenti varietà, ma anche alle diverse concimazioni, agli avvicendamenti, alle epoche e modi di semina, alla profondità, ecc. Esse furono eseguite dalla R. Stazione agraria di Roma, in quel campo sperimentale di Sant'Alessio e Vigna Murata affidato alla direzione tecnica ed amministrativa del Freda, il quale ne fu l'ideatore; in quel campo che avrebbe dovuto rappresentare qui qualche cosa di molto simile a

quello che è in Inghilterra il campo sperimentale di Rothamsteed. Ma presso di noi non sembra che le cose si sappiano organizzare seriamente e, una volta organizzate, proseguirle seriamente! Le vicende di detto campo furono fortunose.

L'idea del campo sperimentale, ripresa nel 1887, si potè solo attuare nel 1891, dopo l'espropriazione della tenuta di S. Alessio e Vigna Murata a cinque chilometri e mezzo da porta S. Sebastiano, in una località eccentrica battuta fortemente dalla malaria. Tra il Freda, chiamato alla direzione di esso, ed il Ministero sorsero ben presto divergenze che portarono alle dimissioni del primo, il quale tuttavia vi tornò di nuovo nel 1898. Dopo la sua morte ed il rifiuto del dott. A. Lazzari, assistente della R. Stazione agraria di Roma, la direzione passò al prof. Odoardo Fino, direttore della locale scuola di agricoltura. Ma, con tali cambiamenti di direzione, tutto venne mutato: in sostanza, il grande campo sognato dal Freda fu abolito, e, oggidì, solo una ben piccola parte di esso è rimasta alla R. Stazione agraria, con un ben modesto còmpito.

Il Lazzari aveva avuto agio di raccogliere molti dati colturali delle esperienze eseguite nel campo di S. Alessio, cui aveva dedicato per parecchi anni una gran parte della sua attività, ed ha lasciato con la sua morte un voluminoso manoscritto, incompleto, però, e non tutto ordinato, a causa della lenta malattia che andava minando la esistenza di lui. Ora, di tale manoscritto, per i detti motivi, non è stata possibile la pubblicazione; tuttavia, io, che ho avuto agio di esaminarlo, ho potuto accertare che si trovano in esso molti risultati completi ed ordinati che avrebbero meritato di essere conosciuti. Di essi perciò riporto solo alcuni che possono servire ad illustrare gli studî di laboratorio da me eseguiti, la tesi da me svolta, ed a sopperire in qualche modo al non mai abbastanza lamentato inconveniente di non aver potuto avere a mia disposizione un sol metro quadrato di terreno per eseguire esperienze di campo.

Ed è da ritenersi molto opportuno l'avere dati sperimentali diretti, desunti da prove colturali eseguite nel nostro Agro e, più particolarmente, nella zona che ha formato oggetto del mio studio, poichè nella determinazione dell'effetto assimilatorio — come anche sul principio del lavoro ho fatto rilevare — non si può assolutamente prescindere da criterî relativi all'ambiente in cui la pianta vive (terreno e clima): e alle modificazioni che a questo ambiente si possono far subire con vantaggio economico. Ora, lo stralciare dai risultati inediti del Lazzari quelli che meglio rispondono a tali esigenze del mio studio, è un colmare una lacuna nelle mie ricerche, alla quale — per assoluta mancanza di mezzi — io non avrei potuto altrimenti provvedere.

I. *Coltivazione del frumento.*

A) Esperienze sulle varietà.

Furono condotti per cinque anni consecutivi, somministrando nel primo una concimazione in ragione di q.li 200 di letame, più kg. 50 di anidride fosforica solubile nel citrato, kg. 400 di gesso ed in copertura, a suo tempo, kg. 15 di azoto nitrico: le tre ultime somministrazioni furono ripetute in ciascuno degli altri quattro anni.

Nell'estate del quarto anno si praticò un'aratura profonda 20-25 cm., cercando di conservare le aiuole, e si concimò con perfosfato in ragione di kg. 80 di anidride fosforica ad ettara e nitrato sodico in ragione di kg. 15 di azoto subito dopo la semina. In copertura in due successive volte. si somministrarono altri kg. 30 di azoto come nitrato

a) Il frumento concimato ha dato in molti casi produzioni più che doppie di quello non concimato: la produzione dei primi tre anni risulta inferiore a quella dei tre successivi, nei quali si ha un anno di produzione elevata e due di produzione più bassa.

b) Molti sono i frumenti che hanno dimostrato la loro attitudine a diventare buoni produttori e ad adattarsi alle condizioni di clima e di terreno dell'Agro romano. Fra essi sono poche le varietà estere: la maggior parte sono varietà nazionali e, come qualità di grano, si sono comportate meglio i *duri* che non i *teneri*.

c) Per produzione e resistenza alle malattie, i grani esteri, specialmente i più settentrionali (e, fra essi, le migliori varietà del Regno Unito), si sono mostrati molto inferiori ai nazionali. Essi risentono di più il caldo: maturano prima ed incompletamente.

d) Fra i frumenti esteri, quelli che hanno dato le migliori produzioni sono:

1)	*Petanielle noire de Nice* . . .	q.li	23,06	= ettolitri	29,90
2)	*Nonette de Lausanne*	»	21,96	»	28,60
3)	*Bordeaux*	»	20,09	»	27,37
4)	*Barbu à gros grains rouges* . .	»	19,88	»	23,75

Il *Sealford à épi gros barbu* è stato l'unico del Regno Unito che abbia dato buona prova. Anche il *Medeak* come il *Blé d'Alger* hanno dato produzioni discrete; sempre, però, in terreno concimato. In terreno povero la loro produzione scende assai bassa. Il Medeak, per es., ha l'undecimo posto fra i concimati, il trentacinquesimo fra i non concimati. Delle varietà estere che sono state coltivate solo per i quattro primi anni, hanno dato tutte buona produzione: lo *Japhet*, il *Chiddam d'automne à épi rouge*, lo *Schires à épi carrée*, il *Bloodred* o rosso di Scozia, e il bianco delle Fiandre.

e) Dalle tabelle presentate dal Lazzari si nota che in Italia si hanno varietà di frumento la cui produzione può raggiungere quella delle migliori selezionate inglesi. Le nostre varietà presentano tutte attitudine ad essere ingentilite e migliorate allorchè se ne tentasse convenientemente e sapientemente la selezione.

f) Per l'agro romano una buona qualità era la *locale romana*, che il prof. Freda ebbe nel 1892 dal comm. Piacentini. In sei anni di esperimento essa ha dato:

su terreno concimato:		su terreno non concimato:	
Q.li	16.50	Q.li	8.20
»	27.67	»	10.13
»	21.48	»	10.52
»	25.70	»	17.23
»	27.80	»	9.34
»	26.12	»	19.95

con i seguenti rispettivi rapporti fra paglia e granella:

$$\frac{31.55}{22.54} = 1.39 \qquad \frac{12.22}{12.54} = 0.97.$$

Altra buonissima qualità è la Rossia di Eboli, che per produzione sta un poco al di sopra della var. locale romana:

	in terreno concimato:	in terreno non concimato:
	Q.li 18.20	Q.li 8.10
	» 23.22	» 7.06
	» 21.06	» 12.82
	» 26.22	» 15.57
	» 21.89	» 11.44
	» 26.91	» 19.35
Rapporti . . .	$\frac{33.35}{23.23} = 1.43$	$\frac{14.38}{12.39} = 1.19$

La varietà, però, che ha dato la maggiore produzione, è la *Saragolla di Cotrone*:

	in terreno concimato:	in terreno non concimato:
	Q.li 20.90	Qli. 7.70
	» 25.71	» 7.30
	» 21.48	» 12.48
	» 25.92	» 13.38
	» 20.69	» 6.18
	» 27.26	» 25.46
Medie . .	Q.li 23.65 = Ettolitri 31.06	Q.li 12.14 = Ettolitri 15.85
Rapporti . . .	$\frac{33.94}{23.65} = 1.40$	$\frac{13.92}{12.14} = 1.14$

La var. *Cignarella mascula* di S. Giuliano del Sannio è pure una varietà produttiva:

	in terreno concimato:	in terreno non concimato:
	Q.li 18.94	Q.li 8.66
	» 18.93	» 7.92
	» 19.97	» 8.28
	» 31.41	» 13.92
	» 21.01	» 10.83
	» 24.79	» 20.46
Medie . .	Q.li 22.55 = Ettolitri 30.66	Q.li 11.67 = Ettolitri 16.48
Rapporti . . .	$\frac{27.77}{22.55} = 1.23$	$\frac{12.66}{11.67} = 1.08$

Delle varietà primaverili hanno dato buon prodotto: la *Saragolletta marsatica* di s. Giuliano del Sannio, con una media sessennale di q.li 14,55, pari ad ettolitri 18,82 in terreno concimato; la *triminia* di Sicilia, con una media di q.li 12,76 = ettol. 17,16; ed il *marzuolo* di Siena, con q.li 11,76 = ettolitri 16,51.

È infine da osservarsi come la pratica abbia dimostrato che talvolta conviene fare uso di mescolanze di due o tre varietà aventi la stessa epoca di maturazione. In tali casi il raccolto in terreno concimato dette una media compresa fra q.li 20,60 e 25,64.

B) Gara fra le varietà, migliori produttrici nell'Agro.

Sulla base dei risultati fin qui esposti, a partire dal 1895-1896, furono poste in gara le varietà migliori produttrici, allo scopo di determinare quella che fosse più conveniente in un terreno dove precedentemente fosse stata coltivata una pianta da rinnovo.

Nel primo anno il granoturco e le barbabietole furono concimati con kg. 80 di anidride fosforica e kg. 45 di azoto; le patate, con kg. 80 di anidride fosforica, kg. 30 di azoto come solfato ammonico, kg. 15 di azoto come nitrato sodico; il frumento successivo, con kg. 80 di anidride fosforica, kg. 40 di azoto come solfato ammonico e kg. 15 di azoto come nitrato, in copertura. Nel secondo anno si scambiò la serie delle parcelle, coltivando le stesse piante da rinnovo con uguale concimazione e somministrando al frumento kg. 80 di anidride fosforica, kg. 15 di azoto nitrico dopo semina, e kg. 30 dello stesso in copertura. Nel terzo anno si ritornò alle parcelle di prima.

Da questi esperimenti di gara, che sarebbe stato desiderabile fossero durati più a lungo, risulta quanto segue:

a) i fattori della produzione nell'Agro romano sono più favorevoli ai grani duri che non ai teneri;

b) se si paragonano le medie dei risultati ottenuti negli stessi tre anni di esperienze dalle stesse varietà non poste in gara, con quelle poste in gara e fatte succedere ad una pianta da rinnovo, si vede subito che le ultime hanno dato una produzione superiore alle prime.

VARIETÀ	IN GARA		NON IN GARA		DIFFERENZA (+)	
	concimata	non concimata	concimata	non concimata	concimata	non concimata
Cignarella mascula di s. Giuliano	30 58	21.03	22.55	15.07	8.03	5.96
Medeak	29.44	18.15	21.73	13.54	7.71	4.61
Nonette de Lausanne	28.32	15.70	21.96	14.43	6.36	1.27
Saragolla di Cotrone	25.08	16.06	23.65	15.00	4.43	1.09
Petanielle noire de Nice	27.92	17.07	23.06	13.92	4 86	3 15
Vincetutti di Sicilia	27 70	18.21	22.05	16.37	5.65	1.84
Varietà locale romana	27.51	16.96	22.54	15.47	4.97	1.49
Saragolletta di Basilicata . . .	27.46	15.93	21.49	14.58	5.57	1.35
Barbù à gros grains rouges . .	25.85	15.05	19.88	10.76	5 97	4.29
Bianchetto di Eboli.	25.82	7 27	21.59	13.65	4.23	3.62
Rieti	24.76	16.01	20.07	11.61	4.69	4.40
Noè	23.81	11.38	16.67	11.09	7.14	4.29

I migliori risultati si hanno quando il frumento occupa il posto che meglio gli compete nell'avvicendamento: cioè, quando è fatto seguire ad una pianta da rinnovo a lavoro profondo e sarchiature estive, come lo dimostrano chiaramente i risultati delle gare non concimate in confronto con quelli dei frumenti non in gara non concimati. Dalle dette risultanze emerge che le varietà, poste in relazione alla pianta da rinnovo esplicano meglio le loro attitudini produttive che non quando sono fatte succedere a loro stesse.

C) Esperienze sopra le varie concimazioni.

Le risultanze di queste esperienze furono molto varie, specialmente per il Noè, forse — crede il Lazzari — per il mutevole andamento delle stagioni. Le principali osservazioni fatte furono le seguenti:

a) l'applicazione di un solo elemento fertilizzante si dimostrò sempre inefficace; però la somministrazione di anidride fosforica ha dato risultati superiori soltanto a quelli dell'azoto, tanto nitrico quanto ammoniacale;

b) le concimazioni a base di letame o con azoto ammoniacale ed anidride fosforica hanno dato con il Noè produzioni ragguardevoli;

c) nel primo anno l'azione dell'azoto del solfato ammonico è stata, in genere, più favorevole alla produzione che non quella dell'azoto nitrico; nel secondo anno e nel successivo, invece, le maggiori produzioni si ottennero dalle formule concimanti a base di nitrato sodico;

d) i concimi potassici sembrano non avere avuto alcuna influenza allorchè si trovavano in unione al nitrato sodico, mentre in unione al solfato ammonico hanno favorito la produzione;

e) notevole è pure il risultato dell'azione esercitata dal solfato di magnesio,

f) gli effetti prodotti dal perfosfato d'ossa e da quello minerale si possono ritenere di ugual valore: le scorie nelle stesse proporzioni hanno dato effetti minori: i varî fosfati, risultati deficienti;

g) l'azione del gesso non è stata nè uniforme, nè costante: anzi sembrerebbe piuttosto nociva.

I risultati ottenuti con la varietà di Rieti nell'anno successivo, in cui le condizioni furono tutte favorevoli alla produzione, furono alquanto diversi, per alcune concimazioni, da quelli ottenuti con il Noè; però anche in quest'anno, come nei due successivi, col *petanielle* un solo elemento fertilizzante si è mostrato sempre deficiente in rapporto a concimazioni complesse. Solo kg. 80 di anidride fosforica hanno dato risultati superiori a quelli degli altri elementi impiegati separatamente.

Le concimazioni che più hanno contribuito all'aumento dei prodotti sono state quelle ad alta dose di elementi fertilizzanti. In particolare fu notato:

h) nella maggior parte dei casi l'azoto ammoniacale si è dimostrato più utile che non il nitrico;

i) i concimi potassici hanno, meglio che nei precedenti anni, intensificato la produzione, forse per le migliori condizioni delle stagione. Il cloruro si comportò meglio del solfato potassico;

j) dei concimi fosfatici il migliore fu il perfosfato minerale accompagnato dal nitrato sodico; quando, invece, il gesso è in unione al solfato ammonico, è il perfosfato d'ossa che dà i migliori risultati;

h) per il gesso si ebbero risultati inferiori a quelli del solfato potassico; invece, insieme con azoto ed acido fosforico, i risultati che dette il gesso furono superiori;

l) il solfato di magnesio, questa volta, ha dato un leggero aumento di prodotto solo in unione al nitrato sodico.

Rimanendo sempre in questo ordine di esperienze, riferisce il Lazzari che le aiuole non mai concimate hanno dato con il quarto frumento produzioni così alte da far supporre che anche i terreni, che si dovrebbero ritenere come sfruttati, non lo siano affatto; e riporta il seguente prospetto sulla produzione delle varie aiuole senza concime:

Superficie coltivata m. q.	Granella q.li	Granella Ettolitri	Paglia q.li	Pula q.li
45.50	11.46	15.74	14 82	4.26
47.50	18.60	28.00	26.92	6.56
49.50	18.60	26.26	24.24	7.68
45.50	18.90	25.72	20.66	6.58
45.70	17.28	23.20	21.22	4.60
49.00	19.60	25.52	25.30	5.30
Totale 282.70	**105.44**	**144.44**	**133.16**	**34.98**
Medie 47.10	**17.50**	**24.07**	**22 20**	**5.83**

Un'ultima osservazione è opportuno di fare: ed è che le formule concimanti a base di letame sono state quelle che hanno dato le migliori produzioni, rilevandosi anche un fatto che — osserva il Lazzari — sembrerebbe anormale: cioè che il solo letame ha dato prodotti superiori a quelli delle formule di letame e concimi minerali.

D) Sopra le diverse epoche di semina, a varie profondità e differenti modi.

Per quanto si riferisce all'epoca di semina del frumento, si scorge subito quanto variabile sia stata la produzione nei diversi anni, con le diverse epoche; però si riscontra un periodo di produzione massima quasi costante in rapporto alle semine eseguite dal 20 ottobre al 14 novembre ed oltre. Quindi nell'Agro romano la migliore epoca di semina incomincierebbe nella seconda metà di ottobre, per prolungarsi a tutto novembre e forse anche ai primi di dicembre. Ciò non sarebbe in armonia con la generale credenza che qui convenga anticipare di molto le semine.

Per quanto si riferisce alla profondità di semina, dalle esperienze risulta che il frumento germina interrato a 7-8-9 cm. di profondità e si sviluppa in modo normale, contrariamente a ciò che si pratica e si ammette.

Per quanto si riferisce ai modi di semina, si sono ottenuti i migliori risultati colturali dalla semina a spaglio e, dove l'ambiente lo permette, dalla semina a righe a cm. 20 di distanza.

II. *Coltivazione dell'avena.*
Prove comparative di diverse varietà.

Furono esperimentate ventuno varietà di avena per due anni. Esse non furono concimate: le piante da rinnovo avevano ricevuto kg. 80 di anidride fosforica, kg. 30 di azoto ammoniacale, kg. 15 di azoto nitrico; il frumento successivo ebbe ogni anno kg. 50 di anidride fosforica, 30 di azoto ammoniacale, 400 di gesso.

Fino dal primo anno si rilevò che la varietà comunemente coltivata nell'Agro romano dette la maggiore produzione con q.li 16.21, seguìta immediatamente dalla « blanche de Ligowo ameliorée » con q.li 15.58, e la siciliana con q.li 14.80. Nel successivo anno la « nostrale » mantenne sempre elevata la sua produzione, non essendo sorpassata che dalla « Lincoln » e dalla siciliana.

Dall'esame delle medie dei due anni di produzione emerge anche per l'avena il fatto che la maggiore produzione si ebbe dalle varietà nazionali, le quali sono da noi commercialmente meglio accette per le granella e per la paglia. Il prodotto, in peso complessivo, fornito dalle diverse varietà, e la media dei due anni, trovansi riportati nel seguente prospetto.

Num.	NOME DELLA VARIETÀ	ANNI		MEDIA q.li
		1896-97	1897-98	
1	Siciliana	41.92	71.20	56.56
2	Nostrale	36.00	61.22	48.61
3	Blanche de Ligowo ameliorée	34.08	58.92	46.50
4	Jaune de Flandre	28.72	58.02	43.38
5	Jaune géante à grappe	30.52	52.03	41.28
6	Hative de Siberie	32.94	53.91	43.42
7	Noire d'Hongrie	36.70	61.38	49.04
8	Waterloo	23.60	43.56	33.58
9	Grise de Houdau	29.00	49.24	39.12
10	Grise jaune de Thurenge	24.74	49.36	37.05
11	Welcome	25.54	46.76	36.52
12	Blanche d'Hongrie	28.52	41.50	35.01
13	Tringler's progres	24.52	37.00	30.76
14	Ndide Awache	20.60	58.27	39.43
15	Noire de Brice	28.72	42.57	35.64
16	Wictoria	29.54	46.30	37.92
17	Clydesdale	33.36	44.18	38.27
18	Triomphe	31.20	48.98	40.09
19	Lang Fellow	20.90	41.52	33.21
20	Potato scozzese	—	43.89	43.89
21	Lincoln	—	54.30	54.30

Nel voluminoso manoscritto del Lazzari si trovano riportate molte altre esperienze, ma con dati incompleti ed insufficienti per essere da me coordinate e riferite. Solo ricorderò un esperimento di rotazione quadriennale eseguito in quella parte del campo destinata alle ricerche d'ordine industriale. Consiste nell'avvicendamento di fava da seme, frumento, trifoglio incarnato e, di nuovo, frumento. Si studiarono la concimazione più appropriata alla pianta da rinnovo e la concimazione sussidiaria da darsi al frumento successivo al trifoglio ed al secondo frumento perchè l'avvicendarsi delle colture risultasse più economicamente rimunerativo.

Nel campo delle esperienze qualitative la fava fu assoggettata a 21 diverse concimazioni. Si usarono concimi organici, quali letame, spazzature della città, ecc.; ed alle colture successive fu somministrato nulla, ad eccezione di gesso al trifoglio. Si usarono anche concimi organici e minerali, e cioè concimazioni miste, ed anche esclusivamente concimi minerali, dando al frumento successivo concimi azotati e fosfatici o solo azotati. Il trifoglio veniva trattato con fosfato e gesso e, in due casi, anche con potassa.

In quanto ad effetti, si ha che nel primo anno dell'avvicendamento le concimazioni a base di letame e di spazzature hanno dato produzioni inferiori a quelle ottenute con concimazioni miste od esclusivamente minerali. Nel secondo anno, però, dalle aiuole che non ricevettero nulla, si ebbe una media di q.li 8.57 di granella, mentre da quelle concimate con letame si ottenne un minimo di q.li 13.01 ed un massimo di q.li 20.26. Tale aumento di produzione si manifestò anche nel quarto anno: le aiuole di controllo dettero q.li 19.72; quelle concimate q.li 28.11.

Tanto nel primo, quanto nel secondo anno le concimazioni miste hanno dato produzioni maggiori di quelle minerali. Le varie concimazioni azotate del frumento hanno dato produzioni molto varie, cosicchè con un solo turno di rotazione non si possono prendere conclusioni. Il secondo turno non fu potuto effettuare.

Riassunte così le principali esperienze di coltivazione eseguite nel campo sperimentale di S. Alessio, rimaste fin qui sconosciute e che fu possibile di riordinare dall'incompleto manoscritto del Lazzari, siano lecite alcune osservazioni.

Anzitutto, nella precedente esposizione di risultati troviamo alcuni fatti assolutamente inspiegabili, in quanto non sembra possibile di affermare in essi un'influenza del clima che nelle diverse annate può riuscire un coefficiente molto vario sull'esito delle coltivazioni. Si è ottenuto, ad es., che, nella somministrazione di un solo elemento fertilizzante, l'anidride fosforica ha dato risultati, sul frumento, superiori a quelli dell'azoto, mentre i nostri terreni sono abbastanza ricchi della prima e sprovvisti del secondo; si è visto che le scorie nelle stesse proporzioni dei perfosfati d'ossa e minerale, nonostante il contenuto in calce, della quale i terreni stessi sembrerebbero aver grande bisogno, hanno dato sul frumento effetti minori; che l'azione stessa del gesso è stata piuttosto nociva. È stato anche trovato che il cloruro potassico si comportò meglio del solfato, benchè in terreni poveri di calce si sarebbe dovuto verificare il contrario.

Di fronte a simili risultati negativi, ottenutisi con l'impiego di concimazioni a dosi ordinarie, sono molto interessanti quelli offerti nei casi nei quali non si usò

alcuna concimazione, i quali starebbero a dimostrare che il bisogno di elementi fertilizzanti per i nostri terreni è molto relativo.

Le contraddizioni, che dall'esame delle tabelle risultano ad ogni istante, avvalorano il sospetto che non sia in questo ordine di concetti che debba procedersi ad esperienze di coltivazione agraria nella campagna romana, sibbene adottando quei principî che non ho mancato di esporre altra volta [1], allorchè, discutendo i risultati offerti da sole piccole quantità di elementi fertilizzanti somministrati al terreno, che pur ne conteneva in quantità infinitamente maggiori, ho preveduto ed anche, entro certi limiti, ho dimostrato l'influenza della sostanza organica, intermediaria l'azione dei batterî.

Che la materia organica nei terreni dell'Agro faccia difetto, è una circostanza che risulta luminosamente dalle numerose analisi da me eseguite. Che ad essa, da lungo tempo, dagli agronomi sia stata attribuita una notevole importanza nei processi di nutrizione della pianta coltivata, è anche pacifico. È però conseguenza di esperienze recenti che deve attribuirsi ad essa un significato anche maggiore, così nella teoria come nella pratica della concimazione, secondo i criterî da me stesso illustrati e sopra i quali non è ora il caso di ritornare. Difatti, i migliori risultati nelle esperienze del campo di S. Alessio si sono ottenuti usando concimi organici e, fra essi, letame. Particolarmente si è visto che il solo letame sul frumento ha dato risultati superiori a quelli ottenuti col letame misto a concimi minerali. Questo non mi sembra un fatto anormale — come dice il Lazzari — ma la naturale conseguenza della circostanza che il terreno della campagna romana è un mezzo già ricco per la nutrizione vegetale ed è per questo che deve procurarsene lo sfuttamento con mezzi idonei senza aggiungere quegli elementi fertilizzanti che non vi difettano e che possono riuscire dannosi. Nel procedere adunque a concimazioni nella nostra campagna, si deve essere molto cauti. Le stesse esperienze innanzi riassunte dimostrano come, a conti fatti, *non poche abbiano dato risultati in perdita* e, cioè, un aumento di produzione non sufficiente a coprire il costo della concimazione e delle altre spese ad essa inerenti.

IX.

Il calcolo dell'effetto assimilatorio.

A mezzo dei risultati delle ricerche che sono state riferite nel precedente capitolo, veniamo a trovarci in possesso di quei due dati — valore di produzione e valore di consumo — con i quali è possibile di calcolare per le principali coltivazioni della campagna romana il rapporto dello Strakosch, cioè l'effetto assimilatorio. Questo ci darà l'effettiva eccedenza in sostanze utili che nel clima romano può ottenersi a spese degli elementi nutritivi del terreno da un'unità di superficie del nostro Agro; la pro-

[1] R. Perotti, *Sul ciclo biochimico dell'anidride fosforica nel terreno agrario*. Roma 1909. — Id., *Le condizioni del clima-terreno per l'induzione dell'azoto e la dissoluzione dell'acido fosforico nel suolo*. Rend. Soc. chim. ital., vol. II, fasc. 6°.

porzione nella quale gli elementi medesimi sono utilizzati dalle nostre erbe da prato e dalle nostre colture a granella.

È, però, ancora necessario di riportare a due termini paragonabili i dati ottenuti, ciò che non potrebbe verificarsi altrimenti che calcolandone il valore monetario. Per quanto si riferisce al prezzo dell'albumina digeribile e del valore-amido, noi siamo costretti ad attenerci alle cifre del Kellner, il quale le desunse dai prezzi del mercato comunicati dalla Società degli agricoltori tedeschi negli anni 1901-1903. Un kg. di albumina digeribile è stato calcolato pf. 24,98, pari a ct. 30,88; ed un kg. di valore-amido pf. 15 67, pari a ct. 19,34.

Per quanto si riferisce al prezzo degli elementi fertilizzanti, potassa, acido fosforico ed azoto, possiamo parimenti accettare le cifre medie calcolate dallo Strakosch nel sessennio 1900-1905, le quali corrispondono abbastanza bene, per l'azoto, ai prezzi nostrali, sebbene per la potassa e per l'acido fosforico siano un poco differenti. Il valore dei tre elementi si troverebbe nelle proporzioni di 1 : 1,56 : 6,85, con un prezzo netto a chilo, rispettivamente, di pf. 17,8, 28,2, mk. 1,21, pari a ct. 26,9, 34,8, lire 1,49. Non ritengo opportuno di tener conto delle differenze con i prezzi dei nostri mercati, anzitutto perchè esse risultano piccole, e in secondo luogo perchè ritengo necessario che i miei dati siano paragonabili con quelli dello Strakosch: non sarebbe a me lecito, quindi, prendere, a base di essi, altre cifre.

Stabiliti così i prezzi delle unità di produzione e di consumo, si deve fissare una media della capacità produttiva di un nostro ettaro di terreno. Una tale determinazione non è cosa facile.

La produzione agricola della campagna romana è molto variabile, in dipendenza della grande incostanza delle condizioni atmosferiche, per le quali, mentre in un anno si ottiene un raccolto molto superiore alla ordinaria media, esso, nel successivo può andare totalmente, o quasi, perduto. Per ricavare una cifra media occorrerebbero statistiche raccolte per una serie di anni non breve e tale da comprendere una equa rappresentanza dei lunghi cicli agrarî in uso. Ora, statistiche ufficiali al riguardo non se ne hanno: i proprietarî non sono troppo propensi a render noti i loro conti, per timore delle misure fiscali e di quelle di bonificamento, e si limitano a dare, al massimo, notizie molto generiche e vaghe. Affermano di ottenere spesso fino a quint. 20 di frumento ad ettara, 30 di avena ecc.; di poter tagliare l'erba anche più di una volta, e di raggiungere e sorpassare i quint. 200-250 di peso verde ad ettaro. È più difficile ancora lo stabilire la produttività di un ettaro della nostra campagna se si tien conto dello sfruttamento, che viene fatto sopra larga scala, del pascolo per l'allevamento della pecora. Se, perciò, le medie che, in base a ponderate induzioni, fisseremo per la produzione unitaria della granella, potranno ritenersi molto vicine al vero, non potrà dirsi altrettanto della cifra che dovrebbe rappresentare la produzione foraggera media.

I prati della nostra campagna dànno un raccolto molto variabile, non solo in dipendenza delle vicissitudini atmosferiche, ma molto più per la differente natura dei terreni. Mentre alla coltivazione del frumento, dell'avena e del *mais* si destinano solo i migliori terreni e particolarmente quelli delle valli, completi e ricchi, si lasciano a prato naturale tutti gli altri, fra i quali, per potenza di strato arabile, proprietà

fisiche e composizione chimica, ve ne sono alcuni buoni, altri mediocri, cattivi, pessimi. È perciò che il quantitativo del prodotto varia moltissimo, ed una equa valutazione di esso non potrebbe aversi se non in base a dati statistici veramente numerosi e per località classificate a seconda della diversa natura del suolo. La misura della produzione dei prati romani potrebbe forse aversi molto più giustamente calcolando il numero dei carpi di bestiame ovino che sopra un ettaro di essi possono allevarsi, e dal peso di corpo vivo prodotto; un tale modo di procedere, del quale è tuttavia mia intenzione di tener conto in seguito, non può darci il calcolo *diretto* dell'effetto assimilatorio delle piante coltivate nell'Agro e non permetterebbe esatti confronti con le cifre calcolate dallo Strakosch.

Ad ogni modo, poichè sono costretto a fissare una cifra per il frumento, l'avena e per tre qualità di foraggio corrispondenti, per quanto meglio fosse possibile, ai tre tipi studiati e di cui ho riferito nel precedente capitolo, stabilirò le seguenti produzioni che riterrò medie ad ettara:

FRUMENTO	granella	kg.	2.000
	paglia	»	2.500
	pula	»	300
AVENA	granella	»	1.800
	paglia	»	2.400
	pula	»	250
FORAGGI (peso verde)	qualità buona (prev. legum.)	»	20.000
	» mediocre (id. gramin.)	»	17.000
	» cattiva.	»	10.000

Lo Strakosch prende a base dei suoi calcoli la seguente produzione media di frumento d'inverno ad ettara: granella kg. 3000, paglia kg. 4000, pula kg. 450 [1]. Queste cifre a me sembrano troppo elevate, in quanto è noto che una produzione di granella di quint. 30 ad ettara, pari circa ad ettol. 40, è superiore alla stessa media di produzione unitaria della Danimarca, alla quale spetta il primato mondiale della produzione frumentaria, che è calcolata in ettol. 37. La Germania ha, in confronto, una media di soli ettol. 20,9. Non conviene però credere che io stesso esageri portando la cifra della produzione del frumento della campagna romana a 20 quintali, essendo noto che la media italiana sta molto al di sotto, con quintali 11 ad ettaro. Secondo le giuste osservazioni di coloro che si occupano di statistica agraria [2], la nostra media di produzione frumentaria si trova abbassata per il fatto di aver destinato a tale coltura terreni di natura inadatta ed in località inadatte. Se questi terreni venissero sfruttati con altre piante più ad essi appropriate, si otterrebbero non minori utili e si eleverebbe di non poco la media alla quale contribuiscono produzioni che in molte località rivaleggiano con quelle della Danimarca, dell'Inghilterra e della Germania.

[1] loco citato, pag. 42.

[2] Minist. di agric. ind. e comm., *Notizie periodiche di statistica agraria*, anno II, fasc. 2°, pag. 194; confr. *Alcune considerazioni intorno alla coltura del frumento in Italia e alla sua produzione.*

Egli è certo che molte valli della nostra stessa campagna sono fertilissime e che per più anni di seguito, senza alcuna concimazione, dànno produzioni di frumento abbondanti ed in nulla inferiori a quelle di altre parti d'Italia fra le più adatte a questa coltura. Vi è poi da considerare il fatto che nella campagna romana — e ciò forse con maravigliosa intuizione pratica — non si contravviene a quella circostanza, lamentata dal Valente, di destinare alla coltura del frumento terreni che non vi si prestano. Esso si coltiva solo nelle migliori nostre località, mentre altrove si dà largo posto al prato ed al pascolo, introducendoli solo raramente con il sussidio del maggese in cicli agrarî più o meno lunghi a seconda della natura del terreno. Ora, in tali condizioni, la media della produzione frumentaria nella campagna romana non può essere molto discosta dai 20 quintali denunziati dalla maggioranza dei coltivatori; ed io, appunto, preferendo di mantenermi entro limiti ragionevoli, ho preso questa cifra a base dei miei calcoli.

Meno esagerate appaiono le medie unitarie prescelte dallo Strakosch per il calcolo del valore di produzione dell'avena. Sono per questa: granella kg. 2400, paglia kg. 3600, pula kg. 350; cifre sensibilmente inferiori a quelle del frumento. Nella campagna romana, per l'avena e specialmente per la sua paglia, in grazia della rusticità della pianta che si adatta meglio alle condizioni generali sfavorevoli dell'ambiente, si ottengono risultati spesso superiori a quelli del frumento. La media di questa produzione è stata da me, tuttavia, fissata in cifre un poco al di sotto di quelle del frumento, tenendo presente non solo l'anzidetta circostanza, ma anche il fatto che l'avena, analogamente a quanto viene praticato con il frumento stesso, è coltivata in lunghi cicli agrarî, con il sussidio del maggese, nei terreni che sono i meno inadatti.

Restano ancora da giustificarsi le cifre, che, secondo le mie indicazioni, dovrebbero rappresentare la produzione prativa media unitaria della nostra campagna. Lo Strakosch, che calcola l'effetto assimilatorio da un punto di vista generale, fissa la produzione unitaria di ciascuna delle diverse specie di piante foraggere. Nel mio caso non è di qui che sia possibile di prendere le mosse, poichè i prati della campagna romana risultano un miscuglio delle più svariate erbe ed in proporzioni tutt'altro che fisse. Il nostro prato naturale è il risultato non sempre di una secolare incuria, la quale avrebbe potuto permettere un certo equilibrio nella composizione qualitativa e quantitativa delle piante in rapporto alle leggi della concorrenza vitale; ma più spesso è il risultato di una ricostituzione nei cicli più o meno lunghi nei quali s'intercalano le colture a granella, con lievi perdite economiche da un lato, con esquilibrio nella distribuzione e nella composizione della flora spontanea dall'altro. Ci troviamo quindi in presenza di circostanze che possono far variare molto la natura dei nostri prati naturali e che si sommano alle altre inerenti alle condizioni climatiche locali, le quali fanno risentire, specialmente sul prato, le conseguenze di quella variabilità che ho già fatto notare.

Ad ogni modo, per tener conto, per quanto è possibile, dei diversi coefficienti della nostra produzione prativa, la quale non può esser presa in considerazione partitamente per ciascuna pianta come ha fatto lo Strakosch, è almeno necessario il distinguere tre principali qualità di fieno nella campagna romana, a seconda che in esso hanno predominio piante aventi per le loro caratteristiche una composizione diversa e capaci,

perciò, di dare un prodotto quantitativamente differente. Così, ho voluto prendere in esame il caso di un fieno con predominio di leguminose, di un altro con predominio di graminacee; di un terzo, infine, con predominio di piante appartenenti ad altre famiglie e di qualità sensibilmente scadente. I prati a leguminose dànno, in genere, un prodotto superiore agli altri, non però molto discosto da quello dei prati con abbondanza di graminacee. I prati costituiti essenzialmente da altre erbe sono radi, bassi ineguali e forniscono un prodotto molto scarso. Volendo tener conto delle informazioni che ho potuto raccogliere dai nostri mercanti di campagna, nonchè delle considerazioni di sopra esposte, credo mi sia lecito di ritenere come apprezzamento non molto errato quello di ammettere, per i prati del primo ordine da me distinto, una produzione, ad ettara, di quint. 200; per quelli del secondo ordine, di quint. 175; per quei del terzo ordine, di soli quint. 100 ad ettara. E ritengo anche che tali cifre siano un poco inferiori al vero, preferendo che le deduzioni che da esse ritrarrò, se debbano essere errate, lo siano in meno, anzichè in più.

Avendo così ottenuto, da un lato, la percentuale di *sostanze utili* prodotte dalle piante nella campagna romana, dall'altro il *raccolto medio ad ettaro* per ciascuna coltivazione, un semplice prodotto ci esprimerà il peso di valore-amido e di albumina digeribile contenuti in esso; così come un altro semplice prodotto del raccolto unitario medio ed i componenti delle ceneri, più l'azoto, esprimerà il peso degli elementi sottratti al terreno per la formazione delle prime. Essendo già stabilito il prezzo della sostanza organica prodotta e dei suoi componenti, veniamo ad avere di fronte i due termini cercati — valore di produzione e valore di consumo delle piante della campagna romana — perfettamente confrontabili.

I risultati di queste operazioni sono riportati nelle seguenti tabelle:

Valore di produzione.

COLTURE		RACCOLTO MEDIO ad Ea. kg.		Nel raccolto medio ad Ea. sono contenuti: valore-amido partitamente kg.	valore-amido in totale kg.	albumina digeribile partitamente kg.	albumina digeribile in totale kg.	Valore di produzione in lire
Frumento		2.000	granella	1426.0	1771.1	180.0	182.7	398
		2.500	paglia	272.5		—		
		300	pula	72.6		2.7		
Avena		1.800	granella	1074.6	1554.1	129.6	135.5	341
		2.400	paglia	408.0		2.4		
		250	pula	71.5		3.5		
Fieno	1ª qualità	20.000	peso verde	—	2120.0	—	330	511
	2ª »	17.500	» »	—	2012.5	—	210	453
	3ª »	10.000	» »	—	980.0	—	100	220

Valore di consumo.

COLTURE	RACCOLTO MEDIO ad Ea. kg.	nel raccolto medio ad Ea. sono contenuti: Potassa (K_2O) kg.	Ac. fosforico (P_2O_5) kg.	Azoto (N) kg.	Valore di consumo in lire
Frumento	4.800	28.80	22.08	54.24	**96.2**
Avena	4.450	49.81	18.69	46.72	**89.5**
Fieno 1ª qualità	20.000	172.56	37.26	58.80	**146.9**
Fieno 2ª »	17.500	163.53	33.81	76.44	**169.6**
Fieno 3ª »	10.000	106.98	20.62	59.92	**114.7**

In tutti questi calcoli è stato seguìto fedelmente lo Strakosch: ed è perciò che nel valore di consumo non è stato compreso soltanto quell'azoto facente parte del corpo delle leguminose – elemento non venale della produzione — che l'autore stesso, commettendo un errore presumibilmente molto piccolo, vuol ammettere sia interamente derivato dall'atmosfera e non rappresenta alcuna diminuzione del capitale-terreno. Secondo i saggi da me appositamente eseguiti separando, dai miscugli dei campioni di fieno studiati, le leguminose, determinando in esse a parte l'azoto, è risultato che, nel fieno di prima qualità, circa una metà dell'azoto totale era azoto di leguminose; in quello di seconda qualità era tale circa una quarta parte; in quello di terza qualità, solo una decima parte.

Seguendo sempre lo Strakosch, non resta che da determinare con un semplice rapporto l'effetto assimilatorio e ridurlo all'unità, prendendo come tale quello della segale = 100. In tal modo, a fianco dell'eccedenza del valore di produzione su quello di consumo si avrà l'espressione dell'effetto assimilatorio con cifre paragonabili non solo fra le diverse colture prese in esame, ma fra queste stesse e quelle studiate, da un punto di vista più generico, dallo Strakosch.

COLTURE	Valore di prodnzione in lire	Valore di consumo in lire	Effetto assimilatorio	Effetto assimilatorio ridotto all'unità-segale (segale = 100)	Eccedenza del valore di produzione su quello di consumo di un raccolto medio ad Ea. in lire
Frumento	398	96.2	**4.1**	110	301
Avena	341	89.5	**3.8**	102	251
Fieno 1ª qualità	511	146.9	**3.4**	91	364
Fieno 2ª »	453	169.6	**2.6**	70	283
Fieno 3ª »	220	114.7	**1.9**	51	105

Confrontando questi risultati con quelli dello Strakosch, troviamo per il frumento e per l'avena un effetto assimilatorio leggermente superiore (4,1 e 3,8, invece di 3,8

e 3,5); troviamo per i fieni effetti assimilatorî piuttosto bassi, di poco più elevati di quelli delle graminacee da foraggio (*Lolium perenne* = 46; *Phleum pratense* = 68) per le due qualità migliori, in grazia della percentuale di leguminose che vi si contiene, ma molto al di sotto delle colture specializzate di leguminose da foraggio (167, 316, 340, 362, 403, 565, 616). La proporzione delle leguminose nei prati naturali della campagna romana è, difatti, bassa e non può influire che in misura piuttosto limitata sopra il valore dell'effetto assimilatorio totale. A tale riguardo è lecito di notare come le due migliori qualità di fieno da me studiate diano luogo ad una eccedenza di valore di produzione, sopra quello di consumo, sensibilmente superiore a quella data dal frumento e dall'avena. L'effetto assimilatorio di queste colture è, però, più elevato di quello dei fieni medesimi: il che sta ad indicare come le piante costituenti di questi siano, nel loro complesso, macchine non altrettanto buone lavoratrici quanto quelle, e, in misura alquanto minore usufruendo degli elementi non venali, provochino un maggiore sfruttamento del terreno.

L'ultima specie di fieno esaminata è data da piante con un effetto assimilatorio molto basso, il più vicino al valore minimo che fu trovato dallo Strakosch per il loglio (=46). Esso è il prodotto di prati veramente cattivi e tutt'altro che infrequenti sull'altipiano romano, i quali dànno un'eccedenza di valore di produzione su quello di consumo assolutamente bassa. Ora, se con utili relativamente alti, come quelli dati dal frumento e dall'avena, può aversi margine per spese colturali e, con utili anche maggiori per i buoni prati che richiedono spese non nella stessa proporzione, si possono realizzare vantaggi senza dubbio notevoli, con prati di qualità così cattiva si ha tutto l'interesse di evitare qualsiasi dispendio e non dovrà penarsi molto per trovare argomenti atti a giustificare quell'allevamento brado o semibrado del bestiame, e particolarmente della pecora, che è una caratteristica della campagna romana.

E per eseguire opportuni confronti, rimanendo sempre nello stesso ordine di idee, è necessario di aver presente quale vantaggio possono presentare i prati migliorati con l'aumentare in essi la proporzione delle leguminose. Volendo, ad es., calcolare alla stregua del procedimento dello Strakosch l'eccedenza del valore di produzione su quello di consumo di alcune delle coltivazioni sperimentali di foraggi per prati e pascoli temporanei eseguite dal Desideri presso la R. Scuola pratica di agricoltura di Roma, troviamo questi risultati [1]:

COLTURA	Epoca di vegetazione	Prodotto verde ad Ea.	Valore di produzione	Valore di consumo	Eccedenza del valore di produzione in quello di consumo ad Ea.	
		kg.	in marchi	in marchi	in marchi	in lire
Favetta.	ottobre-gennaio	10.000	132	11	121	149
»	novembre-marzo	16.000	212	18	194	239
Mais.	aprile-giugno	40.000	595	129	466	575
»	luglio-ottobre	25.000	372	81	291	359

[1] C. Desideri, *Bonificamento agrario della Campagna romana*. Roma, 1883, pag. 68.

Non si possono prendere in esame altre colture, perchè esse non sono date da una sola specie e non è noto il rapporto delle varie erbe costituenti, ovvero mancano i corrispondenti dati dallo Strakosch.

Le differenze, che i surriferiti valori ci presentano in confronto con quelli medî stabiliti da questo stesso autore, sono veramente notevoli. Considerando il massimo prodotto di una coltura di leguminose, la fava da foraggio, e che deve ritenersi tale o di molto poco inferiore perchè è stato per esso utilizzato quasi l'intero periodo delle pioggie, quale risulta dalle mie stesse indagini (¹), troviamo marchi 149 ad ettaro, nell'Agro romano, di fronte ad una media di mk. 279. Considerando una coltura di mais da foraggio nel periodo più favorevole troviamo un massimo di mk. 466 nel nostro Agro, di fronte ad una media, calcolata dallo Strakosch, di mk. 582. Risultati ancora più significativi si ottengono dalla grande coltura. Da un ettaro a trifoglio, nell'Agro romano, è già molto raccogliere kg. 12,000 di peso verde; da un ettaro di erba medica, sempre non irrigua, è già un buon raccolto quello di kg. 20,000. Raccolti medî sono invece rispettivamente: kg. 28,000 di trifoglio, kg. 32,000 di medica. Di fronte quindi ad un eccesso di valore di produzione di mk. 443 e mk. 503, abbiamo nel nostro Agro un eccesso di valore di produzione di mk. 189 per il trifoglio e di mk. 314 per l'erba medica.

Tutto questo vuol significare che i risultati di un'agricoltura romana migliorata secondo le norme dettate per altre località — e con ciò intendo riferirmi particolarmente al settentrione — sono alquanto inferiori ai medî stabiliti, e che perciò *un margine limitato nella eccedenza fra valore di produzione e di consumo nelle colture dell'ambiente naturale dell'Agro, in relazione al costo ed ai rischi colturali, deve necessariamente costituire una remora nelle imprese e nelle speculazioni di bonificamento.*

A mio modo di vedere, non è seguendo in ogni parte i concetti dello Strakosch che si possa giudicare equamente del rendimento delle piante nell'Agro romano.

Egli, ammettendo di commettere un errore piuttosto piccolo, muove dalla supposizione che tutto l'azoto, che entra a far parte della leguminosa, provenga dalla atmosfera e non rappresenti alcuna sensibile diminuzione del capitale-terreno. Verrebbe con questo a stabilirsi una netta distinzione fra piante leguminose e piante non leguminose, le quali, a differenza delle prime, non essendo in grado di usufruire dell'azoto atmosferico e vegetando a carico di quello del suolo, dovrebbero dar luogo a risultati economico agrarî sostanzialmente differenti. Nel calcolo dell'effetto assimilatorio non tenendosi perciò conto dell'elemento di consumo che ha il maggior valore, si ottengono per le leguminose risultati che si discostano di molto da quelli che sono offerti dalle altre piante, e dimostrerebbero per le une vantaggi nettamente superiori a quelli delle altre.

Ora, mentre non è vero che tutto l'azoto del corpo della leguminosa provenga dall'atmosfera, non è neppur vero che tutto quello entrante a far parte delle non leguminose provenga dal terreno. In senso assoluto potrebbe esserlo, e quindi, *in teoria*, i calcoli dello Strakosch possono ritenersi esatti; ma qualora si faccia larga e giusta

(¹) Confr. questo lavoro, cap. III.

parte ad apprezzamenti relativi ai molteplici fattori della vegetazione, si trova che i calcoli medesimi debbono essere rettificati in base ad elementi di correzione che sono pienamente giustificati dai risultati della pratica.

Il terreno agrario è un substrato più o meno favorevole allo sviluppo di quei microrganismi che, in presenza di un'appropriata sorgente di carbonio, traendo dall'atmosfera in proporzioni maggiori e minori l'azoto, lo inducono e lo trasformano nel suolo per modo da renderlo un elemento non venale della nutrizione per la pianta superiore. La oligonitrofilia dei microrganismi, sulla quale negli ultimi tempi sono andate aumentando considerevolmente le nostre conoscenze, si è visto che non è sempre quella trascurabile funzione del terreno agrario quale si suppone, ma che spesso può assumere un'importanza che trova la sua espressione in tutti quei fatti posti in rilievo dal Delbrück (¹) e che sono indice della portata di cui la funzione stessa può godere. D'altra parte è anche noto che nel valore della oligonitrofilia trovano la loro principale ragione d'essere pratiche antichissime e di sperimentata efficacia come quella del maggese.

Ora, se noi teniamo presente siffatta circostanza, non potremo ammettere fra piante leguminose e piante non leguminose una distinzione così netta come quella da cui prende le mosse lo Strakosch. Fra le prime e l'azoto atmosferico troviamo interposizione di batteroidi; fra le seconde e l'azoto atmosferico stesso troviamo interposizione di nitrofili. In entrambi i casi il risultato è lo stesso: risparmio della riserva azotata del terreno. La differenza sta solo nella variabile capacità funzionale delle due categorie di agenti: simbionti gli uni, e strettamente legati al loro ospite; non simbionti gli altri e con rapporti meno dipendenti dalle piante che non dall'ambiente in cui si sviluppano. Del resto — sia qui detto per incidente — io mi sono formato l'idea che, fra i due casi limiti, possano trovarsi più gradi intermedî di passaggio e che valga la pena d'indagare se un rendimento colturale possa sperimentalmente dimostrarsi con un maggiore o minore intervento della oligonitrofilia ritenuta fin qui, senza eccezioni, *non obbligata* (²).

Nè si può affermare che l'azoto, indotto con questo mezzo nel suolo, sia parte od entri a far parte del capitale-terreno, come quello che si potrebbe somministrare con i concimi. Esso non ha prezzo e non può figurare nel conto colturale. Vero è che la misura della sua induzione è data dalla composizione della sorgente di energia che si trova nel suolo e quindi sembra dipendere da un materiale del capitale-terreno che ha un effettivo valore commerciale; ma deve anche considerarsi che la sorgente di energia stessa — la quale è la parte organica del suolo — è costituita dai resti vegetali non asportati con il raccolto, prodotti dalla fotosintesi (una conseguenza dell'effetto assimilatorio della pianta anche non leguminosa, innanzi coltivata), che vengono ceduti al microrganismo nitrofilo in modo analogo — mi sembra — a quanto si verifica con le leguminose ed i batteroidi.

(¹) Confr. Wochenschr. f. Brauerei, an. 1905, pp. 65 segg.; e Th. Remy, *Untersuchungen über die Stickstoffsammlungsvorgänge in ihrer Beziehung zum Bodenklima.* (Centr. f. Bakt., 2, XXXII, pag. 561, an. 1909).

(²) R. Perotti, *Le condizioni del clima-terreno per l'induzione dell'azoto e la dissoluzione dell'acido fosforico nel suolo.* Rend. Soc. chimica ital., vol. II, fasc. 6°.

Quel che ora si deve notare è il fatto che l'induzione di un uguale peso di azoto atmosferico nel suolo — almeno in terreni non particolarmente adatti — richiede, per i nitrofili non obbligati, un lasso di tempo alquanto superiore a quello richiesto dai nitrofili obbligati alla pianta verde. Abbreviando con pratiche colturali il periodo di vegetazione di una leguminosa e non dando per tal modo agio sufficiente ai suoi tubercoli radicali di formarsi e di evolversi per provvederla con il massimo rendimento di azoto non venale, si viene a rendere tributaria la pianta stessa, in maggiore o minore misura, della riserva azotata del terreno; prolungando, all'opposto, il periodo di vegelazione di una non leguminosa, si viene a sottrarla sempre più alla necessità dello sfruttamento dell'azoto del terreno ed a metterla in condizioni di usufruire di quello atmosferico fissato dai nitrofili. Queste sono circostanze che vanno messe in rapporto alle due forme di coltivazione: intensiva ed estensiva.

Riferendoci, adunque, alla premessa dello Strakosch, *se, traendosi partito dalle speciali condizioni locali favorevoli allo sviluppo dei microrganismi oligonitrofili, si ordinano le cose in modo da poter coltivare piante non leguminose facendo assegnamento sulla funzionalità di essi, commettendo un errore non molto maggiore di quello trascurato dallo Strakosch, è lecito affermare che anche le non leguminose possono risparmiare la riserva azotata del terreno.* Dove i terreni sono tenaci, compatti, molto difficili a lavorarsi, in condizioni climatiche sfavorevoli e, cioè, dove principalmente fanno difetto le pioggie o non sono equamente distribuite nell'anno, ecc., la pratica ha accertato (e la teoria non è riuscita fino ad ora a smentire) che l'utile agricolo offerto dalle non leguminose è superiore a quello offerto dalle leguminose Il maggese ed il prato naturale sono il mezzo con cui è possibile conseguire tale risultato.

Ora, sono appunto queste le condizioni nelle quali ci troviamo nella campagna romana. Lo studio, che abbiamo fatto, del suo clima e del suo terreno, è più che sufficiente ad illuminarci in proposito; e quelle ricerche, dirette a stabilire il movimento del capitale-azoto nei suoi terreni, sono tali da assegnare un giusto valore alla funzione di quei batterii oligo- e mesonitrofili, dei quali mi sono occupato fin da parecchî anni addietro con lo scopo, allora espresso, di stabilire l'importanza locale del maggese (1). Questa risulta nel miglior modo dal calcolo del valore di consumo delle piante della campagna romana, nel quale, in base a quanto venne innanzi detto, *è portato a zero* il consumo del capitale-azoto del terreno.

Il calcolo dell'effetto assimilatorio, che è stato fin qui fatto per le nostre piante, va corretto in base a questa circostanza; ed i nuovi risultati ottenuti sono riportati nel seguente prospetto:

(1) R. Perotti, *Bacterii oligo- e mesonitrofili della campagna romana.* Rend. Acc. Lincei, XIV, 2° sem., fasc. 11, pag. 623.

COLTURE	RACCOLTO MEDIO (Totale) kg.	Nel raccolto medio ad Ea. sono contenuti: Valore-amido (totale) kg.	Albumina digeribile (totale) kg.	Valore di produzione in lire	Nel raccolto medio ad Ea. sono contenuti: Potassa (K_2O)	Ac. fosforico (P_2O_5)	Azoto (N)	Valore di consumo in lire	Effetto assimilatorio	Effetto assimilatorio ridotto all'unità-segale (segale = 100)	Eccedenza del valore di produz. sul valore di consumo di un raccolto medio ad Ea. in lire.
FRUMENTO . .	4.800	1771.1	182.7	*398*	28.80	22.08	—	*15.42*	**25.8**	*697*	383
AVENA	4.450	1554.1	135.5	*341*	49.84	18.69	—	*19.90*	**17.1**	*462*	321
FIENO 1ª qual.	20.000	2120.0	330.0	*511*	172.56	37.26	—	*59.37*	**8.6**	*232*	451
FIENO 2ª » .	17.500	2012.5	210.0	*453*	163.53	33.81	—	*55.74*	**8.1**	*218*	397
FIENO 3ª » .	10.000	980.0	100.0	*220*	106.98	20.62	—	*35.94*	**6.1**	*164*	184

L'effetto assimilatorio, in tal modo calcolato per il frumento e per l'avena, non può avere valore altro che in quel regime colturale nostrano dove si fa un giusto posto al maggese ed al prato naturale. I risultati ottenuti non si possono, quindi, applicare in quei casi — limitati, invero, alle poche migliori zone dell'Agro — dove si sfrutta evidentemente il capitale-terreno con raccolto di granella per una ininterrotta e piuttosto lunga serie di anni. I risultati medesimi sono, invece, applicabili in quei casi di quarteria e di terzeria, tipici della campagna romana, od in quello alternarsi di una coltivazione a granella con 6, 7, 8 anni di prato: casi, nei quali i terreni sono da assegnarsi alla categoria di quelli della peggiore specie.

Confrontando gli effetti assimilatorî delle nostre piante ottenuti in base ai suesposti criterî, con quelli ottenuti sulla scorta dei criterî dello Strakosch e con quelli *teorici* dello Strakosch stesso, si pongono in rilievo differenze veramente notevoli. L'effetto assimilatorio del frumento nella campagna romana viene ad essere sestuplicato (= 6.29); quello dell'avena, più che quadruplicato (= 4.50). I bassi effetti assimilatorî dei nostri fieni si elevano sensibilmente qualora si ammetta che le specie costituenti non attacchino la riserva azotata del capitale-terreno. Così i migliori fieni avrebbero un effetto assimilatorio più che doppio di quello teorico della segale (= 2.32 e, risp., = 2.18), del frumento (= 2.26 e, risp., 2.13), dell'avena (= 2.45 e, risp., 2.31); molto vicino a quello del mais (= 7.4), della barbabietola da zucchero (= 9.5), pur restando molto al di sotto delle colture esclusivamente di leguminose, distanziando, però, di molto quelle di loglio e di fleo che sono le meno redditive. La stessa ultima qualità di fieno, quella pur molto diffusa nella campagna romana, verrebbe ad avere anch'essa un effetto assimilatorio quasi doppio di quello teorico del frumento (= 1.60) e dell'avena (= 1.74).

Se questi calcoli presentino, o meno, contraddizioni con i risultati della pratica: se, cioè, le cifre del bilancio economico dell'azienda dei nostri mercanti di campagna si accordino con quelle cui io sono pervenuto attraverso una serie di deduzioni scientifiche basate sopra la fisiologia della pianta coltivata e dei batterii del terreno, è cosa che vedremo subito dopo. A questo punto, a me interessa fissare, nella tavola VI, tutti gli elementi di confronto che possano riuscire utili ai fini del mio studio e per-

mettano di rendere all'evidenza il *valore della sostanza fisiologicamente utilizzabile* che dalle colture della campagna romana è prodotta con l'impiego di *una lira* di capitale-terreno.

Un giusto apprezzamento di queste mie deduzioni non è possibile senza prendere in esame quella successione delle colture che, pur sembrando primitiva e rudimentale, esiste nell'ordinamento economico dell'azienda agricola romana e ne è, anzi, la base fondamentale. V'è chi discute se la quarteria e la terzeria romana possano costituire un avvicendamento in senso proprio e chiamarsi, con vero vocabolo tecnico, rotazione; ma io non pongo menomamente in dubbio ciò, e ritengo il prato naturale ed il maggese, come si usano presso di noi, tali da individualizzare una vera successione triennale, quadriennale, o più lunga ancora, di colture, praticamente intuita ed indovinatissima.

Ora, anche una tale rotazione di colture è necessaria, non solo da quel punto di vista generale che io ho esposto nelle mie premesse economiche al principio di questo lavoro, ma anche nel caso speciale, perchè è appunto da essa che le piante, sviluppantisi nell'ambiente dell'Agro romano, traggono quel grande valore innanzi rilevato e che rende possibile ad una graminacea equivalersi ad una leguminosa od anche superarla negli utili effetti. Così, volendo avere un'idea del rendimento economico delle nostre colture, prendiamo a considerare i tre casi principali che ci sono offerti dalle aziende romane e calcoliamo l'eccedenza del valore di produzione sul valore di consumo di un raccolto medio ad Ea., in lire, per un intero avvicendamento di terzeria, quarteria o decennale, così stabilito:

Anno	Terzeria	Quarteria	Avv. decennale
I	Frumento	Frumento	Frumento o Avena
II	Frumento o Avena	Frumento o Avena	Pascolo
III	Pascolo	Pascolo	»
IV	—	»	»
V-X	—	—	»

Volendo poi ammettere che il pascolo corrisponda alla produzione del fieno dei prati naturali della peggiore specie considerati (annata 3ª), assumiamo come valori unitarî quelli dedotti dal calcolo dell'effetto assimilatorio, in base ai criterî di correzione da me adottati: ed avremo rispettivamente questi risultati:

Eccedenza del valore di produzione sul valore di consumo del raccolto medio ad Ea. in lire:

Anno	Terzeria (1)		Quarteria		Avv. decennale	
	(a)	(b)	(a)	(b)	(a)	(b)
I	383	383	383	383	383	321
II	383	321	383	321	184	184
III	184	184	184	184	184	184
IV	—	—	184	184	184	184
V-X	—	—	—	—	1104	1104
Totale	950	888	1134	1072	2039	1977
Media annua . .	318	296	283	268	203	197 [1]

Di fronte a queste cifre, già di per se stesse eloquenti, dobbiamo porre quelle rappresentanti le spese di coltivazione che, nel modo come è ordinata l'azienda romana, si riducono ai minimi termini; e fra esse non figura affatto la spesa dei concimi. Per la loro pratica i mercanti della nostra campagna ritengono fissato il costo di produzione ad Ea., per il frumento e l'avena, in L. 395 nel 1° anno e in L. 295 nel 2° anno di rotazione; per il prato, in L. 150. Riferendo questi dati ai tre casi di conduzione dell'azienda sopra considerati, otterremo che la spesa media ad Ea. per ciascuno di essi sarà rispettivamente:

Spesa media di produzione ad Ea. in lire:

Anno	Terzeria	Quarteria	Avv. decennale
I	395	395	395
II	295	295	175
III	150	150	150
IV	—	—	150
V-X	—	—	900
Totale	840	990	1770
Media annua . .	280	247	177

[1] Nella seconda colonna si tiene conto del valore di produzione dell'avena, invece di quello del frumento, quando le due colture vengono scambiate. Nel secondo anno della terzeria o della quarteria il prodotto risulta circa una metà di quello del primo anno. Io ho preso, ad ogni modo, la media; ed essa, come risulta anche dai calcoli del Sombart, è inferiore al reale.

La differenza, pertanto, fra valore-utile e costo di produzione media, è annualmente la seguente:

AVVICENDAMENTO	(*a*)	(*b*)
Terzeria	38	16
Quarteria	36	21
Avvicendamento decennale	26	22

Restano da fare dei confronti.

Il Niccoli, nella sua bella Monografia del *Podere irriguo lombardo* (¹), riepiloga i numerosi conti colturali da lui raccolti; e, applicandoli in ragione di un ettaro di superficie totale, li pone a confronto di quelli proprî di un'azienda di piano della Val d'Elsa (Toscana centrale) e di un'azienda a coltura estensiva della Maremma grossetana. Le conclusioni cui egli perviene si compendiano nel seguente schema:

TITOLO	I. Podere irriguo lombardo			II. Podere di piano della Val d'Elsa			III. Podere di piano della Maremma grossetana		
	Avere	Dare		Avere	Dare		Avere	Dare	
Beneficio industriale compreso il compenso all'industriale per la sua opera direttiva L.		100	(al 10 %)		84	(al 12 %)		10	(al 10 %)
Beneficio fondiario compenso ai capitali investiti . . . . »		126			55			4	
		226	al 4,15 %		139	al 5 %		14	al 6 %
Compenso alla terra nuda . . . . . »		30			57			26	
Capitali di circolazione da reintegrarsi con il raccolto: mano d'opera . . . . »		140			170			23	
			396			366			63
Spese diverse . . . »			120			96			16
Produzione lorda . »	500-520			450-470			76-82		
Totale . . . L.	500-520		516	450-470		462	76-82		79

(¹) A. Ponti, Annuario della Istituzione agraria. Milano, 1897, vol. I, pag. 186.

Detraendo le spese diverse, si trova che la percentuale di concorso dei tre fattori principali della produzione — *terra*, *lavoro* e *capitale* — nelle tre aziende considerate è rispettivamente la seguente:

	I.	II.	III.
Terra . . . . L.	8	16	41
Lavoro . . . . »	34	46	36
Capitale . . . »	58	38	23
TOTALE L.	100	100	100

Di qui si scorge che nella produzione agraria dell'azienda lombarda predomina il capitale; in quella toscana il lavoro; nella maremmana la terra, agente naturale. Ora l'azienda romana deve riferirsi a quella maremmana ed è, come essa, estensiva con predominio dello sfruttamento del coefficiente terra, pur offrendo utili molto superiori e tali da avvicinarsi a quelli delle aziende caratterizzate dalla coltivazione intensiva.

Per mettere in rilievo circostanze così importanti, è necessario di scendere ad un esame analitico di qualche conto colturale della campagna romana, mediante il quale possa stabilirsi il preciso rapporto con cui si trovano presso di noi in concorso i tre principali fattori della produzione. Non potendo dilungarmi molto, ho voluto scegliere due tipi fondamentali delle nostre aziende: uno, il conto di un ettaro di terreno a frumento in valle; l'altro, quello di un ettaro a prato naturale ad a fienagione. Entrambi li ho dedotti direttamente da informazioni assunte dagli agricoltori sul posto.

A) Conto di un ettaro di terreno a frumento.

Spese di produzione:

rompitura (5 giornate e mezza, con due buoi)	L.	55 —
lavorazione per la semina	»	32,50
semente (kg. 120).	»	42 —
ribattitura (11 persone a L. 1,50 ciascuna)	»	16,50
fossaroli (uno a L. 2,50)	»	2,50
terranera (8 persone a L. 1,50 ciascuna).	»	12 —
mondatura (5 persone a L. 1,50 ciascuna)	»	7,50
salario per i mietitori.	»	37 —
trasporto della messe alla fattoria.	»	16,50
fitto	»	80 —
salario al fattore, perdite per cattivo tempo, logor. arnesi, assicurazione	»	30 —
interesse del capitale d'esercizio (al 6 %)	»	20 —
» » » fondiario (al 3.50 %)	»	18.50
perdite del pascolo per gli anni seguenti.	»	25 —
totale . . .	L.	395 —

Prodotto medio:

q.li 18 a l. 26,5 = ... L. 477
spese . . . . » 395
Reddito netto . . . L. 82

B) Conto di un ettaro di terreno a prato naturale.

Spese di produzione:

affitto	L.	80 —
falciatura	»	24 —
trasporto del fieno	»	10 —
salario al fattore e perdite	»	9 —
interesse del capitale d'esercizio (6 %)	»	8,50
» » » fondiario (3,5 %)	»	18.50
totale . . .	L.	150 —

Prodotto medio:

q.li 20 a lire 12 = ... L. 240
spese . . . . » 150
reddito netto . . . L. 90

Ciò posto, avremo i seguenti risultati sintetici, raggruppando le spese a seconda dei diversi titoli e ripartendo la produzione avuta analogamente a quanto venne fatto dal Niccoli per i tre principali tipi di aziende agrarie da lui illustrate:

TITOLO	A. Coltivazione di cereali			B. Prato		
	AVERE	DARE		AVERE	DARE	
BENEFICIO INDUSTRIALE compreso il compenso all'industriale per la sua opera direttiva . . L.		81	(17 %)		90	(40 %)
BENEFICIO FONDIARIO. Affitto . »		80			80	
Compenso ai capitali investiti »		20	(6 %)		9	(6 %)
Compenso alla terra nuda . »		18	(3.5 %)		18	(3.5 %)
CAPITALI DI CIRCOLAZIONE da reintegrarsi con il raccolto.						
Mano d'opera . . . . . »		179			30	
Semente . . . . »		42				
Spese diverse . . . . . »		55			13	
PRODUZIONE LORDA L.	477			240		
TOTALE . . . L.	477	475		240	240	

Detraendo anche qui le spese diverse, troviamo che la percentuale di concorso dei tre principali fattori della coltivazione nell'azienda della campagna romana è stabilita nelle seguenti cifre:

	A.	B.	Medie
Terra . . . . L.	38.3	74.4	56.4
Lavoro . . . . »	42.6	13.2	27.9
Capitale . . . »	19.1	12.4	15.7
Totale L.	100 —	100 —	100.0

A questo punto, i confronti con i risultati economici offerti dalle altre aziende sono facili. Effettivamente, il carattere saliente dell'azienda romana è dato dallo sfruttamento del capitale-terreno, che avviene in maniera alquanto superiore a quella con cui si verifica nei poderi maremmani. E ciò è reso possibile dalla singolare ricchezza, specie in potassa ed acido fosforico, dei nostri terreni, molto migliori, almeno da questo punto di vista essenziale, di quelli della Maremma come venne a suo luogo posto in luce. Vediamo, anzi, chiaramente che i risultati di tale predominante sfruttamento del ricco capitale-terreno romano, non si discostano poi molto da quelli dei migliori tipi di aziende che si conoscono in Italia, quali il podere irriguo lombardo e quello di piano della Val d'Elsa, nel cui esercizio concorrono in maniera elevata od il lavoro, od il capitale, costituenti nel loro insieme un effettivo di *anticipazione* il quale, di fronte al capitale fondiario va incontro, a ben maggiori e gravi rischi.

Ponendo di fronte il capitale fondiario ed il capitale agrario di anticipazione calcolati dal Niccoli per le sue tre aziende, e quelli che si riferiscono alla media dei due tipi di aziende romane da me prese in esame; confrontando anche il totale dei capitali impiegati con il ricavato di produzione dell'aziende medesime, abbiamo:

TITOLO	I. Podere irriguo lombardo	II. Podere di piano della Val d'Elsa	III. Podere di piano della Maremma grossetana	A. Coltivazione romana di cereali	B. Prato
a) Capitale fondiario. . . L.	3750	2250	500	1000	700
b) Capitale totale agrario di anticipazione . . »	1000	700	67	333	150
Totale dei capitali impiegati L.	4750	2950	567	1333	850
Prodotto lordo . . . . . L.	516	462	79	477	240
Rapporto del prodotto al capitale . . . . . L.	17.1 %	15.6 %	13.9 %	35.7 %	28.2 %

Qui si dimostra come il rapporto del prodotto ai capitali impiegati decresca nei tre primi tipi di aziende in relazione con il capitale totale; *non però proporzionalmente*, in quanto che ad una differenza di minori capitali impiegati del 37,8 %, fra la prima e la seconda azienda, corrisponde una diminuzione di prodotto dell'1,5 %, e ad una differenza dell'87,7 % di minor capitale, fra la seconda e la terza, corrisponde una diminuzione di prodotto dell'1,7 %. Nelle aziende romane, mentre si trova che i capitali impiegati sono relativamente piccoli, il prodotto che se ne ricava è di molto superiore a quello dato da tutte e tre le aziende paragonate.

Questa non proporzionale diminuzione del rapporto $\frac{\text{prodotto}}{\text{capitale}}$ è l'indice reale del compenso alle spese non reintegrabili e, cioè, del beneficio fondiario e di quello industriale, compreso il compenso all'industriale stesso per la sua opera direttiva. E che cosa esso significhi nel caso in esame, è chiaro: *con il minor impiego di capitali, con i minori rischi possibili, le aziende della campagna romana, così come sono state fin qui ordinate, permettono di ritrarre il massimo utile economico.*

Molto più esattamente, io penso, possono valutarsi i conti dei nostri mercati di campagna prendendo a base la produzione ovina.

Sopra di questa che, allo stato attuale, ha una grande importanza nella campagna romana, si è molto scritto in favore e contro. Uno dei principali criterii di bonifica dell'Agro, che hanno fin qui dominato, è stato quello di muovere in guerra contro la pecora, rispondendo, all'assioma che con non molta ponderazione si è voluto stabilire: *la pecora affama la città*! Ciò, invece, non è affatto vero, in quanto non è la pecora che esclude ogni altro genere di produzione attorno a Roma e, quand'anche ciò fosse, non rappresenta essa stessa una produzione poco retributiva per il proprietario e poco utile per la città.

Un giudizio sopra il significato dell'allevamento ovino deve potersi ottenere riportandoci a quell'ordine d'idee che espressi a suo tempo a proposito del latifondo ([1]), secondo le quali questo non può considerarsi causa della decadenza dell'agricoltura romana, bensì, effetto. Così la pecora non è una causa del decadimento della nostra agricoltura, ma conseguenza di altre cause che hanno stabilito e mantengono l'attuale stato di cose. D'altra parte i rapporti fra *latifondo* e *pecora* sono evidenti.

Errore non meno grave è poi il ritenere che l'allevamento della pecora nella campagna di Roma sia non rimunerativo, e dannoso alla città. Consultando la monografia del Casorri ([2]), frutto di un lungo pratico esercizio dell'azienda romana, troviamo dati che servono molto bene, non solo a confutare simile errore, ma anche, più particolarmente, a rispondere allo speciale fine propostomi in questo scorcio del presente capitolo del mio studio.

Una pecora da latte ed una da carne dànno rispettivamente questo prodotto lordo:

([1]) Cfr. questo lavoro, cap. III.

([2]) V. Casorri, *La pecora da carne*, Subiaco 1907.

Pecora da latte		Pecora da carne	
Kg. 6.500 di formaggio a L. 1,70	11.05	Kg. 28 di castrato a L. 1,50	42.00
» 3.500 di ricotta » » 0,50	1.75	» 3 di lana di pecora » 2,25	6.75
» 5.000 di abacchio » » 0,80	4,00	» 2 » castrato » 2,25	4.50
» 3.000 di lana » » 2,25	6,75		
Totale . . . L.	25,05	Totale . . . L.	53,25

Mediante nuovi criterî di governo e di nutrizione, con la pecora da carne potrebbero aversi con certezza tre parti in due anni e si aumenterebbe di una metà (L. 76,5) il reddito lordo Ma io voglio attenermi alle precedenti cifre che meglio rispondono alle condizioni attuali.

Fissati perciò in numero di sette i capi di ovino che possono allevarsi su di un ettaro di terreno, si vedrà che, in media, nelle condizioni più disgraziate, e, cioè, in terreni più poveri e con pecora da latte, si ottiene, ad esempio, un reddito lordo di L. 175.35 ; in condizioni migliori, e cioè con terreni più vecchi e con la possibilità di allevamento della pecora da carne, il reddito lordo può elevarsi fino a L. 372,75.

Ora, queste cifre dimostrano, anzitutto, che l'allevamento della pecora dà un buon reddito, e potrebbe darne uno maggiore se si adottassero per esso quelle migliorìe con le quali, evitandosi la transumazione del gregge dal piano all'Appennino, stabilendosi un allevamento semibradó a piccoli greggi stazionarî in fondi in via di bonifica, facendosi assegnamento sopra un onesto credito per far fronte all'anno richiesto dalla maturazione del castrato, si riuscisse ad ottenere una normale produzione della pecora da carne. Difatti, un reddito lordo di L. 372.75 ad ett., che con tre parti potrebbe elevarsi fino a L. 535,50, corrisponde al reddito lordo di un ettaro di podere irriguo lombardo, è superiore a quello di un ettaro di potere di piano della Val d'Elsa, ed è molto superiore a quello di una coltivazione di frumento e di avena della campagna romana. E di fronte ad esso si abbia presente di quanto le spese sono minori! Ma pur volendo attenerci alla cifra minima di L. 175,35 offerta dalla produzione lorda di un ettaro con allevamento di pecora da latte, nel quale le spese sono ridotte ai minimi termini, ed al capitale-terreno si restituisce un ottimo concime, ci troviamo di fronte ad un reddito lordo quasi triplo di quello offerto dal podere di piano della maremma grossetana.

Pertanto, ai fini del presente studio, queste cifre acquistano una importanza maggiore se vengono confrontate con quelle calcolate dallo Strakosch per stabilire l'effetto assimilatorio delle diverse piante coltivate, in genere, e, da me, per quelle della campagna romana.

La cifra minima di L. 175, tenuto calcolo del valore del concime restituito alla terra, corrisponde con la più soddisfacente approssimazione a quella calcolata in L. 184 per un fieno di terza qualità od a quella di L. 197, rappresentante in un avvicendamento decennale, proprio dei nostri peggiori terreni, l'eccedenza del valore di pro-

duzione sopra quello di consumo, calcolato con i criterii dello Strakosch e miei sulla base della sostanza utile prodotta e degli elementi della produzione utilizzata. La cifra media di L. 372 corrisponde anch'essa, con non meno soddisfacente approssimazione, alla eccedenza medesima dovuta ad un ettaro di terreno con produzione a fieno di seconda qualità, stabilita in L. 397. La cifra massima in L. 535 si avvicinerebbe molto alla eccedenza produttiva di un fieno di prima qualità della campagna romana, fissata in L. 451 ad ettaro e che potrebbe essere tuttavia capace di qualche miglioramento. Servendoci delle cifre dedotte dai conti di allevamento della pecora nell'Agro romano, potremmo quindi riprendere il ragionamento alquanto addietro e discendere alle medesime conclusioni cui siamo pervenuti poco sopra.

Dunque, i conti dei nostri mercanti di campagna non sono fallaci, ed il reddito che essi indicano ritrarsi dalla nostra terra non è fittizio. La corrispondenza, che io ho voluto qui porre in rilievo, dimostra che essi sono la espressione genuina dell'effetto assimilatorio di cui sono capaci le piante coltivate e spontanee nell'*ambiente della campagna romana*; dimostra che le critiche che dai fautori della bonifica sono dirette contro quei conti colturali, debbono urtare contro le conseguenze di fatti e leggi naturali inoppugnabili. Le cifre del reddito di una masseria nell'Agro romano non sono che la espressione esatta di *valore-amido* e di *albumina digeribile* prodotti.

Dalla serie dei confronti innanzi fatti si è anche dedotto che il reddito delle aziende romane, comparativamente a quello delle più progredite d'Italia e di un'agricoltura estensiva in genere, occupa un posto di mezzo. Nelle nostre aziende è lo sfruttamento delle caratteristiche locali che permette di ottenere abbastanza buoni risultati, come ho voluto dimostrare in particolar modo nel presente capitolo. L'agricoltura è cosa eminentemente locale, non solo per quanto si riferisce allo sbocco dei prodotti sul mercato, ma anche, e più, per le esigenze dei climi e dei terreni in rapporto allo sviluppo delle piante. *Ogni clima, ogni terreno, ogni situazione economica possiede le sue buone e le sue cattive piante lavoratrici.* È la riprova di questo assioma fondamentale, che posi al principio del mio lavoro, quel che mi sembra di avere ottenuto, facendo anche giustizia ai signori romani che seppero intuirne tutta l'importanza pratica,

X.

Conclusione.

I risultati delle su riferite ricerche potrebbero costituire una riabilitazione dei proprietarî e dei conduttori delle aziende agricole romane se di questa riabilitazione eglino avessero ancora bisogno. Comunque, mi sembra essersi raggiunta la dimostrazione che, *allo stato attuale delle condizioni di clima, di terreno* ed in quelle che si sono, almeno fino a poco tempo fa, verificate nell'economia cittadina, il sistema di pascolo naturale o di fienagione, talvolta con avvicendamento di frumento od avena, in cicli più o meno ampî, è quello che meglio risponde agl'interessi dei proprietarî. Oltre che dalla storia, ho voluto trarre questa dimostrazione da argomenti di chimica, di

batteriologia e fisiologia vegetale, i quali mi permettono qui di affermare che la macchina-pianta, alla quale i mercanti di campagna romani affidano il proprio capitale, non possiede, in ultima analisi, una cattiva resa funzionale. I risultati della pratica, che tanto difficilmente ingannano, vagliati sulla base di criterî nuovi e moderni, come quelli che mi sono provato a seguire nel mio studio, non hanno ricevuto smentite.

Di fronte agl' interessi del limitato numero di privilegiati proprietarî di fondi e, per naturale forza di cose, spesso in conflitto con essi, vi sono quelli della grande maggioranza dei diseredati che hanno diritto alla vita: interessi che con il progressivo aumento geometrico del loro numero che questa importa, contribuiscono potentemente ad acuire il conflitto stesso. Non ritorno sopra i concetti che ho già svolto nelle mie premesse in rapporto a quello sviluppo delle dottrine economiche che è tutta un'illustrazione del principio della sovrapposizione degl' interessi collettivi a quelli individuali determinata dall'imperiosa necessità dell'aumento della produzione. Sarebbe fuori luogo addentrarmi nella svolgimento di un tema per il quale mi mancherebbe quella perizia che hanno già dimostrata tanti valorosi sociologhi ed economisti.

A me interessa soltanto far notare come quel conflitto, nel quale s' individualizza il problema agrario in genere ed in Italia in specie, si presenti sotto un aspetto molto particolare per l'Agro romano. Il tornaconto personale del proprietario, poggiando qui, prevalentemente, sull'elemento-terreno, si avvantaggia del grande risparmio degli altri due elementi capitale ed uomo, con un danno sociale evidente. E questo danno risulta maggiore che non altrove, in quanto che le incontestabili buone qualità del terreno romano, di per sè sole, assicurano un reddito netto di sostanza fisiologicamente utilizzabile che, nonostante la inerzia ed apparente mala volontà, retribuisce il proprietario in ragione, si direbbe quasi, usuraia. Il criterio del *prodotto-lordo* — dal quale trarrebbero profitto il salario del lavoratore, la circolazione del danaro, una produzione totale più abbondante e qualitativamente, forse, più utile — esula dalle basi economiche sopra cui poggia l'ordinamento delle aziende agricole romane. Di fronte, quindi, ad una situazione speciale, ben più grave di quella generale, dovremmo porci molto più seriamente il quesito: *è, tale conflitto, insanabile?*

Io debbo qui riferirmi ai bei studî di Augusto Mortara sopra i doveri della proprietà fondiaria e la questione sociale ([1]).

La necessità politica e sociale dell'aumento della produzione — che nelle condizioni attuali della penisola, come viene mostrato anche dalle tabelle che posi in principio ([2]), per molte ragioni, non può ritenersi davvero soddisfacente — trovasi di fronte ad ostacoli di varia natura, gli uni di ordine naturale e fisico, gli altri di ordine legale e morale. A questi ultimi è certo più facile di ovviare che non ai primi, in quanto si tratta di ordinamenti giuridici, riassumentisi nel grave principio della illimitata libertà del proprietario, i quali sono passibili di ogni razionale convenzionale modifica. Ovviare agli altri, invece, diviene cosa molto più difficile, poichè si va ad

([1]) A. Mortara, *I doveri della proprietà fondiaria e la questione sociale*. Brignola, Milano 1888.
([2]) Confr. questo lavoro, cap. I.

urtare contro condizioni di clima, di suolo e, dipendentemente da esse, anche economiche, le quali possono presentare alla più industre attività umana barriere insormontabili. È anche poi da notarsi che ad ogni limitazione delle misure, che fosse indispensabile di prendere nel campo fisico, ne corrisponde necessariamente una equivalente nel campo morale, mentre non è possibile che si verifichi sempre il caso contrario. Ora, come vi sono climi favorevoli e climi sfavorevoli alla coltivazione, terreni fertili e terreni sterili, eccessivo frazionamento della proprietà e latifondo, più o meno ordinate affittanze ecc., così si hanno altrettanti casi speciali da prendersi in esame per risolvere un problema nel quale s'impernia un grande principio di giustizia distributiva.

Non è il caso qui di spezzare una lancia per muovere in guerra a fondo contro la proprietà fondiaria. Che questa permanga è, secondo il Mortara, giustificato sotto il duplice aspetto della utilità generale e di quella particolare. Sono argomenti forniti dal criterio della necessità di prendere in esame il risultato finale dell'agricoltura, cioè la produzione, che inducono questo autore a far proprio un ordine d'idee che trova un posto intermedio fra quello del comunismo e quello della proprietà individuale. « Questa, costituita così qual'è nel presente regime, sulla base dell'interesse individuale e famigliare con la necessaria concomitanza del diritto ereditario, assicura al consorzio civile una produzione che è indubbiamente superiore a quella che, tenuto conto della reale natura dell'uomo, potrebbe conseguirsi, mediante qualunque altro sistema proletario, opposto e diverso » (1). Ad ogni modo, poichè tale produzione non è la *massima* possibile; poichè nell'interesse del progresso dei mezzi di sussistenza umana è il massimo prodotto quello che deve esigersi venga ricavato dalla terra, debbono rimuoversi tutti gli ostacoli che inceppano il conseguimento di tale scopo. Ciò importa, in definitiva, un intervento dello Stato per la limitazione del diritto di proprietà allo scopo di metterlo in armonia con l'utile generale.

Ora, la chiave della soluzione del quesito innanzi posto consiste nella forma e nella misura di questo intervento statale.

Che ad esso si siano ispirate le leggi di bonifica dell'Agro romano, e che esso abbia avuto luogo nei provvedimenti decretati ed in quelli in corso, non v'ha dubbio. Ma i risultati conseguiti, non dico nei quarantadue ultimi anni di governo italiano, ma pure nei secoli trascorsi dal primo grande atto di bonifica che fu quello di Sisto IV, del 10 marzo 1476 (2), risultati che ci è dato di constatare rivolgendo un solo sguardo alla campagna intorno a Roma, ci permettono di affermare che l'intervento medesimo, se non cattivo, non fu quale avrebbe dovuto essere.

Il Mortara, nel suo scritto, illustra e propugna un'evoluzione della proprietà fondiaria mediante provvedimenti legislativi sulla base dei progressi della scienza. Nè potrebbe essere altrimenti. Gli studî scientifici, seguìti con metodo moderno sperimentale, potranno solamente dirci di quale natura siano le difficoltà fisiche o naturali della bonifica e, conseguentemente, fino a qual segno possano essere superate con misure di ordine legale. Data la già accennata dipendenza di queste seconde dalle

(1) loc. cit., pag. 84.
(2) Confr. questo lavoro, cap. II.

prime, e stabilita la possibilità che le une presentano perchè si proceda alle altre, emerge l'obbligo dei proprietarî di conformare l'esercizio agricolo dei loro fondi agli insegnamenti della scienza, e il dovere al Governo d'imporre ciò con mezzi legali.

Lo studio naturale della campagna romana nei rapporti del suo bonificamento agrario era quindi il primo passo che si sarebbe dovuto muovere sulla via delle ideate riforme nel suo regime colturale: ma quale esso fu, è ben presto detto. Una diecina di analisi chimiche del terreno, neppur tutte complete; una carta chiamata geognostica all' 1 : 8000 non pubblicata; indicazione molto approssimativa della profondità e della distribuzione dei terreni autoctoni e di trasporto; una collezione inutilizzata ed inutilizzabile di campioni di suolo e sottosuolo presso il R. Museo agrario ([1]). Le conclusioni si trassero rapidamente: in molte parti vi era terreno ricco (anzi, più che altrove) di acido fosforico e di potassa; completato con aggiunta di concimi chimici azotati, esso avrebbe dovuto dare risultati superiori agli altri. Sopra queste basi si legiferò. Non un'analisi accurata del clima romano in tutti i suoi rapporti con l'agricoltura; non un approfondito esame delle proprietà meccaniche, fisiche e chimiche dei terreni, particolarmente del loro contenuto in materia organica che, stando alle moderne vedute, occupa il primo posto tra i componenti della fertilità del terreno; non, di conseguenza, uno studio di quei fenomeni nei quali s'impernia il movimento del capitale-azoto del suolo, strumento primo della messa in valore anche della più ricca riserva di acido fosforico e di potassa: fatti che sono la chiave della spiegazione dei sistemi agricoli vigenti. Non una qualsiasi determinazione del valore intrinseco dei prodotti ricavati dal suolo. Sono mancate anche prove colturali sufficienti, e, delle poche che si presero in considerazione, non si vagliarono neppure bene i risultati i quali avrebbero indicato che un'agricoltura romana secca ed a base di concimi chimici sarebbe stata molto improbabile.

Se, adunque, misure legislative sulla scorta di dati scientifici assolutamente insufficienti non hanno dato benefici effetti non è cosa da maravigliare. Si credette che il bonificamento dell'Agro romano studiato da molti e valenti statisti, economisti, ingegneri e medici, potesse essere raggiunto con provvedimenti economici idraulici e sanitarî. Difatti, quelli che si vollero prendere si riducono, in ultima analisi, ai seguenti: prosciugamenti e scoli (bonifica idraulica), viabilità, costruzioni, protezione contro la malaria, frazionamento della proprietà, credito agrario. Ma non esistono vaste tenute prosciugate ed in perfette condizioni di suolo, lungo le grandi e classiche arterie romane di comunicazione, immuni da malaria, con grandi fabbricati rurali ed ai cui proprietarî non fa difetto il capitale di esercizio? Non si è tentato, anzi non si è messo ad effetto il frazionamento del suolo nelle tenute di Sant'Alessio e di Vigna Murata? Perchè esse non sono bonificate? Perchè il tentativo di frazionamento della proprietà, che è costato all'erario una non indifferente somma, è riuscito una grande disillusione? ([2])

Le tristi constatazioni della relazione Cadolini nell'inchiesta della Società degli agricoltori italiani ([3]), e quelle, del pari importanti, della relazione ufficiale del mi-

([1]) Parlo degli studî *ufficiali*!

([2]) Confr. la relazione Gattorno nell'inchiesta della Società degli agricoltori italiani: loc. cit., pag. 285.

([3]) loc. cit., cap. II, pag. 17.

nistro Carcano presentata alla Camera dei deputati il 2 dicembre 1900, rinsaldano efficacemente le mie idee. Nel lavoro preparatorio delle leggi di bonifica si è verificata questa gravissima circostanza. Della industria, che doveva andarsi ad instaurare sui campi dell'Agro romano, si dimenticò o non si credette opportuno di studiare ciò che dell'esistenza di qualsiasi industria è la condizione prima ed assoluta: la macchina; nel nostro caso, la pianta.

Giunti a questo punto, attraverso le ricerche sul valore di produzione e sul valore di consumo della macchina-pianta nell'Agro romano, si può abbracciare in un sol colpo d'occhio l'intero piano di svolgimento del presente lavoro e formulare la conclusione ultima a cui è lecito di pervenire: che, cioè, *nelle condizioni naturali dell'Agro, le piante ivi coltivate o lasciate spontaneamente sviluppare sono le macchine le quali dànno la massima resa di lavoro.*

Ora, si può affermare che le leggi di bonifica, non solo non hanno tenuto conto di questo fatto, ma hanno anzi mosso in guerra, fin con il gravissimo provvedimento dell'esproprio, contro le leggi naturali, di cui il fatto stesso è il risultato ed alle quali non è davvero lecito impunemente contravvenire. Quell'intervento statale, adunque, propugnato dagli economisti e dal Mortara stesso, come sopra abbiamo visto, nell'interesse politico e sociale dell'aumento della produzione agraria, non ha per l'Agro romano forma e misura razionale ed è, perciò stesso, ingiusto ed immorale.

Quale, adunque, potrebbe essere?

La bonifica, prima di costituire un problema idraulico, igienico, di viabilità, finanziario, ecc., è un problema biologico. La soluzione di esso si basa essenzialmente sopra la capacità, che hanno le piante coltivate, di produrre un lavoro utile, così che, escludendo la possibilità della realizzazione di questo, riesce superfluo ed inopportuno qualsiasi altro provvedimento che non fosse stato preso in armonia con i fattori del lavoro medesimo. L'attitudine a compiere questo, noi l'abbiamo chiamata effetto assimilatorio, e sappiamo come il risultato di esso non può avere un valore assoluto; lo ha, bensì, relativo ad un complesso di circostanze locali che possono farlo enormemente variare. Quali esse siano, è stato già detto nelle premesse economico-agricole: e quale grande significato esse abbiano per la campagna romana, è stato calcolato nell'ultimo capitolo del presente scritto

Perciò si verifica il sorprendente e capitale fatto che piante, le quali nelle condizioni ordinarie dànno il minimo utile (graminacee), nella campagna romana ne dànno uno tale che avvicina e sorpassa anche il massimo offerto dalle altre (leguminose). Ora, lo studio delle condizioni, che hanno un sì grande peso sopra i risultati economico-agrarî, era quello che doveva formare il lavoro preparatorio delle leggi di bonifica. Esso è, invece, completamente mancato; ed io ho fatto mio l'argomento, cercando di svilupparlo come meglio i lesinati mezzi concessimi non mi avrebbero certamente permesso.

Riassumendo i miei risultati, la singolarità dell'ambiente, nel quale, in rapporto alla capacità funzionale delle piante coltivate, deve svolgersi l'industria agricola romana, consiste nei seguenti punti principali:

In un clima meridionale quale è il nostro, cioè ad inverno mite ed estate secco, come si è visto a suo tempo, il terreno agrario:

a) scarseggia di umidità,
b) difetta di azoto,
c) difetta ancor più di sostanza organica,
d) ha proprietà fisiche non buone,
e) in moltissime parti non è neppure formato.

Queste circostanze possono verificarsi anche tutte allo stesso tempo e creare una grave situazione di fatto che non ha riscontro nelle località di uguale clima, le quali, anzi, si giovano particolarmente delle caratteristiche di calore e di luce proprie del mezzogiorno. Nelle condizioni naturali della campagna romana non è possibile se non una coltivazione limitata autunno-vernina, primaverile in parte, nei luoghi migliori, in relazione a quel lungo periodo estivo che si verifica dal maggio all'ottobre. Nella nostra campagna le piante sono capaci di compiere un lavoro utile solo all'infuori di questa epoca dalla quale si potrebbe trarre profitto con provvedimenti speciali, non considerati fin qui da alcuna delle numerose leggi di bonifica.

Per intensificare la coltivazione anche nel periodo invernale, in rapporto a dette circostanze, si deve essere in grado di provvedere a cinque impellenti necessità:

1°) alla umidità,
2°) alla sostanza organica,
3°) all'azoto,
4°) all'ammendamento,
5°) al dissodamento.

Esse non si verificano tutte per tutti i terreni. In base ai risultati dello studio, da me eseguito, del capitale-terreno, può affermarsi che alle valli dell'Aniene e del Tevere basterà solo fornire umidità nei mesi estivi; in quelle di altipiano dovrà provvedersi umidità, sostanza organica, azoto ed ammendamento (calce) in maggiore o minore misura; sulle grandi alture dovrà eseguirsi un vero e proprio dissodamento per la totale formazione del terreno agrario.

Quel che però è importante da notare è che siffatti provvedimenti sono di natura molto differente, inquantochè taluni hanno una *dipendenza reciproca*, e quindi con uno si provvede in pari tempo anche all'altro; possono anche avere una *portata maggiore e minore*, ed allora costituiscono un còmpito individuale o collettivo.

La costituzione di una giusta riserva di sostanza organica nel suolo è la conseguenza di un ben regolato regime colturale, nel quale deve farsi rientrare il rovescio di piante radici o di leguminose; la provvista di ammendamenti e di concimi azotati è pur essa còmpito d'iniziativa privata che certamente potrebbe venir favorita da iniziative collettive, quali sono quelle dei consorzî, dei comizî agrarî, delle casse di credito fondiario ed agrario e dall'intervento stesso dello Stato, sia con il credito, sia, e più ancora, con la facilitazione dei trasporti.

Ma dove l'intervento supremo dello Stato può dare i migliori frutti e, secondo quanto è stato innanzi detto, si dimostra doveroso, è nella provvista di acqua al terreno. Questa si deve considerare una funzione statale correlativa a quella con la quale lo Stato stesso provvede al prosciugamento ed assanamento dei terreni, cioè

alla cosiddetta bonifica idraulica. La necessità di questa venne compresa immediatamente dal Governo fin dai suoi primi atti riguardanti l'Agro romano. Si riconobbe l'impossibilità della iniziativa privata in siffatte imprese; e s'impose la costituzione dei consorzî, profondendosi nei lavori non piccole somme ([1]). Ad essa avrebbe dovuto corrispondere un'altra pubblica opera, quella dell'irrigazione, poichè un regime acqueo razionale di terreni coltivabili non consiste solo nell'asportarne l'umidità (nel disseccarli, cioè), ma altresì nel fare in modo che in essi ve ne resti una quantità tale richiesta dalle coltivazioni. Accoppiando i due concetti, si scorge come lo scopo che deve raggiungersi sia solo quello d'impedire il ristagno delle acque: ma quando è dimostrato che, per le esigenze del clima, nei terreni messi a coltura deve permanere un determinato grado di umidità, provvedendosi al prosciugamento senza la irrigazione, si vengono a sperperare il contributo dell'Erario e quello dei proprietarî consorziati, aggravando questi, oltre la collettività, di spese iniziali e di manutenzione senza un corrispettivo utile, poichè i terreni asciutti nel nostro Agro, secondo i concetti esposti nell'ultimo capitolo, non sono quanto è necessario produttivi.

Provvedendosi, invece, da parte dei pubblici poteri ad una regolare distribuzione dell'acqua nella campagna romana, si viene a compiere un'opera la quale porterebbe con sè la soluzione di quasi tutti gli altri quesiti che si presentano per instaurare in essa un proficuo regime di coltivazione intensiva. Come primo risultato *si verrebbe ad accorciare, anzi ad eliminare, quel lungo periodo di riposo estivo nell'Agro* che è economicamente più dannoso del riposo invernale dei paesi del nord, lasciando andar perduta una somma considerevolissima di energia solare. Si utilizzerebbero, al contrario, e la elevata temperatura e le altre radiazioni attive nei processi fotosintetici della pianta, a vantaggio di una produzione che potrebbe avvicinarsi a quella tropicale. Avendo a disposizione sufficiente acqua, sarà possibile nel periodo estivo far vegetare leguminose e piante radici, e quindi fornire al terreno azoto e sostanza organica con vantaggio anche delle modificazioni meccaniche e fisiche del suolo le quali contribuiscono a conferire ad esso buone proprietà agrarie. Si arriverebbe, infine, alla coltivazione della pianta da rinnovo, senza la quale non si potrà avere una permanente, vera opera di bonifica. Con acque ricche di calcare, non davvero infrequenti nella campagna intorno a Roma, si verrebbe a condurre, sopra i campi irrigati, anche quella calce che è un grave difetto della maggioranza delle nostre terre. È adunque un felice complesso di utili conseguenze che porterebbe la irrigazione nella campagna romana e per le quali — senza dare èsca al pregiudizio che non possa esservi, in generale, agricoltura senza irrigazione — è lecito di convenire, nel caso speciale, che la chiave del nostro problema agricolo consiste nel *dare acqua, possibilmente calcare, ai campi.*

L'insuccesso dei tentativi di agricoltura secca nella campagna romana, come i buoni risultati delle sue coltivazioni irrigue, mi sembra che costituiscano la prova della mia asserzione. Ricordo appena le conclusioni degli esperimenti colturali eseguiti a S. Alessio, non pochi dei quali hanno dato risultati in perdita.

([1]) Confr. nell'Inchiesta della Soc. agric. ital., cap. IV, pag. 31.

Nella grande coltura mi cade acconcio di far presente un fatto molto significativo: cioè, quello della chiusura degli zuccherifici di Monterotondo e di Segni, in mezzo a regioni molto simili alle migliori dell'Agro e dove la coltivazione della barbabietola si è dimostrata non rimunerativa.

Di fronte agli esempî di risultati negativi dobbiamo porre quelli dimostranti un esito positivo dovunque si è potuto fare uso di acqua d'irrigazione: alla Cervelletta, alla Caffarella, a Grotta Perfetta, ecc. Essi sono altrettanto eloquenti quanto i primi e, mi sembra, non permettono dubbî sulla loro interpretazione.

Del resto, i proprietarî stessi sono convinti della straordinaria importanza locale della irrigazione la quale, allo stato delle attuali esigenze del mercato, che insistentemente domanda carne, latte ed ortaglie, avrebbe certo condotto ad una più sollecita ed utile bonifica agraria. Eglino stessi, con il loro fine intuito pratico, come hanno dovuto riconoscere che nelle presenti condizioni della campagna romana l'agricoltura più remunerativa è quella che da secoli vi si pratica, così sono d'accordo che l'irrigazione, pur non potendo esser cardine di ogni bonifica, nel nostro caso speciale, ne rappresenta la soluzione per segnare nell'Agro un indirizzo prettamente zootecnico ([1]). Con questo verrebbe anche istaurato un sistema di agricoltura a base di letame che, oltre a mantenere la umidità del suolo, lo arricchisce di sostanza organica e di azoto, lo modifica fisicamente e meccanicamente. Il difetto che esso presenta per l'acido fosforico e la potassa è controbilanciato dalla ricca dotazione di questi elementi nel nostro Agro, dove il risparmio in concimi chimici potrebbe essere grande. Un'agricoltura, pertanto, così razionale ed intensiva, restituendo le diverse piante a quell'effetto assimilatorio *teorico*, normale, e, cioè, alle leguminose il posto che ad esse spetta nell'economia rurale, potrebbe permettere un utile netto ben maggiore di quello *reale* che abbiamo a suo luogo determinato, e, quindi, trasformazioni profonde del secolare regime agricolo romano, con la messa in valore delle località che ora appaiono le più ingrate e le meno adatte ad una coltivazione remunerativa. E la misura delle possibili modificazioni la possediamo già in un esempio unico più che raro: quello offertoci dal nostro *suburbio*.

Ivi noi troviamo il frazionamento della proprietà che va progredendo, benchè molto a rilento, verso la campagna propriamente detta, con l'instaurarvisi piccole vaccherie, orticultura, frutticoltura e floricultura rimuneratrici e che conferiscono alla zona, che immediatamente precede la città e che è abitata un aspetto caratteristico. La causa di questa lenta trasformazione io non saprei ritrovare in altro che nella

([1]) V. Casorri, *L'agro romano e le sue trasformazioni*, Roma 1905; id., *La pecora da carne*, Subiaco 1907. Confr. questa op., pag. 22: « Non si volle, all'Ispettorato di bonifica, mai capire che « l'indirizzo zootecnico era l'unico mezzo da seguirsi nella bonifica delle nostre terre, per fare dell'Agro romano un centro agricolo di massima produzione, specialmente di quei generi che il mercato « attualmente domanda... Se l'Ispettorato avesse intuìto e studiato quello che noi da venti anni « andiamo predicando e scrivendo, forse il Governo... avrebbe proposto e fatto votare dal Parlamento quei pochi milioni che servono a darci acqua..., quell'acqua indispensabile a risolvere « degnamente il più volte citato problema zootecnico e, con esso, la bonifica agraria locale, giacchè « acqua, ripeto, ne abbiamo e tanta, vicina e disponibile fra laghi e fiumi, da irrigare delle vastissime estensioni di terra... ».

possibilità di avere, in vicinanza dei centri abitati, acqua, residui organici o concimanti delle spazzature cittadine, calcinacci delle demolizioni. Essa si è compiuta attraverso i secoli nei quali la Roma dei cristiani andava risorgendo dalle rovine barbariche, e si compie tuttora *automaticamente*, portando, cioè, senza le costrizioni delle leggi di bonifica, a tutti quei risultati che con queste si ha la pretesa di raggiungere. Si riconoscerebbe in questo uno sforzo — compatibile certo con le condizioni delle mutate condizioni climatiche — per il ritorno al regime agricolo della campagna nei molto lontani tempi di Cincinnato quando si deve ammettere che anche il clima romano, soprattutto per quanto si riferisce al regime udometrico, fosse molto differente dall'attuale. Io penso, perciò, che sarebbe molto istruttivo un esperimento di questo genere: sopprimere in una determinata regione tutte le leggi di bonifica, e crearvi soltanto, per opera dello Stato, una rete, a sole larghe maglie, di canali irrigatori. Non dubito che nel più breve lasso di tempo quella zona diverrebbe esemplarmente bonificata, e si raggiungerebbero con un solo provvedimento, e senza complicati quanto inutili organismi burocratici, quei risultati che sono nei voti di tutti coloro che trovansi ad essere possessori, o meno, di terre bruciate dal sole nella campagna romana. Gli antichi romani si sono dimostrati maestri nelle imprese idrauliche, delle quali troviamo grandiose vestigia ovunque si portò la loro potenza, nel nostro Agro, come in Africa; e sarebbe desiderabile che almeno in questo si emulasse oggi la sapienza antica.

In tal modo, adunque, andrebbe concepito un intervento dello Stato nel dirimere il conflitto acuentesi sempre più fra la proprietà fondiaria e gl'interessi proletarî, particolarmente nell'Agro romano. Un intervento, cioè, basato sulle leggi naturali e non in opposizione ad esse; derivato da studî positivi e non da parti della ottusa mentalità burocratica, per quanto animata da lodevole sentimentalismo patriottico.

Adottando provvedimenti razionali, verrà meno la necessità di far ricorso a costrizioni, poichè, come ben dimostra il Mortara, primi ad essere tutelati sono gl'interessi stessi dei proprietarî. Se non la completa eliminazione delle costrizioni, certo si otterrebbe la riduzione di queste al minimo possibile; ed in tali casi esse sarebbero legali e morali, e non disastrose per l'erario, poichè i risultati che fino ad ora è permesso constatare nell'Agro romano, alla cui bonifica si è provveduto in conformità di altri principî, sono questi: pochissimi esempî di forzata e discutibile bonifica; molto sperpero di pubblico e privato danaro. Con un più saggio impiego dell'uno e dell'altro, nel già lungo periodo di 42 anni trascorsi si sarebbero potuti registrare ben altri successi e, sopra tutto, si sarebbe giunti all'affermazione del più sano principio della evoluzione economica socialista che non lede il concetto politico di patria, che su di esso, anzi, secondo il Mortara, dovrebbe fondarsi « la teoria dei doveri della pro- « prietà fondiaria individuale, integrati da quelli rispettivi dello Stato, in relazione « al migliore funzionamento dell'Istituto stesso ed in quanto l'adempimento di essi « sia condizione del più efficace adempimento dei primi » (1).

Che verso queste idee ci si vada finalmente avviando e che si faccia àdito alla fiducia che nelle menti degli studiosi si dissipi quel senso di scetticismo, il quale

(1) A. Mortara, *L'evoluzione economica del concetto politico di patria*. Nuova antologia, 1 febbr. 1908.

(come per dura esperienza è provato) è destinato ad intossicare la soddisfazione personale ed a frustrare l'utile pubblico che dovrebbero essere frutto dei loro studî, è lecito presumere. non tanto per quella forte e vasta organizzazione di credito vagheggiata dal Mortara e che è sanzionata anche dalle ultime leggi di bonifica dell'Agro romano, quanto perchè si è compresa la utilità e la necessità d'imprese del genere di quella che vado propugnando per il nostro Agro, ed un disegno di legge — nei giorni in cui sto scrivendo — trovasi agli Ufficî della camera dei deputati inteso ad agevolare la costruzione di serbatoi e di laghi artificiali.

La grande importanza di siffatti pubblici lavori, con intervento diretto dello Stato, mercè opera di chiusura di alte valli, non può sfuggire. La raccolta di acque in bacini può valere come mezzo generatore di forza, d'irrigazione, e costituirebbe, in specie per il Mezzogiorno, il toccasana del più urgente bisogno della sua agricoltura. Quel che vi ha di caratteristico in questi provvedimenti è appunto l'intervento dello Stato con criterî collettivistici per moderare il diritto della proprietà individuale a quel modo cui io mi son fin qui riferito. La espressione ultima dell'intervento stesso, che ormai s'impone in un grandissimo numero di casi, è racchiusa in quel diritto di esproprio che, se apparisce un'arma lesiva della proprietà allorchè la trasformazione di questa a vantaggio pubblico non è favorita adeguatamente dallo Stato, come è ancora per l'Agro romano, diverrebbe giusta e feconda di grande utile il giorno in cui, essendosi provveduto con il danaro di tutti a mettere in valore con criterî razionali il possesso individuale, si trascurassero da parte dei proprietarî quelle iniziative dalle quali dovrebbero derivare grandi vantaggi sociali.

Un'Italia, nella quale s'andasse sviluppando una proprietà collettiva dovuta ad opere di natura tale da rappresentare uno sviluppo delle forze produttrici, sarebbe, per L. Bissolati, una *nuova Italia*! (¹). Il giudizio di un socialista di tanto valore non può essere sospetto; ed esso costituisce per me un altro punto di appoggio per affermare che il conflitto fra gli interessi collettivi e quelli dei proprietarî nella questione agraria in genere, come in quella dell'Agro romano in specie, non è insanabile; che il quesito postoci al principio di questo ultimo capitolo, per scendere alla conclusione, può ritenersi fondatamente solubile.

Senza peraltro compiacersi troppo di illusioni — il che ci trasporterebbe certo fuori del dominio di uno stato di cose che sia possibile di attuare in un breve lasso di tempo — è necessario di scendere a proposte concrete per quanto si riferisce all'Agro romano, così da raggiungere quel fine pratico che è la mèta ultima del presente lavoro.

Non nutro, in linea di massima, grande fiducia nei principî di quell' « agricoltura secca » che è una recente e forse anche geniale trovata del Campbell e del

(¹) L. Bissolati, *Per la nuova Italia: i laghi artificiali.* « il Messaggero », 30 marzo 1912.
« Ecco, adunque, profilarsi all'orizzonte le linee di una grandiosa proprietà collettiva, dovuta « ad uno sviluppo delle forze produttrici. È questo forse il socialismo che erompe dalle cose sotto « la pressione dei crescenti bisogni sociali e dietro lo stimolo di perfezionamenti tecnici? Non « indugiamoci ora in dottrinarismi: certo è che qui si vengono preparando le massicce fondamenta « di una nuova Italia... ».

Demtschinsky [1]. I risultati positivi ottenuti non sono ancora numerosi e favorevolmente interpretabili. Essa, ad ogni modo, presuppone la esistenza di una determinata, per quanto esigua, misura di acqua nel suolo o di vapore acqueo nell'atmosfera; di proprietà del terreno tali da consentire speciali lavorazioni, e di una mano d'opera a costo moderato, compatibilmente con la rinuncia ad un grande utile colturale netto. Ebbene, nell'Agro romano, durante il lungo periodo estivo, suolo ed aria sono fortemente asciutti; il terreno è, oltre la media misura, tenace e difficilmente lavorabile; la mano d'opera è molto costosa. Oltre a ciò, è da ricordare che il suolo romano è spesso pochissimo potente e che la sua composizione incompleta richiede ammendamenti (calce e sostanza organica) e concimazioni (azoto) alla cui fornitura il metodo del Demtschinsky non può essere di alcun sussidio. La introduzione della così detta « agricoltura secca » nell'Agro romano è da me considerata molto improbabile.

Tutte le deduzioni degli studî precedentemente riferiti lasciano invece prevedere molto remunerativa un'agricoltura irrigua, nella quale, facendosi uso di acqua calcare, si provvede, senza ulteriore spesa, ad uno dei più importanti ammendamenti che sono richiesti dai terreni romani. La produzione molto più abbondante che, in confronto di un'agricoltura secca, formerebbe un'agricoltura irrigua, potrebbe permettere di fronteggiare molto agevolmente le altre impellenti necessità locali: provvista di sostanza organica e di azoto (piante-radici o leguminose da sovescio; concimazione chimica azotata), modificazioni delle proprietà fisiche del suolo, mano d'opera sufficiente.

Progetti per l'irrigazione dell'Agro romano non fanno difetto. Se ne hanno per la derivazione delle acque del Tevere (Mora, 1873), di quelle dell'Aniene (Società delle condotte d'acqua, 1884; Canevari, 1885; Vescovali; ecc.); d'incanalazione artificiale delle acque stesse con macchine di molto resa, come le ciclo-pompe; di utilizzazione, mediante sbarramenti vallivi, di quelle dei fossi di S. Vittorino, della Frechisia, dell'Osa, di Centocelle e di Gottifredi, dei fiumi Cremera, Arrone ed altri. Si potrebbe anche trarre profitto dall'acqua Mariana, costituita dalle sorgive degli Squarciarelli, se, per illuminato intervento dello Stato, venisse sottratta alla ingorda speculazione di un consorzio che sopra vi vanta antichi diritti. Resta ancora da ricordarsi il progetto De Angelis-Pironti per la utilizzazione dell'acqua del lago di Albano, deviandola preferibilmente dall'antico emissario per avviarla attraverso uno nuovo, dalla parte di Marino sino alla cartiera di Grottaferrata, nel corso della Mariana [2].

Ma tutte le relazioni sugli studî fatti sopra questo argomento da quaranta anni a questa parte restano inutilizzate negli archivî dell'Ufficio del bonificamento dell'Agro romano, con enorme pubblico danno, senza alcuna plausibile giustificazione. Poichè potrà discutersi la possibilità di attuare la irrigazione in determinate regioni,

[1] Confr. *Communication de M. E. de Miklôs de Miklôsvar, délégué de la Hongrie à l'Institut international d'agriculture* (assemblea generale del 1911); e *Behäufelung des Getreides nach Demtschinskyscher Methode*, in Deut. landw. Presse, n. 25, pag. 293, an. 1911.

[2] G. De Angelis d'Ossat, *Per l'irrigazione dell'Agro romano*. Ann. Soc. ing. e arch. italiani, n. 13, an. 1910.

come già fece nel 1901 la Commissione d'inchiesta nominata dalla Società degli agricoltori italiani ([1]), e, ad un esame che tuttavia, è da notarsi, *non è suffragato da esperimenti*, potrà risultare negativa la convenienza di praticarla in talune zone dell'altipiano. Ma quando si sa esistere nel nostro Agro più vicino un'estensione valliva di 7530 ettari in perfetta pianura, i quali non abbisognano di alcuno speciale lavoro di livellazione; che, sull'altipiano stesso, 12.480 ettari (escludendo il suburbio, ne restano 7650), con profondità di suolo arabile superiore a 30 cm., a quota non troppo alta, sono in gran parte sistemabili facilmente; che, in rapporto alla necessità delle opere di drenaggio, tali superfici rientrano in buona misura fra quei 13.250 ettari nei quali si gode della circostanza di avere un sottosuolo permeabile; quando si sa esistere tutto ciò, non può sorgere un forte dubbio che la spesa di canalizzazione delle acque non trovi un conveniente corrispettivo nell'aumento del reddito lordo, o dei prodotti.

Qualora vi fosse serio motivo di discutere una tale ipotesi, che sarebbe fra le più disgraziate, dovrebbe anche dimostrarsi che la rinuncia all'attuazione di un grandioso progetto d'irrigazione riesce meno dannosa di quella perdita cui si andrebbe perennemente incontro perpetuando uno stato di cose non molto dissimile dal presente che è il risultato di provvedimenti di bonifica, dei quali — salvo poche eccezioni, il cui merito non risale tutto al Governo — si è esclusa l'irrigazione. Bisognerebbe dimostrare come una rete di canali irrigatori, nell'Agro non costituisca un arricchimento del grande patrimonio statale o collettivista dell'avvenire, che può riuscire vantaggioso anche ad altri scopi e, fra essi, a quello industriale della produzione di energia; bisognerebbe, infine, anche dimostrare che i canali irrigatori possono recare beneficio solo ai terreni vallivi sistemati o sistemabili — che assommano ad una superficie molto maggiore di quel quarto dell'area totale ammesso dalla Commissione della Società degli agricoltori italiani — e che, anche dopo essere riusciti a fertilizzare vaste zone irrigate, si dovessero ancora lamentare fra esse alcuni tratti di deserto! Ritengo che ci siano molti mezzi per volgere a profitto anche della coltivazione delle zone meno favorite i risultati offerti da quelle, più vaste, irrigate, stabilendo sulle prime, sia pur lentamente e a gradi, una piccola coltura del tipo di quella suburbana.

Ma un altro provvedimento è, a mio giudizio, più urgente e più proficuo di prendere per la bonifica della regione dell'Agro circondante la città ed a favore del quale mi si è offerta già l'occasione di spezzare più volte una lancia ([2]). Esso costituisce una misura, la quale, associando l'irrigazione indissolubilmente all'ammendamento ed alla concimazione, può fornire i maggiori risultati.

Intendo parlare dell'impiego agricolo delle acque della fognatura cittadina.

([1]) loc. cit., pag. 100.

([2]) R. Perotti, *Studio biologico dell'Agro romano in rapporto al suo bonificamento agrario* (Relazione a S. E. il ministro per l'agricoltura, Roma 1911); id., *Può la città di Roma avere i campi d'irrigazione con le acque di fogna?* (Prolusione al corso di batteriologia agraria, detta nella R. Università di Roma il 20 gennaio 1912).

Che lo studio di un problema siffatto s'imponga oggidì per ogni centro urbano indistintamente, è una circostanza che io mi son provato ad illustrare sulla base di principî generali di ordine economico ([1]). Con la soluzione di esso, nell'interesse dell'alimentazione pubblica, si mira alla riutilizzazione dell'intero peso degli elementi chimici che costituiscono le materie escrementizie ed al reimpiego della metà dell'energia degli alimenti nelle medesime contenute, così che per il mantenimento dello *statu quo* degli organismi umani viventi si renda necessario fornire solo l'altra metà dell'energia richiesta.

Per molte città dell'estero, e per la nostra stessa Milano, la utilizzazione agricola delle acque di fogna è un fatto più o meno felicemente compiuto, sebbene esso sia in realtà governato non tanto dal criterio di *produzione*, quanto dall'altro della depurazione e dello smaltimento innocui delle acque stesse; così che l'alimentazione pubblica, quasi sempre, non ne ritrae tutto il possibile, desiderabile vantaggio. Nel mio concetto, epurazione biologica ed utilizzazione agricola sono due fatti essenzialmente correlativi per modo che il compimento dell'uno deve rappresentare il successo dell'altro; e viceversa.

Che lo studio dello stesso problema s'imponga poi nel caso speciale della città di Roma, apparisce una necessità più urgente ancora allo scopo di trarci fuori da quel circolo vizioso nel quale sono stati fin qui costretti i criterî ed i mezzi di bonifica dell'Agro e di dare a questa un primo potente impulso che riesca luminosamente dimostrativo dei risultati che, mediante un siffatto provvedimento, è possibile di conseguire con notevole riflesso sopra quelle penose condizioni create alla esistenza cittadina della capitale, condizioni che tutti conoscono ed è superfluo ancora una volta qui lamentare.

Tutto lascia prevedere che la detta impresa, anche nel nostro caso, può condursi a buon punto. I cinque provvedimenti che, in relazione alle condizioni del clima e dei terreni romani, come risultano dallo studio da me eseguito, è necessario di prendere e che ho poco innanzi ricordato, si riassumono nella semplice conduzione delle acque di fogna sopra i campi. È acqua, sostanza organica, azoto, calce in quantità rilevanti, che si fornirebbero ai nostri terreni; con i quali mezzi, oltre a favorirne il dissodamento, se ne integra il fabbisogno colturale ([2]). E ciò, deve riconoscersi, molto provvidamente, qualora si abbiano presenti le condizioni da cui dipendono gli utili colturali dei campi irrigati con acqua di fogna:

1°) *Opportuna composizione dei rifiuti*. — Le acque della fognatura presentano il carattere di essere diluite ma con tendenza alla concentrazione per il fatto

([1]) Id., *Per una generale politica di utilizzazione agricola delle acque di fogna*. Comunicaz. al VI Congr. della Società italiana per il progresso delle scienze, Genova 1912.

([2]) Nella mia precitata relazione al ministro per l'agricoltura (confr. pag. preced., nota 2), partendo dal concetto che il terreno, perchè possa essere un terreno vegetale, deve riuscire anzitutto un substrato di coltura per i microorganismi del suolo, ho eseguito un parallelo fra i due oggetti ed ho concluso: « chiamando [il terreno agrario] con il sinonimo di *substrato naturale per i mi-* « *croorganismi*, contribuiremo alla sua utilizzazione impedendone il disseccamento, aggiungendo « la sorgente di energia (sostanza organica), l'elemento che deve selezionare le forme utili (azoto) « od anche eventualmente mancanti, per completare la nutrizione dei batterii e per conferire al « mezzo la reazione alcalina (ammendamento-calce) ».

dell'aumento della popolazione, senza necessità, per un certo tempo, di ulteriore aumento delle acque potabili.

2°) *Economica conduzione degli elementi fertilizzanti.* — Lo stato dell'attuale impianto di fognatura in Roma può permettere l'incanalamento, anche a forti distanze, di una grandissima parte della massa acquea per solo naturale deflusso.

3°) *Favorevole natura dei terreni circostanti.* — Qui deve ricordarsi quel che è stato innanzi detto a proposito della irrigazione dell'Agro romano con semplice acqua. A quanto si è costatato verificarsi circa la naturale livellazione di vaste superfici ed alla permeabilità del loro sottosuolo, deve aggiungersi che le terre romane sono più o meno forti, e quindi in condizioni da essere favorevolmente influenzate dall'azione di un'acqua abbondante di sostanze sospese e disciolte, decomponibili o dividenti; che sono ricche di acido fosforico e più di potassa, scarseggianti di azoto e per le quali le acque di fogna, ben fornite di questo ultimo elemento, riescono *complementari*.

4°) *Adattamento di speciali colture alle esigenze del vicino centro abitato.* — Il giardinaggio, l'orticoltura e l'allevamento del bestiame, che acquistano una grande importanza in prossimità di tutti i grandi centri urbani, costituiscono anche le coltivazioni caratteristiche della campagna romana particolarmente richieste dalle esigenze locali e che conviene, quindi, sempre meglio sviluppare. Debbono qui ricordarsi i noti fieni di ottima qualità ed il pregiato bestiame romano che con essi si alleva; i prodotti dell'industria casearia ed i rinomati ortaggi del suburbio.

5°) *Particolari condizioni locali.* — Fra quelle che abbiano maggiormente valore per Roma, debbono annoverarsi: la scarsa produzione locale, le vie di comunicazione insufficienti e costose, la deficienza di mano d'opera, la mancanza di capitali, il rapido aumento della popolazione, ecc.; le quali tutte si risolvono in una difficoltà dei mercati annonarî con relativo elevato prezzo dei prodotti (1).

Per una più ampia illustrazione di questi concetti rimando al mio precitato lavoro (2).

Qui mi resta da affermare e concludere che, sulla scorta dei risultati degli studî di biologia da me eseguiti, il provvedimento rispondente nel miglior modo alle esigenze della coltura nell'ambiente naturale dell'Agro romano sia la istituzione dei campi d'irrigazione con le acque della fognatura cittadina; che entrambi debbano rappresentare una forma razionale d'iniziativa dello Stato nel conflitto fra proprietà fondiaria e diritti sociali, con la costituzione di un patrimonio di opere di pubblica, generale utilità.

Che molti degli altri provvedimenti, presi con le leggi di bonifica fin qui emanate, siano buoni, non nego. Prosciugamenti e scoli, fabbricati e strade, protezione contro la malaria, credito agrario, non v'ha dubbio che siano tutti mezzi con i quali possa favorirsi la coltura nell'Agro romano. Con essi soli, però, non si risolverà l'arduo

(1) Il provvedimento da me vagheggiato ha poi tutta un'importanza igienica che, particolarmente per la città di Roma, non può assolutamente trascurarsi.

(2) R. Perotti, *Può avere la città di Roma i campi d'irrigazione con le acque di fogna?* Roma, tip. della Sapienza, 1912.

problema come si conviene, poichè si fa astrazione da quell'elemento « pianta » che è il mezzo essenziale dell'agricoltura e che trova la sua ragione di funzionamento nelle condizioni dell'ambiente. Per questo a me sembrò — e lo affermai fino dal principio del lavoro — che la bonifica, prima di ogni altra cosa, doveva costituire una questione di biologia.

Il complesso delle condizioni fisiche che si riscontrano nella campagna romana, e di quelle che per riflesso si sono venute a determinare nelle aziende agricole, costituiscono un ambiente *reale*, espressione di leggi naturali, contro le quali bisogna reagire con mezzi adeguati perchè possa addivenirsi alla costituzione di quell'ambiente *ipotetico* che è nel fine ultimo delle leggi di bonifica.

Noi potremmo fare un calcolo della eccedenza del valore di produzione totale che l'Agro romano reale offre, prendendo, come base nella zona dei 10 km. da me esaminata ed escludendo il suburbio, le seguenti condizioni di fatto che, in assenza di dati statistici migliori, possono ritenersi non molto lontane dal vero:

= Superficie totale della zona dell'Agro romano nel raggio dei 10 km., escluso il suburbio	ettare	21.030
= Spallette (pendenza oltre il 15 %) incolte od in minima parte rimboschite, senza però recare fin qui alcun contributo alla produzione di sostanza fisiologicamente utilizzabile	»	2.210
= Valle con profondità di suolo arabile, superiore ad un metro, complessivamente	»	5 760
— Di questi, ²/₃ circa sono costituiti dalle valli dell'Aniene e Tevere, aventi, cioè, terreno completo e fertilizzato dalle alluvioni, sicchè sono o potrebbero essere coltivati a frumento ed avena ogni anno; residuano perciò di *valle di altipiano* che è destinata alle stesse colture a terzeria .	»	1.920
= Altipiano in totale	»	13.060
— Di questo, per la maggior profondità di strato arabile (m. 0,60 - 1) sono o possono essere coltivati a cereali con terzeria	»	5.510
— Per la minore profondità dello strato arabile (m. 0,31 - 0.60) sono o possono essere tenuti a quarteria	»	2.140
— Per una ancor minore profondità dello strato (m. 0,11 - 0,30) sono o possono essere coltivati a più lungo intervallo (anni 10)	»	3.360
— Residuano dell'altipiano con uno strato arabile inferiore ai cm. 11 ed incapaci di qualsiasi coltivazione cereale . .	»	2.050

Per la coltivazione dei cereali, adunque, si può disporre attualmente, nella regione dell'Agro romano in esame, delle seguenti *superfici-anno*:

Valle del Tevere e dell'Aniene (5760 - 1920). .	ettare	3840
» di altipiano a terzeria (1920 × ²/₃)	»	1280
Altipiano a terzeria (5510 × ²/₃)	»	3672
» a quarteria (2140 : 2).	»	1070
» a coltivazione decennale (3360 : 10)	»	336
Totale	ettare	10.198

Tenendo conto solo delle due principali colture (e, cioè, del frumento e dell'avena), questo può ripartirsi come segue:

superficie-anno a frumento . . . ettare 6798
" " ad avena. . . . . " 3399

Di conseguenza, nelle medesime attuali condizioni dell'Agro sono o possono essere tenute a prato e pascolo le superfici-anno seguenti:

valli di altipiano a terzeria (1920:3)	ettare	640
altipiano a terzeria (5510:3)	"	1836
" a quarteria (2140:2)	"	1070
" a coltivazione decennale ($3360 \times {}^{9}/_{10}$) .	"	3024
" a strato vegetale inferiore a cm. 11 . .	"	2210
Totale	ettare	8780

Ammettendo che, in ragione della perdita prodotta nei prati dalla rottura e semina, la produzione foraggera dei terreni a terzeria e quarteria possa calcolarsi, in media, non superiore a quella già da me stabilita per i fieni di seconda qualità (quintali 175 ad ettara), ed il reddito dei residuali terreni di natura inferiore sia rappresentato da quello del fieno di terza qualità (quintali 100), si avrà:

superficie-anno a fieno di 2ª qualità . . . ettare 3546
" " " di 3ª " . . . " 5234

Quale sia l'attitudine produttiva per unità di superficie di ciascuna delle principali colture della campagna romana, ho reso noto fino dal precedente capitolo del mio lavoro. È anche noto quale sia il valore di produzione e quale il valore di consumo calcolato sulla base degli elementi nutritivi del terreno per la formazione di albumina digeribile e di valore-amido nelle piante nostrali. Non resta quindi che da stabilire il seguente:

Prospetto della produzione annua dell'Agro romano reale.

(Zona del raggio dei 10 km. escluso il suburbio).

COLTURE	Superficie coltivata (o coltivabile) Ea.	Raccolto per Ea. Q.li	Valore di produzione per Ea. L.	Valore di produzione totale Migliaia di lire	Valore di consumo per Ea. L.	Valore di consumo totale Migliaia di lire
Frumento	6798	20.0	398	2.700	15.4	104
Avena	3399	18.0	341	1.159	19.9	67
Fieno di 1ª qualità. . .	3546	175.0	453	1.606	55.7	197
id. di 2ª " . . .	5234	100.0	220	1.151	35.9	187
SOMMA . . . L.	18.977	—	—	6.616	—	555

La differenza fra i valori totali di produzione e di consumo rappresenta una somma di *6 milioni* di lire (prodotto lordo massimo) che l'effetto assimilatorio delle colture dell'Agro romano (zona del raggio dei 10 km.) è in grado di offrire e — si può anche affermare senza tema di commettere forti errori — offre di fatto nelle sue *condizioni reali*.

Ma se noi riusciamo a modificare queste nei limiti dei mezzi consentiti alla nostra attività; se ci decidiamo ad attuare uno di quei progetti che, a seconda delle resultanze dei miei studî, si sono dimostrati essere provvedimenti di razionale bonifica nel clima e con i terreni romani — ad es. quello della irrigazione — facendo assegnamento sopra piante aventi un effetto assimilatorio più elevato ed usufruendo, nel modo migliore, della superficie disponibile, noi potremo assumere altri criterî a base del calcolo dell'eccedenza del valore di produzione totale di un futuro Agro romano *ipotetico*.

Non teniamo anche qui conto dei 2.210 ettari di spallette con pendenza superiore al 15 %, sebbene sia il caso di osservare che, disponendosi di acqua, se ne potrebbe favorire almeno parzialmente il rimboschimento a base di alberi da frutto. Riteniamo anche che i 3840 ettari di terreno compresi nelle valli del Tevere e dell'Aniene debbano essere mantenuti a frumento, ma consociato con trifoglio irriguo durante l'estate. In tutti gli altri terreni di valle di altipiano e di altipiano tenuti a terzeria ed a quarteria, assommanti complessivamente ad una superficie di ettare 9570, crediamo possa stabilirsi una rotazione, ad es. quadriennale, come la seguente: mais o baccelline da seme — grano con trifoglio — trifoglio — grano seguìto da erbai autunno-vernini. Nei 3360 ettari dell'altipiano, che ora è rotto soltanto a lunghi periodi per ottenerne un raccolto di frumento, e nei 2210 ettari di altipiano a strato vegetale inferiore a cm. 11, irrigabile limitatamente e con difficoltà, converrà semplicemente migliorare il prato ed adibire qualcuno dei migliori appezzamenti a coltivazioni speciali redditizie.

Secondo queste vedute, quindi, la ripartizione delle superfici disponibili annualmente per le principali colture nella zona dell'Agro in esame potrebbe essere con buon fondamento la seguente:

= Valli dell'Aniene e del Tevere:		frumento + trifoglio		ettare 3840
= Valli di altipiano, ed altipiano: rotaz. quadrienn. (con terreno profondo oltre cm. 30)	1° anno	mais	ettare 1196	» 9570
		piselli	» 1196	
	2° »	frumento + trifoglio	» 2393	
	3° »	trifoglio	» 2393	
	4° »	frum. + favetta.	» 1196	
		frum. + lupino.	» 1196	
= Altipiano (con terreno profondo meno di cm. 30).		miscuglio di foraggere . .		» 4570
		coltivazioni speciali od ortive		» 1000

Calcolando il prodotto del trifoglio, consociato a frumento, a *metà* della media; prendendo a base del calcolo di produzione dei prati misti di foraggere un *mezzo*

prodotto di erba medica, e delle colture speciali od ortive quella *intera* della patata; adottando per la determinazione del valore di produzione, come di quello di consumo, le cifre *normali* dello Strakosch, avremo il seguente:

Prospetto della produzione annua di un Agro romano ipotetico.
(Zona del raggio dei 10 km. escluso il suburbio).

COLTURE	Superficie coltivabile Ea.	Raccolto per Ea. Q.li	Valore di produzione per Ea L.	Valore di produzione totale Migliaia di lire	Valore di consumo per Ea. L.	Valore di consumo totale Migliaia di lire
Frumento	8625	20	370	3.191	99.9	861
Mais	1196	25	849	1.015	113.5	135
Trifoglio	2393	280	586	1.402	39.3	94
» (consociato) .	(6233)	140	293	1.826	19.6	122
Erba medica	4570	160	316	1.444	24.9	113
Fava (avvicendata) . . .	(1196)	28	569	680	39.8	47
Lupino » . . .	(1196)	14	335	400	20.9	24
Piselli	1196	20	392	468	18.0	21
Coltivaz. speciali (Patata)	1000	134	574	574	103.6	103
SOMMA . . .	18.980	—	—	**11.000**	—	**1.500**

In questo caso la differenza fra la somma del valore di produzione annuo delle singole piante coltivate e la somma del relativo loro valore di consumo ascende a *nove milioni e mezzo* di lire, con un eccedenza di tre milioni e mezzo sopra la differenza dei medesimi valori con i quali s'individualizza la produzione annua dell'Agro romano reale. Mentre nei calcoli, che si riferiscono a questo, volli attenermi a cifre piuttosto elevate, sì che esprimessero un risultato più vicino al massimo; in quelli riguardanti un Agro romano ipotetico mi sono attenuto a cifre basse, perchè i risultati non sembrassero esagerati. È poi da aggiungersi che l'unico provvedimento, con il quale essi verrebbero raggiunti, sarebbe quello della irrigazione. Se, oltre ad esso, si addivenisse a quello della utilizzazione delle acque di fogna, con la sola attuale popolazione cittadina di 600.000 abitanti si potrebbero avere non meno di 7500 Ea. fertilizzati, in modo da fornire una produzione doppia di quella che può essere data da semplice acqua d'irrigazione, con assoluto risparmio di spesa per materie concimanti ed ammendatrici. Il valore teorico della massa cloacale romana che ora si disperde, calcolato in base alla cifra di L. 8,16 per abitante-anno (Wolff), è annualmente, in cifra rotonda, di cinque milioni lire. Un tale capitale, convenientemente impiegato, potrebbe rendere un utile molto maggiore di quello innanzi dedotto. Ma pur attenendoci a questo ed ammettendo che nella piccola zona attorno a Roma, da noi considerata possa aversi una maggiore produzione annua di sostanza fisiologicamente utilizzabile, di soli tre milioni e mezzo di lire, troveremo che ogni lira

di elementi nutritivi del terreno avrebbe dato lire 7.33 di sostanza utile ([1]), e che nei quarantadue anni trascorsi di mancata bonifica se ne sarebbero perduti circa 150 milioni!

Non chiuderò il mio scritto sciogliendo ancora un inno all'avvento della bonifica dell'Agro romano. Anche in questo il mio lavoro deve differire da tutti quegli altri, i cui autori, in buona od in mala fede, ingenui o politicanti, non hanno saputo resistere allo stimolo di una commovente e facile conclusione. Lo stesso non potrei fare io, qui, raccogliendo le fila dei miei studî, dappoichè questi hanno messo in luce quel che i dirigenti le opere di bonifica non hanno fatto, o quel che hanno fatto o vanno facendo insufficientemente o con criterî non basati sopra quelle leggi naturali biologiche che governano la produzione dei campi. È un conto delle perdite che è costata la bonifica dell'Agro romano, quello che piuttosto bisogna fare: perdite nel grande bilancio dello Stato per l'irrazionale condotta degli studî, di molte opere progettate, eseguite od in corso di esecuzione; perdite nel modesto bilancio dei coraggiosi che hanno voluto affrontare con mezzi inadeguati le incognite della iniziativa; perdite per i lavoratori che non hanno potuto trovare adeguato impiego alla loro mano d'opera. Chi potrebbe calcolare, infine, anche le perdite dei consumatori della città, allorchè questa si è venuta improvvisamente a trovare nella stretta di una crisi di viveri e di abitazioni, quale quella che ora si attraversa, prevedibile e, forse, invano prevista, nella nuova capitale di un nuovo Regno? Perdite, adunque, effettive per somme ingenti spese: perdite teoretiche, ma non meno dannose, per somme anche più considerevoli non introitate.

Egli è certo che, impostata la questione della bonifica dell'Agro romano nei suoi veri termini e che a me sembra possono essere riassunti nella *costruzione per opera dello Stato, nei riarsi e pur ricchi terreni dell'Agro, di una vasta rete di canali per la distribuzione di acque irriganti e, fra esse, anche di acqua di fogna, accoppiata ai più importanti lavori di sistemazione e di drenaggio delle zone meno favorevoli*, non si sarebbero spesi più di cento milioni, e si avrebbe ora nella zona dei 10 km. bonificabile, e, forse, anche già bonificata, una grandiosa opera di pubblico dominio, fruttifera nelle sue mediate, sociali conseguenze, giustificante eventualmente qualsiasi intervento costrittivo del diritto di proprietà da parte del Governo. Bisognava avere il coraggio di affrontare fin da principio una siffatta spesa, il che sarebbe stato certo possibile se non fosse mancata la chiaroveggenza che i fondi per essa si sarebbero potuti trarre da una fonte gratuita, dalla luce solare, introducendo nel bilancio delle aziende agricole romane, come ho voluto dimostrare nel mio lavoro, accanto agli altri conti, « terreno, mano d'opera, capitale », il conto « pianta »; sostituendo — mediante le modificazioni, riconosciute opportune e possibili, dell'ambiente —

([1]) Mentre in questo Agro romano ipotetico (cioè, bonificato) *una lira* di capitale-terreno è compensata da *lire sette e cent. 33* di sostanza fisiologicamente utilizzabile, nell'Agro romano reale *una lira* dello stesso capitale è invece compensata da *lire undici e cent. 92*. La differenza, in più, di *lire quattro e cent. 59* di utile per ogni lira di capitale impiegato, è la espressione del vantaggio che i proprietarî delle terre romane ritraggono dall'attuale stato di cose, e che giustifica il loro atteggiamento di fronte ai provvedimenti irrazionali con i quali si vuole mutare.

alle macchine viventi dell'agricoltura, attualmente in esercizio, macchine di maggiore resa.

Nè io potrei attenuare la tinta delle mie vedute pessimiste se avessi riguardo all'accoglienza che dal superiore Ministero è stata fatta alle molto modeste proposte concrete che, in seguito all'incarico avuto, era mio obbligo di presentare ([1]).

Dedotte, da un lato le deficienze che in relazione al fabbisogno alimentare delle piante coltivabili presentano il clima ed i terreni della Campagna romana; dall'altro, le caratteristiche della grande massa delle acque luride rifiutate dalla città; rilevato come queste riuscissero di felice complemento alle prime, era un'idea ovvia che si procurasse di smaltire le acque stesse attraverso i nostri campi irrigandoli e concimandoli a quel modo che si pratica in maggiori centri civili di Europa, da oltre quaranta anni a questa parte, con vantaggi economici ed igienici indiscutibili. E poichè, anche non volendo tener conto dei luminosi esempî d'utilizzazione agricola delle acque di fogna, non apparisse da alcuno dei punti di vista (finanziario, tecnico e scientifico) azzardata la mia proposta, mi limitai ad invocare un *esperimento* che nulla, o quasi nulla, sarebbe costato all'Amministrazione e che sarebbe valso, non solo a gettare il primo seme di un'opera promettente sotto ogni riguardo per l'avvenire dell'Agro, ma anche a stimolare ed interessare, con vantaggi resi tangibili, la opinione pubblica e l'iniziativa privata. Ma già due anni sono passati da quando presentai la mia relazione, ed il Tevere ha avuto ben agio di portare via con sè altri 10 milioni di materie concimanti. Il Ministero non ancora sembra essersi deciso a riparare ad un tale disastroso stato di cose e ciò, si direbbe quasi, dando prova di un'insipienza o di un malanimo che certo non possono riscuotere lode!

Così che, volendo riassumere in una forma ancora più concreta le conclusioni dei presenti miei studî (anche per non riuscire sospetto), faccio mia la chiusa del Sombart: « Pochi intelletti illuminati e retti, messi al posto conveniente; un « centinaio di milioni di lire: ecco il farmaco per far sorgere nuova vita dalle « rovine! ». E per ottenere questo (aggiungo di mio), in ultima analisi, non occorrerebbe che una cosa sola: *un Ministro coraggioso!*

([1]) R. Perotti, *Studio biologico dell'Agro romano in rapporto al suo bonificamento agrario.* Relazione a S. E. il ministro per l'agricoltura (Roma, 1911).

APPENDICE

Durante il tempo che dovette trascorrere fra la ultimazione della presente Memoria e la sua pubblicazione, è stata presentata alla Camera dei Deputati una ulteriore Relazione sullo stato dei lavori del bonificamento dell'Agro romano, al 30 giugno 1914 (¹).

Non trovo in detta Relazione alcun elemento per modificare i miei giudizî per quel che si riferisce al bonificamento agrario, molto più che quanto leggesi a pp. 96 e segg. della stessa Relazione conforta opportunamente le mie idee.

Del resto, le cifre delle tenute e delle relative superfici addotte per mettere in rilievo il progresso dei lavori non sono molto dissimili da quelle riferite nella Relazione del direttore generale a S. E. il ministro sullo stato dei lavori al 30 giugno 1915, ed è ovvio da ciò dedurre che, per quanto riguarda la sistemazione e l'ordinamento colturale delle aziende sottoposte a vincolo di bonifica, ci troviamo presso a poco al punto di prima.

Nello stesso frattempo ho dato alle stampe il mio *Progetto di depurazione ed utilizzazione industriale ed agricola delle acque di fognatura della città di Roma* (Tip. della Sapienza, Roma, 1913), studio di massima, che costituisce l'applicazione dei fatti naturali posti in rilievo nella precedente Memoria.

L'attuazione del progetto venne da me proposta alla iniziativa del Comune di Roma, straordinariamente allora retto dal gr. uff. Fausto Aphel, r. commissario; e, se i presenti grandiosi sconvolgimenti politici non avessero perturbato le condizioni economiche generali, avremmo potuto già salutare l'inizio di una grande, vera opera di bonifica agraria della campagna romana, della cui efficacia a nessuno sarebbe lecito di dubitare.

Le conclusioni, cui la speciale Commissione tecnico-igienista, nominata per l'esame del mio disegno, pervenne, sono riassunte nei seguenti termini (²):

« 1°) che sia da provvedersi senza indugio alla rimozione dall'Aniene degli scarichi diretti delle fogne che oggi vi si immettono, e che sia presentemente vantaggioso e, forse, in un non lontano avvenire, necessario di provvedere alla depurazione delle acque cloacali prima della loro immissione nel Tevere a valle di Roma;

« 2°) che sia conveniente di ottenere tale depurazione per mezzo della distribuzione delle acque cloacali a scopo di irrigazione;

(¹) Ministero di agric. ind. e comm., *Il bonificamento dell'agro romano: stato dei lavori al 30 giugno 1914*. Relazione presentata alla Presidenza della Camera dei deputati. Tip. Cuggiani, Roma 1915.

(²) Aphel F., *Sei mesi di amministrazione straordinaria del Comune di Roma*. Relazione presentata al Consiglio comunale. Tip. F. Centenari, Roma 1914.

« 3°) *che siano da approvarsi le direttive generali del disegno in esame* e « dell'aggiunta ad esso fatta dall'autore » [1].

La Commissione, di conseguenza, faceva voti:

« 1°) che l'Amministrazione comunale ponga a disposizione dei competenti « Ufficî municipali i fondi necessarî per eseguire le ricerche atte a determinare il « grado e l'estensione dell'inquinamento delle acque dei fiumi Aniene e Tevere a « valle degli sbocchi delle fogne cittadine;

« 2°) che l'Amministrazione comunale stessa, come equivalente delle spese « che dovrebbe altrimenti sostenere per la depurazione, con altro sistema, delle acque « cloacali, all'opera in esame deliberi di contribuire con un sussidio annuo;

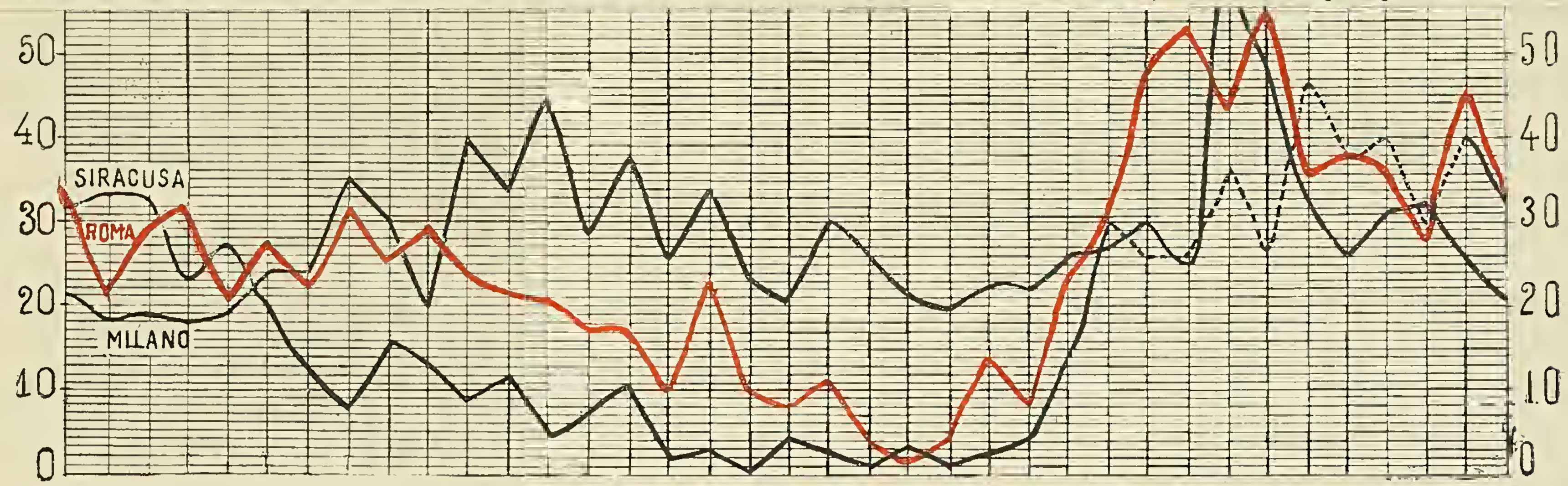
« 3°) che l'Amministrazione comunale, infine, voglia promuovere l'interessa- « mento e l'accordo di tutti gli enti interessati a provvedere ad un razionale smal- « timento delle acque luride della città ed alla irrigazione delle terre dell'Agro « romano ».

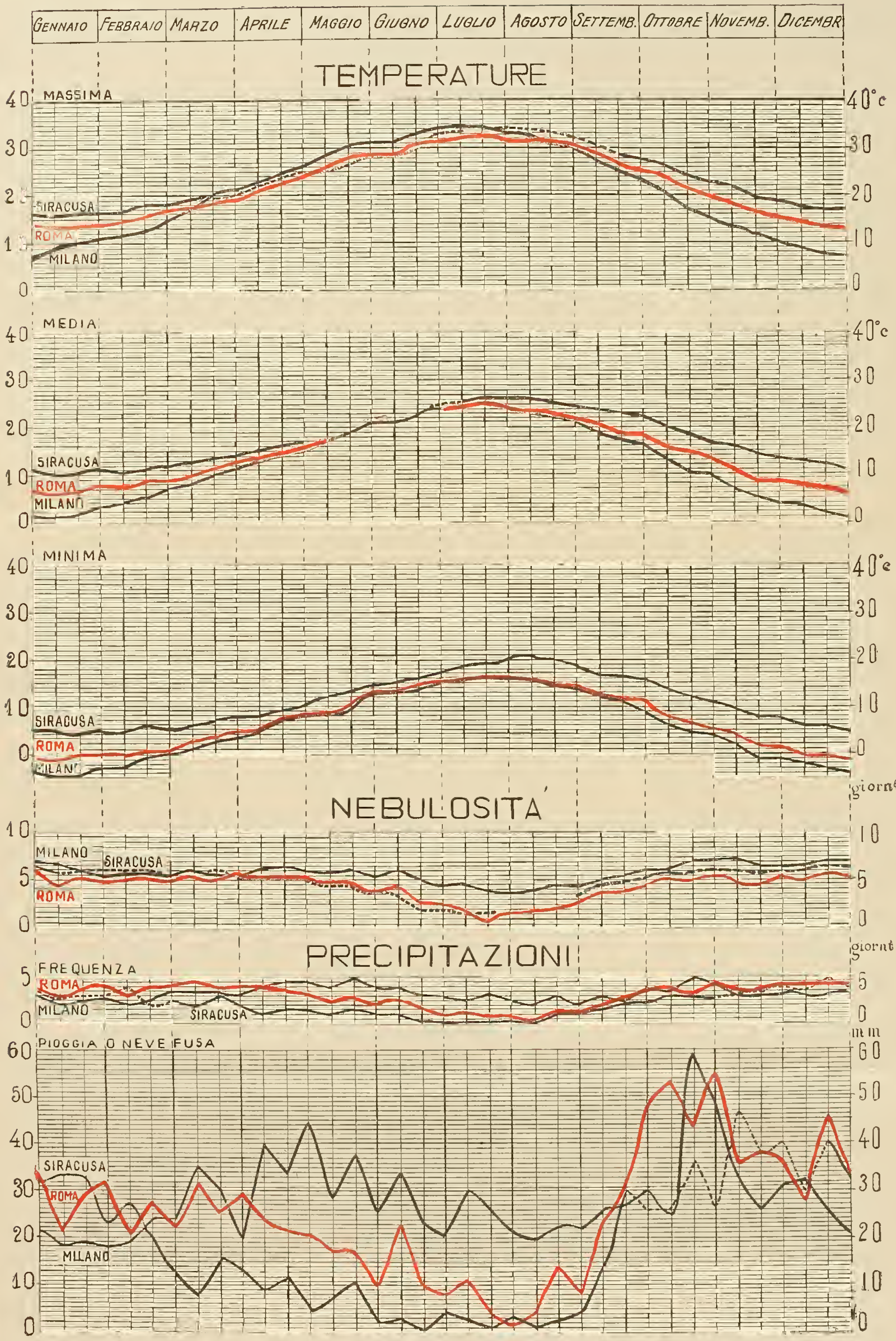
I lusinghieri giudizî emessi dalla stessa Commissione nell'approvare il mio progetto che venne, adunque, riconosciuto, oltre che d'indiscutibile pubblica utilità, di improrogabile necessità di attuazione (giudizî resi di pubblica ragione), mi compensano ad usura di quelli emessi a tutt'oggi dalla *Commissione di vigilanza per la bonifica dell'Agro romano*.

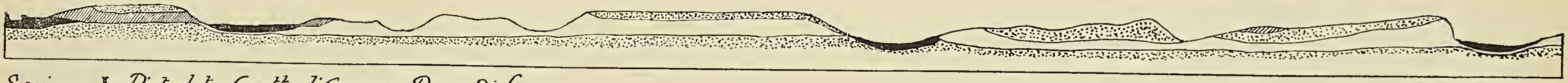
Ma alcuni uomini sono in questa mutati, ed è appunto ciò che mi lascia grandemente sperare che la mia iniziativa venga riconosciuta meritevole, non di ostacoli, bensì d'incoraggiamenti larghi ed aiuti fecondi, essendo io da mia parte disposto, a vantaggio pubblico ed a tutela del modesto ma geloso patrimonio del mio lavoro, a perseguire il mio ideale con ogni tenacia ed a qualunque costo.

[1] Questa aggiunta, non ancora resa di pubblica ragione, riguarda l'ampliamento della zona irrigua, con l'impianto di due stazioni di pompa secondarie nei pressi della stazione ferroviaria di Maccarese e dei prati di Spinaceto, il che sarebbe possibile di ottenere senza aumento delle spese, nel progetto preventivate in L. 3.593.276,00.

R. Perotti.

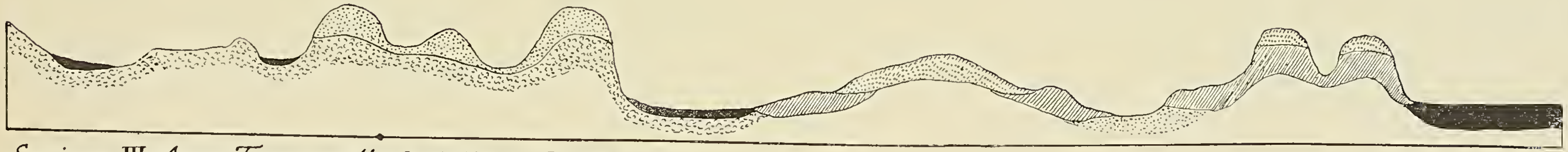

50
40
30
20
10
0
SIRACUSA
ROMA
MILANO
50
40
30
20
10
0


GENNAIO FEBBRAIO MARZO APRILE MAGGIO GIUGNO LUGLIO AGOSTO SETTEMB. OTTOBRE NOVEMB. DICEMBR.
TEMPERATURE
MASSIMA
SIRACUSA
ROMA
MILANO
MEDIA
MINIMA
NEBULOSITÀ
PRECIPITAZIONI
FREQUENZA
PIOGGIA O NEVE FUSA
giorni
mm
40°c



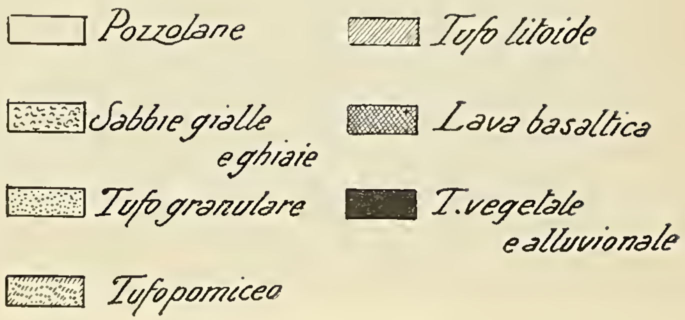
Sezione I - Pietralata - Grotte di Gregna - Bocca di Leone -

Sezione II - Tor Carbone - S.ta Maria Nuova - Romavecchia - Quadraro -



Sezione III - Acqua Traversa - Monte dell'Ara - Grottarossa -

Sezione IV - Acquatraversa - Sepolcro di Nerone - Ospedaletto

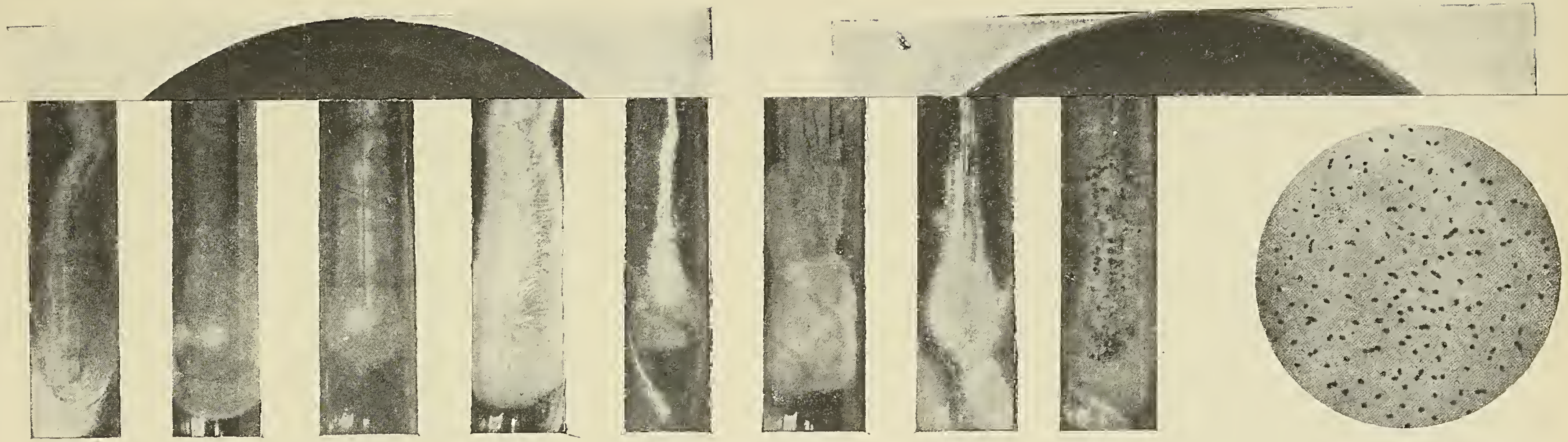


SCHEMA DI CARTA AGRONOMICA DELL'AZOTO DELLA CAMPAGNA ROMANA

contenuto in azoto di 101-125 mg. %
» » 50-100 »
» » 126-150 »
» » 151-200 »
» » superiore a 200 »

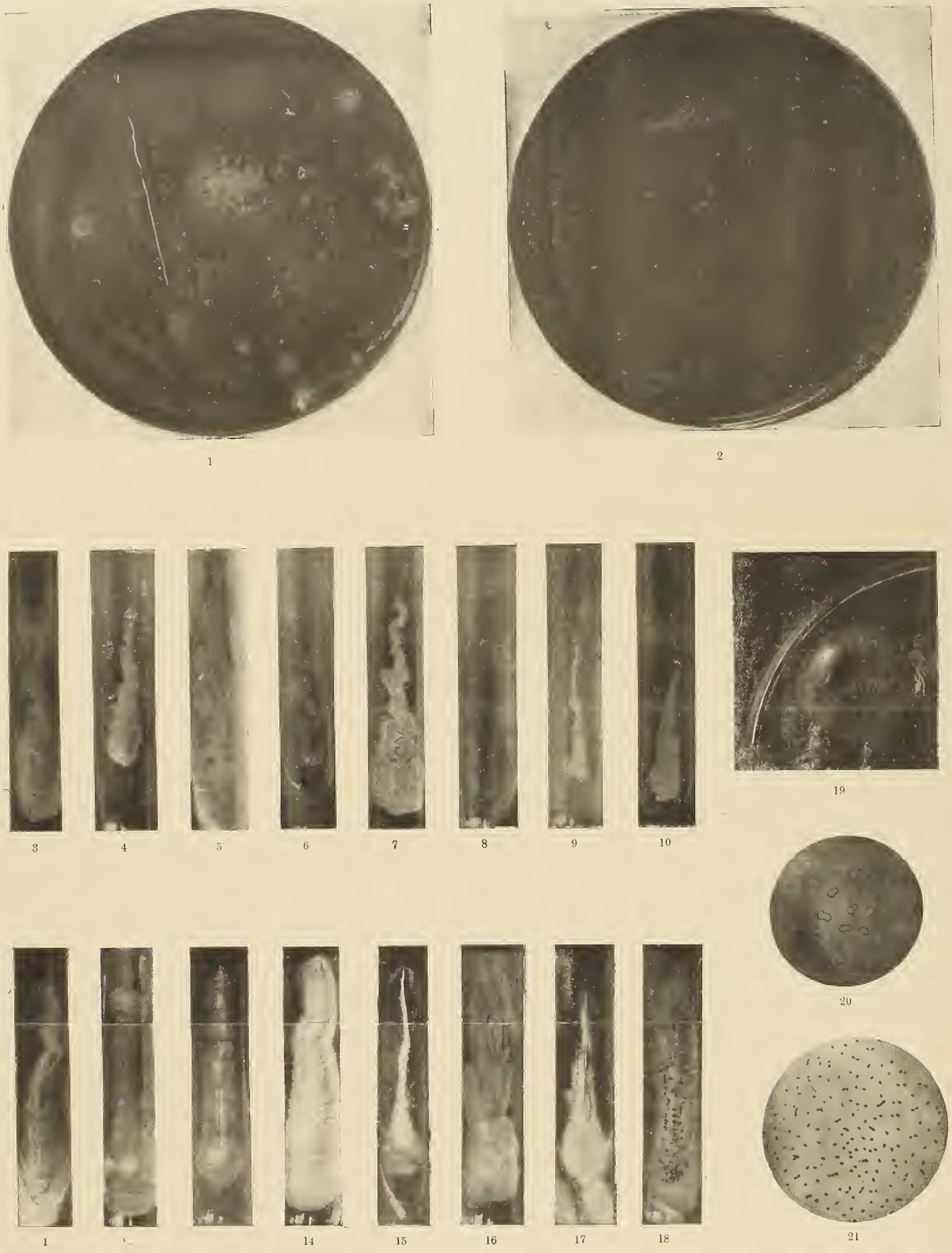
SCHEMA DI CARTA AGRONOMICA DELLA SOSTANZA ORGANICA NELLA CAMPAGNA ROMANA

contenuto	in sostanza	organica del	0-5	gr. %
»	»	»	5-7,5	»
»	»	»	7,5-10	»
»	»	»	10-12,5	»



1 1 14 15 16 17 18 21

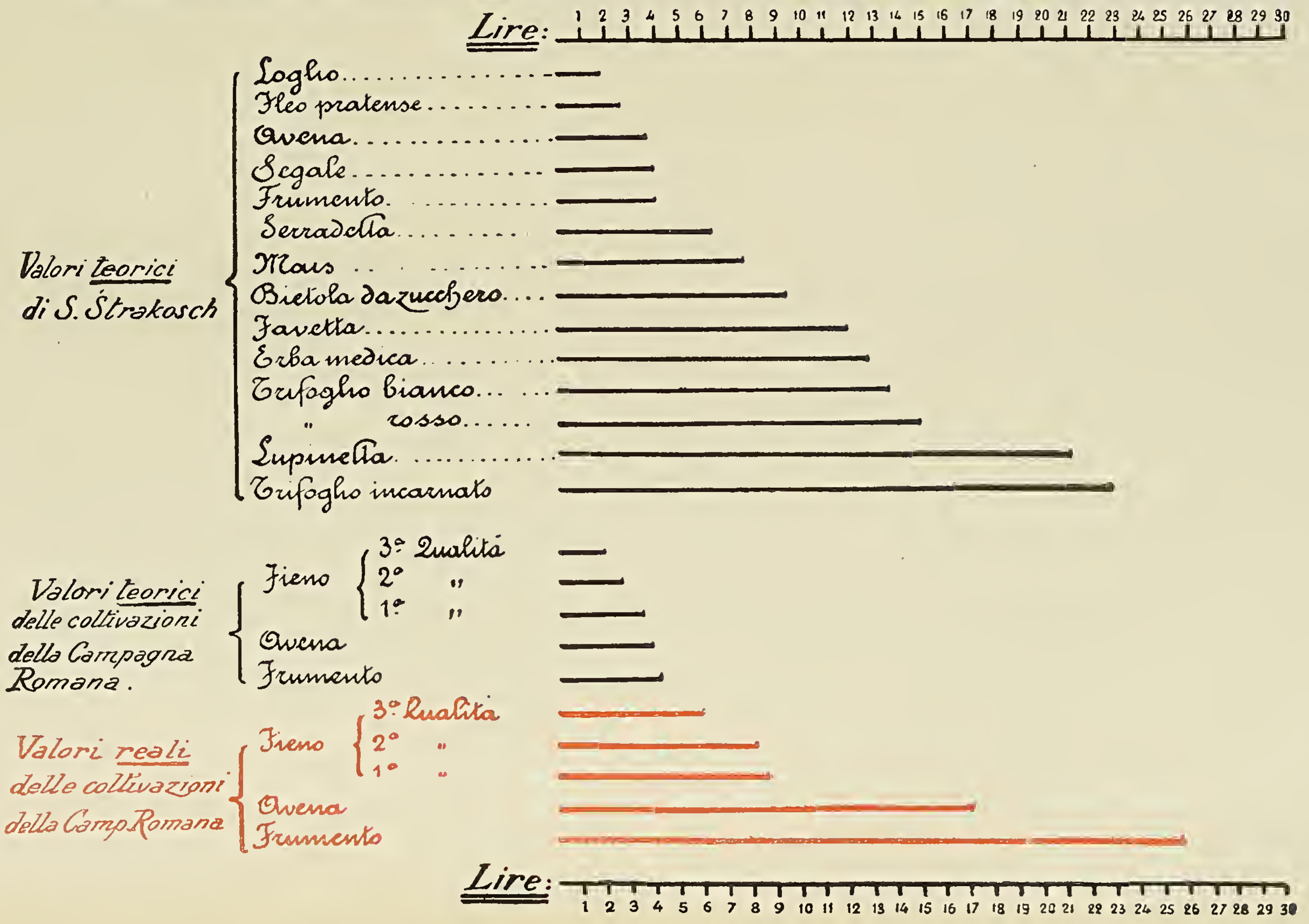
1. Cultura a piatto. di venti giorni, su agar all'estratto di torba inoculato con terreno tufaceo di Boccone. — 2. Idem da terreno di pozzolanelle di Romavecchia. — 3. *Bac. fluorescens liquef.* (1) su agar di fagiuoli. — 4. *Bac. fluorescens liquef.* (3) su agar di fagiuoli. — 5. *Bac. fluorescens liquef.* (7) su agar di fagiuoli. — 6. *Sarcina lutea* su agar di fagiuoli. — 7. *Bac. subtilis* su agar di fagiuoli. — 8. Forma B. su agar di fagiuoli. — 9. Forma C. su agar Beyerinck. — 10. ***Bacillus citreus*** su agar nutritivo. — 11. *Penicillium glaucum* su agar di fagiuoli. — 12. Forma F. su agar di fagiuoli. — 13. Forma F. su agar Beyerinck. — 14 *Fusarium* su agar di fagiuoli. — 15. *Fusarium* su agar Beyerinck. — 16. *Cladosporium* su agar di fagiuoli. — 17. Forma G. su agar al peptone. — 18. Forma G. su agar di fagiuoli. — 19. *Penicillium glaucum* su piastra all'agar di fagiuoli. — 20. *Azotobacter chroococcum* da terreni della campagna romana (ingrand. 800 diam.). — 21. *Pseudomonas leuconitrophyla* (ingrand. 800 diam.).



1. Cultura a piatto, di venti giorni, su agar all'estratto di torba inoculato con terreno tufaceo di Boccone. — 2. Idem da terreno di pozzolanelle di Romavecchia. — 3. *Bac. fluarescens liquef* (1) su agar di fagiuoli — 4 *Bac. fluorescens liquef.* (3) su agar di fagiuoli. — 5. *Bac. fluorescens liquef.* (7) su agar di fagiuoli. — 6. *Sarcina lutea* su agar di fagiuoli. — 7. *Bac. subtilis* su agar di fagiuoli. — 8. Forma B. su agar di fagiuoli. — 9. Forma C. su agar Beyerinck. — 10. *Bacillus citreus* su agar nutritivo. — 11. *Penicillium glaucum* su agar di fagiuoli — 12. Forma F. su agar di fagiuoli. — 13. Forma F. su agar Beyerinck. — 14 *Fusarium* su agar di fagiuoli. — 15. *Fusarium* su agar Beyerinck. — 16. *Clodosporium* su agar di fagiuoli. — 17. Forma G. su agar al peptone. — 18. Forma G. su agar di fagiuoli. — 19. *Penicillium glaucum* su piastra all'agar di fagiuoli. — 20. *Azatobacter chroococcum* da terreni della campagna romana (ingrand. 800 diam.). — 21. *Pseudomonas leucanitrophyla* (ingrand. 800 diam.).

Con il prelevamento di una Lira di elementi nutritivi del terreno

le diverse piante coltivate producono un valore di sostanza fisiologicamente utilizzabile di



Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª Transunti.
2ª Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — Transunti. Vol. I-VIII. (1876-84).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — Rendiconti. Vol. I-VII. (1884-91).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — Rendiconti *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali* Vol. I-XXV. (1892-1916). Fasc. 9°. Sem. 1°.
Rendiconti *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XXIV. (1892-1915).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XI. Fasc. 8.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XII. Vol. XIV. Vol. XV. Fasc. 1-2.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia è di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

Ermanno Loescher & C.° — *Roma, Torino e Firenze.*
Ulrico Hoepli. — *Milano, Pisa e Napoli.*

MEMORIE DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

(Anno CCCXIII 1916)

Serie Quinta — Volume XI — Fascicolo IX.

PIETRO BLASERNA

SOPRA UN GRUPPO DI NUOVE TRASCENDENTI

DELLA FORMA GENERALE

$$\Phi_r(u) = \lim_{k=\infty} \left\{ \log k - \sum_{0}^{k} {}_h \frac{(h+1)^{r-1}}{(h+u)^r} \right\}.$$

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1916

P. Blaserna, *Sopra un gruppo di nuove trascendenti ecc.*

				ERRATA	CORRIGE
Pag.	561	linea	7	$\sum_0^k h \frac{1}{1+u}$	$\sum_0^k h \frac{1}{h+u}$
»	562	»	6	intero	intero.
»	573	»	8	$\frac{2.5}{2.6} n^2 S_3^{(n)}$	$\frac{2.5}{3.6} n^2 S_3^{(n)}$
»	595	»	6	Pr	Per
»	597	»	26	$u+\varrho$	$r+\varrho$

Sopra un gruppo di nuove trascendenti della forma generale

$$\Phi_r(u) = \lim_{k=\infty} \left\{ \log k - \sum_0^k {}_h \frac{(h+1)^{r-1}}{(h+u)^r} \right\}.$$

Memoria del Socio PIETRO BLASERNA

letta nella seduta del 4 giugno 1916

INTRODUZIONE.

In una Memoria, inserita negli Atti della R. Accademia dei Lincei ([1]), ho esaminato l'andamento e le proprietà della trascendente

$$\Phi(u) = \lim_{k=\infty} \left\{ \log k - \sum_0^k {}_h \frac{h+1}{(h+u)^2} \right\}$$

nei suoi rapporti colle funzioni Γ e Z. Quest'ultima, già studiata dal Gauss e dal Legendre, è data dalla relazione

$$Z(u) = \lim_{k=\infty} \left\{ \log k - \sum_0^k {}_h \frac{1}{1+u} \right\},$$

u essendo (nell'una e nell'altra) una variabile indipendente che può assumere qualsiasi valore reale e complesso.

Le due trascendenti sono casi speciali di una funzione generale

$$\Phi_r(u) = \lim_{k=\infty} \left\{ \log k - \sum_0^k {}_h \frac{(h+1)^{r-1}}{(h+u)^r} \right\}$$

e corrispondono rispettivamente ai valori di $r=2$ e di $r=1$, per cui devono trascriversi nel modo seguente:

$\Phi_1(u)$ al posto di $Z(u)$

$\Phi_2(u)$ " " " $\Phi(u)$.

Nella presente Memoria mi propongo di studiare l'andamento e le proprietà della funzione generale, la quale conserva un significato preciso per tutti i valori reali o complessi di u e di r. La sua forma più generale corrisponde quindi al simbolo

$$\Phi_{p+q\sqrt{-1}}\left(u + v\sqrt{-1}\right),$$

in cui p, q, u, v sono quantità reali, d'altronde arbitrarie.

([1]) Vedi Memorie della R. Accademia dei Lincei, ser. V, vol. I, anno 1894.

PARTE PRIMA.

Le funzioni $\Phi_r(u)$ coll'indice r reale, positivo e intero.

1. Poniamo

$$\Phi_r(u) = \lim_{k=\infty} \left\{ \log k - \sum_0^k {}_h \frac{(h+1)^{r-1}}{(h+u)^r} \right\} \qquad 1)$$

in cui u rappresenti una variabile reale e positiva, r un indice reale. positivo e intero La serie che qui figura è divergente, e la funzione si presenta nella forma indeterminata $\infty - \infty$. Ponendo $u = 1$, si ha

$$\Phi_r(1) = \lim_{k=\infty} \left\{ \log k - \sum_0^k {}_h \frac{1}{h+1} \right\} = -\text{A}\,. \qquad 1_1)$$

dove A rappresenta la costante, già calcolata dal Mascheroni e ricalcolata dal Gauss,

$$\text{A} = 0{,}577\ 215\ 664\ 901\ 532\ 860\ 606\ 512\ldots,$$

costante tanto frequente in questo ramo d'analisi. Sottraendo la 1_1) dalla 1), si ha

$$\Phi_r(u) = -\text{A} + \sum_0^\infty {}_k \frac{(k+u)^r - (k+1)^r}{(k+1)(k+u)^r}\,. \qquad 2)$$

La convergenza di questa nuova serie è facile a dimostrarsi, per valori finiti e reali, positivi e interi di r (¹) e per valori finiti, reali e positivi di u (²). che qui si contemplano. Basta considerare che

$$(k+u)^r - (k+1)^r =$$
$$= (u-1) \left\{ (k+u)^{r-1} + (k+1)(k+u)^{r-2} + \cdots (k+1)^{r-2}(k+u) + (k+1)^{r-1} \right\}.$$

per cui la (2) prende la forma

$$\Phi_r(u) = -\text{A} + (u-1) \sum_0^\infty {}_k \left\{ \frac{(k+1)^{-1}}{k+u} + \frac{(k+1)^0}{(k+u)^2} + \cdots \frac{(k+1)^{r-3}}{(k+u)^{r-1}} + \frac{(k+1)^{r-2}}{(k+u)^r} \right\}. \qquad 3)$$

Sono r termini, rappresentati da serie infinite, tutte convergenti. Per cui la funzione $\Phi_r(u)$ è una quantità finita, fino a che r rimanga un numero finito e intero.

(¹) Per valori finiti e reali, ma non interi di r, vedi parte II, n. 5.

(²) Per i casi speciali $u = \infty$ e $u \leqq 0$, vedi i numeri successivi 6 e 9.

Vogliamo ora esaminare il significato che acquista l'espressione 3) quando, per $r=\infty$, la serie divenga infinita. La differenza tra due termini consecutivi nella serie 3) è

$$(u-1)\sum_0^{\infty}{}_k\frac{(k+1)^{r-3}}{(k+u)^r}.$$

Per $0<u<1$, essa è negativa; quindi la serie è crescente e divergente. Per $u>1$, essa è positiva; quindi la serie è decrescente, e pur non di meno, divergente.

Per persuadersene, basta esaminare se si verifica la nota condizione di divergenza

$$\lim_{r=\infty}\left\{r\sum_0^{\infty}{}_k\frac{(k+1)^{r-2}}{(k+u)^r}\right\}>0. \tag{4}$$

In questa figura la serie decrescente

$$\sum_0^{\infty}{}_k\frac{(k+1)^{r-2}}{(k+u)^r}=\lim_{k=\infty}\left\{\frac{1^{r-2}}{u^r}+\frac{2^{r-2}}{(1+u)^r}+\cdots\frac{(k+1)^{r-2}}{(k+u)^r}\right\}.$$

A questa sostituiamo un'altra,

$$\lim_{k=\infty}\left\{\frac{(k+1)^{r-1}}{(k+u)^r}\right\}=\lim_{k=\infty}\left\{\frac{(k+1)^{r-2}}{(k+u)^r}+\cdots\frac{(k+1)^{r-2}}{(k+u)^r}\right\},$$

la cui somma è minore della prima, perchè, trattandosi di serie decrescenti con soli termini positivi, nella seconda serie ogni termine è più piccolo del termine corrispondente nella prima. Sostituendo nella 4), abbiamo

$$\lim_{r=\infty}\left\{r\sum_0^{\infty}{}_k\frac{(k+1)^{r-2}}{(k+u)^r}\right\}>\lim_{k=\infty}^{r=\infty}\left\{r\frac{(k+1)^{r-1}}{(k+u)^r}\right\}=\lim_{k=\infty}^{r=\infty}\left\{\frac{r}{k+1}\frac{\left(1+\frac{1}{k}\right)^r}{\left(1+\frac{u}{k}\right)^r}\right\},$$

e, considerando che

$$\lim r\left\{\log\left(1+\frac{1}{k}\right)-\log\left(1+\frac{u}{k}\right)\right\}=-(u-1)\lim\left(\frac{r}{k}\right),$$

anche

$$\lim_{r=\infty}\left\{r\sum_0^{\infty}{}_k\frac{(k+1)^{r-2}}{(k+u)^r}\right\}>\lim_{k=\infty}^{r=\infty}\left\{\frac{r}{k+1}e^{-(u-1)\frac{r}{k}}\right\}. \tag{4,}$$

Esaminando la relazione (3), si vede che r e k, seguendo il medesimo andamento, procedono all'infinito mercè la successione naturale dei numeri interi. Ne segue che

$$\lim\left(\frac{r}{k+1}\right)=\lim\left(\frac{r}{k}\right)=1,$$

per cui la 4,) si riduce a

$$\lim_{r=\infty}\left\{r\sum_0^{\infty}{}_k\frac{(k+1)^{r-2}}{(k+u)^r}\right\}>e^{-(u-1)}>0 \tag{4,,}$$

per tutti i valori finiti di u. Ne segue che la condizione 4) rimane soddisfatta;

per cui è dimostrata la divergenza della serie 3) per il caso di $r=\infty$ e per tutti i valori finiti di u.

Nel caso speciale di $u=1$, i singoli termini della 3) si riducono a

$$\sum_0^\infty{}_k \frac{1}{(k+1)^2}=\frac{\pi^2}{6};$$

e ponendo $u=1\pm\varepsilon$, dove per ε s'intende una quantità positiva, infinitamente decrescente, si ha

$$\lim_{\substack{\varepsilon=0\\ r=\infty}} \{\Phi_r(1\pm\varepsilon)\} = -\,\mathrm{A}\pm\frac{\pi^2}{6}\lim_{\substack{\varepsilon=0\\ r=\infty}}\{\varepsilon r\}.$$

I valori ε e r sono arbitrarii e interamente indipendenti l'uno dall'altro. Ne segue che l'espressione $\pm\lim(\varepsilon r)$ può assumere qualsiasi valore compreso tra $+\infty$ e $-\infty$. Riassumendo questi risultati, si trova che

$$\text{per}\quad u>1\quad \lim_{r=\infty}\{\Phi_r(u)\}=+\infty$$
$$\text{„}\quad 0<u<1\quad \text{„}\quad -\infty$$

e che, per $u=1$, questa funzione assume tutti i valori compresi tra $+\infty$ e $-\infty$.

2. L'equazione 1), in cui r rappresenta per ora numeri positivi e interi, ed u numeri positivi, costituisce un gruppo di trascendenti, che hanno per $u=1$ un valore comune $-\mathrm{A}$. Esistono, fra di esse, relazioni molto semplici.

Moltiplicando la 1) per $(u-1)^r$ e derivando tale prodotto rispetto ad u, si ha la relazione

$$\Phi_{r+1}(u)=\Phi_r(u)+\frac{u-1}{r}\Phi'_r(u), \tag{5}$$

dove per $\Phi'_r(u)$ s'intende la derivata di $\Phi_r(u)$ rispetto ad u. Essendo

$$\Phi'_r(u)=r\sum_0^\infty{}_k\frac{(k+1)^{r-1}}{(k+u)^{r+1}}, \tag{6}$$

la 5) prende anche la forma

$$\Phi_{r+1}(u)=\Phi_r(u)+(u-1)\sum_0^\infty{}_k\frac{(k+1)^{r-1}}{(k+u)^r}, \tag{7}$$

ove l'equazione è definita da una serie convergente. Essa fornisce una relazione molto semplice tra due funzioni $\Phi(u)$ dall'indice successivo, e, invertita, esprime la somma di quella serie infinita mediante la differenza di queste due funzioni. Così, per $r=1,2,3$ ecc., si hanno rispettivamente le relazioni

$$\Phi_2(u)-\Phi_1(u)=(u-1)\left\{\frac{1}{u^2}+\frac{1}{(1+u)^2}+\frac{1}{(2+u)^2}+\cdots\text{inf.}\right\}$$

$$\Phi_3(u)-\Phi_2(u)=(u-1)\left\{\frac{1}{u^3}+\frac{2}{(1+u)^3}+\frac{3}{(2+u)^3}+\cdots\ \text{„}\right\}$$

$$\Phi_4(u)-\Phi_3(u)=(u-1)\left\{\frac{1}{u^4}+\frac{4}{(1+u)^4}+\frac{9}{(2+u)^4}+\cdots\ \text{„}\right\}$$

ecc.

Alla 5) si può anche dare forma diversa. Considerando che

$$\frac{d}{du}\{(u-1)^r \Phi_r(u)\} = r(u-1)^{r-1}\left\{\Phi_r(u) + \frac{u-1}{r}\Phi'_r(u)\right\} = r(u-1)^{r-1}\Phi_{r+1}(u).$$

si ha

$$\Phi_{r+1}(u) = \frac{1}{r(u-1)^{r-1}}\frac{d}{du}\{(u-1)^r \Phi_r(u)\}. \qquad 8)$$

Così, ponendo $r = 1, 2, 3$ ecc., si ha

$$\begin{aligned} \Phi_2(u) &= \frac{1}{1(u-1)^0}\frac{d}{du}\{(u-1)\,\Phi_1(u)\} \\ \Phi_3(u) &= \frac{1}{2(u-1)}\frac{d}{du}\{(u-1)^2\Phi_2(u)\} \qquad 8_{,}) \\ \Phi_4(u) &= \frac{1}{3(u-1)^2}\frac{d}{du}\{(u-1)^3\Phi_3(u)\} \end{aligned}$$

ecc.

La prima di queste relazioni è nota, perchè ha servito a dedurre le proprietà della $\Phi_2(u)$ da quelle della $\Phi_1(u)$ (1).

Ponendo nella 5), successivamente, $r = 1$, $r = 2$, ... $r = r$, e sommando insieme, si ha

$$\Phi_{1+r}(u) = \Phi_1(u) + (u-1)\left\{\Phi'_1(u) + \frac{1}{2}\Phi'_2(u) + \cdots \frac{1}{r}\Phi'_r(u)\right\}$$

ed anche 9)

$$\Phi_{n+r}(u) = \Phi_n(u) + (u-1)\left\{\frac{1}{n}\Phi'_n(u) + \frac{1}{n+1}\Phi'_{n+1}(u) + \cdots \frac{1}{n+r-1}\Phi'_{n+r-1}(u)\right\}$$

che, in causa della (6), prendono anche la forma, rispettivamente,

$$\begin{aligned} \Phi_{1+r}(u) &= \Phi_1(u) + \sum_0^\infty {}_k \frac{(k+u)^r - (k+1)^r}{(k+u)^{1+r}} \\ \Phi_{n+r}(u) &= \Phi_n(u) + \sum_0^\infty {}_k (k+1)^{n-1}\frac{(k+u)^r - (k+1)^r}{(k+u)^{n+r}} \end{aligned} \qquad 9_{,})$$

relazioni bene definite da serie convergenti.

Finalmente, scrivendo nella (7) successivamente $r, r+1, \ldots r+n-1$, al posto di r; moltiplicando rispettivamente le singole equazioni per

$$\binom{n-1}{0},\ -\binom{n-1}{1},\ \ldots,\ (-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1}$$

(1) Vedi Memoria citata, pag. 500, formola 2) e seguenti.

e sommando tutto insieme, si ha la doppia relazione elegante

$$\sum_0^n{}_i (-1)^i \binom{n}{i} \Phi_{r+i}(u) = -(u-1)^n \sum_0^\infty{}_k \frac{(k+1)^{r-1}}{(k+u)^{r+n}} =$$

$$= (1-u)^n \frac{(r-1)!}{(r+n-1)!} \Phi_1^{(n)}(u) . \qquad 9_{,,})$$

Per $r=1$, la serie infinita che qui figura prende la forma semplice

$$\sum_0^\infty{}_k \frac{1}{(k+u)^{n+1}} = \frac{1}{u^{n+1}} + \frac{1}{(1+u)^{n+1}} + \frac{1}{(2+u)^{n+1}} + \cdots \text{inf.} ;$$

e si vede che la sua somma può essere espressa, sia mediante un polinomio caratteristico, del grado n, di funzioni $\Phi_r(u)$ dall'indice successivo, sia mediante la derivata di $\Phi_1(u)$ presa n volte rispetto ad u (¹). La relazione $9_{,,})$ acquista una importanza anche maggiore dal fatto che, per ragioni che si vedranno in seguito, essa vale anche per valori frazionari e irrazionali di r; per cui il problema della sommazione della serie infinita, che figura in $9_{,,})$, è definitivamente risoluto.

3. Prendiamo come punto di partenza nuovamente la (5) e scriviamo in essa successivamente r, $r+1$, $r+2$, ... al posto di r. Con successive derivazioni rispetto ad u, si hanno le relazioni

$$\Phi_{r+1}(u) = \Phi_r(u) + \frac{u-1}{r} \Phi'_r(u)$$

$$\Phi_{r+2}(u) = \Phi_r(u) + 2\frac{u-1}{r} \Phi'_r(u) + \frac{(u-1)^2}{r(r+1)} \Phi''_r(u)$$

$$\Phi_{r+3}(u) = \Phi_r(u) + 3\frac{u-1}{r} \Phi'_r(u) + 3\frac{(u-1)^2}{r(r+1)} \Phi''_r(u) + \frac{(u+1)^3}{r(r+1)(r+2)} \Phi'''_r(u)$$

ecc.

La legge dello svolgimento è chiara, per cui si ha

$$\Phi_{r+n}(u) = \sum_0^n{}_i \frac{(r-1)!}{(r+i-1)!} \binom{n}{i} (u-1)^i \Phi_r^{(i)}(u) , \qquad 10)$$

dove n è un numero intero e positivo, e per $\Phi^{(i)}(u)$ s'intende la derivata di $\Phi_r(u)$, presa i volte rispetto ad u. Per $n=1$ si ritorna naturalmente alla 5); all'incontro, per $r=1$, si ha

$$\Phi_{1+n}(u) = \sum_0^n{}_i \frac{1}{i!} \binom{n}{i} (u-1)^i \Phi_1^{(i)}(u) . \qquad 11)$$

Le relazioni 10) e 11) dimostrano come si possa sempre calcolare una funzione

(¹) La somma di quella serie mediante derivate di $\Phi_1(u)$ fu già data dal Gauss (Werke, vol. III, pag. 153).

$\Phi_{r+n}(u)$ o $\Phi_{1+n}(u)$, quante volte si conoscano la funzione $\Phi_r(u)$ o la $\Phi_1(u)$ e le sue successive derivate. La relazione 10) può anche svolgersi direttamente, partendo dalla equazione fondamentale 1), scrivendovi $r+n$ al posto di r e dandole la forma

$$\Phi_{r+n}(u) = \lim_{k=\infty} \left\{ \log k - \sum_0^k{}_k \frac{(h+1)^{r-1}}{(h+u)^r} \left(1 - \frac{u-1}{h+u}\right)^n \right\}.$$

Svolgendo il binomio coll'esponente n e sostituendo i valori delle singole derivate di $\Phi_r(u)$, si arriva senz'altro alla formola 10). Questo secondo modo di sviluppo è più interessante del primo, perchè vale anche per valori frazionarî di n. Soltanto, si ha allora una serie infinita, per la cui convergenza si richiede che $\frac{u-1}{k+u} < 1$, ossia che $\frac{u-1}{u} < 1$, $k=0$ essendo uno dei possibili valori di k. Questa condizione di convergenza è soddisfatta da tutti i valori positivi, finiti, di u. Scrivendo, con questa avvertenza, ϱ invece di n, per esprimere meglio il caso di una quantità frazionaria, la 10) si trasforma in

$$\Phi_{r+\varrho}(u) = \sum_0^\infty{}_i \frac{(r-1)!}{(r+i-1)!} \binom{\varrho}{i} (u-1)^i \, \Phi_r^{(i)}(u), \qquad 10,)$$

dove r rappresenta il numero intero della frazione $r+\varrho$. Ma, per ragioni che meglio si vedranno nella seconda parte di questa Memoria, la 10,) vale anche per valori frazionarî di r. Scriviamo dunque, in questo caso, ϖ invece di r; la 10,) prende la forma

$$\Phi_{\varpi+\varrho}(u) = \Phi_\varpi(u) + \frac{1}{1!}\frac{\varrho}{\varpi}(u-1)\,\Phi'_\varpi(u) +$$

$$+ \frac{1}{2!}\frac{\varrho(\varrho-1)}{\varpi(\varpi+1)}(u-1)^2\,\Phi''_\varpi(u) + \cdots \text{inf.} \qquad 10,,)$$

e questa relazione permette di dedurre una funzione $\Phi_{\varpi+\varrho}(u)$, con un indice frazionario qualsiasi, da un'altra $\Phi_\varpi(u)$ coll'indice frazionario e dalle sue successive derivate. La serie 10,,), come l'analoga in 10,), rimane convergente per tutti i valori positivi, finiti di u, purchè anche ϖ e ϱ siano finiti. Il che si dimostra direttamente, considerando che (a queste condizioni e a parte il segno) il termine generale della serie, diviso per il termine precedente, ha un limite inferiore all'unità e precisamente $= \frac{u-1}{u}$.

4. Le funzioni $\Phi_r(u)$ hanno, come le $\Phi_1(u)$ e $\Phi_2(u)$, un polinomio caratteristico per tutti i valori finiti, positivi, interi di r; e tale polinomio consta di $r+1$ termini per funzioni n successive, n essendo un numero finito, positivo e intero. Per dimostrarlo, partiamo dalla definizione 1) e scriviamo

$$\Phi_r(u) = \lim_{k=\infty} \left\{ \log k - \sum_9^{n-1}{}_h \frac{(h+1)^{r-1}}{(h+u)^r} - \sum_n^k{}_h \frac{(h+1)^{r-1}}{(h+u)^r} \right\}.$$

Poniamo ora, nella 1), $u+n$ al posto di u, $h-n$ al posto di h, e scriviamola nel modo seguente:

$$\Phi_r(u+n)=\lim_{k=\infty}\left\{\log k-\sum_0^k{}_h\frac{(h+1-n)^{r-1}}{(h+u)^r}-\sum_{k+1}^{k+n}{}_h\frac{(h+1-n)^{r-1}}{(h+n)^r}\right\}.$$

Sottraendo la seconda dalla prima espressione e considerando che, in termine generale,

$$\sum_{k+1}^{k+n}{}_h\frac{(h+1-n)^{r-1}}{(h+u)^r}=\frac{(k+2-n)^{r-1}}{(k+1-u)^r}+\frac{(k+3-n)^{r-1}}{(k+2+u)^r}+\cdots\frac{(k+1)^{r-1}}{(k+n+u)^r}$$

per cui si hanno n termini, ciascuno dei quali, per $k=\infty$, si riduce a 0, si ottiene

$$\Phi_r(u)-\Phi_r(u+n)=-\sum_0^{n-1}{}_k\frac{(k+1)^{r-1}}{(k+u)^r}-\sum_n^\infty{}_k\frac{(k+1)^{r-1}-(k+1-n)^{r-1}}{(k+u)^r}. \quad 12)$$

Delle due Σ, che figurano in questa relazione, la prima è finita, la seconda infinita, ma convergente; per cui tutta l'espressione rimane finita. Ponendo per u successivamente $u, u+n, \ldots u+\overline{r-1}.n$, e per k rispettivamente $k, k-n, \ldots k-\overline{r-1}.n$; adottando per brevità il simbolo

$$\sum_a^b{}_k\frac{(k+1-in)^{r-1}}{(k+u)^r}=\sum_a^b(i) \quad 13)$$

dove per i s'intende un numero d'ordine, che va da 0 fino a r, si ha il quadro

$$\begin{array}{lll}
\Phi_r(u) & -\Phi_r(u+n) & =-\sum_0^{n-1}(0)-\sum_n^{2n-1}[(0)-(1)]-\cdots-\sum_{rn}^\infty[(0)-(1)]\\
\Phi_r(u+n) & -\Phi_r(u+2n)= & \quad -\sum_n^{2n-1}(1)\quad -\cdots-\sum_{rn}^\infty[(1)-(2)]\\
\cdots & \cdots & \cdots \\
\Phi_r(u+\overline{r-1}.n) & -\Phi_r(u+rn)= & \quad -\sum_r^\infty[(r-1)-(r)].
\end{array} \quad 14)$$

Sono r equazioni, che vanno moltiplicate rispettivamente per $\binom{r-1}{0}, -\binom{r-1}{1}\ldots$ $(-1)^{r-1}\binom{r-1}{r-1}$ e devono poi essere sommate per colonne verticali.

Il primo membro prende la forma del polinomio caratteristico

$$\sum_0^r{}_i(-1)^i\binom{r}{i}\Phi_r(u+in). \quad 15)$$

Nel secondo membro, sempre sommando per colonne verticali, si hanno, in primo luogo, r colonne con somme finite; in secondo luogo una colonna con somme infinite.

Per le colonne con serie finite, restituendo ai termini le loro espressioni invece del simbolo 13) adottato per brevità, si ha:

$$\text{per la } 1^a \text{ colonna} \quad -C_1 = -\sum_0^{n-1}{}_k \frac{(k+1)^{r-1}}{(k+u)^r}$$

$$\text{"} \quad 2^a \quad \text{"} \quad -C_2 = -\sum_n^{2n-1} \frac{(k+1)^{r-1} - \binom{r}{1}(k+1-n)^{r-1}}{(k+u)^r}$$

. . . . 16)

$$\text{"} \quad r^a \quad \text{"} \quad -C_r =$$

$$= -\sum_{r-1,n}^{rn-1}{}_k \frac{(k+1)^{r-1} - \binom{r}{1}(k+1-n)^{r-1} + \cdots (-1)^{r-1}\binom{r}{r-1}(k+1-\overline{r-1}\,,n)^{r-1}}{(k+u)^r}\,.$$

Il significato di questi termini è facile a comprendersi; si possono riassumere nella formola generale

$$-C_i = -\sum_{i-1,n}^{in-1}{}_k \frac{1}{(k+u)^r} \sum_0^{i-1}{}_h (-1)^h \binom{r}{h} (k+1-hn)^{r-1}\,, \tag{17}$$

dove i è il numero d'ordine della colonna contemplata, e va quindi da 1 fino a r; h invece è un altro numero d'ordine, che va da 0 fino ad $i-1$.

La somma di queste colonne è

$$-C_1 - C_2 - \cdots - C_r = -\sum_1^r{}_i C_i\,. \tag{18}$$

5. Vogliamo ora cercare, nel quadro 14), la somma dell'ultima colonna verticale, che contiene serie infinite convergenti. Rammentando che le singole espressioni, prese in senso orizzontale, vanno moltiplicate per $\binom{r-1}{0}$, $-\binom{r-1}{1}$, ... $(-1)^{r-1}\binom{r-1}{r-1}$, e restituendo ai simboli 13) il loro vero valore, si ha

$$-C_\infty = -\sum_{rn}^{\infty}{}_k \frac{\binom{r}{0}(k+1)^{r-1} - \binom{r}{1}(k+1-n)^{r-1} + \cdots (-1)^3\binom{r}{r}(k+1-rn)^{r-1}}{(k+u)^r}\,.$$

Sviluppando e ordinando il numeratore secondo le potenze $k+1$, si ottengono espressioni della forma seguente

$$\binom{r-1}{m} \frac{(k+1)^{r-m-1}\, n^m}{(k+n)^r} \left\{ 0^m\binom{r}{0} - 1^m\binom{r}{1} + 2^m\binom{r}{2} - \cdots (-1)^r r^m \binom{r}{r} \right\} \tag{19}$$

dove m è un numero d'ordine che va da 0 fino a $r-1$. Si può dimostrare che

la somma compresa entro la parentesi $\}\ \{$ è sempre $= 0$, per tutti i valori di m qui contemplati. Basta partire dalla formola binomiale

$$(1-x)^r = \binom{r}{0} - \binom{r}{1} x + \binom{r}{2} x^2 - \cdots (-1)^r \binom{r}{r} x^r$$

derivarla rispetto a x, poi moltiplicarla per x e derivarla ancora, e ripetere questa doppia operazione $m-1$ volte di seguito. Si ha

$$a_0(1-x)^{r-m} + \cdots a_{m-1}(1-x)^{r-1} =$$

$$= 0^m \binom{r}{0} - 1^m \binom{r}{1} x + 2^m \binom{r}{2} x^2 - \cdots (-1)^r r^m \binom{r}{r} x^{r-1}. \qquad 20)$$

dove

$$a_0 = (-1)^m \frac{r!}{(r-m)!}$$

e gli altri coefficienti fino ad a_{m-1} non importa conoscere. Da questa relazione. ponendo $x = 1$, risulta che, finchè $m < r$, il primo membro è $= 0$, per cui si ha

$$0^m \binom{r}{0} - 1^m \binom{r}{1} + 2^m \binom{r}{2} - \cdots (-1)^r r^m \binom{r}{r} = 0. \qquad 21)$$

Ma quando fosse $m = r$, allora il primo membro, per $x = 1$ si riduce ad a_0 e si ha quindi

$$0^r \binom{r}{0} - 1^r \binom{r}{1} + 2^r \binom{r}{2} - \cdots (-1)^r r^r \binom{r}{r} = (-1)^r r! \qquad 22)$$

Nella formola 19) m non supera mai il valore $r-1$, dunque è sempre applicabile la 21) e la serie entro parentesi $\}\ \{$ è sempre $= 0$. Essa va poi moltiplicata per i fattori

$$\binom{r-1}{m} n^m \frac{(k+1)^{r-m-1}}{(k+u)^r},$$

e sul prodotto va estesa la somma da $k = rn$ fino a $k = \infty$. Si ha quindi una espressione della forma seguente:

$$\binom{r-1}{m} n^m \sum_{rn}^{\infty}{}_k \left(\frac{k+1}{k+u}\right)^r \frac{0}{(k+1)^{m+1}}; \qquad 23)$$

e questa è sempre $= 0$, anche nel caso il più sfavorevole di $m = 0$. Ne segue che anche una somma finita di simili termini è $= 0$; per cui tutta l'ultima colonna del quadro 14) si riduce a zero.

6. Riassumendo i risultati parziali, ottenuti per il quadro 14) colle formole 15). 17), 18) e 23), si ha per il polinomio caratteristico delle funzioni $\Phi_r(u)$ n successive, per tutti i valori positivi, interi di r, l'espressione

$$\sum_0^r{}_i (-1)^i \binom{r}{i} \Phi_r(u+in) = -\sum_1^r{}_i C_i. \qquad 24)$$

Ponendo, a titolo d'esempio, $r = 1$ e $r = 2$, si hanno le espressioni note [1]

$$\begin{aligned} \Phi_1(u) + \Phi_1(u+n) &= -\sum_0^{n-1}{}_k \frac{1}{k+u} \\ \Phi_2(u) - 2\Phi_2(u+n) + \Phi_2(u+2n) &= -\sum_0^{n-1}{}_k \frac{k+1}{(k+u)^2} - \sum_n^{2n-1}{}_k \frac{2n-k-1}{(k+u)^2} \,. \end{aligned} \tag{25}$$

Quando si confronti, nel quadro 14), la penultima colonna verticale, che ha per somma $-C_r$, coll'ultima, che ha per somma 0, si vede che le quantità, poste sotto i rispettivi simboli Σ, differiscono tra loro soltanto per il termine

$$-\frac{(k+1-rn)^{r-1}}{(k+u)^{r-1}}$$

che manca al primo di essi. Se quel termine, che deve moltiplicarsi per $(-1)^{r-1} \times \times \binom{r-1}{r-1}$, vi fosse, la colonna andrebbe a zero. Ne segue che nelle relazioni 16) si può sostituire, per $-C_r$, l'espressione più semplice

$$-C_r = (-1)^r \sum_{r-1,n}^{rn-}{}_k \frac{(k+1-rn)^{r-1}}{(k+u)^r} \,.$$

Si osservi che, svolgendo in questa espressione i termini per i singoli valori di k, l'ultimo termine, per $k = rn - 1$, diviene $= 0$. Ne segue che, nel caso speciale di $n = 0$, tutta questa colonna $-C_r$ diviene $= 0$, e ciò indipendentemente dal valore speciale di r; tranne il caso di $r = 1$, perchè per questo valore il numeratore $(k+1-rn)^{r-1}$ perde la sua forma caratteristica e diviene $= 1$. La conseguenza ne è che il polinomio caratteristico delle $\Phi_r(u)$ successive $(n = 1)$ contiene soltanto $r - 1$ termini algebrici invece di r termini, per tutti i valori di r, eccetto il caso di $r = 1$. Per persuadersene, basta scrivere, nella 24), $r = 1$, $r = 2$, $r = 3$ perchè si abbiano le relazioni

$$\begin{aligned} \Phi_1(u) - \Phi_1(u+1) &= -\frac{1}{u} \\ \Phi_2(u) - 2\Phi_2(u+1) + \Phi_2(u+2) &= -\frac{1}{u^2} \\ \Phi_3(u) - 3\Phi_3(u+1) + 3\Phi_3(u+2) - \Phi_3(u+3) &= -\frac{1}{u^3} - \frac{1}{(u+1)^3} \,. \end{aligned} \tag{26}$$

Ritornando infine al quadro 14), e sommando puramente e semplicemente le colonne verticali, si ha

$$\Phi_r(u) - \Phi_r(u+rn) = -\sum_0^{rn-1}{}_k \frac{(k+1)^{r-1}}{(k+u)^r} - \sum_{rn}^{\infty}{}_k \frac{(k+1)^{r-1} - (k+1-rn)^{r-1}}{(k+u)^r}$$

relazione che si deduce direttamente dalla 12), scrivendo, in questa, rn al posto di n.

[1] Op. cit., pag. 504, form. 11.

Dalla formola 12) si può ancora dedurre un'altra conseguenza. Supponendo che in essa, n divenga infinito, la prima delle serie che vi figurano diviene infinita, e la seconda non ha più ragione di essere. In tale caso possiamo scrivere

$$\lim_{n=\infty} \Phi_r(u+n) = \Phi_r(u) + \sum_0^\infty{}_k \frac{(k+1)^{r-1}}{(k+u)^r},$$

e la serie, oramai infinita, essendo divergente, si ha

$$\lim_{n=\infty} \Phi_r(u+n) = +\infty .$$

Ne segue, che le funzioni $\Phi_r(u)$, per valore infinito positivo del loro argomento, vanno tutte all'infinito positivo.

7. Scrivendo, nella 12), $1+u$ al posto di u, k al posto di $k+1$, si può dare a quella relazione la forma seguente, n essendo un numero intero e positivo:

$$\Phi_r(n+1+u) = \Phi_r(1+u) + \sum_1^n{}_k \frac{k^{r-1}}{(k+u)^r} + \sum_{n+1}^\infty{}_k \frac{k^{r-1}-(k-n)^{r-1}}{(k+u)^r} .$$

Ponendo $u=0$, si ha

$$\Phi_r(n+1) = -\mathrm{A} + \sum_1^n{}_k \frac{1}{k} + \sum_{n+1}^\infty{}_k \frac{k^{r-1}-(k-n)^{r-1}}{k^r} .$$

Sviluppando il binomio nella serie infinita, e adottando i simboli, che ricorreranno sovente,

$$-\mathrm{A} + \sum_1^n{}_k \frac{1}{k} = \mathrm{S}_1^{(n)}, \quad \sum_{n+1}^\infty{}_k \frac{1}{k^2} = \mathrm{S}_2^{(n)}, \quad \sum_{n+1}^\infty{}_k \frac{1}{k^3} = \mathrm{S}_3^{(n)}, \ldots, \quad \sum_{n+1}^\infty{}_k \frac{1}{k^i} = \mathrm{S}_i^{(n)},$$

si ha

$$\Phi_r(n+1) = \mathrm{S}_1^{(n)} + \binom{r-1}{1} n\mathrm{S}_2^{(n)} - \binom{r-1}{2} n^2\mathrm{S}_3^{(n)} + \cdots (-1)^r \binom{r-1}{r-1} n^{r-1}\mathrm{S}_r^{(n)} . \qquad 27)$$

La serie è finita per valori positivi interi di r. Ponendo successivamente $r=1,2,3,4$, si hanno espressioni semplici, che si prestano facilmente al calcolo numerico,

$$\begin{aligned} \Phi_1(n+1) &= \mathrm{S}_1^{(n)} \\ \Phi_2(n+1) &= \mathrm{S}_1^{(n)} + n\mathrm{S}_2^{(n)} \\ \Phi_3(n+2) &= \mathrm{S}_1^{(n)} + 2n\mathrm{S}_2^{(n)} - n^2\mathrm{S}_3^{(n)} \\ \Phi_4(n+1) &= \mathrm{S}_1^{(n)} + 2n\mathrm{S}_2^{(n)} - 3n^2\mathrm{S}_3^{(n)} + n^3\mathrm{S}_4^{(n)} . \end{aligned} \qquad 27,)$$

Così, a titolo d'esempio, si ottiene la seguente tabella:

	$r=1$	$r=2$	$r=3$	$r=4$
$\Phi_r(1)$	— 0,577 315 665	— 0,577 215 665	— 0,577 215 665	— 0,577 215 665
$\Phi_r(2)$	+ 0,422 784 335	+ 1,067 718 402	+ 1,510 595 565	+ 1,833 739 060
$\Phi_r(3)$	+ 0,922 784 335	+ 1,712 652 469	+ 2,194 252 990	+ 2,526 291 768
$\Phi_r(4)$	+ 1,256 117 668	+ 2,107 586 536	+ 2,598 876 608	+ 2,931 881 862
$\Phi_r(5)$	+ 1,506 117 668	+ 2,391 409 491	+ 2,886 383 456	+ 3,219 603 064

Per ragioni, che saranno svolte nella parte II di questa Memoria, la 27) vale anche per valori frazionarî dell'indice r. Scriviamo $r+\varrho$ al posto di r, intendendo con r un numero intero, e con ϱ una frazione pura, la 27) si può trascrivere così:

$$\Phi_{r+\varrho}(n+1) = S_1^{(n)} + \binom{r+\varrho-1}{1} n S_2^{(n)} - \binom{r+\varrho-1}{2} n^2 S_3^{(n)} + \cdots \text{inf.} \qquad 27_{,,})$$

La serie è ora infinita e va soggetta a condizioni di convergenza. Ma è facile vedere, che essa rimane convergente per tutti i valori finiti positivi di n. Ponendo quindi, a titolo di esempio, $r=0$, $\varrho = \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}$, si hanno le formole speciali

$$\begin{aligned} \Phi_{\frac{1}{3}}(n+1) &= S_1^{(n)} - \frac{2}{3} n S_2^{(n)} - \frac{2.5}{2.6} n^2 S_3^{(n)} - \frac{2.5.8}{3.6.9} n^3 S_4^{(n)} - \cdots \text{inf.} \\ \Phi_{\frac{1}{2}}(n+1) &= S_1^{(n)} - \frac{1}{2} n S_2^{(n)} - \frac{1.3}{2.4} n^2 S_3^{(n)} - \frac{1.3.5}{2.4.6} n^3 S_4^{(n)} - \cdots \;\; " \qquad 27_{,,,}) \\ \Phi_{\frac{2}{3}}(n+1) &= S_1^{(n)} - \frac{1}{3} n S_2^{(n)} - \frac{1.4}{3.6} n^2 S_3^{(n)} - \frac{1.4.7}{3.6.9} n^3 S_4^{(n)} - \cdots \;\; " \end{aligned}$$

dalle quali, con un calcolo alquanto lungo, stante la poca convergenza delle serie [1], si ricavano i valori, per $n = 0, 1, 2$, rispettivamente:

	$\varrho = \frac{1}{3}$	$\varrho = \frac{1}{2}$	$\varrho = \frac{2}{3}$
$\Phi_\varrho(1)$	— 0,577 2157	— 0,577 2157	— 0,577 2157
$\Phi_\varrho(2)$	— 0,190 4084	— 0,019 0285	+ 0,139 5124
$\Phi_\varrho(3)$	+ 0,059 9768	+ 0,304 5921	+ 0,534 2522

8. Le formole del numero precedente contemplano funzioni $\Phi_r(u)$ n successive e dimostrano, come il loro polinomio caratteristico può esssere espresso mediante somme finite di funzioni puramente algebriche. Ma quando due o più funzioni $\Phi_r(u)$ si trovino unite con argomenti arbitrarî, si arriva sempre ad espressioni contenenti serie infinite. Sia

$$\Phi_r(u_1) = \lim_{k=\infty} \left\{ \log k - \sum_0^k{}_h \frac{(h+1)^{r-1}}{(h+u_1)^r} \right\}$$

$$\Phi_r(u_2) = \lim_{k=\infty} \left\{ \log k - \sum_0^k{}_h \frac{(h+1)^{r-1}}{(h+u_2)^r} \right\},$$

dove u_1, u_2 rappresentano variabili positive e finite, d'altronde arbitrarie. Sottraendo la seconda dalla prima e considerando che

$$(k+u_1)^r - (k+u_2)^r = (u_1-u_2)\left\{(k+u_2)^{r-1} + (k+u_1)(k+u_2)^{r-2} + \cdots (k+u_1)^{r-1}\right\}$$
$$= (u_1-u_2) \sum_1^r{}_{i_1} (k+u_1)^{i_1-1}(k+u_2)^{r-i_1},$$

[1] Nella quarta parte di questa Memoria si sviluppano serie più convenienti per i calcoli numerici. Vedi IV, $8_{,}$).

con facile riduzione si ottiene

$$\frac{\Phi_r(u_1)}{u_1-u_2}+\frac{\Phi_r(u_2)}{u_2-u_1}=\sum_0^\infty{}_k \frac{(k+1)^{r-1}}{(k+u_1)(k+u_2)}\sum_1^r{}_{i_1}\frac{1}{(k+u_1)^{r-i_1}(k+u_2)^{i_1-1}} \tag{28)}$$

relazione fra due funzioni $\Phi_r(u)$ con argomento arbitrario. Allo stesso modo, scrivendo u_3 per u_2, si ha

$$\frac{\Phi_r(u_1)}{u_1-u_3}+\frac{\Phi_r(u_3)}{u_3-u_1}=\sum_0^\infty{}_k \frac{(k+1)^{r-1}}{(k+u_1)(k+u_3)}\sum_1^r{}_{i_1}\frac{1}{(k+u_1)^{r-i_1}(k+u_3)^{i_1-1}}$$

e, sottraendo questo dalla precedente e riducendo,

$$\begin{aligned}&\frac{\Phi_r(u_1)}{(u_1-u_2)(u_1-u_3)}+\frac{\Phi_r(u_2)}{(u_2-u_1)(u_2-u_3)}+\frac{\Phi_r(u_3)}{(u_3-u_1)(u_3-u_2)}\\ &=-\sum_0^\infty{}_k \frac{(k+1)^{r-1}}{(k+u_1)(k+u_2)(k+u_3)}\sum_1^r{}_{i_1}\frac{1}{(k+u_1)^{r-i_1}}\sum_1^{i_1}{}_{i_2}\frac{1}{(k+u_2)^{i_1-i_2}(k+u_3)^{i_2-1}}\,.\end{aligned} \tag{29)}$$

La regolarità del procedimento è fino da ora evidente. Si può continuare in tale sviluppo, scrivendo u_4 al posto di u_3 nella 29) e sottraendo da questa la nuova relazione. Generalizzando, si ha la formola

$$\begin{aligned}&\sum_1^n{}_i \frac{(u_i-u_i)\,\Phi_r(u_i)}{(u_i-u_1)(u_i-u_2)\dots(u_i-u_n)}\\ &=(-1)^n\sum_0^\infty{}_k \frac{(k+1)^{r-1}}{(k+u_1)(k+u_2)\dots(k+u_n)}\sum_1^r{}_{i_1}\frac{1}{(k+u_1)^{r-i_1}}\sum_1^{i_1}{}_{i_2}\frac{1}{(k+u_2)^{i_1-i_2}}\cdots\\ &\qquad\cdots\sum_1^{i_{n-2}}{}_{i_{n-1}}\frac{1}{(k+u_{n-1})^{i_{n-2}-i_{n-1}}(k+u_n)^{i_{n-1}-1}}\,,\end{aligned} \tag{30)}$$

dove n rappresenta il numero delle funzioni $\Phi_r(u)$ da sommarsi; $i_1, i_2, \dots i_{n-1}$ sono numeri d'ordine. Nel secondo membro figurano n somme diverse, sotto forma di fattori; e, quantunque la formola sia alquanto astrusa, il maneggio non ne è difficile nei casi speciali. Dato il valore speciale di r, si procede da sinistra a destra nell'assegnazione dei valori di $i_1, i_2, \dots i_{n-1}$ e si sviluppano le serie relative. Così per esempio, per $r=2$, si ha

$$\begin{aligned}&\sum_1^n{}_i \frac{(u_i-u_i)\,\Phi_2(u_i)}{(u_i-u_1)(u_i-u_2)\dots(u_i-u_n)}=\\ &=(-1)^n\sum_0^\infty{}_k \frac{k+1}{(k+u_1)(k+u_2)\dots(k+u_n)}\sum_1^n{}_i\frac{1}{k+u_i}\,,\end{aligned} \tag{31)}$$

relazione già altra volta sviluppata.

Non abbiamo bisogno di aggiungere che tutte queste serie sono convergenti: tanto più, quanto più grande è n, il quale non può mai essere inferiore a 2.

9. Vogliamo ora esaminare il significato, che acquistano le funzioni $\Phi_r(u)$, quando il loro argomento assume valori negativi. Sia $u = \omega - n$, dove per ω intendiamo una frazione pura positiva, per n un numero intero positivo. Quante volte $n > \omega$, l'argomento $\omega - n$ diviene negativo; ed è questo il caso che vogliamo contemplare.

L'espressione 1) può prendere la forma

$$\Phi_r(\omega - n) = \lim_{k=\infty} \left\{ \log k - \sum_0^{n-1}{}_h \frac{(h+1)^{r-1}}{(h+\omega-n)^r} - \sum_n^k{}_h \frac{(h+1)^{r-1}}{(h+\omega-n)^r} \right\}.$$

Nella prima delle Σ, rovesciamo il denominatore quanto al segno, vi scriviamo k per $n-h$, e trattandosi di una serie finita, la mettiamo fuori parentesi. Nella seconda scriviamo h per $h-n$, ed abbiamo

$$\Phi_r(\omega - n) = -(-1)^r \sum_1^n{}_k \frac{(n-k+1)^{r-1}}{(k-\omega)^r} + \lim_{k=\infty} \left\{ \log k - \sum_0^k{}_h \frac{(h+1+n)^{r-1}}{(h+\omega)^r} \right\}.$$

Sviluppiamo nella seconda serie il numeratore per potenze di $k+1$, ed abbiamo

$$\begin{aligned} \Phi_r(\omega - n) &= -(-1)^r \sum_1^n{}_k \frac{(n-k+1)^{r-1}}{(k-\omega)^r} \\ &+ \Phi_r(\omega) - \binom{r-1}{1} n \sum_0^\infty{}_k \frac{(k+1)^{r-2}}{(k+\omega)^r} - \binom{r-1}{2} n^2 \sum_0^\infty{}_k \frac{(k+1)^{r-3}}{(k+\omega)^r} - \\ &- \cdots - \binom{r-1}{r-1} n^{r-1} \sum_0^\infty{}_k \frac{1}{(k+\omega)^r} \end{aligned} \qquad 32)$$

relazione, i cui termini si fermano da sè. Le serie infinite che vi figurano sono tutte convergenti, per cui la funzione $\Phi_r(\omega - n)$ rimane perfettamente definita. Per $r=1$ e $r=2$, si hanno le relazioni note dai miei studî precedenti:

$$\begin{aligned} \Phi_1(\omega - n) &= \sum_1^n{}_k \frac{1}{k-\omega} + \Phi_1(\omega) \\ \Phi_2(\omega - n) &= -\sum_1^n{}_k \frac{n-k+1}{(k-\omega)^2} + \Phi_2(\omega) - \sum_0^\infty{}_k \frac{1}{(k+\omega)^2}. \end{aligned} \qquad 33)$$

Alle serie infinite, che figurano nella 32), possiamo sostituire le derivate di funzioni $\Phi(\omega)$ con indice successivamente decrescente, per cui si ha

$$\Phi_r(\omega - n) = -(-1)^r \sum_1^n{}_k \frac{(n-k+1)^{r-1}}{(k-\omega)^r} + \sum_0^{r-1}{}_i (-1)^i \frac{n^i}{i!} \Phi_{r-i}^{(i)}(\omega). \qquad 34)$$

Se poniamo infine $\omega - n = -u$, si ha pure

$$\Phi_r(-u) = -\sum_0^{n-1}{}_k \frac{(k+1)^{r-1}}{(k-u)^r} + \sum_0^{r-1}{}_i (-1)^i \frac{n^i}{i!} \Phi_{r-i}^{(i)}(n-u), \qquad 35)$$

dove n è un numero intero, arbitrario, che possiamo prendere tanto grande che

l'argomento $n-1$ rimanga positivo. Fintanto che u è un valore frazionario, l'espressione 35) rimane tutta finita. Ma se poniamo $u=0,1,2,\ldots n-1$, vi è nella serie finita

$$-\sum_{0}^{n-1}{}_{k}\frac{(k+1)^{r-1}}{(k-u)^{r}}$$

sempre un termine, il cui denominatore va a 0, e rende con ciò infinita la funzione. E siccome n può avere qualsiasi valore intero, si conclude che le funzioni $\Phi_r(n)$ hanno valore infinito per tutti i valori negativi, interi, del loro argomento, compreso lo zero.

Ma vi è un modo diverso di comportamento per queste funzioni, a seconda che r sia pari o dispari. Poniamo $u\mp\varepsilon$ al posto di u, dove per ε intendiamo una quantità infinitamente decrescente. Il termine generale della serie finita ha la forma

$$-\frac{(k+1)^{r-1}}{(k-u\pm\varepsilon)^{r}} \quad \text{la quale per } u=k \text{ diviene} \quad -\frac{(k+1)^{r-1}}{(\pm\varepsilon)^{r}}\,.$$

Questa ultima espressione assume i valori

$$-\frac{(k+1)^{r-1}}{\varepsilon^{r}} \quad \text{quando } r \text{ sia pari} \quad \text{e per } \varepsilon=0\,,\ -\infty^{r}$$

$$\mp\frac{(k+1)^{r-1}}{\varepsilon^{r}} \quad \text{quando } r \text{ sia dispari e per } \varepsilon=0\,,\ \mp\infty^{r}\,.$$

Ne segue che, per valori interi negativi (compreso lo zero) del loro argomento, le funzioni $\Phi_r(u)$ hanno un valore solo, $-\infty^r$, quando r sia pari, ed hanno dei valori $-\infty^r$ e $+\infty^r$ quando r sia dispari [1]. Per tutti gli altri valori, negativi e non interi, del loro argomento, queste funzioni hanno valori finiti, espressi dalle relazioni 32), 34) e 35).

Dall'insieme di queste osservazioni risulta, che tutte le relazioni svolte fin qui, e valevoli per le $\Phi_r(u)$ con argomento positivo, valgono anche per le $\Phi_r(-u)$ con argomento negativo, non solo quando quest'ultimo sia frazionario, ma anche quando esso sia intero, nel quale ultimo caso si arriva a valori infiniti, come è naturale.

10. In conformità della definizione adottata per le funzioni $\Phi_r(u)$, vogliamo esaminare il valore che esse acquistano quando il loro argomento divenga complesso e si trasformi in $u+v\sqrt{-1}$, u e v essendo quantità reali, d'altronde arbitrarie. Abbiamo

$$\Phi_r(u+v\sqrt{-1})=\lim_{k=\infty}\left\{\log k-\sum_{0}^{k}{}_{h}\frac{(h+1)^{r-1}}{(h+u+v\sqrt{-1})^{r}}\right\}.$$

Nella serie, che qui figura, moltiplichiamo numeratore e denominatore del termine

(1) Al Gauss, che ha trattato le proprietà della funzione $\Phi_1(u)$, è sfuggita questa particolarità, che la sua funzione, per valori negativi interi di u, assume il doppio valore $\mp\infty$. Egli ha trovato, per essa, soltanto il valore $-\infty$. Vedi Gauss Werke, vol. III, pag. 158 e seguenti.

generale per $(h+u-v\sqrt{-1})^r$, e, sviluppando il numeratore, abbiamo

$$\Phi_r(u+v\sqrt{-1})=\lim_{k=\infty}\left\{\log k-\sum_0^k{}_h(h+1)^{r-1}\frac{(h+u)^r-\binom{r}{2}(h+u)^{r-2}v^2+\cdots}{[(h+u)^2+v^2]^r}\right\}$$
$$+v\sqrt{-1}\sum_0^\infty{}_k(k+1)^{r-1}\frac{\binom{r}{1}(k+u)^{r-1}-\binom{r}{3}(k+u)^{r-3}v^2+\cdots}{[(k+u)^2+v^2]^r}. \qquad 36)$$

Trattandosi di r positivo e intero, gli sviluppi binomiali si arrestano da sè. Ma la prima delle due serie è divergente, come si può facilmente vedere. Si può però trasformarla mercè l'identità

$$\frac{(k+u)^r-\binom{r}{2}(k+u)^{r-2}v^2+\cdots}{[(k+u)^2+v^2]^r}=\frac{1}{(k+u)^r}-\mathrm{R}_k\,,$$

dove per maggiore semplicità si è posto

$$\mathrm{R}_k=\frac{\varrho_1(k+u)^{2r-2}v^2+\varrho_2(k+u)^{2r-4}v^4+\cdots}{(k+u)^r[(k+u)^2+v^2]^r}$$

$$\varrho_1=\binom{r}{1}+\binom{r}{2}\,,\quad \varrho_2=\binom{r}{2}-\binom{r}{4}\,,\quad \varrho_3=\binom{r}{3}+\binom{r}{6},\ \text{ecc.} \qquad 37)$$

Anche R_k è espressa mediante una serie, che contiene coefficienti binomiali i quali cessano da sè. Poniamo dunque

$$\overline{\Psi}_r(u,v)=v^2\sum_0^\infty{}_k(k+1)^{r-1}\frac{\varrho_1(k+u)^{2r-2}+\varrho_2(k+u)^{2r-4}v+\cdots}{(k+u)^r[(k+u)^2+c^2]^r}$$
$$\overline{\overline{\Psi}}_r(u,v)=v\sum_0^\infty{}_k(k+1)^{r-1}\frac{\binom{r}{1}(k+u)^{r-1}-\binom{r}{3}(k+u)^{r-3}v^2+\cdots}{[(k+u)^2+v^2]^r} \qquad 38)$$

le $\overline{\Psi}_r(u,v)$ e $\overline{\overline{\Psi}}_r(u,v)$ essendo funzioni ausiliarie. Si può dimostrare che sono rappresentate da serie convergenti. Prendiamo la prima delle 38), il cui numeratore, posto sotto il simbolo Σ, contiene un numero finito di termini, ciascuno dei quali corrisponde alla forma generale

$$\varrho_i\,v^{2i}\sum_0^\infty{}_k(k+1)^{r-1}\frac{(k+u)^{r-2i}}{[(k+u)^2+v^2]^r}\,,$$

i essendo un numero d'ordine non minore di 1. Chiamando s un numero arbitrario maggiore dell'unità, l'espressione

$$\varrho_i\,v^{2i}\lim_{k=\infty}\left\{(k+1)^{r+s-1}\frac{(k+u)^{r-2i}}{[(k+u)^2+v^2]^r}\right\}=\varrho_i\,v^{2i}\lim_{k=\infty}\left\{\frac{1}{k^{2i+1-s}}\right\}$$

è $=0$, quante volte u, v e r siano quantità finite e $s<2i+1$: ossia, $i=1$ essendo

il valore più piccolo che i può assumere, quando $s < 3$, il che è sempre possibile. La serie è quindi convergente.

Allo stesso modo si dimostra pure la convergenza della serie seconda in 38), purchè $s < 2$; il che è pure possibile.

Sostituendo le 38) nella 36), si ha

$$\Phi_r(u + v\sqrt{-1}) = \Phi_r(u) + \overline{\Psi}_r(u, v) + \sqrt{-1}\,\overline{\overline{\Psi}}_r(u, v), \tag{39}$$

equazione generale definita da serie convergenti. Scrivendo in essa $-v$ al posto di v, si osserva che nelle 38) la $\overline{\Psi}_r(u, v)$ rimane inalterata, mentre la $\overline{\overline{\Psi}}_r(u, v)$ cambia di segno; per cui si ha

$$\Phi_r(u - v\sqrt{-1}) = \Phi_r(u) + \overline{\Psi}_r(u, v) - \sqrt{-1}\,\overline{\overline{\Psi}}_r(u, v), \tag{39,}$$

quindi

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\Phi_r(u + v\sqrt{-1}) + \tfrac{1}{2}\Phi_r(u - v\sqrt{-1}) &= \Phi_r(u) + \overline{\Psi}_r(u, v) \\ \tfrac{1}{2}\Phi_r(u + v\sqrt{-1}) - \tfrac{1}{2}\Phi_r(u - v\sqrt{-1}) &= \sqrt{-1}\,\overline{\overline{\Psi}}_r(u, v). \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

11. L'equazione 39) con le 38), che servono a definire le funzioni ausiliarie $\overline{\Psi}_r(u, v)$ e $\overline{\overline{\Psi}}_r(u, v)$, vale dunque per tutti i valori reali, positivi e negativi, che v può assumere. Si vede facilmente che essa vale anche per valori negativi di u, purchè frazionarî. Il caso si complica quando si supponga per u un valore negativo e intero, perchè allora la funzione $\Phi_r(u)$ prende il valore $-\infty^r$ quando r sia pari, e $\mp\infty^r$ quando r sia dispari [formola 35)]; mentre nell'espressione per $\overline{\Psi}_r(u, v)$ vi è un termine che assume il valore $+\infty^r$ quando r sia pari, e $\pm\infty^r$ quando r sia dispari. Abbiamo quindi una forma indeterminata, che importa esaminare. Trattandosi di funzioni sempre riunite, poniamo

$$\Phi_r(u) + \overline{\Psi}_r(u, v) = \Psi_r(u, v)$$

e domandiamoci che cosa divenga questa nuova funzione quando ad u sostituiamo il valore $-n$, intendendo con n un numero positivo intero. Abbiamo

$$\left.\begin{aligned} \Psi_r(-n, v) = \lim_{k=\infty}\left\{\log k - \sum_0^k{}_h \frac{(h+1)^{r-1}}{(h-n)^r}\right\} + \\ + \sum_0^\infty{}_k (k+1)^{r-1} \frac{\varrho_1 (k-n)^{2r-2} v^2 + \cdots v^{2r}}{(k-n)^r [(k-n)^2 + v^2]^r}. \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

Nella prima delle due serie vi è il termine, per $h = n$, e nella seconda serie, per $k = n$, che produce questi valori infiniti con segno contrario, per cui l'espressione rimane indeterminata. Leviamo dunque fuori questi due termini e calcoliamoli a parte. I due termini riuniti, tenuto conto delle 37), hanno l'espressione

$$-(k+1)^{r-1} \frac{(k-n)^r - \binom{r}{2}(k-n)^{r-2} v^2 + \binom{r}{4}(k-n)^{r-4} v^4 - \cdots}{[(k-n)^2 + v^2]^r},$$

dove lo sviluppo binomiale si forma da sè, per valori finiti, positivi, interi di r. Questa espressione assume, per $k=n$, valori diversi a seconda che r sia pari o dispari.

Quando r sia pari, scompaiono nel numeratore tutti i termini, meno l'ultimo, che ha la forma $(-1)^{\frac{r}{2}} v^r$, per cui tutta l'espressione diviene

$$-(-1)^{\frac{r}{2}} \frac{(n+1)^{r-1}}{v^r}.$$

Quando, invece, r sia dispari, scompaiono nel numeratore tutti i termini e l'intera espressione diviene uguale a zero. In ambedue i casi, poi, l'espressione ha valore finito.

Coll'aver tolto dalla 41) il termine corrispondente a $\left.\begin{matrix} h \\ k \end{matrix}\right\} = n$, le due serie furono scisse, ciascuna, in due parti: una finita, che va da $\left.\begin{matrix} h \\ k \end{matrix}\right\} = 0$ fino a $\left.\begin{matrix} h \\ k \end{matrix}\right\} = n-1$; l'altra infinita, che, saltando un termine, va da $\left.\begin{matrix} h \\ k \end{matrix}\right\} = n+1$ fino $k=\infty$.

La prima delle due serie, che è divergente, merita un esame speciale. Col suo termine mancante, essa ha la forma

$$\lim_{k=\infty} \left\{ \log k - (-1)^r \sum_0^{n-1}{}_h \frac{(h+1)^{r-1}}{(n-h)^r} - \sum_{n+1}^{\infty}{}_h \frac{(h+1)^{r-1}}{(h-n)^r} \right\}.$$

Scrivendo, in una, k per $n-k$, e nell'altra, h per $h-n$, si ha

$$-(-1)^r \sum_1^n{}_k \frac{(n+1-k)^{r-1}}{k^r} + \lim_{k=\infty} \left\{ \log k - \sum_1^k{}_h \frac{(h+n+1)^{r-1}}{h^r} \right\}.$$

Sviluppando il numeratore $(h+n+1)^{r-1}$ secondo le potenze di $n+1$ e ponendo, come abbiamo già fatto,

$$S_i = \sum_1{}_k \frac{1}{k^i},$$

abbiamo l'espressione

$$-(-1)^r \sum_1^n{}_k \frac{(n+1-k)^{r-1}}{k^r} - A - \sum_1^{r-1}{}_i \binom{r-1}{i} (n+1)^i S_{i-1}.$$

12. Riassumendo i risultati parziali, ottenuti nel precedente numero, si ha

$$\begin{aligned} \Psi_r(-n, v) = & -(-1)^r \sum_1^n{}_k \frac{(n+1-k)^{r-1}}{k^r} - A - \sum_1^{r-1}{}_i \binom{r-1}{i} (n+1)^i S_{i+1} \\ & - \left\{ \begin{matrix} (-1)^{\frac{r}{2}} \dfrac{(n+1)^{r-1}}{v^r} \\ 0 \end{matrix} \right\} + v^2 \sum_{0,n+1}^{n-1,\infty}{}_k (k+1)^{r-1} \frac{\varrho_1(k-n)^{2r-2} + \varrho_2(k-n)^{2r-4} v^2 + \cdots}{(k-n)^r \left[(k-n)^2 + v^2\right]^r}, \end{aligned} \tag{42}$$

dove i due valori, posti l'uno sotto l'altro nella parentesi $\}\{$, si riferiscono al caso di r pari e di r dispari, e coll'indicazione adottata per l'ultima Σ s'intende una

serie, i cui termini vanno da $k = 0$ fino a $k = n - 1$, e poi da $k = n + 1$ fino a $k = \infty$.

Per $n = 0$, essa prende la forma più semplice

$$\Psi_r(0\,,v) = -\mathrm{A} - \sum_1^{r-1}{}_i \binom{r-1}{i} \mathrm{S}_{i+1} -$$

$$- \left\{ \begin{matrix} (-1)^{\frac{r}{2}} \dfrac{1}{v^r} \\ 0 \end{matrix} \right\} + v^2 \sum_1^{\infty}{}_k (k+1)^{r-1} \frac{\varrho_1 k^{2r-2} + \varrho_2 k^{2r-4} v^2 + \cdots}{k^r (k^2 + v^2)^r}\,. \qquad 43)$$

Ponendo nella 42) e nella 43) $r = 2$, si ha

$$\Psi_2(-n\,,v) = -\sum_1^n{}_k \frac{n+1-k}{k^2} - \mathrm{A} - (n+1)\left(\frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{v^2}\right) +$$

$$+ v^2 \sum_{0,n+1}^{n-1,\infty}{}_k (k+1) \frac{3(k-n)^2 + v^2}{(k-n)^2\,[(k-n)^2 + v^2]^2} \qquad 44)$$

$$\Psi_2(0\,,v) \quad = \quad -\mathrm{A} - \left(\frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{v^2}\right) +$$

$$+ v^2 \sum_1^{\infty}{}_k (k+1) \frac{3k^2 + v^2}{k^2(k^2 + v^2)^2}\,, \qquad 45)$$

formole che concordano con quelle altra volta trovate (¹).

La formola 42) è doppia in un termine, per il caso di r pari e di r dispari, e il suo modo diverso di comportamento risulta specialmente quando vi si ponga $v = 0$. Difatti si ha

$$\text{per } r \text{ pari,} \quad \Psi_r(-n\,,0) = -(-1)^{\frac{r}{2}} \infty^r\,;$$

$$\text{per } r \text{ dispari,} \quad \Psi_r(-n\,,0) = \sum_1^n{}_k \frac{(n+1-k)^{r-1}}{k^r} - \mathrm{A} - \qquad 46)$$

$$- \sum_1^{r-1}{}_i \binom{r-1}{i} (n+1)^i\, \mathrm{S}_{i+1}\,.$$

Dunque, nel primo caso una quantità infinita, nel secondo una finita.

13. L'andamento della seconda funzione ausiliaria $\overline{\overline{\Psi}}_r(u\,,v)$ per valori negativi di u è assai più semplice; ma nel caso che $u = -n$, n essendo un numero intero, si ha pure qualche diversità di comportamento a seconda che r sia pari o dispari.

(¹) Vedi op. cit., pag. 529, form. 20) e 22).

Scriviamo, nella 38), $u = -n$ e consideriamo a parte il termine in cui $k = n$; troviamo facilmente

$$\overline{\overline{\Psi}}_r(n, v) = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ (-1)^{\frac{r-1}{2}} \frac{(n+1)^{r-1}}{v^r} \end{matrix} \right\} + \\ + v \sum_{0, \overline{n+1}}^{n-1, \infty} {}_k (k+1)^{r-1} \frac{\binom{r}{1}(k-n)^{r-1} - \binom{r}{3}(k-n)^{r-3} v^2 + \cdots}{[(k-n)^2 + v^2]^r}, \tag{47}$$

dove, come prima, il doppio valore posto nella parentesi $\}\ \{$ si riferisce al caso di r pari e di r dispari. Anche qui risulta in modo speciale la diversità di comportamento per $v = 0$, perchè si ha

$$\begin{aligned} &\text{per } r \text{ pari,} && \overline{\overline{\Psi}}_r(-n, 0) = 0\,; \\ &\text{per } r \text{ dispari,} && \overline{\overline{\Psi}}_r(-n, 0) = (-1)^{\frac{r-1}{2}} \infty^r. \end{aligned} \tag{48}$$

Dunque nel primo caso 0, nel secondo $\pm\infty^r$. Si vede che, per $v = 0$, tanto la $\overline{\Psi}_r(-n, 0)$ quanto la $\overline{\overline{\Psi}}_r(-n, 0)$ possono andare all'infinito, ma non in pari tempo. Per r pari è la prima, per r dispari è la seconda che assume questo valore.

Riassumendo, la relazione generale 39) si trasforma, per $u = -n$, in

$$\Phi_r(-n + v\sqrt{-1}) = \overline{\Psi}_r(-n, v) + \sqrt{-1}\, \overline{\overline{\Psi}}_r(-n, v), \tag{49}$$

dove le due funzioni ausiliarie $\overline{\Psi}_r(-n, v)$ e $\overline{\overline{\Psi}}_r(-n, v)$ hanno la loro espressione nelle relazioni 42) e 47), con cui il problema è perfettamente definito.

14. Le funzioni ausiliarie $\overline{\Psi}_r(u, v)$ e $\overline{\overline{\Psi}}_r(u, v)$ hanno anch'esse, come le $\Phi_r(u)$, un polinomio caratteristico rispetto ad u, espresso con funzioni n successive puramente algebriche. Poniamo, per brevità,

$$\overline{\mathrm{U}}_k = \frac{\varrho_1 (k+u)^{2r-2} v^2 + \varrho_2 (k+u)^{2r-4} v^4 + \cdots}{(k+u)^r [(k+u)^2 + v^2]^r}. \tag{50}$$

Scriviamo inoltre nella prima delle 38), per u, successivamente

$$u + n, \ldots + rn,$$

e per k rispettivamente

$$k, k-n, \ldots - rn.$$

Abbiamo il seguente quadro:

$$\begin{aligned} \overline{\Psi}_r(u, v) &= \sum_0^{n-1} {}_k (k+1)^{r-1} \overline{\mathrm{U}}_k + \sum_n^{2n-1} {}_k (k+1)^{r-1} \overline{\mathrm{U}}_k + \cdots + \sum_{rn}^{\infty} {}_k (k+1)^{r-1} \overline{\mathrm{U}}_k \\ \overline{\Psi}_r(u+n, v) &= \sum_n^{2n-1} {}_k (k+1-n)^{r-1} \overline{\mathrm{U}}_k + \cdots + \sum_{rn}^{\infty} {}_k (k+1-n)^{r-1} \overline{\mathrm{U}}_k \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \overline{\Psi}_r(u+rn, v) &= \sum_{rn}^{\infty} {}_k (k+1-rn)^{r-1} \overline{\mathrm{U}}_k. \end{aligned} \tag{51}$$

Moltiplichiamo le singole equazioni, rispettivamente, per

$$\binom{r}{0},\ -\binom{r}{1},\ldots(-1)^r\binom{r}{r},$$

e sommiamo per colonne verticali. Il primo membro prende la forma

$$\sum_0^r{}_i(-1)^i\binom{r}{i}\overline{\Psi}_r(u+in,v).$$

Nel secondo membro, chiamando le somme delle singole colonne verticali $\overline{C}_1,\overline{C}_2,\ldots\overline{C}_r,\overline{C}_\infty$, l'espressione $\overline{C}_i$ per la colonna i è data da

$$\overline{C}_i=\sum_{\overline{i-1},n}^{in-1}{}_k\,\overline{U}_k\sum_0^{i-1}{}_h(-1)^h\binom{r}{h}(k+1-hn)^{r-1}, \tag{52}$$

dove h è un numero d'ordine che va da 0 fino a $i-1$. La somma di queste colonne verticali a serie finite è

$$\overline{C}_1+\overline{C}_2+\cdots\overline{C}_r=\sum_1^r{}_i\overline{C}_i.$$

Quanto all'ultima colonna verticale, colle serie infinite, la $\overline{C}_\infty$, basta ripetere il ragionamento del n. 5 per concludere che

$$\overline{C}_\infty=0.$$

Per cui, riassumendo, si ha, per il polinomio caratteristico delle funzioni $\overline{\psi}_r(u,v)$ n successive rispetto ad u,

$$\sum_0^r{}_i(-1)^i\binom{r}{i}\overline{\Psi}_r(u+in,v)=\sum_1^r{}_i\overline{C}_i, \tag{53}$$

il valore di $\overline{C}_i$ essendo dato dalle relazioni 50) e 52). Questa formola ha molta analogia con la 24) per le funzioni $\Phi_r(u)$ n successive; ed essendo

$$\Phi_r(u)+\overline{\Psi}_r(u,v)=\Psi_r(u,v),$$

basta porre, in conformità della relazione 17),

$$U_k=\overline{U}_k-\frac{1}{(k+u)^r}=-\frac{(k+u)^r-\binom{r}{2}(k+u)^{r-2}v^2+\cdots}{[(k+u)^2+v^2]^r} \tag{54}$$

per avere immediatamente

$$\sum_0^r{}_i(-1)^i\binom{r}{i}\Psi_r(u+in,v)=\sum_1^r{}_i\,C_i,$$

essendo 55)

$$C_i=\sum_{\overline{i-1},n}^{in-1}{}_k\,U_k\sum_0^{i-1}{}_h(-1)^h\binom{r}{h}(k+1-hn)^{r-1}.$$

Ad una espressione consimile si giunge anche per la $\overline{\overline{\Psi}}_r(u\,,v)$. Ponendo

$$\overline{\overline{\mathrm{U}}}_k = \frac{\binom{r}{1}(k+u)^{r-1}v - \binom{r}{3}(k+u)^{r-3}v^3 + \cdots}{[(k+u)^2+v^2]^r}\,,$$

si ha

$$\overline{\overline{\mathrm{C}}}_i = \sum_{i-1,n}^{in-1}{}_k\,\overline{\overline{\mathrm{U}}}_k \sum_0^{i-1}{}_h(-1)^h\binom{r}{h}(k+1-hn)^{r-1} \qquad 56)$$

$$\sum_0^r{}_i(-1)^i\binom{r}{i}\overline{\overline{\Psi}}_r(u+in\,,v) = \sum_1^r{}_i\,\overline{\overline{\mathrm{C}}}_i\,.$$

Queste formole, alquanto complicate, si semplificano notevolmente per $n=1$. Difatti si ha

$$\sum_0^r{}_i(-1)^i\binom{r}{i}\Psi_r(u+i\,,v) = \sum_1^r{}_i\,\mathrm{U}_{i-1}\sum_0^{i-1}{}_h(-1)^h\binom{r}{h}(i-h)^{r-1}$$

$$\sum_0^r{}_i(-1)^i\binom{r}{i}\overline{\Psi}_r(u+i\,,v) = \sum_1^r{}_i\,\overline{\mathrm{U}}_{i-1}\sum_0^{i-1}{}_h(-1)^h\binom{r}{h}(i-h)^{r-1} \qquad 57)$$

$$\sum_0^r{}_i(-1)^i\binom{r}{i}\overline{\overline{\Psi}}_r(u+i\,,v) = \sum_1^r\overline{\overline{\mathrm{U}}}_{i-1}\sum_0^{i-1}{}_h(-1)^h\binom{r}{h}(i-h)^{r-1}$$

relazioni che per $r=2$ si trasformano nelle già note [1]

$$\Psi_2(u\,,v) - 2\Psi_2(u+1\,,v) + \Psi_2(u+2\,,v) = -\frac{u^2-v^2}{(u^2+v^2)^2}$$

$$\overline{\Psi}_2(u\,,v) - 2\overline{\Psi}_2(u+1\,,v) + \overline{\Psi}_2(u+2\,,v) = \frac{3u^2v^2+v^4}{u^2(u^2+v^2)^2} \qquad 58)$$

$$\overline{\overline{\Psi}}_2(u\,,v) - 2\overline{\overline{\Psi}}_2(u+1\,,v) + \overline{\overline{\Psi}}_2(u+2\,,v) = \frac{2uv}{(u^2+v^2)^2}\,.$$

15. Le funzioni ausiliarie $\overline{\Psi}_r(u\,,v)$ e $\overline{\overline{\Psi}}_r(u\,,v)$ sono definite dalle relazioni 37) e 38), e valgono per tutti i valori finiti di u e di v. Sotto questo aspetto esse presentano un carattere molto generale. Ma vi sono casi in cui una soluzione più ristretta offre vantaggi sensibili, per certi sviluppi e certe trasformazioni che faremo in seguito.

Ritornando alla definizione delle funzioni $\Phi_r(u)$, si può scrivere

$$\Phi_r(u+v\sqrt{-1}) = \lim_{k=\infty}\left\{\log k - \sum_0^k{}_h(h+1)^{r-1}(h+u+v\sqrt{-1})^{-r}\right\} \qquad 59)$$

[1] Vedi Mem. citata, pag. 530, form. 26) e 29).

e sviluppando con la formola binomiale, poniamo di nuovo

$$\begin{aligned}\overline{\Psi}_r(u,v)&=v^2\sum_0^\infty{}_k\frac{(k+1)^{r-1}}{(k+u)^{r+2}}\left\{\binom{r+1}{2}-\binom{r+3}{4}\frac{v^2}{(k+u)^2}+\binom{r+5}{6}\frac{v^4}{(k+u)^4}-\cdots\text{inf.}\right\}\\ \overline{\overline{\Psi}}_r(u,v)&=v\sum_0^\infty{}_k\frac{(k+1)^{r-1}}{(k+u)^{r+1}}\left\{\binom{r}{1}-\binom{r+2}{3}\frac{v^2}{(k+u)^2}+\binom{r+4}{5}\frac{v^4}{(k+u)^4}-\cdots\text{inf.}\right\}.\end{aligned} \qquad 60)$$

Lo sviluppo binomiale porta a serie infinite, ed è ammesso soltanto quando $v < k+u$; e siccome k può anche avere il valore 0, occorre, per la convergenza delle serie incluse fra le parentesi $\{\ \}$, che $v < u$. Rimane da vedersi se anche le espressioni 60) tutte e intere siano convergenti, essendo esse rappresentate da serie doppie infinite. Perchè ciò sia, è necessario e sufficiente che il termine generale, moltiplicato per $(k+1)^s$, dove s è un numero arbitrario ma >1, abbia per $k=\infty$ il limite 0. Possiamo quindi scrivere le condizioni di convergenza

$$\begin{aligned}&\lim_{k=\infty}\left\{\left(\frac{k+1}{k+u}\right)^{r+2}\frac{1}{(k+1)^{3-s}}\left[\binom{r+1}{2}-\binom{r+3}{4}\frac{v^2}{(k+u)^2}+\cdots\text{inf.}\right]\right\}=0\\ &\lim_{k=\infty}\left\{\left(\frac{k+1}{k+u}\right)^{r+1}\frac{1}{(k+1)^{2-s}}\left[\binom{r}{1}-\binom{r+2}{3}\frac{v^2}{(k+u)^2}+\cdots\ \text{»}\ \right]\right\}=0.\end{aligned} \qquad 60_1)$$

Ciascuna espressione contiene tre fattori. Il primo, quando r e u siano quantità finite, ha per limite 1; il terzo, quando $v < u$, ha per limite rispettivamente $\binom{r+1}{2}$ e $\binom{r}{1}$, dunque una quantità finita; il secondo, infine, ha per limite 0, quante volte si ponga $1 < s < 2$. Riassumendo, si ha che le serie 60) sono convergenti, purchè r, u, v siano quantità finite e si abbia $v < u$. Questa ultima condizione rappresenta quindi una restrizione rispetto all'altra, fornita dalle relazioni 38); ma, come si vedrà in seguito, le 60) sono facilmente applicabili anche quando r sia una quantità nè positiva nè intera, e si prestano a riduzioni eleganti.

Esprimendo nelle 60), termine per termine, mediante le derivate delle $\Phi_r(u)$ si ha

$$\begin{aligned}\overline{\Psi}_r(u,v)&=-\frac{v^2}{2!}\Phi_r''(u)+\frac{v^4}{4!}\Phi_r^{(4)}(u)-\frac{v^6}{6!}\Phi_r^{(6)}(u)+\cdots\text{inf.}\\ \overline{\overline{\Psi}}_r(u,v)&=+\frac{v}{1!}\Phi_r'(u)-\frac{v^3}{3!}\Phi_r^{(3)}(u)+\frac{v^5}{5!}\Phi_r^{(5)}(u)-\cdots\ \text{»},\end{aligned} \qquad 61)$$

relazioni che si ricavano anche direttamente dallo sviluppo di $\Phi_r(u+v\sqrt{-1})$ mediante la serie di Taylor, e che valgono alle stesse condizioni di convergenza indicate più sopra.

16. Le formole 60) sono pure applicabili a valori negativi, frazionarii di u. Ma quando $u=-n$, dove per n s'intende un numero positivo e intero, esse assumono forma indeterminata. In questo caso conviene ritornare alla 59) e scindere la somma ivi apparente in tre posizioni: una per il termine corrispondente a $h=n$,

una seconda che va da $h=0$ fino a $h=n-1$, ed una terza che va da $h=n+1$ fino a $h=k$ $(k=\infty)$. Si ha

$$\Phi_r(-n+v\sqrt{-1}) = -\frac{(n+1)^{r-1}}{(v\sqrt{-1})^r} - \sum_0^{n-1}{}_k \frac{(k+1)^{r-1}}{(k-n)^r}\left(1+\frac{v\sqrt{-1}}{k-n}\right)^{-r}$$
$$+\lim_{k=\infty}\left\{\log k - \sum_{n+1}^{k}{}_h \frac{(h+1)^{r-1}}{(h-n)^r}\left(1+\frac{v\sqrt{-1}}{h-n}\right)^{-r}\right\}.$$

Lo sviluppo di questa espressione non è difficile. Nel primo termine la quantità $(\sqrt{-1})^r$ assume valore reale o immaginario, a seconda che r sia pari o dispari, e si ha l'espressione

$$-\left\{\begin{matrix}(-1)^{\frac{r}{2}} \\ (-1)^{\frac{r+1}{2}}\sqrt{-1}\end{matrix}\right\}\frac{(n+1)^{r-1}}{v^r},$$

dove i due valori, posti nella parentesi $\}\ \{$ l'uno sopra l'altro, si riferiscono, il superiore al caso di r pari, l'inferiore al caso di r dispari.

Il secondo termine, quando s'inverta il segno per $k-n$ e si ponga k al posto di $n-k$, si trasforma in

$$-(-1)^r \sum_1^n{}_k \frac{(n+1-k)^{r-1}}{k^r}\left\{1-\binom{r+1}{2}\frac{v^2}{k^2}+\binom{r+3}{4}\frac{v^4}{k^4}-\cdots \text{inf.}\right\}$$
$$-(-1)^r\sqrt{-1}\sum_1^n{}_k \frac{(n+1-k)^{r-1}}{k^r}\left\{\binom{r}{1}\frac{v}{k}-\binom{r+2}{3}\frac{v^3}{k^3}+\binom{r+4}{5}\frac{v^5}{k^5}-\cdots \text{inf.}\right\},$$

sviluppo valevole per $v<k$, e quindi per $v<1$, essendo $k=1$ il valore più piccolo, che k può assumere.

Il terzo termine va trattato in modo consimile. Scrivendo h per $h-n$, e considerando che l'espressione

$$\lim_{k=\infty}\left\{\log k - \sum_1^k{}_h \frac{(n+1+h)^{r-1}}{h^r}\right\},$$

quando si sviluppi la quantità $(n+1+h)^{r-1}$ secondo le potenze di $n+1$, si trasforma in

$$-\mathrm{A}-\sum_1^{r-1}{}_i\binom{r-1}{i}(n+1)^i\,\mathrm{S}_{i+1}\,,$$

il terzo termine dà luogo ad uno sviluppo in serie convergente, dove S_{i+1} ha il significato già varie volte adoperato (¹). Riassumendo i risultati parziali, ottenuti per i tre termini, e ponendo per brevità

$$\mathrm{R}_k=\binom{r+1}{2}\frac{v^2}{k^2}-\binom{r+2}{4}\frac{v^4}{k^4}+\binom{r+5}{6}\frac{v^6}{k^6}-\cdots \text{inf.}$$
$$\mathrm{R}'_k=\binom{r}{1}\frac{v}{k}-\binom{r+2}{3}\frac{v^3}{k^3}+\binom{r+4}{5}\frac{v^5}{k^5}-\cdots, \qquad 62)$$

(¹) Vedi numero precedente 11.

si ha

$$\Phi_r(-n+v\sqrt{-1}) =$$

$$= - A - \sum_1^{r-1}{}_i \binom{r-1}{i} (n+1)^i S_{i+1} - \left\{ \begin{matrix} (-1)^{\frac{r}{2}} \\ (-1)^{\frac{r+1}{2}} \sqrt{-1} \end{matrix} \right\} \frac{(n+1)^{r-1}}{v^r}$$

$$- (-1)^r \sum_1^n{}_k \frac{(n+1-k)^{r-1}}{k^r} (1 - R_k + R'_k \sqrt{-1}) \qquad 62,)$$

$$+ \sum_1^\infty{}_k \frac{(n+1+k)^{r-1}}{k^r} (R_k + R'_k \sqrt{-1}),$$

formola che concorda colle 42) e 47) riunite, e che, per il modo come fu svolta, vale per tutti i valori positivi interi di r. Per $r=0$ essa perde il suo significato e la sua ragione di essere, perchè non è il caso di scindere la serie fondamentale 59) nè in due, nè in tre parti. Il significato della funzione per il valore speciale di $r=0$ rimane quindi riservato.

Ponendo nella 62,) $n=0$, si ha

$$\Phi_r(v\sqrt{-1}) = - A - \sum_1^{r-1}{}_i \binom{r-1}{i} S_{i+1} - \left\{ \begin{matrix} (-1)^{\frac{r}{2}} \\ (-1)^{\frac{r+1}{2}} \sqrt{-1} \end{matrix} \right\} \frac{1}{v^r} \qquad 63)$$

$$+ \sum_1^\infty{}_k \frac{(k+1)^{r-1}}{k^r} (R_k + R'_k \sqrt{-1})$$

espressione per le funzioni Φ_r con argomento puramente immaginario.

Per il caso speciale di $r=0$, conviene ritornare alla 59), dalla quale si ricavano immediatamente le relazioni

$$\begin{aligned} \Phi_0(u+v\sqrt{-1}) &= - A \\ \Phi_0(-n+v\sqrt{-1}) &= - A \qquad 63,) \\ \Phi_0(v\sqrt{-1}) &= - A . \end{aligned}$$

Allo stesso risultato si arriva dalla 62,) considerando che, per le ragioni sovra esposte, dei cinque termini, che la compongono, il secondo è $=0$, il terzo e il quarto non hanno ragione di esistere, e il quinto si annulla perchè per, $r=0$, $R_k = R'_k = 0$.

PARTE SECONDA.

Le funzioni $\Phi_r(u)$ coll'indice r reale, negativo e intero e coll'indice reale e frazionario.

1. Le funzioni $\Phi_r(u)$ perdono il loro carattere di trascendenti e acquistano una forma più semplice, quando l'indice r sia reale, negativo e intero. Esse rispondono alla definizione

$$\Phi_{-r}(u) = \lim_{k=\infty} \left\{ \log k - \sum_0^k{}_h \frac{(h+u)^r}{(h+1)^{r+1}} \right\} \tag{1}$$

e ponendovi $u = 1$, e sottraendo da questa la nuova relazione, anche

$$\Phi_{-r}(u) = - \mathrm{A} - \sum_0^\infty{}_k \frac{(k+u)^r - (k+1)^r}{(k+1)^{r+1}} \,. \tag{2}$$

La serie, che qui appare, è convergente, e per vederne il carattere puramente algebrico, basta sviluppare il binomio

$$(k+u)^r = [(k+1) + (u-1)]^r$$

e porre, come già abbiamo fatto,

$$\sum_0^\infty{}_k \frac{1}{(k+1)^i} = \mathrm{S}_i\,;$$

si ha

$$\Phi_{-r}(u) = - \mathrm{A} - \sum_1^r{}_i \binom{r}{i} (u-1)^i\, \mathrm{S}_{i+1} \,, \tag{3}$$

dove i è un numero d'ordine che va da 1 fino a r e rappresenta quindi una serie finita. Questa equazione dimostra la natura algebrica della funzione $\Phi_{-r}(u)$, quando r sia un numero intero. Ponendo $r = 0, 1, 2, \ldots$, si hanno le relazioni

$$\begin{aligned} \Phi_0(u) &= - \mathrm{A} \\ \Phi_{-1}(u) &= - \mathrm{A} - (u-1)\, \mathrm{S}_2 \\ \Phi_{-2}(u) &= - \mathrm{A} - 2(u-1)\, \mathrm{S}_2 - (u-1)^2\, \mathrm{S}_3 \\ &\text{ecc.,} \end{aligned}$$

per cui si conclude che, con le coordinate cartesiane, la $\Phi_0(u)$ rappresenta una retta, parallela all'asse delle ascisse; la $\Phi_{-1}(u)$ una retta obbliqua; la $\Phi_{-2}(u)$ una curva di secondo, la $\Phi_{-r}(u)$ una curva di r^o grado: tutte passanti per il punto $-\mathrm{A}$, che, per $u = 1$, hanno in comune.

La relazione 2) può anche trasformarsi nel modo seguente. Ponendo

$$(k+u)^r-(k+1)^r=(u-1)\{(k+1)^{r-1}+(k+1)^{r-2}(k+u)+\cdots(k+u)^{r-1}\},$$

e considerando che, in termine generale,

$$\sum_0^\infty {}_k \frac{(k+u)^{i-1}}{(k+1)^{i+1}}=-\frac{1}{i}\,\Phi'_{-i}(u)\,. \qquad 4)$$

con facili sostituzioni si ha

$$\Phi_{-r}(u)=-\mathrm{A}+(u-1)\sum_1^r {}_i\,\frac{1}{i}\,\Phi'_{-i}(u)\,. \qquad 5)$$

Allo stesso modo, scrivendo $r-1$ al punto di r, si ha

$$\Phi_{-r+1}(u)=-\mathrm{A}+(u-1)\sum_1^{r-1} {}_i\,\frac{1}{i}\,\Phi'_{-i}(u)\,,$$

e, sottraendo l'una dall'altra,

$$\Phi_{-r+1}(u)=\Phi_{-r}(u)-\frac{u-1}{r}\,\Phi'_{-r}(u)\,, \qquad 6)$$

relazione che ha perfetta analogia con la I, 5) e si deduce da questa, scrivendovi $-r$ al posto di r. La relazione 6), come l'analoga I, 5), vale dunque per valori positivi e negativi di r. Ambedue conducono, per $r=0$, alla forma indeterminata $\frac{0}{0}$; ma basta ricorrere alla relazione 4) o all'analoga I, 6), per vedere che si ha

$$\Phi_1(u)=-\mathrm{A}+(u-1)\sum_0^\infty {}_k\,\frac{1}{(k+1)(k+u)}\,. \qquad 7)$$

Qui, al luogo della forma indeterminata $\frac{0}{0}$, è subentrata una serie convergente, per cui ogni indeterminatezza è tolta, e la 7) rimane perfettamente definita, come si può anche costatare direttamente.

2. Dalle considerazioni del numero precedente risulta che esiste un passaggio non interrotto dalle funzioni $\Phi_r(u)$ con indice positivo a quelle con indice negativo. A meglio dimostrarlo, scriviamo nella 6) successivamente $r, r-1, \ldots r-n+1$ al posto di r, e sommando queste espressioni abbiamo

$$\Phi_{-r+n}(u)=\Phi_{-r}(u)-(u-1)\left\{\frac{1}{r}\,\Phi'_{-r}(u)+\frac{1}{r-1}\,\Phi'_{-r+1}(u)+\right.$$
$$\left.+\cdots\frac{1}{r-n+1}\,\Phi'_{-r+n-1}(u)\right\}, \qquad 8)$$

dove r e n sono numeri positivi, interi, d'altronde arbitrarî. Fintanto che $r>n-1$, abbiamo una funzione $\Phi(u)$ dall'indice negativo o dall'indice 0 espressa con derivate di funzioni, tutte dall'indice negativo. Quando $r=n-1$, l'ultimo termine prende

la forma $\frac{0}{0}$, ma il suo significato è dato dalla 7). Finalmente, quando $r < n - 1$, si ha in via generale un termine intermedio dalla forma $\frac{0}{0}$, facilmente determinabile, e si hanno le derivate di funzioni $\Phi(u)$ parte coll'indice negativo, parte coll'indice positivo. D'altronde la 8) ha perfetta analogia con la seconda delle I, 8), per cui si conclude che, per esprimere una funzione $\Phi(u)$, si può prendere la mossa da un'altra coll'indice inferiore, e procedere per derivate di funzioni dall'indice successivo, senza preoccuparsi se queste abbiano l'indice negativo o positivo. Così, p. es. per $r = 2$, $n = 5$, la 8) si trasforma in

$$\Phi_3(u) = \Phi_{-2}(u) - (u-1)\left\{\frac{1}{2}\Phi'_{-2}(u) + \frac{1}{1}\Phi'_{-1}(u) + \frac{0}{0} - \frac{1}{1}\Phi'_1(u) - \frac{1}{2}\Phi'_2(u)\right\},$$

dove la forma $\frac{0}{0}$ ha il significato varie volte indicato.

Ritorniamo ora alla formola 1), e scrivendo in essa $r - n$ al posto di r, le diamo la forma seguente:

$$\Phi_{-r+n}(u) = \lim_{k=\infty}\left\{\log k - \sum_0^k{}_h \frac{(h+u)^r}{(h+1)^{r+1}}\left(1 - \frac{u-1}{h+u}\right)^n\right\}.$$

Sviluppando il binomio alla n^a potenza, e considerando che, in via generale,

$$\sum_0^\infty{}_k \frac{(k+u)^{r-i}}{(k+1)^{r+1}} = -\frac{(r-i)!}{r!}\Phi^{(i)}_{-r}(u), \tag{9}$$

con facili sostituzioni si ha

$$\Phi_{-r+n}(u) = \sum_0^n{}_i (-1)^i \frac{(r-i)!}{r!}\binom{n}{i}(u-1)^i \Phi^{(i)}_{-r}(u), \tag{10}$$

equazione che ha perfetta analogia con la I, 10), bastando scrivere $-r$ al posto di r, per trasformare l'una nell'altra. Anche in questa relazione, che procede per derivate successive di una sola funzione $\Phi_{-r}(u)$, uno o più termini possono apparire sotto la forma $\frac{0}{0}$, ma col mezzo della 9), ritornando indietro, l'indeterminatezza può essere facilmente tolta. Così si hanno, a titolo d'esempio, per $r = 0$ e $r = 1$ le relazioni

$$\begin{aligned}\Phi_n(u) &= -A + \binom{n}{1}(u-1)\sum_0^\infty{}_k \frac{(k+1)^{-1}}{(k+u)^1} - \\ &-\binom{n}{2}(u-1)^2\sum_0^\infty{}_k \frac{(k+1)^{-1}}{(k+u)^2} + \cdots - (-1)^n\binom{n}{n}(u-1)^n\sum_0^\infty{}_k \frac{(k+1)^{-1}}{(k+u)^n} \\ \Phi_{n-1}(u) &= -A + (n-1)(u-1)\frac{\pi^2}{6} \\ &-\binom{n}{2}(u-1)^2\sum_0^\infty{}_k \frac{(k+1)^{-2}}{(k+u)^1} + \cdots - (-1)^n\binom{n}{n}(u-1)^n\sum_0^\infty{}_k \frac{(k+1)^{-2}}{(k+u)^{n-1}},\end{aligned} \tag{10,}$$

relazioni perfettamente definite da serie convergenti.

3. Come le funzioni $\Phi_r(u)$, anche le $\Phi_{-r}(u)$ possiedono un polinomio caratteristico per tutti i valori interi di r. Ritorniamo alla formola 3) e scriviamo successivamente $u, u+n, \dots u+rn$ al posto di u. Abbiamo le equazioni

$$\begin{aligned}
\Phi_{-r}(u) &= -\mathrm{A} - \sum_1^r {}_i \binom{r}{i} (u-1)^i \mathrm{S}_{i+1} \\
\Phi_{-r}(u+n) &= -\mathrm{A} - \sum_1^r {}_i \binom{r}{i} (u-1+n)^i \mathrm{S}_{i+1} \\
&\dots\dots\dots\dots \\
\Phi_{-r}(u+rn) &= -\mathrm{A} - \sum_1^r {}_i \binom{r}{i} (u-1+rn)^i \mathrm{S}_{i+1}\,.
\end{aligned}$$

Moltiplichiamole rispettivamente per $\binom{r}{0}, -\binom{r}{1}, \dots (-1)^r \binom{r}{r}$, e sommiamo per colonne verticali. Il primo membro ci dà il polinomio caratteristico

$$\sum_0^r {}_i (-1)^i \binom{r}{i} \Phi_{-r}(u+in)\,. \tag{11}$$

La prima colonna a destra si annulla, la seconda prende la forma

$$-\sum_1^r {}_i \binom{r}{i} \mathrm{S}_{i+1} \left\{ \binom{r}{0} (u-1)^i - \binom{r}{1} (u-1+n)^i + \cdots (-1)^r \binom{r}{r} (u-1+rn)^i \right\}.$$

Sviluppando i singoli termini secondo le potenze di $(u-1)$, si arriva, per la espressione posta entro parentesi $\{\ \}$, a serie finite della forma generale

$$\binom{i}{m} (u-1)^{i-m} n^n \left\{ 0^m \binom{r}{0} - 1^m \binom{r}{1} + 2^m \binom{r}{2} - \cdots (-1)^r r^m \binom{r}{r} \right\},$$

dove m è un numero d'ordine, che va da 0 fino a i, mentre i va da uno fino a r. Questa serie binomiale, generalmente parlando, è, in conformità della I, 21), $=0$; soltanto nel caso estremo di $m=i$ e di $i=r$, secondo la I, 22), essa è uguale a

$$(-1)^r r!\, n^r\,. \tag{12}$$

A questo valore va estesa la somma (negativa) di $\binom{r}{i} \mathrm{S}_{i+1}$, ma per il solo valore di $i=r$; per cui, riassumendo i risultati delle 11) e 12), si ha

$$\sum_0^r {}_i (-1)^i \binom{r}{i} \Phi_{-r}(u+in) = -(-1)^r r!\, n^r \mathrm{S}_{r+1}\,; \tag{13}$$

relazione elegante, che dimostra come il polinomio caratteristico delle $\Phi_{-r}(u)$ n successive sia una quantità costante. Per $r=1$, $r=2$, la 13) si trasforma in

$$\left.\begin{aligned}
\Phi_{-1}(u) \qquad - \Phi_{-1}(u+n) &= -n \mathrm{S}_2 \\
\Phi_{-2}(u) - 2\Phi_{-2}(u+n) + \Phi_{-2}(u+2n) &= -2n^2 \mathrm{S}_3\,;
\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

relazioni che si deducono facilmente in via diretta.

Alla relazione 13) si può dare anche forma diversa. Ponendo in essa $u+n$ al posto di u, i al posto di $i+1$, si ha

$$-\sum_{1}^{r+1}{}_i (-1)^i \binom{r}{i-1} \Phi_{-r}(u+in) = -(-1)^r\, r!\, n^r\, S_{r+1}\,.$$

Nella Σ, che qui figura, si può scrivere senz'altro, al limite inferiore, 0 al posto di 1; come nella 13), al limite superiore, si può scrivere $r+1$ al posto di r, perchè ambedue questi termini si annullano da sè. Sottraendo l'una espressione dall'altra, si trova

$$\sum_{0}^{r+1}{}_i (-1)^i \binom{r+1}{i} \Phi_{-r}(u+in) = 0\,, \tag{15}$$

altra forma rimarchevole del polinomio caratteristico. Per $r=0\,,1\,,2$, si ha

$$\begin{aligned} \Phi_0(u) - \Phi_0(u+n) &= 0 \\ \Phi_{-1}(u) - 2\Phi_{-1}(u+n) + \Phi_{-1}(u+2n) &= 0 \\ \Phi_{-2}(u) - 3\Phi_{-2}(u+n) + 3\Phi_{-2}(u+2n) - \Phi_{-2}(u+3n) &= 0 \end{aligned} \tag{16}$$

relazioni facili a trovarsi in via diretta.

4. Ritorniamo alla formola 1), ed esaminiamo il significato che acquista, quando al valore reale u si sostituisca il complesso $u+v\sqrt{-1}$, u e v essendo quantità reali. Sviluppando l'espressione

$$(k+u+v\sqrt{-1})^r$$

per potenze di $k+u$, e ponendo

$$\begin{aligned} \overline{\Psi}_{-r}(u\,.\,v) &= \quad v^2 \sum_{0}^{\infty}{}_k \frac{\binom{r}{2}(k+u)^{r-2} - \binom{r}{4}(k+u)^{r-4}v^2 + \binom{r}{6}(k+u)^{r-6}v^4 - \cdots}{(k+1)^{r+1}} \\ \overline{\overline{\Psi}}_{-r}(u\,,v) &= -\,v \sum_{0}^{\infty}{}_k \frac{\binom{r}{1}(k+u)^{r-1} - \binom{r}{3}(k+u)^{r-3}v^2 + \binom{r}{5}(k+u)^{r-5}v^4 - \cdots}{(k+1)^{r+1}} \end{aligned} \tag{17}$$

dove $\overline{\Psi}_{-r}(u\,,v)$ e $\overline{\overline{\Psi}}_{-r}(u\,,v)$ sono funzioni ausiliarie definite da serie, sempre convergenti, e che si fermano da sè per valori interi di r, si ha

$$\Phi_{-r}(u+v\sqrt{-1}) = \Phi_{-r}(u) + \overline{\Psi}_{-r}(u\,,v) + \sqrt{-1}\,\overline{\overline{\Psi}}_{-r}(u\,,v)\,, \tag{18}$$

relazione che ha perfetta analogia colla I, 39), valevole per valori positivi interi di r.

Se nelle 17) si pone $-v$ al posto di v, la prima di esse rimane inalterata, la seconda cambia di segno, per cui la 18) diviene

$$\Phi_{-r}(u-v\sqrt{-1}) = \Phi_{-r}(u) + \overline{\Psi}_{-r}(u\,,v) - \sqrt{-1}\,\overline{\overline{\Psi}}_{-r}(u\,,v)\,.$$

Per il caso, che u divenga negativo, abbiamo nella 18) tre funzioni distinte da esaminare. La $\Phi_{-r}(u)$, come appare dalla 2) e meglio ancora dalla 3), per valori

negativi di u conserva il suo valore finito, anche quando u abbia un valore negativo intero. Allo stesso risultato si giunge anche per le funzioni ausiliarie $\overline{\Psi}_{-r}(-u, v)$ e $\overline{\overline{\Psi}}_{-r}(-u, v)$, per cui si conclude che la 18) vale per tutti i valori positivi e negativi, interi o frazionarî di u.

Le relazioni 17) assumono anche la forma

$$\begin{aligned} \overline{\Psi}_{-r}(u, v) &= \quad v^2 \sum_0^\infty {}_k \frac{(k+u)^{r-2}}{(k+1)^{r+1}} \left\{ \binom{r}{2} - \binom{r}{4} \frac{v^2}{(k+u)^2} + \binom{r}{6} \frac{v^4}{(k+u)^4} - \cdots \right\} \\ \overline{\overline{\Psi}}_{-r}(u, v) &= -v \sum_0^\infty {}_k \frac{(k+u)^{r-1}}{(k+1)^{r+1}} \left\{ \binom{r}{1} - \binom{r}{3} \frac{v^2}{(k+u)^2} + \binom{r}{5} \frac{v^4}{(k+u)^4} - \cdots \right\}. \end{aligned} \qquad 20)$$

Siccome, per valori di r interi, le serie entro parentesi $\}\ \{$ sono finite, esse non vanno soggette a ulteriori condizioni di convergenza, e la forma 20) è identica alla 17). In questa forma presentano grande analogia colle I, 59) valevoli per valori positivi di r. Le une si trasformano nelle altre, salvo le condizioni per la convergenza, che possono occorrere, ponendo $-r$ al posto di r.

Alle 20) si può infine anche dare la forma

$$\begin{aligned} \overline{\Psi}_{-r}(u, v) &= -\frac{v^2}{2!} \Phi''_{-r}(u) + \frac{v^4}{4!} \Phi^{(4)}_{-r}(u) - \frac{v^6}{6!} \Phi^{(6)}_{-r}(u) + \cdots \\ \overline{\overline{\Psi}}_{-r}(u, v) &= +\frac{v}{1!} \Phi'_{-r}(u) - \frac{v^3}{3!} \Phi^{(3)}_{-r}(u) + \frac{v^5}{5!} \Phi^{(5)}_{-r}(u) - \cdots \end{aligned} \qquad 21)$$

forma perfettamente analoga alla I, 61), alla quale si arriva anche direttamente, sviluppando la funzione

$$\Phi_{-r}(u + v\sqrt{-1}) = \Phi_{-r}(u) + \frac{v}{1!}\sqrt{-1}\, \Phi'_{-r}(u) - \frac{v^2}{2!} \Phi''_{-r}(u) - \cdots$$

col mezzo della serie di Taylor, la quale si ferma pure da sè. Giova osservare che, per $r = 0$, si ha

$$\Phi_0(u + v\sqrt{-1}) = -\mathrm{A}, \qquad 21_{,})$$

valore che concorda con quello trovato I, $63_{,}$).

5. Vogliamo ora esaminare il significato che acquista la funzione $\Phi_r(u)$, quando all'indice intero r si aggiunga la frazione pura ϱ. Abbiamo

$$\Phi_{r+\rho}(u) = \lim_{k=\infty} \left\{ \log k - \sum_0^k {}_h \frac{(h+1)^{r-1+\rho}}{(h+u)^{r+\rho}} \right\}. \qquad 22)$$

Il termine generale della serie, che qui figura, tende al limito 0. Infatti, derivando numeratore e denominatore r volte rispetto a k, si ha

$$\frac{\varrho}{r+\varrho} \lim_{k=\infty} \left\{ \frac{1}{(k+1)^{1-\rho}(k+u)^{\rho}} \right\} = 0.$$

La serie, a partire da un certo termine in poi, è dunque decrescente e i suoi termini tendono al limite 0. Il che non vuol però dire, che essa sia convergente.

Chiamando per brevità

T_r il termine generale corrispondente a $\Phi_r(u)$, ossia $T_r = \dfrac{(k+1)^{r-1}}{(k+u)^r}$

$T_{r+\rho}$ " " " $\Phi_{r+\rho}(u)$ " $T_{r+\rho} = T_r\left(\dfrac{k+1}{k+u}\right)^\rho$

T_{r+1} " " " $\Phi_{r+1}(u)$ " $T_{r+1} = T_r\left(\dfrac{k+1}{k+u}\right)$,

ed eliminando dalle due ultime espressioni la quantità $\left(\dfrac{k+1}{k+u}\right)$, si hanno le relazioni

$$T_{r+\rho} = T_r^{1-\rho}\,T_{r+1}^{\rho} = T_r\left(\frac{T_{r+1}}{T_r}\right)^\rho = T_{r+1}\left(\frac{T_r}{T_{r+1}}\right)^{1-\rho} \qquad 23)$$

dalle quali apparisce che, come $r+\varrho$ è compreso fra r e $r+1$, anche il valore $T_{r+\rho}$ è intermedio fra T_r e T_{r+1}, i quali sono i termini generali di due serie divergenti. Ora, trattandosi di serie con termini tutti dello stesso segno, anche la serie in 22) è divergente, e l'andamento della $\Phi_{r+\rho}(u)$ deve essere intermedio tra quelli delle funzioni $\Phi_r(u)$ e $\Phi_{r+1}(u)$, ed ha, come queste, valore finito. Per trovarlo, poniamo nella 22) $u=1$, e sottraendo si ha

$$\Phi_{r+\rho}(u) = -A + \sum_0^\infty{}_k \frac{(k+u)^{r+\rho} - (k+1)^{r+\rho}}{(k+1)\,(k+u)^{r+\rho}}\,. \qquad 24)$$

È facile dimostrare, che questa serie, anche cogli esponenti frazionarî, conserva la sua convergenza. Secondo la serie di Taylor, valevole per funzioni continue, come lo sono le $\Phi_{r+\rho}(u)$ per valori positivi del loro argomento, si ha

$$\begin{aligned}(k+u)^{r+\rho} &= (k+1+u-1)^{r+\rho}\\ &= (k+1)^{r+\rho} + (u-1)\,(r+\varrho)\,(k+1+\theta(u-1))^{r+\rho-1}\,,\end{aligned}$$

dove per θ s'intende una frazione pura, che non occorre ulteriormente determinare. Per cui la 24) si trasforma in

$$\Phi_{r+\rho}(u) = -A + (u-1)\,(r+\varrho)\sum_0^\infty{}_k \frac{1}{(k+1)^2}\,\frac{\left(1+\theta\cdot\dfrac{u-1}{k+1}\right)^{r+\rho-1}}{\left(1+\dfrac{u-1}{k+1}\right)^{r+\rho}}\,.$$

Per riconoscere, se questa serie sia convergente, basta moltiplicare il termine generale per $(k+1)^s$, s essendo un numero arbitrario >1, ed è necessario e sufficiente, che tale prodotto, per $k=\infty$, abbia per limite 0. Si ha quindi la condizione di convergenza

$$(u-1)\,(r+\varrho)\lim_{k=\infty}\left\{\frac{1}{(k+1)^{2-s}}\,\frac{\left(1+\theta\cdot\dfrac{u-1}{k+1}\right)^{r+\rho-1}}{\left(1+\dfrac{u-1}{k+1}\right)^{r+\rho}}\right\} = 0\,,$$

la quale condizione è sempre soddisfatta, quante volte u e r siano quantità finite,

e s sia compreso nei limiti $1 < s < 2$, il che è possibile. La serie 24) è quindi convergente.

Quando r e ϱ siano negativi, essa prende la forma

$$\Phi_{-r-\rho}(u) = -A - \sum_0^\infty {}_k \frac{(k+u)^{r+\rho} - (k+1)^{r+\rho}}{(k+1)^{r+\rho-1}}, \tag{25}$$

e conserva la sua convergenza ed il carattere di trascendente.

6. Le relazioni 22), 24) 25) hanno bisogno di essere ulteriormente chiarite. La quantità ϱ essendo frazionaria, le potenze che vi figurano, divengono molteplici e rendono molteplice la funzione $\Phi_{r+\rho}(u)$. Distinguendo tale molteplicità con doppia parentesi, abbiamo dalla 22)

$$\Phi_{r+\rho}((u)) = \lim_{k=\infty} \left\{ \log k - \sum_0^k {}_h \frac{(h+1)^{r-1}}{(h+u)^r} \left(\left(\frac{h+1}{h+u}\right)\right)^\rho \right\}. \tag{26}$$

Siccome ϱ è una funzione pura, poniamo

$$\varrho = \frac{\alpha}{\beta},$$

dove per α e per β intendiamo numeri primi relativi, i quali, quando ϱ fosse irrazionale, sarebbero infinitamente grandi. Quando per valori positivi o negativi di u, l'espressione

$$\frac{h+1}{h+u}$$

fosse per risultare positiva o negativa, si hanno le relazioni rispettive

$$\left.\begin{aligned} \left(\left(\frac{h+1}{h+u}\right)\right)^\rho &= ((+1))^\rho \left(\frac{h+1}{h+u}\right)^\rho \\ \left(\left(\frac{h+1}{h+u}\right)\right)^\rho &= ((-1))^\rho \left(\frac{h+1}{u-h}\right)^\rho \quad \text{quante volte } h < u, \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

dove

$$\left.\begin{aligned} ((+1))^\rho &= \cos 2\lambda \frac{\alpha\pi}{\beta} + \sqrt{-1} \operatorname{sen} 2\lambda \frac{\alpha\pi}{\beta} = e^{2\lambda\pi\rho\sqrt{-1}} \\ ((-1))^\rho &= \cos(2\lambda+1) \frac{\alpha\pi}{\beta} + \sqrt{-1} \operatorname{sen}(2\lambda+1) \frac{\alpha\pi}{\beta} = e^{(2\lambda+1)\pi\rho\sqrt{-1}} \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

ed anche $((\sqrt{-1}))^\rho = \cos \dfrac{4\lambda+1}{2} \dfrac{\alpha\pi}{\beta} + \sqrt{-1} \operatorname{sen} \dfrac{4\lambda+1}{2} \dfrac{\alpha\pi}{\beta} = e^{\frac{4\lambda+1}{2}\pi\rho\sqrt{-1}}$,

λ essendo un numero arbitrario, intero, che va da 0 fino a $\beta - 1$. Ne segue che la 26) assume β valori diversi. Sostituendovi la prima delle relazioni 27) e 28), abbiamo

$$\Phi_{r+\rho}((u)) = \lim_{k=\infty} \left\{ \log k - e^{2\lambda\pi\rho\sqrt{-1}} \sum_0^k {}_h \frac{(h+1)^{r-1+\rho}}{(h+u)^{r+\rho}} \right\}, \tag{29}$$

Con preghiera d'inserire nel volume XI delle Memorie della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali, in fine del lavoro del sen. P. Blaserna.

relazione più generale della 22) e che ritorna a questa, quando sia $\lambda = 0$. Per trovare il significato per tutti gli altri valori di λ, moltiplichiamo la 22) per il fattore finito e complesso $e^{2\lambda\pi\rho\sqrt{-1}}$, e sottraendone il prodotto dalla 29), abbiamo

$$\Phi_{r+\rho}((u)) = (1 - e^{2\lambda\pi\rho\sqrt{-1}}) \log_{k=\infty} k + e^{2\lambda\pi\rho\sqrt{-1}}\, \Phi_{r+\rho}(u) \qquad 30)$$

relazione, che consta di un termine infinito complesso, e di uno finito complesso. Pr $\lambda = 0$ scompare il primo termine e il secondo si riduce a $\Phi_{r+\rho}(u)$. Ponendovi $u = 1$, si ha

$$\Phi_{r+\rho}((1)) = (1 - e^{2\lambda\pi\rho\sqrt{-1}}) \log_{k=\infty} k - e^{2\lambda\pi\rho\sqrt{-1}}\, \mathrm{A} \qquad 31)$$

espressione, che ha il medesimo comportamento della 30) e possiede quindi un solo valore, $-\mathrm{A}$, finito e reale, per $\lambda = 0$.

Poniamo ora

$$\Phi_{r+\rho}((u)) - \Phi_{r+\rho}((1)) = \Delta_{r+\rho}((u)), \qquad 32)$$

dove col simbolo Δ esprimiamo una nuova funzione, in relazione semplice colla Φ), ed abbiamo

$$\Delta_{r+\rho}((u)) = e^{2\lambda\pi\rho\sqrt{-1}} \{ \mathrm{A} + \Phi_{r+\rho}(u) \}, \qquad 33)$$

da cui risulta, come alla nuova funzione $\Delta_{r+\rho}((u))$ corrispondano β valori tutti finiti.

Per $\lambda = 0$, si ha

per cui

$$\begin{aligned} \Delta_{r+\rho}(u) &= \mathrm{A} + \Phi_{r+\rho}(u) \\ \Delta_{r+\rho}((u)) &= e^{2\lambda\pi\rho\sqrt{-1}}\, \Delta_{r+\rho}(u). \end{aligned} \qquad 34)$$

Non occorre forse aggiungere, che la $\Phi_{r+\rho}(u)$ è definita dalla espressione 24). È facile vedere, come queste relazioni valgano anche per il caso, che r e ϱ abbiano valori negativi; per cui la 30 e la 33) si trasformano in

$$\Phi_{-r-\rho}((u)) = (1 - e^{-2\lambda\pi\rho\sqrt{-1}}) \log_{k=\infty} k + e^{-2\lambda\pi\rho\sqrt{-1}}\, \Phi_{-r-\rho}(u) \qquad 35)$$

$$\Delta_{-r-\rho}((u)) = e^{-2\lambda\pi\rho\sqrt{-1}} \{ \mathrm{A} + \Phi_{-r-\rho}(u) \}, \qquad 36)$$

dove la funzione $\Phi_{-r-\rho}(u)$ è definita dalla equazione 25).

7. Le formole 29) . . . 36) del numero precedente valgono per valori positivi di u. La questione richiede un particolare esame, quando ad u si assegnino valori negativi.

Poniamo nella 26) $-u$ al posto di u, nell'espressione $\dfrac{h+1}{h+u}$ uno o più termini risultano negativi. Chiamiamo m un numero intero, in modo che $m < u < m+1$, e scindiamo la serie in due porzioni: una da $h = 0$ fino a $h = m$, l'altra da

$h = m + 1$ in sù. Tenendo conto delle 27) e 28), abbiamo

$$\Phi_{r+\rho}((\quad u)) = -(-1)^r e^{(2\lambda'+1)\pi\rho\sqrt{-1}} \sum_0^m{}_k \frac{(k+1)^{r-1+\rho}}{(u-k)^{r+\rho}} + \\ + \lim_{k=\infty} \left\{ \log k - e^{2\lambda\pi\rho\sqrt{-1}} \sum_{m+1}^k{}_h \frac{(h+1)^{r-1+\rho}}{(h-u)^{r+\rho}} \right\}, \tag{37}$$

dove λ e λ' sono numeri fra loro indipendenti, che vanno da 0 fino a $\beta - 1$. Ponendo $\lambda = 0$, abbiamo

$$\Phi_{r+\rho}(-u) = -(-1)^r e^{(2\lambda'+1)\pi\rho\sqrt{-1}} \sum_0^m{}_k \frac{(k+1)^{r-1+\rho}}{(u-k)^{r+\rho}} + \\ + \lim_{k=\infty} \left\{ \log k - \sum_{m+1}^k{}_h \frac{(h+1)^{r-1+\rho}}{(h-u)^{r+\rho}} \right\} \tag{38}$$

espressione che conserva ancora una molteplicità per gli $m+1$ termini della serie finita. Moltiplicando questa espressione per $e^{2\lambda\pi\rho\sqrt{-1}}$, sottraendo il prodotto dalla 37) e considerando che per la molteplicità dei valori si può porre

$$e^{(2\lambda'+1)\pi\rho\sqrt{-1}} = e^{2\lambda+2\lambda'+1)\pi\rho\sqrt{-1}},$$

perchè coll'una o coll'altra espressione si ottengono sempre i β valori contemplati e nulla più, si ha

$$\Phi_{r+\rho}((-u)) = (1 - e^{2\lambda\pi\rho\sqrt{-1}}) \log_{k=\infty} k + e^{2\lambda\pi\rho\sqrt{-1}} \Phi_{r+\rho}(-u) \tag{39}$$

espressione perfettamente analoga alla 30), e per la quale valgono le stesse considerazioni svolte per l'altra. In essa la $\Phi_{r+\rho}(-u)$ è data dalla 38), la quale ha forma indeterminata, ma valore finito. Per persuadersene, basta sottrarre da essa la nota relazione

$$-\mathrm{A} = -\sum_0^m{}_k \frac{1}{k+1} + \lim_{k=\infty} \left\{ \log k - \sum_{m+1}^k{}_h \frac{1}{h+1} \right\},$$

e si ha

$$\mathrm{A} + \Phi_{r+\rho}(-u) = \sum_0^m{}_k \frac{1}{k+1} - (-1)^{(2\lambda'+1)\pi\rho\sqrt{-1}} \sum_0^m{}_k \frac{(k+1)^{r-1+\rho}}{(u-k)^{r+\rho}} + \\ + \sum_{m+1}^\infty{}_k \frac{(k-u)^{r+\rho} - (k+1)^{r+\rho}}{(k+1)(k-u)^{r+\rho}} \tag{40}$$

espressione finita, essendo convergente la serie infinita, che vi figura. Soltanto quando u fosse un numero intero, vi è un termine, il cui denominatore va a zero, e manda all'infinito tutta l'espressione. Ne segue che la funzione $\Phi_{r+\rho}(-u)$ ha valori finiti

e complessi per tutti i valori negativi e frazionarî del suo argomento. Nel caso che β sia dispari, vi è un valore di $\lambda' = \frac{\beta - 1}{2}$, per il quale si ha

$$A + \Phi_{r+\rho}(-u) = \sum_0^m {}_k \frac{1}{k+1} - (-1)^{r+\alpha} \sum_0^m {}_k \frac{(k+1)^{r-1-\rho}}{(u-k)^{r+\rho}} + \\ + \sum_{m+1}^\infty {}_k \frac{(k-u)^{r+\rho} - (k+1)^{r+\rho}}{(k+1)(k-u)^{r+\rho}}, \tag{41}$$

e questa è la sola espressione finita e reale. All'incontro, quando β sia pari, non esiste alcun valore di λ', che renda reale la 40). In altri termini, per valori frazionarî di u, la funzione $\Phi_{r+\rho}(-u)$ possiede sempre valori finiti ed anche *un* valore reale nel *solo* caso, che β sia dispari.

Ponendo infine

$$\Phi_{r+\rho}((-u)) - \Phi_{r+\rho}((1)) = \Delta_{r+\rho}((-u)), \tag{42}$$

e avendo presente la 31), si ha

$$\Delta_{r+\rho}((-u)) = e^{2\lambda\pi\rho\sqrt{-1}} \{A + \Phi_{r+\rho}(-u)\}, \tag{43}$$

equazione analoga alla 33), la quale per valori negativi di r e di ϱ si trasforma in

$$\Delta_{-r-\rho}((-u)) = e^{-2\lambda\pi\rho\sqrt{-1}} \{A + \Phi_{-r-\rho}(-u)\},$$

essendo

$$A + \Phi_{-r-\rho}(-u) = \sum_0^m {}_k \frac{1}{k+1} - (-1)^r e^{-(2\lambda'+1)\pi\rho\sqrt{-1}} \sum_0^m {}_k \frac{(u-k)^{r+\rho}}{(k+1)^{r+1+\rho}} + \\ + \sum_{m+1}^\infty {}_k \frac{(k+1)^{r+\rho} - (k-u)^{r+\rho}}{(k+1)^{r+1+\rho}} \tag{44}$$

equazione, per la quale valgono le stesse considerazioni, che abbiamo fatto per la 40), ma che conserva forma finita anche per valori interi di u.

8. Vogliamo ora estendere la relazione 33) al caso di argomenti complessi. Scrivendovi $u + v\sqrt{-1}$ al posto di u, dove per u e v intendiamo quantità reali, d'altronde arbitrarie, abbiamo

$$\Delta_{r+\rho}((u + v\sqrt{-1})) = e^{2\lambda\pi\rho\sqrt{-1}} \{A + \Phi_{r+\rho}(u + v\sqrt{-1})\}, \tag{45}$$

e si tratta di trovare l'espressione corrispondente a $\Phi_{r+\rho}(u + v\sqrt{-1})$. Il procedimento è analogo a quello usato in I. n. 15; basta cioè scrivere nelle formole 59) e 60) $u + \varrho$ al posto di r. Trattandosi di sviluppi binomiali in serie infinite, occorrono condizioni di convergenza identiche a quelle ivi trovate. Ponendo quindi

$$\overline{\Psi}_{r+\rho}(u, v) = v^2 \sum_0^\infty {}_k \frac{(k+1)^{r-1+\rho}}{(k+u)^{r+2+\rho}} \left\{ \binom{r+1+\varrho}{2} - \binom{r+3+\varrho}{4} \frac{v^2}{(k+u)^2} + \cdots \text{inf.} \right\} \\ \overline{\overline{\Psi}}_{r+\rho}(u, v) = v \sum_0^\infty {}_k \frac{(k+1)^{r-1+\rho}}{(k+u)^{r+1+\rho}} \left\{ \binom{r+\varrho}{1} - \binom{r+2+\varrho}{3} \frac{v^2}{(k+u)^2} + \cdots \text{inf.} \right\}, \tag{46}$$

si ha la relazione

$$\Phi_{r+\rho}(u+v\sqrt{-1}) = \Phi_{r+\rho}(u) + \overline{\Psi}_{r+\rho}(u, v) + \sqrt{-1}\,\overline{\overline{\Psi}}_{r+\rho}(u, v), \tag{47}$$

la quale vale per valori positivi e negativi di r e ϱ, e per valori positivi e negativi di v e di u. Soltanto nel caso che sia $u = -n$, dove n è un numero intero, le 46) prendono forma indeterminata, a determinare la quale giova procedere in modo analogo a quello usato in I, n. 16. Scrivendo nella I. 59) $r+\varrho$ al posto di r si leva fuori della serie il termine corrispondente ad $h=n$, e si scinde con ciò la rimanente serie ancora in due porzioni: una fino a $h=n-1$, l'altra da $h=n+1$ in poi. Per queste tre porzioni abbiamo

$$\Phi_{r+\rho}(-n+v\sqrt{-1}) = \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III},$$

dove

$$\begin{aligned} \mathrm{I} &= -\frac{(n+1)^{r-1+\rho}}{(v\sqrt{-1})^{r+\rho}} \\ \mathrm{II} &= -\sum_{0}^{n-1}{}_k \frac{(k+1)^{r-1+\rho}}{(k-n)^{r+\rho}}\left(1+\frac{v\sqrt{-1}}{k-n}\right)^{-r-\rho} \\ \mathrm{III} &= \lim_{k=\infty}\left\{\log k - \sum_{n+1}^{k}{}_k \frac{(h+1)^{r-1+\rho}}{(h-n)^{r+\rho}}\left(1+\frac{v\sqrt{-1}}{h-n}\right)^{-r-\rho}\right\}. \end{aligned} \tag{48}$$

Per la prima posizione, giusta le relazioni 28), si ha

$$\mathrm{I} = -\left\{\begin{matrix}(-1)^{\frac{r}{2}} \\ (-1)^{\frac{r+1}{2}}\sqrt{-1}\end{matrix}\right\} e^{-\frac{1}{2}(4\lambda'+1)\pi\rho\sqrt{-1}}\frac{(n+1)^{r-1+\rho}}{v^{r+\rho}}, \tag{48,}$$

dove i due fattori, posti l'uno sotto l'altro nella parentesi $\{\ \}$, si riferiscono al caso di r pari e di r dispari. Per la seconda porzione, sempre procedendo come in I, n. 16, e giusta le 28), e scrivendo per brevità

$$\begin{aligned} \mathrm{R}_k &= \binom{r+1+\varrho}{2}\frac{v^2}{k^2} - \binom{r+3+\varrho}{4}\frac{v^4}{k^4} + \cdots \text{inf.} \\ \mathrm{R}'_k &= \binom{r+\varrho}{1}\frac{v}{k} - \binom{r+2+\varrho}{3}\frac{v^3}{k^3} + \cdots \text{inf.}, \end{aligned}$$

si ha

$$\mathrm{II} = -(-1)^r e^{-(2\lambda'+1)\pi\rho\sqrt{-1}}\sum_{1}^{n}{}_k \frac{(n+1-k)^{r-1+\rho}}{k^{r+\rho}}(1-\mathrm{R}_k+\mathrm{R}'_k\sqrt{-1}). \tag{48,,}$$

Finalmente, per la terza porzione, trattandosi di uno sviluppo binomiale in serie convergente, adottando i simboli adoperati in I, n. 7, si ha

$$\begin{aligned} \mathrm{III} = \mathrm{S}_1^{(n+1)} &- \sum_{1}^{n+1}{}_k \frac{(n+1+k)^{r-1+\rho}}{k^{r+\rho}} - \sum_{1}^{\infty}{}_i \binom{r-1+\varrho}{i}(n+1)^i\,\mathrm{S}_{i+1}^{(n+1)} \\ &+ \sum_{1}^{\infty}{}_k \frac{(n+1+k)^{r-1+\rho}}{k^{r+\rho}}(\mathrm{R}_k+\mathrm{R}'_k\sqrt{-1}). \end{aligned} \tag{48,,,}$$

Colle relazioni parziali 48,), 48,,), 48,,,) il problema posto nella 48) è risoluto. Ponendovi $\varrho = 0$, si ritorna facilmente alla I, 62,); ponendo invece $n = 0$, si ha

$$\Phi_{r+\rho}(v\sqrt{-1}) = S'_1 - 2^{r-1+\rho} - \sum_1^\infty{}_i \binom{r-1+\varrho}{i} S'_{i+1} -$$

$$- \left\{ \begin{matrix} (-1)^{\frac{r}{2}} \\ (-1)^{\frac{r+1}{2}} \sqrt{-1} \end{matrix} \right\} \left(e^{-\frac{1}{2}(4\lambda'+1)\pi\rho\sqrt{-1}} \cdot \frac{1}{v^{r+\rho}} + \sum_1^\infty{}_k \frac{(k+1)^{r-1+\rho}}{k^{r+\rho}} (R_k + R'_k\sqrt{-1}) \right. \qquad 49)$$

relazione per la nostra trascendente con argomento puramente immaginario, e che per $\varrho = 0$ si trasforma facilmente nella I, 63). Finalmente, per $r = 0$, la 49) si trasforma con breve riduzione in

$$\Phi_\rho(v\sqrt{-1}) = -A - \sum_1^\infty{}_i \binom{i-\varrho}{i} (-1)^i S_{i+1} - e^{-\frac{1}{2}(4\lambda'+1)\pi\rho\sqrt{-1}} \frac{1}{v^\rho}$$
$$+ \sum_1^\infty{}_k \frac{1}{k^\rho (k+1)^{1-\rho}} (R_k + R'_k\sqrt{-1}), \qquad 49,)$$

dove R_k e R'_k hanno i valori più sopra indicati, ma per il caso speciale che $r = 0$.

PARTE TERZA.

Le funzioni $\Phi_r(u)$ coll'indice r complesso.

1. Vogliamo ora esaminare il significato, che acquistano le nostre trascendenti, quando all'indice reale r si sostituisca uno complesso, della forma $p + q\sqrt{-1}$, dove p e q rappresentano quantità reali, d'altronde arbitrarie. Ritornando alla definizione di queste funzioni, abbiamo

$$\Phi_{p+q\sqrt{-1}}(u) = \lim_{k=\infty} \left\{ \log k - \sum_0^k{}_h \frac{(h+1)^{p-1+q\sqrt{-1}}}{(h+u)^{p+q\sqrt{-1}}} \right\}. \qquad 1)$$

Conviene rammentare, che il termine generale di questa serie assume valori molteplici, anche quando p sia un numero intero, e che esso prende la forma

$$\frac{(k+1)^{p-1}}{(k+u)^p} \left(\left(\frac{k+1}{k+u} \right) \right)^{q\sqrt{-1}} = \frac{(k+1)^{p-1}}{(k+u)^p} ((\cos \varrho q - \sqrt{-1} \operatorname{sen} \varrho q))$$

in cui

$$\varrho = \log \left(\frac{k+u}{k+1} \right) + 2\mu\pi\sqrt{-1} \qquad \text{quando } k+u \text{ sia positivo} \qquad 2)$$

$$\varrho = \log \left(-\frac{k+u}{k+1} \right) + (2\mu+1)\pi\sqrt{-1} \qquad \text{» » » negativo,}$$

μ essendo un numero intero completamente arbitrario. Il primo caso qui contemplato, che cioè $k+u$ sia positivo, avviene quante volte u sia positivo ed anche quando u sia negativo e numericamente minore di k. Il secondo caso, di $k+u$ negativo, avviene limitatamente quando u sia negativo e numericamente superiore a k.

Vogliamo, per ora, lasciar da parte la molteplicità dei valori, che risulta nelle 2) dalla presenza di μ e supporremo per ϱ il suo valore reale, che si ottiene per $k+u$ positivo, ponendo $\mu=0$. Sostituendo le 2) nella equazione 1) e rammentando che

$$\cos\varrho q = 1 - \operatorname{senv}\varrho q\,,$$

si ha

$$\begin{aligned}\Phi_{p+q\sqrt{-1}}(u) = \Phi_p(u) + \\ + \sum_0^\infty{}_k \frac{(k+1)^{p-1}}{(k+u)^p}\left\{\operatorname{senv}\left[q\log\left(\frac{k+u}{k+1}\right)\right]+\sqrt{-1}\,\operatorname{sen}\left[q\log\left(\frac{k+u}{k+1}\right)\right]\right\}.\end{aligned} \qquad 3)$$

Prima di proseguire, vogliamo esaminare, se la serie complessa che qui figura, sia convergente. Essa è decrescente, e per la sua convergenza è necessario e sufficiente, che sia soddisfatta la doppia condizione

$$\lim_{k=\infty}\left\{\frac{(k+1)^{p+s-1}}{(k+u)^p}\operatorname{senv}\left[q\log\left(\frac{k+u}{k+1}\right)\right]\right\}=0$$

$$\lim_{k=\infty}\left\{\frac{(k+1)^{p+s-1}}{(k+u)^p}\operatorname{sen}\left[q\log\left(\frac{k+u}{k+1}\right)\right]\right\}=0\,,$$

dove s rappresenta un numero arbitrario >1. Queste due espressioni hanno pure la forma

$$\begin{aligned}&\lim_{k=\infty}\left\{\left(\frac{k+1}{k+u}\right)^p\frac{\operatorname{senv}\left[q\log\left(\frac{k+u}{k+1}\right)\right]}{(k+1)^{1-s}}\right\}\\ &\lim_{k=\infty}\left\{\left(\frac{k+1}{k+u}\right)^p\frac{\operatorname{sen}\left[q\log\left(\frac{k+u}{k+1}\right)\right]}{(k+1)^{1-s}}\right\},\end{aligned} \qquad 4)$$

e si tratta di vedere, se e a quali condizioni siano $=0$. La quantità $\left(\frac{k+1}{k+u}\right)^p$ ha, per $k=\infty$, il limite 1 per tutti i valori finiti di p e di u. Il secondo fattore, che figura in ambedue le espressioni, prende la forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Ma derivandone partitamente numeratore e denominatore rispetto a k, e sostituendovi il valore nelle 4), queste si trasformano in

$$\frac{q(u-1)}{s-1}\lim_{k=\infty}\left\{\left(\frac{k+1}{k+u}\right)^{p+1}\frac{\operatorname{sen}\left[q\log\left(\frac{k+u}{k+1}\right)\right]}{(k+1)^{2-s}}\right\}=0$$

$$\frac{q(u-1)}{s-1}\lim_{k=\infty}\left\{\left(\frac{k+1}{k+u}\right)^{p+1}\frac{\cos\left[q\log\left(\frac{k+u}{k+1}\right)\right]}{(k+1)^{2-s}}\right\}=0$$

condizioni, che sono soddisfatte ponendo $1 < s < 2$, e quando si abbiano valori finiti per p, q e u. La serie in 3) è quindi convergente alle stesse condizioni e la funzione, che essa rappresenta, è finita e complessa.

Ponendo nella 3) $u = 1$, tenendo conto della genesi di tale formola, o il che è lo stesso, ponendo $u = 1$ nella equazione fondamentale 1), si ha

$$\Phi_{p+q\sqrt{-1}}(1) = -\mathrm{A}\,. \qquad 5)$$

2. La soluzione data nel numero precedente, vale per il caso speciale di $\mu = 0$. Per il caso generale, u essendo sempre ancora una quantità positiva, giusta le 2), bisogna porre

$$\varrho = \log\left(\frac{k+u}{k+1}\right) + 2\mu\pi\sqrt{-1}\,.$$

La funzione diviene molteplice e considerando che

$$\begin{aligned}\operatorname{senv}&\left[q\log\left(\frac{k+u}{k+1}\right) + 2\mu\pi q\sqrt{-1}\right] = \\ &= 1 - \frac{e^{2\mu\pi q} + e^{-2\mu\pi q}}{2} + \frac{e^{2\mu\pi q} + e^{-2\mu\pi q}}{2}\operatorname{senv}\left[q\log\left(\frac{k+u}{k+1}\right)\right] \\ &\quad + \frac{e^{2\mu\pi q} - e^{-2\mu\pi q}}{2}\operatorname{sen}\left[q\log\left(\frac{k+u}{k+1}\right)\right]\sqrt{-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{-1}\cdot\operatorname{sen}&\left[q\log\left(\frac{k+u}{k+1}\right) + 2\mu\pi q\sqrt{-1}\right] = \\ &= -\frac{e^{2\mu\pi q} - e^{-2\mu\pi q}}{2} + \frac{e^{2\mu\pi q} - e^{-2\mu\pi q}}{2}\operatorname{senv}\left[q\log\left(\frac{k+u}{k+1}\right)\right] \\ &\quad + \frac{e^{2\mu\pi q} - e^{-2\mu\pi q}}{2}\operatorname{sen}\left[q\log\left(\frac{k+u}{k+1}\right)\right]\sqrt{-1}\end{aligned}$$

sostituendo in 3) e riducendo, si ha

$$\begin{aligned}\Phi_{p+q\sqrt{-1}}((u)) &= (1 - e^{2\mu\pi q})\sum_{0}^{\infty}{}_k \frac{(k+1)^{p-1}}{(k+u)^p} + \Phi_p(u) \\ &+ e^{2\mu\pi q}\sum_{0}^{\infty}{}_k \frac{(k+1)^{p-1}}{(k+u)^p}\left\{\operatorname{senv}\left[q\log\left(\frac{k+u}{k+1}\right)\right] + \sqrt{-1}\operatorname{sen}\left[q\log\left(\frac{k+u}{k+1}\right)\right]\right\}.\end{aligned} \qquad 6)$$

Sottraendo da questa la 3), si ha pure

$$\begin{aligned}\Phi_{p+q\sqrt{-1}}((u)) &= \Phi_{p+q\sqrt{-1}}(u) \\ &+ (1 - e^{2\mu\pi q})\sum_{0}^{\infty}{}_k \frac{(k+1)^{p-1}}{(k+u)^p}\left\{\cos\left[q\log\left(\frac{k+u}{k+1}\right)\right] - \sqrt{-1}\operatorname{sen}\left[q\log\left(\frac{k+u}{k+1}\right)\right]\right\}.\end{aligned} \qquad 6_{,})$$

All' incontro, moltiplicando la 3) per $e^{2\mu\pi q}$, sottraendo il prodotto dalla 6) e avendo presente, che

$$\Phi_p(u) = \lim_{k=\infty} \left\{ \log k - \sum_0^k {}_h \frac{(h+1)^{p-1}}{(h+u)^p} \right\};$$

si ha infine

$$\Phi_{p+q\sqrt{-1}}((u)) = (-e^{2\mu\pi q}) \log_{k=\infty} k + e^{2\mu\pi q} \Phi_{p+q\sqrt{-1}}(u). \qquad 7)$$

La 6), la $6_{,}$) e la 7) sono equazioni diverse per la medesima funzione molteplice. Nella 6), la prima serie infinita è divergente; nella $6_{,}$), la porzione reale della serie è pure divergente; nella 7) infine, il primo termine, avendo per fattore $\log k (k = \infty)$ è infinito, generalmente parlando. La funzione $\Phi_{p+q\sqrt{-1}}((u))$ ha quindi nella sua parte reale valore infinito per tutti i valori positivi e negativi di μ, eccettuato il solo $\mu = 0$, in cui la funzione diviene semplice e finita. Ponendo, sia nelle 6) e $6_{,}$), sia nella 7) $u = 1$, e tenendo conto della 5), si ha

$$\Phi_{p+q\sqrt{-1}}((1)) = (1 - e^{2\mu\pi q}) \log_{k=\infty} k - \mathrm{A} e^{2\mu\pi q} \qquad 8)$$

espressione che ha pure valore infinito e molteplice, e sottraendo questa dalla 7), ponendo inoltre

$$\Phi_{p+q\sqrt{-1}}((u)) - \Phi_{p+q\sqrt{-1}}((1)) = \varDelta_{p+q\sqrt{-1}}((u)), \qquad 9)$$

si ha

$$\varDelta_{p+q\sqrt{-1}}((u)) = e^{2\mu\pi q} \left\{ \mathrm{A} + \Phi_{p+q\sqrt{-1}}(u) \right\} \qquad 10)$$

forma rimarchevole della nuova funzione $\varDelta$, alla quale corrispondono valori complessi, ma tutti finiti, per tutti i valori finiti di μ. Per $\mu = 0$, si ha

$$\varDelta_{p+q\sqrt{-1}}(u) = \mathrm{A} + \Phi_{p+q\sqrt{-1}}(u), \qquad 10_{,})$$

per cui la 10) può anche scriversi nella forma

$$\varDelta_{p+q\sqrt{-1}}((u)) = e^{2\mu\pi q} \varDelta_{p+q\sqrt{-1}}(u). \qquad 11)$$

3. La funzione $\Phi_{p+q\sqrt{-1}}((u))$ acquista un nuovo carattere di molteplicità, quando p sia una quantità frazionaria. Per vedere la forma che assume, basta rammentare, che essa è definita dalla 7), assieme alla 3) e alla II, 30), ove appaiono per tale ragione termini molteplici. Si trova facilmente che la 7) si trasforma in

$$\Phi_{p+q\sqrt{-1}}((u)) = (1 - e^{2\pi(\mu q + \lambda p\sqrt{-1})}) \log_{k=\infty} k + e^{2\pi(\mu q + \lambda p\sqrt{-1})} \Phi_{p+q\sqrt{-1}}(u), \qquad 12)$$

nella quale λ assume tutti i valori interi da 0 fino a $\beta - 1$, intendendosi con β il denominatore di p, ridotto alla sua più semplice espressione. La funzione risulta molteplice riguardo a μ e a λ; ha valore infinito per tutti i valori di μ e di λ ed

è finita per il solo caso che $\mu = 0$ e $\lambda = 0$, con cui si ritorna alla 3). Ponendo nella 12) $u = 1$, e sottraendo l'una dall'altra e inoltre ponendo

$$\Phi_{p+q\sqrt{-1}}((u)) - \Phi_{p+q\sqrt{-1}}((1)) = \Delta_{p+q\sqrt{-1}}((u))$$

si ha

$$\Delta_{p+q\sqrt{-1}}((u)) = e^{2\pi(\mu q+\lambda p\sqrt{-1})}\left\{ A + \Phi_{p+q\sqrt{-1}}(u) \right\} \tag{13}$$

con valori tutti finiti e complessi per tutti i valori di λ e per tutti i valori di μ.

Quando u sia negativo, per valori interi, compreso lo zero, si va a valori infiniti. Ma per per valori negativi e frazionarî di u, giova avvertire che nella 6), per uno o più termini la differenza $k - u$ diviene negativa; per cui bisogna in tale caso scrivere $2\mu + 1$ al posto di 2μ, quando quella differenza è sotto il simbolo logaritmico e $2\lambda + 1$ al posto di 2λ, quando essa è elevata alla potenza p. Chiamando m un numero intero, in modo che $m < u < m + 1$, conviene scindere la serie in due parti: una che va da 0 fino a m, l'altra da $m + 1$ a ∞. Supponendo quindi anche p frazionario, si procede come sopra e si hanno le relazioni

$$\Phi_{p+q\sqrt{-1}}((-u)) = (1 - e^{2\pi(\mu q+\lambda p\sqrt{-1})}) \log_{k=\infty} k + e^{2\pi(\mu q+\lambda p\sqrt{-1})}\, \Phi_{p+q\sqrt{-1}}(-u) \tag{14}$$

$$\Delta_{p+q\sqrt{-1}}((-u)) = e^{2\pi(\mu q+\lambda p\sqrt{-1})}\left\{ A + \Phi_{p+q\sqrt{-1}}(-u) \right\} \tag{15}$$

equazioni perfettamente analoghe alle 12) e 13), e nelle quali

$$\begin{aligned} \Phi_{p+q\sqrt{-1}}(-u) = {} & \Phi_p(-u) + e^{(2\lambda'+1)\pi p\sqrt{-1}} \sum_0^m{}_k \frac{(k+1)^{p-1}}{(u-k)^p} \\ & - e^{\pi q+(2\lambda'+1)\pi p\sqrt{-1}} \sum_0^m{}_k \frac{(k+1)^{p-1}}{(u-k)^p} \left\{ \cos\left[q \log\left(\frac{u-k}{k+1}\right)\right] - \sqrt{-1}\, \mathrm{sen}\left[q \log\left(\frac{u-k}{k+1}\right)\right] \right\} \\ & + \sum_{m+1}^{\infty}{}_k \frac{(k+1)^{p-1}}{(k-u)^p} \left\{ \mathrm{senv}\left[q \log\left(\frac{k-u}{k+1}\right)\right] + \sqrt{-1}\, \mathrm{sen}\left[g \log\left(\frac{k-u}{k+1}\right)\right] \right\} \end{aligned} \tag{16}$$

λ' essendo, come λ, un numero che va da 0 fino a $\beta - 1$, dove β rappresenta il denominatore di p ridotto alla sua più semplice espressione. In varî casi conviene mantenere λ' indipendente da λ; per cui la 16) conserva ancora un carattere di molteplicità, che scompare quando vi si ponga $\lambda' = 0$, od anche $\lambda' = \frac{\beta - 1}{2}$, quando β sia un numero dispari.

Le formole fin qui sviluppate, dalla 3) alla 16), valgono per valori interi e frazionarî, positivi e negativi di p e di q, ed ammettono facili trasformazioni, come si può verificare senz'altro.

4. Ritorniamo alla 3) e sostituiamo all'argomento reale u il complesso $u + v\sqrt{-1}$, intendendo con u una quantità reale positiva e con v una quantità reale, positiva o negativa che sia.

Si ha

$$q \log\left(\frac{k+u+v\sqrt{-1}}{k+1}\right) = \mathrm{U}_k + \mathrm{V}_k \sqrt{-1}$$

in cui

$$\mathrm{U}_k = q \log \sqrt{\left(\frac{k+u}{k+1}\right)^2 + \left(\frac{v}{k+1}\right)^2} \qquad 17)$$

$$\mathrm{V}_k = q \operatorname{Arc\,tg}\left(\frac{v}{k+u}\right) + 2\mu\pi q\,,$$

dove μ è un numero intero, d'altronde arbitrario, e V_k cambia di segno, quando v sia negativo. Abbiamo dunque valori molteplici, in numero infinito, ma vogliamo per ora esaminare il caso più semplice, di $\mu = 0$. Allora si ha

$$\mathrm{V}_k = q \operatorname{Arc\,tg}\left(\frac{v}{k+u}\right) \qquad 18)$$

rimanendo inteso, che V_k cambia di segno, quando v sia negativo. Dalla 3) si ottiene l'espressione

$$\begin{aligned} \operatorname{senv}(\mathrm{U}_k + \mathrm{V}_k\sqrt{-1}) + \sqrt{-1}\operatorname{sen}(\mathrm{U}_k + \mathrm{V}_k\sqrt{-1}) &= 1 - e^{\mathrm{V}_k - \mathrm{U}_k\sqrt{-1}} \\ &= (1 - e^{\mathrm{V}_k}\cos \mathrm{U}_k) + e^{\mathrm{V}_k}\operatorname{sen} \mathrm{U}_k\sqrt{-1} \end{aligned}$$

per cui

$$\begin{aligned} \Phi_{p+q\sqrt{-1}}(u+v\sqrt{-1}) &= \Phi_p(u+v\sqrt{-1}) + \\ &+ \sum_0^\infty{}_k \frac{(k+1)^{p-1}}{(k+u)^p}\left(1 - e^{\mathrm{V}_k - \mathrm{U}_k\sqrt{-1}}\right)\left(1 + \frac{v\sqrt{-1}}{k+u}\right)^{-p}. \qquad 19) \end{aligned}$$

Ritornando alla I, 59) e I, 60) e procedendo analogamente per sviluppi del binomio dell'esponente $-p$, il che è consentito alla condizione che $u > v$, poniamo

$$\begin{aligned} \overline{\omega}_p(u\,,v) &= \sum_0^\infty{}_k \frac{(k+1)^{p-1}}{(k+u)^p}(1 - e^{\mathrm{V}_k}\cos \mathrm{U}_k) \\ \overline{\overline{\omega}}_p(u\,,v) &= \sum_0^\infty{}_k \frac{(k+1)^{p-1}}{(k+u)^p} e^{\mathrm{V}_k}\operatorname{sen} \mathrm{U}_k \\ \overline{\Psi}_p(u\,,v) &= v^2 \sum_0^\infty{}_k \frac{(k+1)^{p-1}}{(k+u)^{p+2}} e^{\mathrm{V}_k}\cos \mathrm{U}_k \left\{\binom{p+1}{2} - \binom{p+3}{4}\frac{v^2}{(k+u)^2} + \cdots \text{inf.}\right\} \\ \overline{\overline{\Psi}}_p(u\,,v) &= v \sum_0^\infty{}_k \frac{(k+1)^{p-1}}{(k+u)^{p+1}} e^{\mathrm{V}_k}\cos \mathrm{U}_k \left\{\binom{p}{1} - \binom{p+2}{3}\frac{v^2}{(k+u)^2} + \cdots \text{''}\right\} \qquad 20) \\ \overline{\Omega}_p(u\,,v) &= v^2 \sum_0^\infty{}_k \frac{(k+1)^{p-1}}{(k+u)^{p+2}} e^{\mathrm{V}_k}\operatorname{sen} \mathrm{U}_k \left\{\binom{p+1}{2} - \binom{p+3}{4}\frac{v^2}{(k+u)^2} + \cdots \text{''}\right\} \\ \overline{\overline{\Omega}}_p(u\,,v) &= v \sum_0^\infty{}_k \frac{(k+1)^{p-1}}{(k+u)^{p+1}} e^{\mathrm{V}_k}\operatorname{sen} \mathrm{U}_k \left\{\binom{p}{1} - \binom{p+2}{3}\frac{v^2}{(k+u)^2} + \cdots \text{''}\right\}. \end{aligned}$$

Sono sei funzioni ausiliarie, che presentano una grande regolarità di andamento.

Riassumendo si ha

$$\Phi_{p+q\sqrt{-1}}(u+v\sqrt{-1}) = \Phi_p(u) + \{\bar{\omega}_p(u,v) + \bar{\Psi}_p(u,v) + \bar{\bar{\Omega}}_p(u,v)\} + \{\bar{\bar{\omega}}_p(u,v) + \bar{\bar{\Psi}}_p(u,v) - \bar{\Omega}_p(u,v)\}\sqrt{-1} \qquad 21)$$

equazione generale, che esprime il valore delle funzioni Φ con indice e con argomento complesso.

Quando u sia una quantità negativa e frazionaria, si osserva che l'espressione $k-u$ per uno o più termini diviene negativa. Per questi termini, le 17) devono sostituirsi colle seguenti:

$$q \log\left(\frac{k-u+v\sqrt{-1}}{k+1}\right) = U_k - V_k\sqrt{-1}$$

$$U_k = q \log \sqrt{\left(\frac{u-k}{k+1}\right)^2 + \left(\frac{v}{k+1}\right)^2} \qquad 17,)$$

$$V_k = q \operatorname{Arc\,tg}\left(\frac{v}{u-k}\right) - (2\mu+1)\pi q$$

e la 19) si altera soltanto, per dovervi scrivere $-V_k$ al posto di V_k, e bene inteso, $-u$ al posto di u. La serie 19,), e quindi le serie 20) e l'espressione 21) che ne sono una conseguenza, si scinde in due porzioni: la prima per la quale $k-u$ è negativo, la seconda per la quale $k-u$ è positivo. Alla seconda porzione si applicano le 17), la 19) e la 20), alla prima invece le 17,).

5. Prima di proseguire, vogliamo esaminare, se e a quali condizioni le serie contemplate nelle 20) siano convergenti. Prendiamone la prima, alla cui convergenza è condizione necessaria e sufficiente, che essendo s un numero arbitrario >1, si abbia

$$\lim_{k=\infty}\left\{\left(\frac{k+1}{k+u}\right)^p\left(\frac{1-e^{V_k}\cos U_k}{(k+1)^{1-s}}\right)\right\} = 0.$$

Il primo fattore, che qui figura, ha per limite 1, quante volte p e u siano quantità finite. Giova poi avvertire, che giusta le 17) e la 18), $\lim U_k = \lim V_k = 0$ per $k=\infty$, e che, per condizione, $s>1$. Il secondo fattore assume quindi la forma $\frac{0}{0}$. Ma derivandone partitamente, rispetto a k, numeratore e denominatore, esso prende la forma

$$\frac{q}{1-s}\,\frac{e^{V_k}}{(k+1)^{2-s}}\left\{(1-u)\operatorname{sen} U_k\,\frac{(k+1)(k+u)-v^2(k+1)}{(k+u)^2+v^2} + v\cos U_k\,\frac{(k+1)^2}{(k+u)^2+v^2}\right\}.$$

I quozienti algebrici, che entro le parentesi $\{\ \}$ figurano moltiplicati rispettivamente per $(1-u)\operatorname{sen} U_k$ e per $v\cos U_k$, hanno per $k=\infty$ la forma $\frac{\infty}{\infty}$. Ma mediante una doppia derivazione, rispetto a k, applicata ai loro numeratori e ai loro

denominatori, si vede subito, che per $k=\infty$ assumono ambedue il valore 1. Per cui tutta l'espressione prende la forma

$$\frac{q}{1-s}\lim_{k=\infty}\left\{\frac{e^{V_k}}{(k+1)^{2-s}}\Big((1-u)\operatorname{sen}U_k+v\cos U_k\Big)\right\}=0$$

relazione che sussiste, quante volte $1<s<2$, e q, u e v siano quantità finite. Si conclude che la prima delle serie in 20) è convergente, purchè u, v, p, q siano valori finiti.

Con lo stesso procedimento si arriva, per la seconda delle 20), alla medesima conclusione. E col ragionamento usato nel numero I, 14, si conclude poi la convergenza delle rimanenti quattro funzioni in 20) alla condizione che u, v, p siano quantità finite e che inoltre $u>v$.

Riassumendo questi risultati parziali, si ha, che la espressione 21) è valevole per tutti i valori finiti di p, q, e per tutti i valori finiti, positivi di u e v, purchè $u>v$. Per i valori negativi di v, basta avvertire che la quantità U_k rimane inalterata e che la quantità V_k cambia soltanto di segno, come cambiano pure di segno due delle funzioni ausiliarie, la $\overline{\overline{\Psi}}_p(u,v)$ e la $\overline{\overline{\Omega}}_p(u,v)$. Basta dunque scrivere nelle 20) e^{-V_k} al posto di e^{V_k}, e cambiare il segno alle due funzioni ora nominate, perchè la 20) e la 21) siano immediatamente applicabili al caso di v negativo. Non occorre forse soggiungere, che tutte le serie conservano la loro convergenza.

Per il caso speciale di $v=0$ si ha

$$U_k=q\log\left(\frac{k+u}{k+1}\right)\quad,\quad V_k=0\,.$$

Sono pure eguali a zero le quattro ultime funzioni ausiliarie in 20), per cui l'espressione 21) ritorna alla più semplice 3).

All'incontro, ponendo $q=0$, si ha $U_k=V_k=0$, e delle sei funzioni 20) le prime due e le ultime due scompaiono. Colle rimanenti due si ritorna alle I, 60).

6. Abbiamo veduto, come l'equazione 21) e le 17), 18) e 20) che l'accompagnano, colle avvertenze indicate nelle 17_1), valgano anche per valori negativi frazionarî di u. Ma quando u sia un numero negativo e intero, compreso lo zero, le funzioni ausiliarie 20) prendono forma indeterminata e cessano di essere applicabili. Vogliamo quindi cercare in via diretta il significato della funzione

$$\Phi_{p+q\sqrt{-1}}(-n+v\sqrt{-1})$$

quando in essa n rappresenti un numero positivo e intero, compreso lo zero. Giova ritornare alla formola 19), porvi $u=-n$, estrarne il valore corrispondente a $k=n$ e scindere la serie rimanente in due porzioni, corrispondenti ai valori di k inferiori e superiori a n. Il calcolo va condotto come in II, 48), traendo conto dei risultati ivi ottenuti per la funzione

$$\Phi_p(-n+v\sqrt{-1})\,.$$

Ponendo per maggiore chiarezza $p = r + \varrho$, dove s'intende con r un numero intero, con ϱ una funzione pura, e ponendo per brevità, come in II, 48)

$$\left.\begin{aligned} R_k &= \binom{p+1}{2}\frac{v^2}{k^2} - \binom{p+3}{4}\frac{v^4}{k^4} + \binom{p+5}{6}\frac{v^6}{k^6} - \cdots \text{inf.} \\ R'_k &= \binom{p}{1}\frac{v}{k} - \binom{p+2}{3}\frac{v^3}{k^3} + \binom{p+4}{5}\frac{v^5}{k^5} - \cdots \;" \end{aligned}\right\} \qquad 22,)$$

si sommano insieme le tre porzioni di serie sopra indicate e si ha

$$\begin{aligned} &\Phi_{p+q\sqrt{-1}}(-n + v\sqrt{-1}) \\ &= S_1^{(n+1)} - \begin{Bmatrix} (-1)^{\frac{r}{2}} \\ (-1)^{\frac{r+1}{2}}\sqrt{-1} \end{Bmatrix} \left\{ e^{-\frac{1}{2}(4\lambda'+1)\pi\varrho\sqrt{-1}}\, e^{V_n - U_n\sqrt{-1}} \frac{(n+1)^{p-1}}{v^p} - \sum_1^\infty {}_i \binom{p-1}{i}(n+1)^i S_{i+1}^{(n+1)} \right. \\ &\quad - (-1)^r e^{-(2\lambda''+1)\pi\varrho\sqrt{-1}} \sum_1^n {}_k \frac{(n+1-k)^{p-1}}{k^p} e^{V_{n-k} - U_{n-k}\sqrt{-1}} (1 - R_k + R'_k\sqrt{-1}) \qquad 22) \\ &\quad \left. - \sum_1^{n+1} {}_k \frac{(n+1+k)^{p-1}}{k^p} + \sum_1^\infty {}_k \frac{(n+1+k)^{p-1}}{k^p} \left\{ 1 - e^{V_{n+k} - U_{n+k}\sqrt{-1}} (1 - R_k - R'_k\sqrt{-1}) \right\} \right\} \end{aligned}$$

in cui, oltre ai simboli usati in II, 48), si ha

$$\left.\begin{aligned} V_n &= \frac{q\pi}{2} &, \quad U_n &= q \log \frac{v}{n+1} \\ V_{n-k} &= q \operatorname{Arc\,tg} \frac{v}{k} + q\pi &, \quad U_{n-k} &= q \log \sqrt{\frac{k^2 + v^2}{(n+1-k)^2}} \\ V_{n+k} &= q \operatorname{Arc\,tg} \frac{v}{k} &, \quad U_{n+k} &= q \log \sqrt{\frac{k^2 + v^2}{(n+1+k)^2}} . \end{aligned}\right\} \qquad 22,,)$$

Non occorre ripetere il ragionamento del precedente numero, per dimostrare la convergenza delle serie, che figurano nella 22), quante volte n, v, p, q siano valori finiti e $v < 1$. La funzione è dunque perfettamente definita. Per $q = 0$ si ritorna, naturalmente, alla II, 48). Così pure, per $n = 0$, la 22) si riduce a

$$\begin{aligned} &\Phi_{p+q\sqrt{-1}}(v\sqrt{-1}) \\ &= S'_1 - \begin{Bmatrix} (-1)^{\frac{r}{2}} \\ (-1)^{\frac{r+1}{2}}\sqrt{-1} \end{Bmatrix} \left\{ e^{-\frac{1}{2}(4\lambda'+1)\pi\varrho\sqrt{-1}}\, e^{V_0 - U_0\sqrt{-1}} \frac{1}{v^p} - \sum_1^\infty {}_i \binom{p-1}{i} S'_{i+1} \right. \qquad 23) \\ &\quad \left. - 2^{p-1} + \sum_0^\infty {}_k \frac{1}{k+1} \left\{ 1 - e^{V_k - U_k\sqrt{-1}} (1 - R_k - R'_k\sqrt{-1}) \right\} \right\}, \end{aligned}$$

essendo

$$\left.\begin{aligned} V_0 &= \frac{q\pi}{2} &, \quad U_0 &= q \log v \\ V_k &= q \operatorname{Arc\,tg} \frac{v}{k} &, \quad U_k &= q \log \sqrt{\frac{k^2 + v^2}{(k+1)^2}} \end{aligned}\right\} \qquad 23,)$$

equazione, che per $q = 0$ si riduce alla II, 49).

Ponendo infine, nella 23), $p = 0$, quindi $r = 0$, $\varrho = 0$, e ripetendo sulla genesi e sulla portata di alcuni termini le considerazioni svolte nella I, 62,), oppure, il che è più ovvio, applicando direttamente la formola 19) a questo caso speciale si ha

$$\Phi_{q\sqrt{-1}}(v\sqrt{-1}) = -A + \sum_0^\infty{}_k \frac{1}{k+1}(1 - e^{V_k - U_k\sqrt{-1}}) \tag{24}$$

espressione ben semplice per la nostra trascendente con indice e argomento immaginarii, in cui i valori per V_k e U_k sono dati dalle 23,). A questa relazione si viene anche direttamente dalla 21) in rapporto colle 20). Ponendovi $p = 0$, $u = 0$. si ha

$$\bar{\omega}_0(0, v) = \sum_0^\infty{}_k \frac{1}{k+1}(1 - e^{V_k}\cos U_k) \quad , \quad \bar{\bar{\omega}}_0(0, v) = \sum_0^\infty{}_k \frac{1}{k+1} e^{V_k} \operatorname{sen} U_k \, .$$

e considerando che $\Phi_0(u) = -A$ per tutti i valori di u, compreso $u = 0$, la 24) può anche trascriversi così

$$\Phi_{q\sqrt{-1}}(v\sqrt{-1}) = -A + \bar{\omega}_0(0, v) + \bar{\bar{\omega}}_0(0, v) \, . \tag{24,}$$

Non è forse superfluo di aggiungere, che nelle 20) e 21) le ultime quattro funzioni ansiliarie, per $p = 0$, non hanno ragione di essere e si riducono a zero.

7. Ritorniamo all'equazione 21), per la quale abbiamo supposto, che la funzione $\Phi_{p+q\sqrt{-1}}(u + v\sqrt{-1})$ sia semplice, ponendo nelle 17) $\mu = 0$. Ma questa funzione è doppiamente molteplice: prima perchè μ può assumere qualsiasi valore intero, poscia perchè p può essere un numero frazionario.

Vogliamo ora generalizzare quella formola, tenendo conto di ambedue queste cause di molteplicità. Per ciò che riguarda i valori molteplici di μ, basta gettare uno sguardo sulle 17) per vedere, che U_k rimane inalterato e che per e^{V_k} bisogna scrivere $e^{2\mu\pi q}\, e^{V_k}$. Ciò posto, risulta che, delle sei funzioni ausiliarie 20), le ultime cinque si trasformano in molteplici, moltiplicandole per $e^{2\mu\pi q}$, per cui si ha, per esempio,

$$\bar{\bar{\omega}}_p((u, v)) = e^{2\mu\pi q}\, \bar{\bar{\omega}}_p(u, v)$$

e così di seguito. All'incontro, per la prima delle 20) si ha

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_p((u, v)) &= \sum_0^\infty{}_k \frac{(k+1)^{p-1}}{(k+u)^p} \left\{ 1 - e^{2\mu\pi q}(1 - 1 + e^{V_k}\cos U_k) \right\} \\ &= (1 - e^{2\mu\pi q}) \sum_0^\infty{}_k \frac{(k+1)^{p-1}}{(k+u)^p} + e^{2\mu\pi q}\, \bar{\omega}_p(u, v) \, , \end{aligned}$$

per cui, avendo presente l'equazione fondamentale I, 1) e osservando che nella 21) $\Phi_p(u)$ rimane indipendente dalla molteplicità di μ, con breve riduzione si ha

$$\Phi_{p+q\sqrt{-1}}((u + v\sqrt{-1})) = (1 - e^{2\mu\pi q}) \log_{k=\infty} k + e^{2\mu\pi q}\Phi_{p+q\sqrt{-1}}(u + v\sqrt{-1}) \, . \tag{25}$$

Vogliamo ora tener conto anche della seconda causa di molteplicità, che interviene quante volte p sia un numero frazionario. Poniamo $p = r + \varrho$, dove r è un

numero intero, ϱ una frazione pura, della forma $\frac{\alpha}{\beta}$, α e β essendo numeri primi relativi. Nella 25) il primo termine è indipendente da p; il secondo contiene la funzione $\Phi_{p+q\sqrt{-1}}(u+v\sqrt{-1})$ che diviene nuovamente molteplice, per rapporto a p, in tutte le funzioni che vi sono comprese. Esaminando la 21), si vede difatti che la $\Phi_p(u)$ diviene molteplice ed è espressa dalla formola II, 30). Divengono parimenti molteplici tutte le funzioni ausiliarie 20), ed il loro valore si esprime moltiplicando ciascuna per $e^{2\lambda\pi\rho\sqrt{-1}}$, in cui λ è un numero arbitrario, che va da 0 fino a $\beta-1$.

Per la funzione $\Phi_{p+q\sqrt{-1}}(u+v\sqrt{-1})$, divenuta molteplice rispetto a p, si ha quindi

$$(1-e^{2\lambda\pi\rho\sqrt{-1}})\log_{k=\infty} k + e^{2\lambda\pi\rho\sqrt{-1}}\,\Phi_{p+q\sqrt{-1}}(u+v\sqrt{-1})$$

e sostituendo questa espressione nel secondo membro dell'equazione 25), si ottiene facilmente

$$\begin{aligned}\Phi_{p+q\sqrt{-1}}((u+v\sqrt{-1})) = (1-e^{2\pi(\mu q+\lambda\rho\sqrt{-1})})\log_{k=\infty} k \,+ \\ + e^{2\pi(\mu q+\lambda\rho\sqrt{-1})}\,\Phi_{p+q\sqrt{-1}}(u+v\sqrt{-1})\end{aligned} \tag{26}$$

equazione, che esprime la doppia molteplicità della nostra trascendente nella sua forma più generale.

8. La perfetta analogia della 26) colla 12) non ha bisogno di essere ulteriormente chiarita. Ma la 26) ha naturalmente carattere più generale, perchè si riferisce ad argomento complesso, mentre la 12) contempla solo il caso dell'argomento reale. Ponendo $v=0$, la 26) si riduce alla 12).

Come nella 12), nella soluzione generale 26) la nostra trascendente appare formata di due termini: l'uno che per $k=\infty$ diviene infinito, tranne il caso, che $\lambda=0$ e $\mu=0$. In questo solo caso quel termine si annulla, in tutti gli altri esso diviene infinito complesso. L'altro termine, nel caso di $\lambda=0$ e $\mu=0$, si riduce alla funzione semplice, ma anche negli altri casi, per tutti i valori che λ può assumere e per tutti i valori di p, esso conserva il carattere finito e complesso. Ponendo nella 26) $u=1$, $v=0$, tenendo conto della 5), e sottraendo la seconda dalla prima equazione, si ha

$$\begin{aligned}\Phi_{p+q\sqrt{-1}}((u+v\sqrt{-1})) - \Phi_{p+q\sqrt{-1}}((1)) = \\ = e^{2\pi(\mu q+\lambda\rho\sqrt{-1})}\{A+\Phi_{p+q\sqrt{-1}}(u+v\sqrt{-1})\},\end{aligned} \tag{27}$$

ossia

$$\Delta_{p+q\sqrt{-1}}((u+v\sqrt{-1})) = e^{2\pi(\mu q+\lambda\rho\sqrt{-1})}\,\Delta_{p+q\sqrt{-1}}(u+v\sqrt{-1}), \tag{28}$$

dove la nuova funzione Δ ha il significato già varie volte indicato e facile a vedersi. La funzione

$$\Delta_{p+q\sqrt{-1}}((u+v\sqrt{-1}))$$

ha la proprietà rimarchevole, di possedere valori finiti, per tutti i valori, che λ può avere e per tutti i valori finiti di μ, e differisce in ciò essenzialmente dalla funzione

$$\Phi_{p+q\sqrt{-1}}((u+v\sqrt{-1}))$$

la quale ha tutti valori infiniti, tranne uno che corrisponde a $\lambda=0$ e $\mu=0$. Lo studio della molteplicità dei valori riesce quindi più interessante per quella che per questa, e in tesi generale la funzione Δ ha un carattere più generale della funzione Φ, qualunque sia il valore del suo indice e del suo argomento.

PARTE QUARTA.

Calcolo numerico delle funzioni $\Phi_r(u)$.

1. Le formole sviluppate nelle tre parti precedenti, sono sempre espresse da serie convergenti, le quali, esatte per sviluppi teorici e per le conclusioni, a cui conducono, non si prestano, causa la loro poca convergenza, ai calcoli numerici.

Vogliamo ora trasformare le principali in modo, che divengano atte a tali calcoli, mediante serie più rapidamente convergenti, entro quei limiti per i valori positivi e negativi del loro argomento, che può interessare di conoscere.

La trascendente $\Phi_r(u)$ è definita dalla serie convergente

$$\Phi_r(1+u)=-\mathrm{A}+\sum_1^\infty{}_k\frac{(k+u)^r-k^r}{k(k+u)^r}=-\mathrm{A}+\sum_1^\infty{}_k\frac{1}{k}\left\{1-\left(1+\frac{u}{k}\right)^{-r}\right\}. \qquad 1)$$

Sviluppando l'espressione mediante la formola binomiale, il che è sempre ammesso purchè $-1<\frac{u}{k}<+1$, ossia purchè $-1<u<+1$, essendo $k=1$ il valore più piccolo che k può assumere; ponendo inoltre per brevità

$$\begin{aligned}
\sum_1^\infty{}_k\frac{1}{k^2}&=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\text{inf.}=\mathrm{S}_2\\
\sum_1^\infty{}_k\frac{1}{k^3}&=1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\cdots\ \text{"}\ =\mathrm{S}_3\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\sum_1^\infty{}_k\frac{1}{k^i}&=1+\frac{1}{2^i}+\frac{1}{3^i}+\cdots\ \text{"}\ =\mathrm{S}_i
\end{aligned}\qquad 2)$$

si ha

$$\Phi_r(1+u)=-\mathrm{A}+\binom{r}{1}u\,\mathrm{S}_2-\binom{r+1}{2}u^2\mathrm{S}_3+\binom{r+2}{3}u^3\mathrm{S}_4-\cdots\text{inf.}\qquad 3)$$

La serie è poco convergente, perchè i coefficienti S_2, S_3, S_4, ... tendono verso l'unità, rimanendole però superiori e perchè i coefficienti binomiali crescono rapidamente, specialmente quando r abbia un valore un po' grande. In questa forma essa non sarebbe quindi atta ai calcoli numerici.

2. Si può dare alla serie 3) una forma assai più convergente, partendo dalla 1) e scindendo la serie ivi contenuta in due porzioni: una, finita, che va da $k=1$ fino a $k=n$, n essendo un numero qualsiasi, però finito, intero e positivo; l'altra, infinita, che va da $k=n+1$ fino a $k=\infty$. E procedendo col medesimo sviluppo binomiale per la porzione infinita della serie e ponendo per brevità e per analogia

$$
\begin{aligned}
-A+\sum_{1}^{n}{}_k\frac{1}{k} &= -A+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\frac{1}{n}=S_1^{(n)}\\
\sum_{n+1}^{\infty}{}_k\frac{1}{k^2} &= \frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+3)^2}+\frac{1}{(n+3)^2}+\cdots\text{inf.}=S_2^{(n)}\\
\sum_{n+1}^{\infty}{}_k\frac{1}{k^3} &= \frac{1}{(n+1)^3}+\frac{1}{(n+2)^3}+\frac{1}{(n+3)^3}+\cdots\;\text{"}\;=S_3^{(n)}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\sum_{n+1}^{\infty}{}_k\frac{1}{k^i} &+ \frac{1}{(n+1)^i}+\frac{1}{(n+2)^i}+\frac{1}{(n+3)^i}+\cdots\;\text{"}\;=S_i^{(n)}
\end{aligned}
\qquad 4)
$$

abbiamo

$$
\begin{aligned}
\Phi_r(1+u) &= S_1^{(n)}-\sum_{1}^{n}{}_k\frac{k^{r-1}}{(k+n)^r}+\\
&+\binom{r}{1}u\,S_2^{(n)}-\binom{r+1}{2}u^2\,S_3^{(n)}+\binom{r+2}{3}u^3\,S_4^{(n)}-\cdots\text{inf.}
\end{aligned}
\qquad 5)
$$

Anche questa serie è convergente, purchè $-1<+\frac{u}{k}<1$; ma siccome $k=n+1$ è il più piccolo valore, che k può assumere, basta alla convergenza della serie in 5), che $-n-1<u<n+1$. Sono con ciò notevolmente estesi i limiti per u, entro i quali la serie conserva la sua convergenza, ed essendo n un numero arbitrario, che si può far grande quanto si vuole, ne segue che colla 5) si possono calcolare i valori della nostra trascendente per qualsiasi valore di u, positivo o negativo che sia.

I coefficienti $S_2^{(n)}$, $S_3^{(n)}$, $S_4^{(n)}$ ... decrescono ora rapidamente, specialmente quando n sia un numero grande. Tuttavia non conviene esagerare il valore di n, perchè se è vero, che con grandi valori di n diminuisce sensibilmente il numero dei termini utili nella serie infinita, cresce invece il numero dei termini nella serie finita

$$
\sum_{1}^{n}{}_k\frac{k^{r-1}}{(k+u)^r}=\frac{1^{r-1}}{(1+u)^r}+\frac{2^{r-1}}{(2+u)^r}+\frac{3^{r-1}}{(3+u)^r}+\cdots\frac{n^{r-1}}{(n+u)^r}
$$

termini talvolta noiosi a calcolarsi. Per non dovere esagerare il valore di n, con-

viene in pratica mantenere per u limiti ristretti, e scegliere per n un valore in giusta relazione col valore dell'indice r e coi coefficienti binomiali $\binom{r}{1}, \binom{r+1}{2} \cdots$ che ne dipendono.

3. Ai grandi valori di $\Phi_r(u)$ che possono interessare, si può provvedere con una formola diversa. Scrivendo nella I, 12) $1+u$ al posto di u, m al posto di n, k al posto di $k+1$, si ha la relazione

$$\Phi_r(1+m+u) = \Phi_r(1+u) + \sum_1^m {}_k \frac{k^{r-1}}{(k+u)^r} + \sum_{m+1}^{\infty} {}_k \frac{k^{r-1} - (k-m)^{r-1}}{(k+u)^r}. \qquad 6)$$

Anche qui conviene scindere la serie infinita in due porzioni: una, finita, che va da $k = m+1$ fino a $k = n$, essendo di nuovo n un numero positivo, intero e superiore a m: l'altra infinita che va da $k = n+1$ fino a $k = \infty$. A quest'ultima porzione si dà la forma

$$\sum_{n+1}^{\infty} {}_k \frac{k^{r-1} - (k-m)^{r-1}}{k^r} \left(1 + \frac{u}{k}\right)^{-r} =$$

$$= \sum_{n+1}^{\infty} {}_k \frac{k^{r-1} - (k-m)^{r-1}}{k^r} \left\{ 1 - \binom{r}{1} \frac{u}{k} + \binom{r+1}{2} \frac{u^2}{k^2} - \cdots \text{inf.} \right\}$$

e ponendo per brevità

$$\sum_{n+1}^{\infty} {}_k \frac{k^{r-1} - (k-m)^{r-1}}{k^r} = \mathrm{T}_r(m), \quad \sum_{n+1}^{\infty} {}_k \frac{k^{r-1} - (k-m)^{r-1}}{k^{r+1}} = \mathrm{T}'_r(m) \ldots.$$

$$\ldots \sum_{n+1}^{\infty} {}_k \frac{k^{r-1} - (k-m)^{r-1}}{k^{r+i}} = \mathrm{T}_r^{(i)}(m) \qquad 7)$$

la relazione 6) si trasforma in

$$\Phi_r(1+m+u) = \Phi_r(1+u) + \sum_1^n {}_k \frac{k^{r-1}}{(k+u)^r} - \sum_{m+1}^n {}_k \frac{(k-m)^{r-1}}{(k+u)^r}$$

$$+ \mathrm{T}_r(m) - \binom{r}{1} u \mathrm{T}'_r(m) + \binom{r+1}{2} u^2 \mathrm{T}''_r(m) - \cdots \text{inf.} \qquad 8)$$

relazione, che permette di calcolare il valore di $\Phi_r(1+m+u)$, quante volte si conosca il valore corrispondente di $\Phi_r(1+u)$. In essa figurano i coefficienti $\mathrm{T}_r(m)$, $\mathrm{T}'_r(m)$, ... rappresentati dalle serie poco convergenti in 7). Ma anche essi possono svilupparsi colla formola binomiale nel modo generale seguente

$$\mathrm{T}_r^{(i)}(m) = \sum_{n+1}^{\infty} {}_k \frac{1}{k^{i+1}} \left\{ 1 - \left(1 - \frac{m}{k}\right)^{r-1} \right\} =$$

$$= \binom{r-1}{1} m \, \mathrm{S}_{i+2}^{(n)} - \binom{r-1}{2} m^2 \, \mathrm{S}_{i+3}^{(n)} + \binom{r-1}{3} m^3 \, \mathrm{S}_{i+4}^{(n)} - \cdots \qquad 9)$$

dove i è un numero d'ordine, che procede da 0 in sù, ed i coefficienti $\mathrm{S}_{i+2}^{(n)} \ldots$ hanno il significato indicato dalle 4). La serie 9) è infinita, quando r sia frazionario, ma

è convergente, purchè $m < n + 1$. Essa, invece, si arresta da sè, quando r sia un numero positivo e intero. Così per $r = 3, 4$, si hanno le relazioni semplici

$$\begin{aligned} T_3^{(i)}(m) &= 2m\, S_{i+2}^{(n)} - m^2\, S_{i+3}^{(n)} \\ T_4^{(i)}(m) &= 3m\, S_{i+2}^{(n)} - 3m^2\, S_{i+3}^{(n)} + m^3\, S_{i+4}^{(n)} . \end{aligned} \qquad 10)$$

Ponendo nella 8) e nella 9) $m = 0$, i coefficienti T_r scompaiono e si ritorna alla uguaglianza

$$\Phi_r(1 + u) = \Phi_r(1 + u) .$$

Queste formole acquistano un significato soltanto, quando sia $m = 1$ almeno.

Ponendo infine, nella 8) e nella 9), $u = 0$, si ha

$$\begin{aligned} \Phi_r(1 + m) = S_1^{(n)} - \sum_{m+1}^{n}{}_k \frac{(k - m)^{r-1}}{k^r} + \\ + \binom{r-1}{1} m\, S_2^{(n)} - \binom{r-1}{2} m^2\, S_3^{(n)} + \binom{r-1}{3} m^3\, S_4^{(n)} - \cdots \end{aligned} \qquad 8_{,})$$

formola, che permette di calcolare con facilità i valori $\Phi_r(2)$, $\Phi_r(3)$, $\Phi_r(4)$ ecc., tanto per valori interi, quanto per valori frazionarî di r, e che per $m = n$ si trasforma nella I, 28), che essa sostituisce con vantaggio specialmente nel caso, che r sia un valore frazionario.

4. Scriviamo nella 8) e nella 9) m' al posto di m, dove per m' intendiamo un nuovo numero intero, superiore a m e minore di n. Sottraendo le vecchie dalle nuove relazioni, abbiamo

$$\begin{aligned} \Phi_r(1 + m' + u) = \Phi_r(1 + m + u) + \sum_{m+1}^{n}{}_k \frac{(k - m)^{r-1}}{(k + u)^r} - \sum_{m'+1}^{n}{}_k \frac{(k - m')^{r-1}}{(k + u)^r} \\ + T_r(m', m) - \binom{r}{1} u\, T'_r(m', m) + \binom{r+1}{2} u^2\, T''_r(m', m) - \cdots \text{inf.} \end{aligned} \qquad 11)$$

essendo

$$T_r^{(i)}(m', m) = \binom{r-1}{1} (m' - m)\, S_{i+2}^{(n)} - \binom{r-1}{2} (m'^2 - m^2)\, S_{i+3}^{(n)} + \cdots \qquad 12)$$

relazioni, che permettono di calcolare il valore di $\Phi_r(1 + m' + u)$ ogni qual volta si conosca il valore di $\Phi_r(1 + m + u)$ corrispondente e che naturalmente per $m' = m$ conducono all'uguaglianza

$$\Phi_r(1 + m + u) = \Phi_r(1 + m + u) .$$

Prendiamo ancora la 6) come punto di partenza, scriviamo in esso $u - m$ al posto di u, e procedendo allo stesso modo, adoperato nel passare dalla 6) alle 8) e 9), si ha con brevi riduzioni

$$\begin{aligned} \Phi_r(1 - m + u) = \Phi_r(1 + u) + \sum_{1}^{n}{}_k \frac{k^{r-1}}{(k + u)^r} - (-1)^r \sum_{1}^{m-1}{}_k \frac{(m - k)^{r-1}}{(k - u)^1} - \sum_{0}^{n}{}_k \frac{(m + k)^{r-1}}{(k + u)^1} \\ + T_r(-m) - \binom{r}{1} u\, T'_r(-m) + \binom{r+1}{2} u^2\, T''(-m) - \cdots \text{inf.} \end{aligned} \qquad 13)$$

essendo, in generale,

$$\mathrm{T}_r^{(i)}(-m) = -\binom{r-1}{1} m\,\mathrm{S}_{i+2}^{(n)} - \binom{r-1}{2} m^2\,\mathrm{S}_{i+3}^{(n)} - \binom{r-1}{3} m^3\,\mathrm{S}_{i+4}^{(n)} - \cdots \qquad 14)$$

relazioni, che servono nel caso che si vogliano calcolare i valori $\Phi_r(1-m+u)$ essendo noto quello corrispondente di $\Phi_r(1+u)$. Anche queste, per $m=0$, conducono all'uguaglianza

$$\Phi_r(1+u) = \Phi_r(1+u)$$

e non acquistano significato che quando sia $m=1$ almeno.

5. Le formole fin qui sviluppate servono per il calcolo delle funzioni $\Phi_r(u)$, sia in modo diretto e indipendente, sia deducendone i valori da altri già conosciuti ed appartenenti alla funzione con lo stesso indice r. Esse sono applicabili per valori positivi e negativi di u, e per valori positivi di r, interi o frazionarî che siano.

Ma la funzione $\Phi_r(u)$ può anche essere dedotta dai valori corrispondenti di $\Phi_{r-1}(u)$, cioè dall'indice inferiore. A tale scopo prendiamo la relazione I, 7), e scrivendovi $r-1$ al posto di r, $1+u$ al posto di u, k al posto di $k+1$, possiamo darle la forma

$$\Phi_r(1+u) = \Phi_{r-1}(1+u) + u \sum_1^n{}_k \frac{k^{r-2}}{(k+u)^r} + u \sum_{n+1}^{\infty}{}_k \frac{1}{k^2}\left(1+\frac{u}{k}\right)^{-r} \qquad 15)$$

e sviluppando al solito il binomio e mantenendo i simboli già adottati, si ha

$$\begin{aligned}\Phi_r(1+u) &= \Phi_{r-1}(1+u) + u \sum_1^n{}_k \frac{k^{r-2}}{(k+u)^r} + \\ &+ u\,\mathrm{S}_2^{(n)} - \binom{r}{1} u^2\,\mathrm{S}_3^{(n)} + \binom{r+1}{2} u^3\,\mathrm{S}_4^{(n)} - \cdots \text{inf.}\end{aligned} \qquad 16)$$

Valgono per questa serie le stesse considerazioni, che abbiamo fatto per la 5). Essa è convergente, purchè $-n-1 < u < n+1$. Ma rimane inteso che bisogna tenere i limiti per u molto al di sotto di questi ora indicati, onde conservare alla serie il carattere di convergenza praticamente soddisfacente.

Scriviamo nella 15) successivamente

$m+u$ al posto di u, k al posto di $m+k$

$-m+u$ » u, $\begin{cases} k \quad » \quad m-k\,, \text{ quando } k<m \\ k \quad » \quad k-m\,, \quad » \quad k>m\,. \end{cases}$

Procedendo coi medesimi sviluppi, adoperati nei numeri precedenti, si ha

$$\begin{aligned}\Phi_r(1+m+u) &= \Phi_{r-1}(1+m+u) + (m+u) \sum_{m+1}^n{}_k \frac{(k-m)^{r-2}}{(k+u)^r} \\ &+ (m+u)\left\{ \mathrm{U}_r(m) - \binom{r}{1} u\,\mathrm{U}'_r(m) + \binom{r+1}{2} u^2\,\mathrm{U}''_r(m) - \cdots \text{inf.}\right\}\end{aligned} \qquad 17)$$

$$\Phi_r(1-m+u)=\Phi_{r-1}(1-m+u)-$$
$$-(-1)^r(m-u)\sum_1^{m-1}{}_k\frac{(m-k)^{r-1}}{(k-u)^r}-(m-u)\sum_s^n{}_k\frac{(m+k)^{r-2}}{(k+u)^r} \qquad 18)$$
$$-(m-u)\left\{U_r(-m)-\binom{r}{1}uU'_r(-m)+\binom{r+1}{2}u^2U''_r(-m)-\cdots\text{inf.}\right\}$$

essendo

$$U_r^{(i)}(m)\quad=S_{i+2}^{(n)}-\binom{r-2}{1}mS_{i+3}^{(n)}+\binom{r-2}{2}m^2S_{i+4}^{(n)}-\cdots\text{inf.} \qquad 19)$$

$$U_r^{(i)}(-m)=S_{i+2}^{(n)}+\binom{r-2}{1}mS_{i+3}^{(n)}+\binom{r-2}{2}m^2S_{i+4}^{(n)}+\cdots\text{inf.} \qquad 20)$$

Le formole 17) e 18) vanno soggette alla condizione di convergenza $-n-1<u<$ $<n+1$. Le formole 19) e 20) sono formate da serie finite, quando r sia un numero positivo intero, e non vanno soggette a condizioni di convergenza. Ma quando r sia frazionario, le serie si prolungano all' infinito e divengono convergenti quando $m<n+1$. Per il caso speciale $m=0$, la 17) e la 18) ritornano alla 16).

Se invece di partire dalla I. 7), si prende come punto di partenza la seconda delle I, 9) si ha, scrivendo p per n, la relazione più generale

$$\Phi_{p+r}(1+u)=\Phi_p(1+u)+\sum_1^n{}_k\frac{k^{p-1}}{(k+u)^p}-\sum_1^n{}_k\frac{k^{p+r-1}}{(k+u)^{p+r}}+$$
$$+\varrho_1uS_2^{(n)}-\varrho_2u^2S_3^{(n)}+\cdots\text{inf} \qquad 21)$$

in cui per brevità si è posto

$$\varrho_1=\binom{p+r}{1}\quad-\binom{p}{1}$$
$$\varrho_2=\binom{p+r+1}{2}-\binom{p+1}{2}$$
$$\varrho_3=\binom{p+r+2}{3}-\binom{p+2}{3}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Con questa relazione si passa immediatamente dalla funzione $\Phi_p(u)$ alla $\Phi_{p+r}(u)$. Non occorre forse aggiungere, che per $r=1$, la 21) riconduce ad una formola analoga alla 16).

Queste relazioni, specialmente per grandi valori di r, sono più convergenti delle analoghe nei numeri precedenti, perchè sono più piccoli i coefficienti binomiali, che vi figurano. Possono quindi utilmente servire, sia come formole di calcolo, sia come formole di controllo.

6. Il calcolo numerico delle funzioni $\Phi_r(u)$ non presenta alcuna difficoltà, quando l'indice r sia una quantità negativa. Tali funzioni sono rappresentate dalla relazione II, 3). Scrivendo in essa $1+u$ al posto di u, si ha

$$\Phi_{-r}(1+u)=-A-\binom{r}{1}uS_2-\binom{r}{2}u^2S_3-\binom{r}{3}u^3S_4-\cdots \qquad 21)$$

È una serie finita, che si arresta da se, quante volte r sia un numero intero. In tale caso essa non è soggetta a condizioni di convergenza e vale per tutti i valori positivi e negativi di u. La funzione è puramente algebrica.

Quando invece r sia un numero frazionario, la serie 21) diviene infinita ed è convergente, purchè $-1 < u < +1$, ma resta anche in tali limiti poco convergente. Per renderla più convergente e per estendere in pari tempo i limiti della sua convergenza, basta prendere come punto di partenza la II, 2). Scrivendovi $1+u$ al posto di u, k al posto di $k+1$, si può darle la forma seguente

$$\Phi_{-r}(1+u) = -\mathrm{A} + \sum_1^n {}_k \frac{1}{k} - \sum_1^n {}_k \frac{(k+u)^r}{k^{r+1}} - \sum_{n+1}^\infty {}_k \frac{1}{k} \left\{ \left(1+\frac{u}{k}\right)^r - 1 \right\}$$

ossia

$$\left.\begin{aligned} \Phi_{-r}(1+u) &= \mathrm{S}_1^{(n)} - \sum_1^n {}_k \frac{(k+u)^r}{k^{r+1}} - \binom{r}{1} u\,\mathrm{S}_2^{(n)} - \\ &- \binom{r}{2} u^2\,\mathrm{S}_3^{(n)} - \binom{r}{3} u^3\,\mathrm{S}_4^{(n)} - \cdots \text{inf.} \end{aligned}\right\} \quad 22)$$

espressione valevole, quante volte $-n-1 < u < n+1$.

Del pari, partendo dalla II, 6) si ha la buona formola di controllo

$$\left.\begin{aligned} \Phi_{-r}(1+u) &= \Phi_{-r-1}(1+u) + u \sum_1^n {}_k \frac{(k+u)^r}{k^{r+2}} + \\ &+ u\,\mathrm{S}_2^{(n)} + \binom{r}{1} u^2\,\mathrm{S}_3^{(n)} + \binom{r}{2} u^3\,\mathrm{S}_4^{(n)} + \cdots \text{inf.} \end{aligned}\right\} \quad 23)$$

che si deduce anche direttamente dalla 16), scrivendo in questa $-r$ al posto di r.

7. È dovuta al Gauss, in seguito ad una relazione trovata dall'Eulero, la seguente formola, valevole per valori positivi di u [1]

$$\Phi_1(1+u) = \log u + \frac{1}{2u} + \sum_1^\infty {}_k (-1)^k \frac{1}{2k} \frac{\mathrm{B}_{2k-1}}{u^{2k}}, \quad 24)$$

in cui B_{2k-1} rappresenta, per i diversi valori di k, i numeri *bernoulliani*.

Le relazioni I, 8,) permettono di salire da questa trascendente a quelle dall'indice successivo. Per arrivare, in termine generale, dalla $\Phi_r(1+u)$ alla $\Phi_{r+1}(1+u)$, basta moltiplicare la prima per u^r, derivarne il prodotto rispetto ad u, e dividere poi per $r u^{r-1}$. Si hanno così le relazioni

$$\left.\begin{aligned} \Phi_2(1+u) &= \log u + 1 - \sum_1^\infty {}_k (-1)^k \binom{2k-1}{1} \frac{1}{2k} \frac{\mathrm{B}_{2k-1}}{u^{2k}} \\ \Phi_3(1+u) &= \log u + \frac{3}{2} + \sum_1^\infty {}_k (-1)^k \binom{2k-1}{2} \frac{1}{2k} \frac{\mathrm{B}_{2k-1}}{u^{2k}} \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \Phi_r(1+u) &= \log u + \sum_1^{r-1} {}_k \frac{1}{k} - \sum_1^\infty {}_k (-1)^{k+r} \binom{2k-1}{r-1} \frac{1}{2h} \frac{\mathrm{B}_{2k-1}}{u^{2k}} \end{aligned}\right\} \quad 25)$$

[1] Gauss, Werke III, pag. 154.

relazioni, che valgono per valori positivi interi di r, superiori all'unità. Tutte queste serie appartengono alla categoria delle *semiconvergenti* e vanno trattate con prudenza. I numeri bernoulliani, come è noto, sono prima decrescenti, poi crescono all'infinito e costituiscono, in questa seconda parte e per loro conto, una serie più divergente di qualsiasi progressione geometrica. Ne segue che le serie 24) e 25) hanno prima carattere convergente, ma da un certo termine in poi, il cui posto nella serie dipende dai valori di r e di u, esse divengono divergenti. Già Gauss aveva avvertito tale carattere nella 24) e se ne è servito solo per grandi valori di u, nel quale caso essa si presta assai bene al calcolo numerico.

La teoria delle serie semiconvergenti è stata poi molto studiata [1]. Il concetto, che guida in tali indagini, consiste nel considerare queste serie, nella parte convergente, come finite e nel determinare il termine residuale, il quale ci assicuri del grado di esattezza raggiunto. Questo residuo è una frazione pura del termine successivo all'ultimo contemplato e può quindi anche ammettersi in casi non dubbi, come è questo, che qui trattiamo, purchè non si oltrepassi il limite della parte convergente della serie. Trattasi, in fondo, di calcoli, in cui i termini coi numeri bernoulliani rappresentano le correzioni successive, le quali diventano piccolissime per grandi valori di u.

A dimostrare praticamente il grado di esattezza, che si può raggiungere, prendiamo il valore non troppo grande di $u=4$ e poniamo successivamente $r=1,2,3,4$. Si ha il seguente prospetto

$\Phi_1(5)$	$\Phi_2(5)$	$\Phi_3(5)$	$\Phi_4(5)$
+ 1,386 294 361 1	+ 1,386 294 361 1	+ 1,386 294 361	+ 1,386 294 36
+ 0,125 000 000 0	+ 1,000 000 000 0	+ 1,500 000 000	+ 1,833 333 33
— 5 208 333 3	+ 5 208 333 3	» » »	» » »
+ 32 552 1	— 97 656 3	+ 97 656	— 32 55
— 968 9	+ 4 844 5	— 9 689	+ 9 69
+ 63 6	— 445 2	+ 1 336	— 2 23
— 7 2	+ 63 8	— 259	+ 61
+ 1 2	— 13 2	+ 66	— 20
— 3	+ 3 9	— 23	+ 9
+ 1	— 1 5	+ 11	— 5
— 06	+ 1 0	— 8	+ 4
+ 1,506 117 668 3	+ 2,391 409 491 4	+ 2,886 383 451	+ 3,219 603 09

valori, che eccettuata l'ultima decimale naturalmente incerta, concordano con quelli riportati in I, n. 7. Per valori più grandi di u, l'approssimazione è maggiore, come risulta dal seguente prospetto, per $u=10$ e $u=20$,

[1] Schlömilch, *Compendium der höhern Analysis*; II. *Die Bernoulli'schen Functionen und die halbconvergenten Reihen*, pp. 211-242.

$\Phi_1(11)$	$\Phi_4(11)$	$\Phi_4(21)$
+ 2,302 585 092 994 046	+ 2,302 585 092 994 046	+ 2,995 732 273 553 991
+ 0,050 000 000 000 000	+ 1,833 333 333 333 333	+ 1,833 333 333 333 333
— 833 333 333 333	» » » » »	» » » » »
+ 833 333 333	— 833 333 333	— 52 083 333
— 3 968 254	+ 39 682 540	+ 620 040
+ 41 667	— 1 458 333	— 5 696
— 758	+ 63 636	+ 62
+ 21	— 3 480	— 1
— 1	+ 238	
	— 20	
	+ 2	
+ 2,351 752 589 066 721	+ 4,135 917 631 278 629	+ 4,829 065 555 448 396

valori esatti, tranne l'ultima decimale alquanto incerta. Il primo di questi valori, per $\Phi_1(11)$, è facilmente controllabile a molte decimali. Dalle relazioni I, 27_r) si ricava

$$\Phi_1(11) = S_1^{10} = -A + 1 + \frac{1}{2} + \cdots \frac{1}{10} = 2{,}351\ 752\ 589\ 066\ 721\ 107\ldots$$

in piena corrispondenza col valore ora trovato.

Ne segue, che le formole 24) e 25) forniscono, da $u = 4$ in su, il mezzo più semplice per continuare le tabelle iniziali e a 9 decimali o che permettono, da $u = 10$ in su, di spingere il calcolo a 14 e più decimali.

8. Riproduciamo la relazione 25)

$$\Phi_r(1+u) = \log u + \sum_1^{r-1}{}_k \frac{1}{k} - \sum_1^{\infty}{}_k (-1)^{k+r} \binom{2k-1}{r-1} \frac{1}{2k} \frac{B_{2k-1}}{u^{2k}},$$

scriviamo in essa $r+1$ al posto di r, e sottraendo la prima dalla seconda, con breve riduzione otteniamo

$$\Phi_{r+1}(1+u) = \Phi_r(1+u) + \frac{1}{r} + \sum_1^{\infty}{}_k (-1)^{k+r} \binom{2k}{r} \frac{1}{2k} \cdot \frac{B_{2k-1}}{u^{2k}} \qquad 26)$$

relazione semplice che permette di passare dai valori conosciuti di $\Phi_r(1+u)$ a quelli immediatamente successivi della funzione $\Phi_{r+1}(1+u)$, bene inteso con le riserve ed entro i limiti della convergenza della serie semiconvergente, di cui si parlò nel capitolo precedente.

Allo stesso modo e colle stesse riserve si trova la relazione più generale

$$\Phi_{r+n}(1+u) = \Phi_r(1+u) + \sum_0^{n-1}{}_k \frac{1}{k+r} - \sum_1^{\infty}{}_k (-1)^{k+r} \varrho_n \frac{1}{2k} \cdot \frac{B_{2k-1}}{u^{2k}} \qquad 27)$$

in cui

$$\varrho_n = (-1)^n \binom{2k-1}{r+n-1} - \binom{2k-1}{r-1}$$

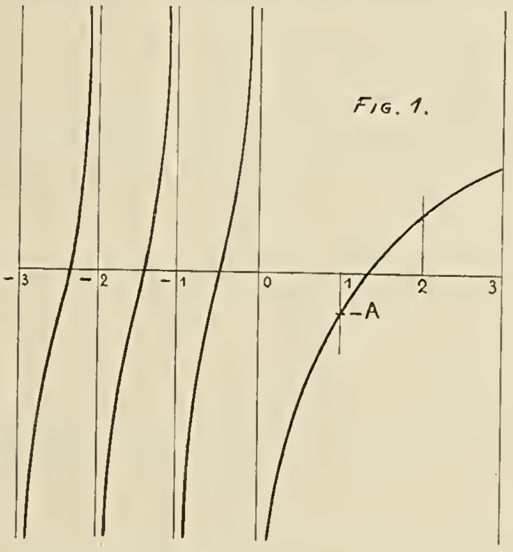
relazione, col mezzo della quale si passa dalla funzione $\Phi_r(1+u)$ direttamente alla $\Phi_{r+n}(1+u)$.

CONCLUSIONE.

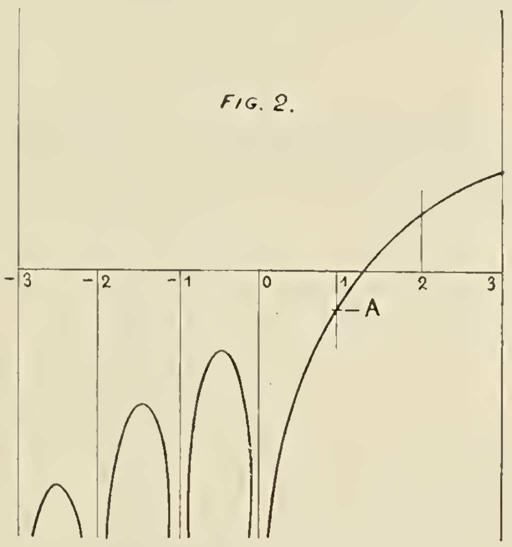
Nella presente Memoria ho cercato di svolgere passo a passo le principali proprietà analitiche della trascendente generale

$$\Phi_r(u) = \lim_{k=\infty} \left\{ \log k - \sum_0^k {}_h \frac{(h+1)^{r-1}}{(h+u)^r} \right\},$$

alla quale lo studio del problema ottico degli anfiteatri mi ha successivamente condotto. Era mio desiderio di unirvi alcune tabelle numeriche onde meglio illustrare l'andamento della funzione in alcuni casi speciali. Ma per ragioni che è inutile di esporre, ho dovuto abbandonare tale progetto.



$\phi_r(u)$ per r dispari



$\phi_r(u)$ per r pari

Tutte le trascendenti che si riassumono nel simbolo qui sopra notato, presentano la proprietà rimarchevole di avere, per qualsiasi valore di r, un unico valore per $u = 1$, che è il valore $-A$, cioè la costante del Mascheroni. Ma all'infuori di questa singolare coincidenza esse si dividono in due gruppi ben distinti per andamento e per carattere, a seconda che r sia dispari o pari. Mentre per i valori positivi di u esistono solo differenze numeriche tra i due gruppi, tali differenze diventano tipiche per valori negativi del loro argomento, compreso $u = 0$.

Le due figure messe qui nel testo ne rappresentano il doppio tipo.

Quando r sia dispari (fig. 1) per i valori negativi interi di u le curve hanno due valori infiniti ($\pm\infty$) e da 0 in poi prendono il loro andamento di curve logaritmiche che vanno a $+\infty$ per $u = +\infty$.

Quando r sia pari (fig. 2), per valori negativi interi di u, si hanno pure due valori infiniti, ma tutti e due sono negativi. Da 0 in poi, anch'esse prendono il carattere di curve logaritmiche.

La ragione di questo diverso modo di procedere sta nella struttura del loro polinomio caratteristico. Per comprenderlo, prendiamo come esempio i due casi più semplici ed esaminiamo le due funzioni $\Phi_1(u)$ e $\Phi_2(u)$.

Per la prima il polinomio caratteristico ha la forma [1]

$$\Phi_1(u) = \Phi_1(u+1) - \frac{1}{u},$$

la quale per $u = 0 , -1 , -2$ ecc. dà successivamente

$$\Phi_1(0) = \Phi_1(-1) = \Phi_1(-2) = \cdots = -\infty .$$

Ma il carattere del termine algebrico $\frac{1}{u}$ porta con sè che non è indifferente, se ad $u = 0$ si acceda dalla parte dei termini positivi o dei termini negativi. Ambedue i procedimenti sono ammissibili ed influiscono sulla prima potenza di $\frac{1}{u}$. Ne segue che

$$\Phi_1(0) = \Phi_1(-1) = \Phi_1(-2) \text{ ecc.} \cdots = \pm \infty .$$

La cosa è diversa per il polinomio caratteristico della funzione $\Phi_2(u)$ [2], che si può trascrivere nel modo seguente:

$$\Phi_2(u) = -\Phi_2(u+2) + 2\Phi_2(u+1) - \frac{1}{u^2} .$$

Per $u = 0 , -1 , -2$, ecc. si ha

$$\Phi_2(0) = \Phi_2(-1) = \Phi_2(-2) = \cdots = -\infty^2$$

e qui il segno di u nel termine algebrico $-\frac{1}{u^2}$ è proprio indifferente perchè coperto dal quadrato di u.

Le stesse considerazioni valgono anche per le funzioni d'indice r superiori (r pari o dispari). Al Gauss, che ha trattato in una celebre Memoria le proprietà della $\Phi_1(u)$ è sfuggito il doppio valore della $\Phi_1(0)$. Egli ha trovato soltanto $\Phi_1(0) = -\infty$.

[1] Vedi Blaserna, *Sopra una nuova trascendente* ecc. Atti della R. Accademia dei Lincei, anno 1895, pag. 500 formula 1_i).

[2] Ibidem, pag. 502 (formula 8).

P. Blaserna, *Sopra un gruppo di nuove trascendenti ecc.*

	ERRATA	CORRIGE
Pag. 561 linea 7	$\sum_0^k {}_h \frac{1}{1+u}$	$\sum_0^k {}_h \frac{1}{h+u}$
» 562 » 6	intero	intero.
» 573 » 8	$\frac{2.5}{2.6} n^2 S_3^{(n)}$	$\frac{2.5}{3.6} n^2 S_3^{(n)}$
» 595 » 6	Pr	Per
» 597 » 26	$u+\varrho$	$r+\varrho$

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª Transunti.
2ª Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — Transunti. Vol. I-VIII. (1876-84).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali*
Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche*
Vol. I-XIII.

Serie 4ª — Rendiconti. Vol. I-VII. (1884-91).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I-VII.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche*
Vol. I-X.

Serie 5ª — Rendiconti *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali*
Vol. I-XXV. (1892-1916). Fasc. 4°. Sem. 2°.
Rendiconti *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche*
Vol. I-XXIV. (1892-1916). Fasc. 3-4.
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I-XI. Fasc. 9.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-XII. Vol. XIV. Vol. XV. Fasc. 1-3.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia è di L. 10; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

Ermanno Loescher & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze*
Ulrico Hoepli. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

MEMORIE DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

(Anno CCCXIII 1916)

Serie Quinta — Volume XI — Fascicolo X.

GUIDO PAOLI

RESULTATI BOTANICI

DELLA

MISSIONE SCIENTIFICA STEFANINI-PAOLI

NELLA

SOMÀLIA ITALIANA MERIDIONALE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1916

Smithsonian Institution
SEP 25 1924
National Museum

RELAZIONE

letta dal Socio Pirotta, relatore, a nome anche del Corrisp. Baccarini, nella seduta del 2 aprile 1916, sulla Memoria del dott. Guido Paoli, intitolata: *Risultati botanici della Missione scientifica Stefanini-Paoli nella Somàlia italiana meridionale.*

La Somàlia italiana meridionale, vasto e importante territorio dal quale si ha ragione di attendersi buoni risultati per la utilizzazione di piante indigene e per la coltivazione di piante da prodotti coloniali, è però ancora poco conosciuta dal punto di vista botanico.

Il contributo principale allo studio della flora della Somàlia italiana meridionale è senza dubbio costituito dal ricco materiale raccolto dal maggio al dicembre del 1913, dal dott. Guido Paoli, membro della Missione scientifica Stefanini-Paoli.

Lo studio di questo materiale botanico, che fa parte delle ricche collezioni dell'Erbario di Firenze (che ci auguriamo diventi presto effettivamente l'Erbario nazionale), è oramai compiuto.

Il dott. Paoli, col lavoro presentato all'Accademia, espone in modo sommario e riassuntivo, ma chiaro ed ordinato, i principali risultati delle osservazioni botaniche da lui fatte sul luogo intorno specialmente alla caratteristica costituzione delle principali formazioni vegetali, della costa e delle dune mobili, della zona delle Mangrovie, delle pianure salate e gessose, delle dune stabili, dei terreni alluvionali lungo il Giuba e l'Uebi Scebèli e delle foreste che li accompagnano, dei terreni alluvionali asciutti e rocciosi.

E poichè questo lavoro del Paoli è un buon contributo per la conoscenza della flora della nostra colonia, i Commissarii, incaricati di riferire intorno alla ammissibilità alla stampa negli Atti dell'Accademia, ne propongono la inserzione integrale nelle Memorie.

Resultati botanici della Missione scientifica Stefanini-Paoli nella Somàlia italiana meridionale.

Memoria del dott. GUIDO PAOLI

La Missione e suo itinerario. — La Missione, di cui feci parte, aveva avuto dal Governo della Somàlia italiana l'incarico di studiare alcuni problemi geologici e idrologici nella parte meridionale della colonia; ed era stata affidata al prof. Giuseppe Stefanini, il quale ottenne che gli fosse aggregato lo scrivente per altre ricerche di storia naturale.

La Missione sbarcò a Mogadiscio il 3 maggio 1913 e si trattenne in colonia fino al 2 dicembre dello stesso anno. Da Mogadiscio ripartì col piroscafo, dopo circa un mese dall'arrivo, e sbarcò a Kismayu, donde passò a Giumbo e a Margherita, e risalì il Giuba col battello fluviale fino a Bardera; di qui fece un'escursione fino a Matagòi, Bur Meldàc ed Eghèrta e un'altra fino a Matagassile sul Giuba, e Allèngo; partì poi da Bardera dirigendosi per El Ellàn e Berdale fino a Iscia Baidoa; di lì lo scrivente (lo Stefanini, per ragioni di salute, si avviò a Uanle Uen), per Berdale, raggiunse nuovamente il Giuba a Marilè e arrivò a Lugh, donde per Èl Ure e Uegìt tornò a Iscia Baidoa, proseguendo per Bur Acaba e Bur Èibi fino a Uanle Uen, ove raggiunse lo Stefanini. Così la Missione continuò per Ildùc Uen a Mahaddei Uen sull'Uebi Scebèli; discese poi lungo la sinistra del fiume a Balaàd e poi, lungo la destra, passò ad Afgòi, donde tornò a Mogadiscio.

Dei resultati geologici e geografici ha riferito il collega Stefanini alla Società per gli studî geografici e coloniali; in questa Memoria io accennerò brevemente soltanto ai resultati delle ricerche botaniche, delle quali principalmente mi occupai [1].

Cenni storici sulle notizie botaniche della colonia. — La flora della Somàlia italiana meridionale era la meno esplorata fra quelle delle nostre colonie. Infatti per l'Eritrea e il circostante territorio abissino diversi sono stati i raccoglitori e gli studiosi italiani e stranieri, e la sua flora è ormai discretamente conosciuta; in Libia, subito dopo la nostra occupazione, si sono recate Missioni scientifiche aventi

[1] La relazione completa intorno ai lavori della Missione sarà pubblicata dall'Istituto agricolo coloniale italiano a Firenze e sarà il n. 7 della collana « Relazioni e monografie agrario-coloniali ».

anche lo scopo di ricerche botaniche. Invece per la Somàlia meridionale le nostre cognizioni erano ancora molto limitate. Il primo raccoglitore pare che sia stato il Kirk, console inglese a Zanzibar, il quale, circa il 1864, si soffermò a Mogadiscio e raccolse alcune poche piante nei dintorni di questa città e a Ghelèdi o Ghelèdle, sullo Scebèli; queste si trovano nell'Erbario di Kew e sono state sporadicamente pubblicate. Poi l'Hildebrandt nel 1873 fece da Zanzibar una punta a Brava e raccolse alcune piante della costa (18 specie).

Assai più importanti sono le raccolte fatte dal Macaluso (1907) e studiate dal Mattei nel 1908 (200 specie) e quelle raccolte da Alfonso Fiori nel 1909, determinate da Adriano Fiori nel 1912 e 1913 (52 specie).

Poco prima della nostra Missione, il Mangano (1909) e poi Scassellati e Mazzocchi (1911-1912) visitarono la colonia con scopo agrario e zootecnico, e fecero pure delle raccolte botaniche; così anche il cap. dott. Francesco Provenzale, direttore del Gabinetto Siero-vaccinogeno a Merca, raccolse un piccolo manipolo di piante di varie località, e questa è, dopo quella del Macaluso, l'unica raccolta fatta da uno dei parecchi italiani che risiedono o hanno risieduto in colonia; però i risultati di queste collezioni, che fanno parte dell'Erbario di Firenze, non sono ancora pubblicati altro che parzialmente.

Tutte queste raccolte riguardano soltanto la zona costiera da Mogadiscio a Giumbo, il basso corso del Giuba (Goscia) e qualche località lungo l'Uebi Scebeli.

Maggiori notizie abbiamo della Somàlia settentrionale e della regione più interna (Ogadèn, Galla, Boran ecc.), da dove importanti raccolte furono portate dai viaggi di Speke (1876), Hildebrandt (1873 e '75), Révoil (1877-78, '78-79, '80-81), Hardegger e Paulitschke (1884), Menges (1884 e '85), fratelli James (1885), Robecchi-Bricchetti (1890 e '91), Baudi di Vesme e Candeo (1891), Ruspoli e Keller (1891), Ruspoli e Riva (1892-94), Donaldson Smith (1894-95), Edith Cole e Lort Phillips (1895), fratelli Ghika Comanesti (1895-96), Erlanger, O. Neumann e Ellenbeck (1900); questa ultima spedizione fu anche a Dolo e discese il Giuba sulla riva destra (inglese) da Bardera a Kismayu; e da S. A. R. Elena d'Aosta (1910).

Le raccolte botaniche della Missione. — Le nostre collezioni riguardano il quadrilatero ai cui vertici stanno Mogadiscio, Giumbo, Lugh e Mahaddèi Uen, e constano di circa 1400 campioni botanici di piante vascolari, riferibili a oltre 700 specie e varietà, delle quali quasi 150 sono risultate nuove per la scienza, e di molte delle quali fu raccolto il nome indigeno e notizie intorno agli usi e proprietà; oltre a queste, si trova nella collezione un gran numero di piante inferiori, specialmente funghi e licheni. Tutto questo materiale, entrato a far parte dell'Erbario di Firenze, è ormai completamente studiato, insieme con quello del Mangano, di Scassellati e Mazzocchi e del Provenzale, per opera principalmente del prof. Emilio Chiovenda con la collaborazione dei proff. Adriano Fiori, Renato Pampanini, G. Ettore Mattei, Odoardo Beccari per le piante vascolari. Al prof. Pasquale Baccarini si deve lo studio dei funghi, al dott. Carlo Zanfrognini quello dei licheni, e al prof. Augusto Béguinot quello di semi ed altre parti di vegetali fluitati dal mare; a tutti questi distinti botanici sono dovuti i più vivi ringraziamenti da parte della Missione.

Molte delle specie di piante raccolte sono già state pubblicate in Memorie speciali [1]; ed una ampia e particolareggiata Memoria sarà redatta per cura dell'Istituto botanico di Firenze.

Aspetto della Somàlia meridionale e regioni botaniche. — La parte di colonia da noi percorsa è quasi tutta piana o pianeggiante; la zona più interna forma un altipiano, a cui si arriva generalmente per insensibile pendìo e che solo in pochi punti più elevati supera di poco i 500 metri s. m.; il margine di questo altipiano lungo il Giuba e in qualche altra località è inciso da valli limitate da un basso gradino roccioso. Non v'è dunque grande varietà di paesaggio, e mancano sensibili differenze di temperatura, di piovosità, di clima fra le diverse regioni; tutto ciò fa sì che la vegetazione sia molto uniforme, mentre le diversità che si notano sono strettamente collegate soltanto con la natura del terreno e con la maggiore o minore umidità del sottosuolo. È per questo che la divisione delle zone floristiche riesce molto semplice e si possono riconoscere diverse formazioni botaniche, alle quali accennerò brevemente.

I. Costa e dune mobili. — La zona che così denomino comprende tutti i terreni di spiaggia colle piante che vegetano nelle vicinanze più o meno immediate delle onde, sulle sabbie e sulle scogliere, spesso toccate dalle acque salate, e sulle dune mobili più prossime al mare. Queste dune non hanno in generale grande estensione in profondità, allontanandosi fino a 1 o 2 km. dalla linea di spiaggia; si possono far rientrare in questa formazione anche quelle dune che, per quanto non siano mobili, (come ad es. quella su cui è eretto il faro di Mogadiscio), pure hanno in comune colle prime i caratteri della sabbia biancastra e della flora che è per tutte costituita prevalentemente da piante erbacee con qualche arbusto nano, e solo eccezionalmente con qualche acacia che per lo più rimane sotto forma di basso cespuglio.

Le piante erbacee sono o perenni ad accrescimento molto lento, o annue e di durata effimera, limitata all'epoca delle pioggie, durante le quali le dune assumono l'aspetto di colline erbose; fra le perenni si notano diverse con organi sotterranei molto ingrossati (*Pterodiscus*) e molte piante striscianti e con lunghi stoloni (*Ipo-*

(1) Le pubblicazioni, finora comparse, illustranti le piante raccolte dalla missione sono le seguenti:

P. Baccarini, *Sopra alcuni Podaxon della Somàlia* (nuovo Giornale bot. ital. [nuova serie], vol. XXI, Firenze, aprile 1914). — A. Béguinot, *Frutti e semi della formazione a Mangrovie raccolti lungo la costa somala* (Boll. della r. Soc. geogr., fasc. 1°, Roma 1915). — E. Chiovenda, *Plantae novae vel minus notae e regione Aethiopica* (Annali di botanica, vol. XIII, fasc. 3°, Roma 1915). — A. Fiori, *Plantae somalenses novae* (Bull. della Soc. bot. ital., Firenze, giugno 1915). — G. E. Mattei, *Studî sugli Abutilon dell'Africa orientale* (Boll. del r. Orto botanico di Palermo, nuova serie, vol. I, Palermo 1915). Idem, *Sopra alcune specie di cotone indigeno della Somalia italiana* (Boll. di Studi e informazioni del R. Giardino coloniale di Palermo, vol. II, fasc. IV, Palermo 1916). — R. Pampanini, *Contributo alla conoscenza della flora somala* (Bull. della Soc. bot. ital., Firenze, febbraio 1915). — C. Zanfrognini, *Elenco dei licheni corticicoli* (Bull. della Soc. bot. ital., Firenze, giugno 1915).

moea, *Scaevola*, *Boerhavia*, *Panicum pinifolium* ecc.). Fra gli arbusti sono frequenti la *Suaeda fruticosa* e la *Calotropis procera*, fra le piante arboree qualche *Cordia* e una palma, la *Hyphaene pyrifera*, che si trova negli avvallamenti fra le piccole dune mobili, forse in località ove delle vene di acqua del sottosuolo si avvicinano di più alla superficie.

II. **Formazione a mangrovie.** — Di una tale formazione mancava quasi del tutto notizia per la regione da noi percorsa, se se ne eccettui la conoscenza di qualche specie caratteristica, raccolta dal Macaluso; la cosa è tanto più notevole, in quanto che la foce del Giuba, ove le mangrovie sono riccamente rappresentate, è stata più volte toccata dagli esploratori, e soltanto nei rilievi dell'ultima spedizione del von der Decken si vede notata questa formazione.

Nella Somàlia meridionale adunque, per quello che abbiamo potuto vedere, le mangrovie si trovano in due punti della costa: e cioè presso Gesira, circa 20 km. a sud di Mogadiscio, e sulla riva italiana (sinistra) dell'ultimo tratto del Giuba, ove assumono anche maggiore importanza; più lussureggiante si mostra presso all'attuale foce e a quel diverticolo, ora a fondo cieco, per mezzo del quale il Giuba, fino a pochi anni, fa sboccava in mare; però si estende anche a monte del traghetto fra Gobuen e Giumbo, fino quasi all'imboccatura della piana di Bièjra. Sulla riva destra (inglese) la formazione a mangrovie manca, per essere la riva assai più alta ed anche collinosa, e poi formata di piccole dune mobili.

Ovunque la pianta più comune è l'*Avicennia marina*; ma vi si trovano abbondanti anche altre specie caratteristiche, come *Bruguiera gymnorhiza*, *Rhizophora mucronata*, *Xylocarpus obovatus*.

Il limite fra la detta formazione e i terreni asciutti non è netto, ma è costituito da terre basse, inondate solo nelle maggiori maree o nelle grosse piene del fiume e corrispondenti perciò al « Creekland » dei fitogeografi tedeschi: in questa zona vegetano piante caratteristiche, come *Flagellaria guineensis*, *Vitex negundo*, *Pluchea dioscoridis*, *Fimbristilis ferruginea*, *Sporobolus setulosus*, *Arthrocnemum indicum*, e anche qualche esemplare di *Acacia adansoni* e di *Hyphaene benadirensis* e diverse altre che son comuni anche ai terreni vicini.

III. **Pianure salate e gessose.** — In stretto rapporto colle flore delle regioni sopracitate, più o meno direttamente influenzate dalla salsedine marina, si può considerare quella di alcune regioni come la Piana di Vadda e quella di Erbèd Delbìle, le quali, per quanto distanti dal mare alcuni chilometri, sono a livello pari o di poco superiore al medesimo, ed hanno il terreno impregnato di sale e gesso, ed altre ancora più interne nella zona arenaceo-gessosa di Lugh, ove pure il terreno, specialmente se vi rimane stagnante l'acqua piovana, così da evaporare lentamente, si incrosta di clorur o di sodio e altri sali. Come tipo di pianura di questa seconda categoria, cito la Piana di Sobanalle a NE di Lugh; ma altre regioni consimili devono probabilmente trovarsi in quelle formazioni gessifere con varî gradi di passaggio, fino ad assumere i caratteri della Piana di Aggheràr, che è talmente incrostata di clorur o di sodio alla superficie da poterne ricavare abbondante il sale che si porta al mercato di

Lugh; essa, secondo quanto si può prevedere, e secondo le descrizioni degli indigeni (poichè non fu visitata da noi), è completamente spoglia di vegetazione.

Purtroppo nessuna di queste pianure fu potuta studiare sufficientemente; ma vi furono raccolti il *Phillanthus reticulatus*, *Centema stefaninii*, *Astrochlaena lachnosperma*, *Sporobolus setulosus*, *Cyperus compressus* e varie altre.

L'insieme di questa vegetazione è molto misero, e il predominio è delle piante erbacee, molto rade e con qualche cespuglio.

IV. **Duna stabile.** — Dietro la zona costiera, lungo il mare, si estendono queste dune di sabbia rossa, più antiche e ormai fissate da abbondante vegetazione di boscaglia, spesso folta e intricata, costituita prevalentemente di acacie di diverse specie, alcune delle quali si trovano diffuse in tutta la colonia.

Questa zona ha un limite spesso indeciso dalla parte del mare, ove le dune mobili non di rado si insinuano e in parte si sovrappongono alle fisse; ma dall'altra, verso le pianure alluvionali, declinano rapidamente e il limite è in generale segnato con molta evidenza.

La zona delle dune stabili decorre parallela alla costa per una profondità varia, ma che oscilla fra una diecina e una ventina di chilometri. La sua flora è di tipo xerofilo, costituente una boscaglia di steppa analoga a quella di cui parlerò fra breve (VII); è composta di essenze arboree piuttosto basse e di cespugli, con abbondanza di piante erbacee; su tutte poi dominano le caratteristiche acacie a forma di ombrello, riferibili a diverse specie (*Ac. lahai* var. *benadirensis*, *Ac. adansoni*, *Ac. planifrons*, *Ac. senegal*, var. *pseudoglaucophylla*).

Fra gli arbusti si notano diverse specie di *Grewia* e poi *Uvaria*, *Clerodendron*, *Ochna*, *Lawsonia*, poche *Commiphora*, molti *Solanum* (*S. arundo* e simili). Le piante erbacee appartengono specialmente alle famiglie Acantacee, Borraginee (molti *Heliotropium*), Commelinacee, Capparidacee (*Polanisia*), Graminacee, Leguminose; di piante scandenti merita di essere ricordata l'unica Oleacea trovata in colonia, lo *Jasminum tomentosum* var. *somalense*, una Euforbiacea con peli urticanti (*Dalechampia*) e diverse Convolvulacee.

Il baobab (*Adansonia digitata*; « jag » o « jac » dei Somali) si trova in questa zona, ma generalmente nelle vallecole fra le dune e alla base delle medesime, ove l'umidità è maggiore.

V. **Terreni alluvionali lungo i fiumi, con foresta a galleria.** — Nelle immediate vicinanze dei fiumi i terreni alluvionali sono rivestiti, più o meno completamente, di alberi sempreverdi, assai alti, costituenti una foresta a galleria, di carattere perciò eminentemente igrofilo; questa non si estende, in generale, fino a grande distanza dalle rive dei fiumi, anzi spesso non occupa in profondità che poche diecine di metri; soltanto fra i numerosi meandri del basso Giuba la foresta si estende di più, ricoprendo il terreno compreso fra i medesimi; per il rimanente, quando il fiume scorre fra terreni rocciosi, le piante caratteristiche della formazione crescono soltanto sulle rive formate da depositi alluvionali.

La foresta è più sviluppata lungo il Giuba; anzi si può dire che soltanto lungo questo fiume essa si erge folta e maestosa così da formare due impenetrabili mu-

raglie, interrotte solo da attuali coltivazioni di indigeni o da praterie, che si sono probabilmente sostituite ad altre coltivazioni più antiche e ormai abbandonate; ma spesso le terre coltivate dagli indigeni (« sciambe ») si trovano, insieme coi loro villaggi, dietro la foresta, al suo limite. Lungo l'Uebi Scebèli la formazione a galleria è molto ridotta, sia per la minor portata del fiume e conseguente minore umidità del sottosuolo, sia per la maggiore estensione delle coltivazioni che si sono sostituite a quella.

Fra le piante più caratteristiche che contribuiscono a formare la foresta sono le Palme (*Hyphaene benadirensis* e *Phoenix reclinata* var. *somalensis*), alcune Acacie molto alte (*Ac. stenocarpa*) i Sicomori ed altri *Ficus*, Baobab, *Mimusops*, *Garcinia*, *Tamarindus*, *Haplocoelum*; abbondanti sono le piante scandenti, che spesso ricoprono completamente anche i più alti alberi ed appartengono specialmente alle Convolvulacee, Vitacee, Leguminose, Cucurbitacee e Apocinacee (*Landolphia*). Il sottobosco è pure abbondante, formato da molti cespugli e piante erbacee fra le quali si notano parecchie Amarantacee, Labiate, Acantacee; mentre nelle radure predominano i *Ricinus*.

Dove manca la foresta, le rive sono per lo più coperte da alte Graminacee che dànno origine a distinte formazioni e cioè: a *Saccharum aegyptiacum*, alto fino a tre metri; a *Sorghum vulgare* var. *drummondii*, il quale probabilmente deriva da rinselvatichimento della dura ivi coltivata in altri tempi dagli indigeni; e a *Panicum pyramidatum*.

VI. Terreni alluvionali asciutti. — Si estendono questi lungo i fiumi fino a distanza variabile, ma sempre ragguardevole, e sono riferibili a *steppe* nel vero senso della parola, cioè di pianure erbose, con sparsi cespugli e arbusti, più raramente alberi, soggette a siccità prolungate e periodiche; altri terreni alluvionali si trovano più internamente e lontano dai due maggiori fiumi della colonia, come nella regione del Baidoa; in tutti questi terreni esclusivamente, o quasi, si trovano le coltivazioni degli indigeni, da loro dette « sciambe ».

La vegetazione è di vera steppa, lussureggiante e ricoprente tutto il suolo all'epoca delle pioggie, secca negli altri tempi; molte però sono le piante perenni, con tuberi o rizomi. Fra le piante erbacee predominano in modo assoluto le Graminacee non alte, delle quali furono raccolte 27 specie e cioè metà di quelle trovate da noi in colonia: i generi più rappresentati sono *Aristida*, *Chloris*, *Digitaria*, *Eragrostis*, *Panicum*, *Sporobolus*; le altre erbe, assai meno abbondanti, appartengono alle Leguminose, Acantacee, Labiate e simili. Fra gli arbusti e cespugli predominano i *Combretum* i *Solanum* e la *Thespesia danis*; quest'ultima è abbondantissima in tutti quanti i terreni argillosi, e raggiunge talvolta le dimensioni di un alberetto: gli alberi sono per lo più Acacie ad ombrello, Salvadoracee (*Dobera*) e Cobretacee (*Terminalia*), generalmente molto radi e qua e là formanti delle aree di steppa arborata.

Le sciambe abbandonate sono in breve tempo rivestite da *Acacia seyal* var. *fistula* e *Dichrostachys glomerata*, assai folte, le quali costituiscono una formazione di passaggio fra la steppa alberata e la boscaglia di steppa, di cui sono per parlare.

VII. Boscaglia xerofila dei terreni rocciosi ed eluviali — La boscaglia dei terreni asciutti occupa la più gran parte della superficie della colonia e riveste

i terreni rocciosi o di disfacimento eluviale, piani o collinosi. Anche questa formazione è riferibile al tipo di steppa, ma nel senso più largo della parola, o, meglio, a bosco di steppa, cioè boscaglia di regioni calde, soggette a siccità prolungata e periodica.

Essa è pertanto di tipo xerofilo e formata da alberi in generale non molto elevati, con molti arbusti, pochi cespugli e poche piante erbacee; per lo più è assai folta, tanto che molto spesso riesce difficile allontanarsi dagli stretti sentieri che la percorrono. Tutta questa vasta regione botanica può dividersi in zone a seconda della costituzione chimica e della forma del terreno. Rispetto alla composizione i terreni sono *calcarei* (rocciosi e argilloso-calcarei di disfacimento), *granitici* (rocciosi e sabbioso-silicei di disfacimento) e *gessosi*, come presso Lugh, ove il gesso in giacimento primario o secondario è largamente diffuso. Per la forma sono terreni piani e collinosi; ma dal punto di vista floristico interessano particolarmente quelle elevazioni o monticelli granitici, dai Somali detti « bur », che si ergono improvvisamente isolati in mezzo alla pianura.

La flora delle colline, tutte basse, e degli altipiani calcarei, altrettanto bassi, non differisce molto da quella della pianura circostante; essa è costituita da essenze eminentemente xerofile, con predominio di Acacie, Burseracee (*Boswellia* e *Commiphora*), Combretacee (*Terminalia*), Cesalpiniacee, Salvadoracee e rappresentanti meno numerosi di molte altre famiglie. La maggior parte delle piante sono a foglie caduche; ma si riscontrano anche talune essenze sempreverdi, come le *Boscia* fra le Capparidacee, e le *Dobera* fra le Salvadoracee. Fra le piante succulente abbondano le scandenti afille o con foglie di breve durata, con fusti carnosi, come *Cissus quadrangularis* e *Sarcostemma viminale*; inoltre qualche Euforbiacea e abbondantissime *Sansevieria* e *Aloë* appartenenti a diverse specie. Le euforbie a candelabro e le *Adansonia*, essenze ritenute come proprie delle steppe, mancano nella boscaglia veramente xerofila, ma compaiono in particolari località della vasta regione, come dirò fra breve.

I terreni gessosi sono rivestiti da una boscaglia simile alla precedente, ma con qualche pianta non trovata altrove (*Boswellia rivae*, *Euphorbia sacchii* ed altre di varie famiglie).

La flora dei terreni sabbioso-granitici ha caratteri molto meno xerofili che non quella dei terreni precedenti: la vegetazione vi è più rigogliosa; le piante, anche se a foglie caduche, si mantengono verdeggianti assai più a lungo; gli alberi sono meno fitti; tutto l'aspetto è ben diverso; le Acacie e le Burseracee sono molto meno numerose come individui e come specie; abbondano invece la *Conopharyngia elegans*, *Strychnos* e alcune particolari *Terminalia*. Fra le piante erbacee si notano molte Leguminose (specialmente *Crotalaria*) e Graminacee.

Intorno ai « bur », che si trovano appunto in questi terreni, esiste una stretta zona di piante ancor meno xerofile, specialmente *Ficus* (*F. changuensis* var. *somalensis*), *Adansonia*, ed *Euphorbia tirucalli*, sulle quali piante tornerò poi a parlare.

Sui « bur » troviamo una flora caratteristica di piante adatte a vivere nelle screpolature della roccia granitica, che si riscalda enormemente ai raggi solari; questa vegetazione si sviluppa in generale soltanto nelle spaccature del nudo granito, nelle infossature ed escavazioni naturali, nelle anfrattuosità, in tutti i punti insomma ove si può formare od adunare un po' di terra vegetale; ivi si sviluppano piante che

non hanno che vedere con la flora xerofila della boscaglia dei terreni calcarei. Taluni di questi « bur » formati di liscia, scoscesa roccia, hanno più scarsa vegetazione; altri sono quasi completamente rivestiti; e la flora non è di tipo veramente xerofilo, poichè vi vegetano *Ficus* ed altre piante, solite a trovarsi in luoghi più umidi. Da notarsi è anche la relativa abbondanza delle Rubiacee, poichè, mentre queste rappresentano circa il 3.5 % delle piante raccolte in Somàlia, costituiscono invece il 15 % di quelle raccolte sui « bur » con 6 specie su 40 piante; e sui « bur » soltanto si trovano anche le due Felci trovate in Somalia, cioè la *Actiniopteris dichotoma* e la *Pellaea doniana*, che crescono quasi sulla nuda roccia.

In tutta quanta questa vasta regione a boscaglia si notano, qua e là, delle aree più o meno estese, in cui la vegetazione si presenta alquanto diversa dalla solita boscaglia xerofila, sia per un maggiore rigoglio di tutte le piante, sia per la presenza di altre che si trovano in luoghi abbastanza umidi e lungo i fiumi. Tali aree, simili a quelle che circondano i « bur » e alle quali ho già accennato, sono ad esempio intorno ai pozzi, presso i quali si trovano talvolta *Hyphaene* o *Ficus*; ed anche se non v'è alcun pozzo, la esistenza di una particolare condizione di umidità nel sottosuolo viene accusata dalla vegetazione.

Così, anche lungo corsi d'acqua temporanei, nonostante che questi siano asciutti per la maggior parte dell'anno, si notano spesso *Kigelia* e Euforbie a candelabro, che mancano invece nei terreni circostanti e nella vera boscaglia asciutta. Nella vasta regione del Baidoa si ha probabilmente una lunga striscia di terra in queste condizioni, nella quale si trovano *Ficus*, baobab e molte altre piante mancanti nelle altre parti, mentre tutta la vegetazione si manifesta più rigogliosa. Questa lunga striscia si continua poi nella valle del torrente Baidoa ove vegetano anche *Tamarindus*, *Acacia stenocarpa* e molti altri alberi comuni lungo i maggiori corsi d'acqua.

Dovunque poi il terreno sia maggiormente ricco di argilla, nelle piccole alluvioni e in vicinanza di stagni, abbondano le *Acacia seyal* var. *fistula* e le *Dichrostachys glomerata*. Ho già fatto diversi accenni ai baobab, alle Euforbie a candelabro, e a talune altre piante, come *Kigelia*, che vengono considerate come proprie delle steppe. Effettivamente nella nostra colonia esse sono presenti soltanto in luoghi non del tutto asciutti; i baobab (*Adansonia digitata*) si trovano frequenti intorno ai « bur », alla base delle dune stabili, nelle vallette fra le dune, dove la rigogliosa vegetazione accusa una certa umidità del sottosuolo, ma mai in luoghi aridi. Così le Euforbie a candelabro trovansi lungo l'ultimo tratto del corso del Giuba (*Euphorbia bilocularis*), a una certa distanza però dal fiume e sui terreni calcarei (*Euphorbia ruspolii*), ma sempre in vicinanza di pozzi (Àden Cabòba), e negli altipiani, alla base di spaccati dovuti all'erosione di torrenti.

Molto abbondante in colonia è l'*Euphorbia tirucalli* particolarmente lungo il basso corso del Giuba, nei terreni alluvionali del Baidoa, del Dafèt dello Scidle, intorno ai « bur » ed anche sopra ai « bur » come a Bur Eibi, ma non nelle formazioni addirittura xerofile; tutti i villaggi del Baidoa, del Dafèt dello Scidle sono circondati da veri sieponi di questa Euforbiacea arborea, che cresce abbondante anche fra le capanne, mentre ordinariamente una cinta più esterna è formata da una specie spinosa, la *Euphorbia breviarticulata*.

VIII. **Formazioni palustri.** — Queste formazioni non poterono essere esplorate, ma qualche pianta potè essere raccolta qua e là in piccoli stagni. Anche l'estensione delle paludi è molto incerta, per quanto ritenuta abbastanza vasta. La regione dei Balli, nella quale si perdono le acque dell'Uebi Scebèli e molte plaghe della Goscia, formanti un allineamento parallelo al corso del Guiba, sono considerate come paludose. Si tratta, in questo caso, di depressioni, nelle quali ristagna durante le pioggie l'acqua piovana, che non può raggiungere il fiume, perchè sopraelevato rispetto alla pianura alluvionale, o nelle quali l'acqua del fiume in piena e straripante va a fermarsi.

Per queste ragioni l'estensione deve essere assai variabile a seconda della stagione; e forse la zona, che rimane stabilmente paludosa, non è poi molto estesa.

Nei rerreni sabbioso-granitici, sul granito stesso alla base dei « bur », più raramente su suolo calcareo, si trovano degli stagni piccoli, quasi pozzanghere, in alcuni dei quali veramente l'acqua sembra trovarsi costante e che servono anche per abbeverare il bestiame; in essi si trova spesso la flora caratteristica degli stagni e paludi. Furono raccolte due specie di *Nymphaea* (*N. lotus* e *N. stellata*), *Kyllingia*, *Mariscus*, *Aponogeton*, *Burnatia* e *Wolffia*. Questi stagni sono poi generalmente contornati da *Dichrostachys glomerata* e *Acacia seyal* var. *fistula*, le quali, per quanto diffuse ovunque, sono però più abbondanti nei terreni argillosi, in vicinanza delle acque, diventando piante sempreverdi.

Conclusioni. — Da quanto è stato sopra brevemente esposto intorno alla vegetazione della Somàlia meridionale, si rileva come la più grande estensione sia occupata da formazioni steppose (duna mobile, duna stabile, terreni alluvionali asciutti e boscaglia xerofila), mentre quelle idrofile e igrofile (formazione a mangrovie, foresta a galleria, formazioni palustri) sono molto limitate; mancano però assolutamente le formazioni desertiche.

Nei terreni alluvionali asciutti si trovano le sciambe degli indigeni; ma in questi, e in quelli umidi coperti di foresta, grandi estensioni di terreno possono essere ancora ridotte a cultura: il bestiame non viene in generale tenuto dagli indigeni in queste regioni lungo i fiumi, perchè spesso infestate dalle mosche tse-tse o « ghindi » (*Glossina pallidipes* e *Gl. longipennis*), che gli trasmettono delle tripanosomiasi letali.

Tutta quanta la boscaglia xerofila però, mentre è inadatta a culture, fornisce alimento a un enorme quantità di dromedarii, bovini e ovini, vera ricchezza dei Somali, e che trovano ai pozzi o « el », in stagni o « uèl », in abbeverate lungo i fiumi o « hèle » [1], l'acqua necessaria.

Firenze, 28 gennaio 1916.

[1] La parola *abbeverata* non trovasi, a dir vero, nei vocabolari della lingua italiana; però è voce di uso corrente fra gl'italiani residenti in Colonia e ormai largamente usata anche da noi nella Relazione dei lavori della Missione e in altre pubblicazioni. Si dà questo nome a quei luoghi, nei quali il bestiame si abbevera, senza che vi sia alcun lavoro artificiale; si tratta dunque di cosa ben diversa dagli abbeveratoi. Le abbeverate lungo il Giuba sono in quei luoghi ove le rive, di solito scoscese, sono basse, così da permettere agli animali di raggiungere facilmente l'acqua e sono quelle che i somali chiamano « hèle » mentre il fiume è « uèbi »; spesso lo specchio d'acqua in cui il bestiame si abbevera è limitato al largo da una « zerìba » o folta siepe di rami spinosi per evitare le sorprese dei coccodrilli. Consimili abbeverate, senza zerìba, si trovano anche agli « uèl » che sono piccoli stagni, situati talvolta lungo qualche corso d'acqua temporaneo, o « bohòl ».

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali*
Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche*
Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI. Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche*
Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali*
Vol. I-XXV. (1892-1916). Fasc. 4°. Sem. 2°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche*
Vol. I-XXIV. (1892-1916). Fasc. 3-4.
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I-XI. Fasc. 10.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-XII. Vol. XIV. Vol. XV. Fasc. 1-3.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia è di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*
ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

MEMORIE DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

(Anno CCCXIII 1916)

Serie Quinta — Volume XI — Fascicolo XI.

ARTURO ISSEL

PRIME LINEE DI UN ORDINAMENTO SISTEMATICO

DELLE

PIETRE FIGURATE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1916

Smithsonian Ins
SEP 25 1924

Prime linee di un ordinamento sistematico delle pietre figurate.

Memoria del Socio ARTURO ISSEL

presentata nella seduta del 21 maggio 1916.

CONSIDERAZIONI PRELIMINARI.

Da una quarantina d'anni raccolgo io stesso pietre figurate, ogniqualvolta se ne presenti l'occasione, e non tralascio di procurarmene saggi mediante permute ed acquisti; cosicchè sono riuscito a formarne una collezione di oltre un migliaio di numeri, conservata nell'Istituto geologico affidato alle mie cure. Non ho omesso, inoltre, di corredare gli oggetti più notevoli delle indicazioni concernenti la giacitura, l'età geologica, la composizione e la struttura, e di far eseguire sezioni sottili degli esemplari atti all'indagine microscopica. Dallo studio di siffatto materiale, previa consultazione di copiosa bibliografia, ho desunto gli elementi di questa Memoria preliminare, aspettando l'opportunità ad usufruttarlo in una monografia di maggior mole.

Denomino pietre figurate quei corpi formati di materiali organici ed inorganici, suscettibili di presentare singoli individui o subindividui (1), e dotati di forme caratteristiche, i quali non obbediscono come i cristalli a leggi di simmetria ben definite; secondo il significato generalmente attribuito a questo vocabolo dai paleontologi, non sono fossili, ma spesso ricettano resti di animali e di piante, e talvolta, pur essendo affatto estranei ai corpi organici, imitano forme di frutti, semi e radici di piante, uova di uccelli o di pesci, visceri di mammiferi ecc. (2), e dagli antichi naturalisti furono spesso scambiati per petrefatti. Per i loro caratteri morfologici, per la struttura, per la natura mineralogica, per le relazioni che li connettono ai giacimenti in cui si trovano e agli oggetti cui sono associati, è possibile rintracciarne molte volte l'origine, e desumerne criterî per lo studio di fenomeni geologici ben degni d'attenzione e di studio.

(1) Una sferolite, una pisolite, una oetite costituiscono per me un individuo; una concrezione botrioidale, rappresenta invece un complesso di subindividui.

(2) Le forme loro furono dette perciò dal Bombicci e da altri autori imitative.

I nomi di arnioni, pagnotte, amigdale, lenti, oetiti, bambole, fantocci, sotto i quali gli autori sogliono menzionare alcuni di questi corpi in base alla forma loro, sono generalmente ambigui e inadeguati; meno indeterminate, ma adoperate con significato troppo generico, sono le denominazioni di stalattite, stalagmite, pisolite, oolite, colaticcio, ciottolo, ghiaia.

Mi propongo, innanzi tutto, di chiarire il concetto di pietre figurate, distinguendole da altre più o meno affini, di suddividere poscia il complesso in parecchi gruppi e sottogruppi geneticamente distinti, quantunque non sempre discernibili dal punto di vista morfologico, di assegnare ad alcuni una denominazione propria, e finalmente di circoscrivere il significato di varî termini in uso presso i geologi.

Premetto che, se parecchi dei vocaboli summentovati corrispondono a singole varietà degli oggetti considerati in questa Memoria, non ve ne ha alcuno che si possa legittimamente attribuire a tutti complessivamente, e però ho dato la preferenza all'espressione pietre figurate, di carattere generale e non pregiudicata da definizione impropria [1].

Nel modo stesso che i più autorevoli testi di litologia e di petrografia non ci forniscono criterî sicuri per la distinzione degli ordini, delle famiglie, dei generi, delle specie, che si vollero convenzionalmente istituire fra le rocce, così, fra le pietre figurate, non risultano minori i dubbî e le incertezze circa il valore e i limiti dei singoli gruppi. Sarebbe superfluo dimostrare come la natura stessa delle cose non consenta suddivisioni nette e recise. Mi reputerò fortunato se, come altri ha fatto per le rocce in genere, riuscirò a stabilire, almeno approssimativamente, i caratteri dei precipui gruppi, a proporre alcune nuove denominazioni e ad eliminare dalla terminologia qualche espressione ambigua. Questo tentativo di sistematica e di terminologia, oltre allo scopo di agevolar l'opera degli studiosi futuri, ha eziandio intento didattico, tende cioè a precisare il significato di certe espressioni adoperate nella scuola.

A rigor di termine potrei comprendere fra le pietre figurate i cristalli singoli, i geminati semplici e multipli, i gruppi di cristalli, ma reputo opportuno escluderli, perchè questi corpi obbediscono a leggi geometriche ben definite, a leggi peculiari, e formano oggetto, come ognun sa, di una disciplina autonoma, omai ben distinta, e che ha recato allo scibile ingente contributo di dottrine e di osservazioni.

Se menzionerò come pietre figurate sferoidi fibroso-raggiati di stilbite, di scolecite, di natrolite, di marcasite, di fosforite e d'altri minerali diversi, che pur manifestano l'azione di energiche forze cristallogeniche, lo farò avvertendo che il tipo morfologico nodulare consegue in questi corpi, non già dalla simmetria propria al sistema cristallino cui si riferiscono, ma ad un fenomeno molecolare speciale, indipendente dalla cristallizzazione, il quale si palesa infatti anche in seno a corpi amorfi, come sono gli aggregati di fossili microscopici dei noduli silicei.

Non intendo nemmeno invadere il campo della paleontologia, e, pur non trascurando di insistere sulla influenza esercitata dai corpi organici nella formazione di

[1] Con la voce concrezione può esser designato un certo numero di tipi derivati dalla solidificazione di corpi originariamente liquidi, ma non è lecito comprendervi quelli elaborati, ad esempio, dalla corrosione e dal logoramento che sono per me vere pietre figurate.

molti adunamenti nodulari, non mi occuperò, dal punto di vista morfologico, dei fossili più o meno conservati, modellati, o sostituiti.

Per circoscrivere il concetto convenzionale di pietre figurate, conforme al mio modo di vedere, e limitare il campo delle indagini che mi sono prefisso, tralascio di passare in rassegna quei corpi, i quali, come le incrostazioni, i rivestimenti, le concrezioni informi, gli intonachi, le vernici, le impronte fisiche, le rughe, le strie, i solchi, le soluzioni di continuità, le corrosioni, sono in gran parte strettamente affini alle pietre figurate, ma non costituiscono individui o subindividui propriamente detti. Essi accusano particolari fenomeni idrotermali, chimici, tectonici, meteorici, meccanici, vulcanici, glaciali, ed altri, che pur meritano di fissare la nostra attenzione, e di cui intendo occuparmi a suo tempo, istituendo per essi la rubrica delle stimate geologiche.

Debbo avvertire, fin d'ora, che alcune stimate, come ad esempio le incrostazioni e i rivestimenti, segnano l'iniziarsi di certe pietre figurate, alle quali sono perciò intimamente connesse dal punto di vista genetico, e sarà quindi necessario contemplarle, almeno per incidenza. allorchè si tratterà di spiegare l'origine e lo sviluppo dei gruppi cui si riferiscono.

Un ciottolo comune, dovuto alla fluitazione, è per me una pietra figurata, e così pure un ciottolo triquetro elaborato dall'attrito glaciale. Una rupe levigata dal moto ondoso, una sporgenza rocciosa striata o solcata da un ghiacciaio, porgeranno esempî di stimate. Le stalagmiti e le stalattiti, meglio ancora le pisoliti delle caverne, sono, secondo la terminologia adottata, pietre figurate, l'incrostazione che riveste la superficie di una rupe sopra la quale corrono acque calcarifere o altrimenti mineralizzate, sarà una stimata (1).

Senonchè, ove cessa di esistere la stimata e ove comincia la pietra figurata? Ognun vede che i due concetti adombrati in queste pagine, se appariscono in alcuni casi ben definiti, in altri sono collegati da innumerevoli termini di transizione, si compenetrano e si confondono; difetto comune a tutti gli ordinamenti, e che ci obbliga bene spesso a distinzioni arbitrarie e convenzionali. Ma simile imperfezione è tale da scemare, se si vuole, ma non da eliminare il valore didattico dell'ordinamento svolto in queste pagine.

Per render conto con maggior precisione del mio concetto, aggiungerò che le pietre figurate e le stimate costituiscono per me particolarità locali, proprie ad un punto determinato o ad un'area assai circoscritta, non caratteri del paesaggio o del terreno, senza escludere che la frequenza di certe pietre figurate o stimate possa concorrere ad impartire un aspetto speciale al paesaggio e al terreno.

Non ho mancato di occuparmi della sistematica delle stimate, tema assai arduo, per il quale fa d'uopo ricorrere a nozioni attinte a quasi tutti i rami della nostra disciplina. Senonchè, affine di non assumere un cómpito troppo esteso per le mie forze,

(1) Per chiarire il significato che attribuisco a questa espressione, aggiungerò che le stimate possono essere fisiologiche, come le ichniti, fisiche, come molte altre, fra le quali sono comprese tracce o segni abbandonati da fenomeni sismici, tectonici, eolici, meteorici, cosmici ecc., chimiche come le idrotermali ecc.

mi è parso opportuno di limitare per ora le mie considerazioni alle pietre figurate propriamente dette. Adottando questa espressione, non ho rinunziato a valermi di certe denominazioni bene spesso adoperate nella terminologia, ma stimo utile di precisarne il significato. Attribuisco il nome di nodulo alle pietre più o meno arrotondate in virtù di fenomeni estranei alla elaborazione meccanica; ciottoli e ghiaie sono invece corpi più o meno arrotondati o logorati dall'attrito provocato dalle acque in movimento o dai ghiacciai e solo in via molto subordinata elaborati da azione chimica o dissolvente. Intendo convenzionalmente per concrezioni tutti i corpi figurati liberi o aderenti, la cui formazione è dovuta a deposito chimico o a solidificazione di un liquido.

Nel novero dei 22 gruppi distinti fra le pietre figurate non ne registrai alcuno sotto la rubrica di oetiti, quantunque siano comunemente designati con tale denominazione noduli non rari, che ricettano un nucleo libero in una cavità, e perciò risuonano quando sieno scossi. L'omissione, conseguenza di proposito deliberato, è suggerita dall'aver accertata la caratteristica delle oetiti in concrezioni assolutamente diverse fra loro dal punto di vista genetico, e perciò riferibili a gruppi differenti: pseudo-morfoliti, ostracoliti, morfoliti, septarie; senonchè, se, in aluni casi, la formazione di un nucleo libero nell'interno della pietra si può spiegare agevolmente adducendo una diminuzione di volume, per prosciugamento o per disidratazione della stessa, in altri, invece, il fenomeno dipende da cause più complesse non ancora interpretate con sicurezza.

Lo studio al quale mi accingo vuol essere considerato come ramo assai circoscritto e modesto della geologia complementare. Esso non si propone, come la geogenesi, la dinamica interna ed esterna, la paleontologia, la tectonica, la geologia cronologica, di risolvere problemi di capitale importanza e d'ordine generale; tende piuttosto a chiarire certi dubbî, a correggere erronee interpretazioni, e si presta, in campi diversi, a far conoscere particolari fin qui trascurati. L'indagine da me appena iniziata, e che suggerisco ad altri più competenti di continuare, ha anche per oggetto di investigare l'origine e la formazione di certe forme e particolarità litologiche.

Comunquesia il lettore, non deve aspettarsi di trovare in queste pagine uno studio esauriente degli oggetti sui quali mi sono proposto di chiamare la sua attenzione; per tale compito, non me lo dissimulo, sarebbero necessarî energia, competenza e mezzi d'indagine assai maggiori di quelli di cui posso disporre. Si tratta di un tentativo di ordinamento, ed anche di una vena fin qui trascurata che credo utile additare agli studiosi.

Il mio ordinamento vien riassunto per sommi capi nella seguente rassegna dei gruppi e delle varietà principali di pietre figurate; ma non ignoro che permangono in questa rassegna parecchie lacune. Nell'esporre i caratteri di tali gruppi e varietà, mi sono studiato di dar preferenza ad esempî che potei esaminar di persona, e, quando era possibile, ad esempi di provenienza italiana.

CLASSIFICAZIONE.

I. — Sferoliti.

Alludo sotto questo nome ai noduli sferoidali o sferici, caratteristici di certe rocce ignee come la corsite, la variolite, l'aplite sferolitica, noduli che furono diligentemente descritti dai petrografi (¹) e dei quali sarebbe perciò superflua una nuova illustrazione.

Si tratta in ogni caso di aggregati microcristallini di silicati diversi, distribuiti in involucri concentrici, quasi sempre con struttura fibroso-raggiata. Per quanto mi consta, manca costantemente un nucleo centrale apprezzabile.

Gli sferoidi o sfere raggiungono di rado dimensioni cefalari e sono abitualmente assai più piccoli. Essi ebbero origine in virtù di un fenomeno di concentrazione elettiva in seno ad un magma igneo incandescente, nell'atto della sua solidificazione (²). Non si trovano isolati se non in conseguenza di sfacelo o di profonda alterazione della matrice.

Le varioliti forniscono istruttivi esempî di sferoliti di variabili dimensioni (passano dal volume di granuli microscopici a quello di grosse noci), nelle quali è presente in ogni caso un plagioclasio associato ad augite o ad altro pirosseno. Queste rocce fanno parte bene spesso delle formazioni ofiolitiche, e sono allora in intima connessione colle diabasi: assumono perciò speciale importanza per coloro che attendono allo studio della litologia appenninica. Le così dette varioliti della Durance sono reputate varietà sferolitiche di porfirite ad augite, ma ritengo che sarebbero opportune ulteriori indagini per accertare le relazioni loro colle rocce concomitanti (³).

Assai diverse da quelle delle varioliti sono le sferoliti della corsite delle vicinanze di Sartena in Corsica, le quali, pur presentando struttura ad involucri ben manifesta, risultano di anortite dominante e di orneblenda, questi abitualmente ridotti a fibre divergenti dal centro (⁴). La concentrazione elettiva verificatasi nelle sferette mentre si separavano dalla matrice è accusata dalle zone concentriche alternanti, alcune ricche, altre povere, di anfibolo. Fra i minerali accessorî è relativamente copioso il quarzo.

(¹) Fouquè e Levy, *Minéralogie micrographique*, Paris, 1879; Rosenbusch, *Mikroskopische Physiographie der Mineralien und Gesteine*, Stuttgart, 1887. D'Achiardi, *Guida al corso di litologia*, Pisa, 1889; Dana, *The system of mineralogy*, London, 1892; Rinne, *Ètude pratique des roches*, Paris, 1905.

(²) Non escludo che in via di eccezione piccole sferoliti abbiano potuto plasmarsi col concorso di acque mineralizzate a temperatura relativamente bassa.

(³) Rinne, *Ètude pratique des roches*, Paris, 1905.

Sono pure da consultarsi intorno a questa rocce: Cole G. A. J. e Gregory J. N., *The variolitic rocks of Mont Genèvre*, Quart. Journ. of Geol. Society, XLVI, London, 1890; Piolti G., *Contribuzioni allo studio della variolite del M. Gimont* (*alta valle di Susa*), Atti della R. Accad. Sc. di Torino, XXIX, Torino, 1894.

(⁴) Vogelsang, Sitzungsber. d. niederrhein. Ges., 1866, XIX, pag. 185.

Non mancano adunamenti analoghi anche in seno a rocce granitiche (¹).

Istruttivo esempio di sferolite in roccia granitica si ha nei noduli dell'aplite di Ghistorrai presso Fonni in Sardegna, segnalati da Lovisato. Si tratta di un aggregato ad ortoclasio assai dominante, a biotite e quarzo, in particelle assai minute, disposte in involucri concentrici (²).

Websky, a proposito della scoperta degli sferoidi granitici di Fonni, accennò a quelli di Wolfshau in Slesia, i quali consistono in una crosta sottile di mica radiata e di corindone. Essi misurano circa un piede di diametro, e sono contenuti in un filone di pegmatite che attraversa granitite.

Rose descrisse molti anni or sono sfere di granito rinvenuti in certi filoni di Schwarzbach e Kynst fra i Riesengebirge. Roth citò un caso consimile di Slätmossa.

Mentre le sferoliti normali sono cristalline, altre, che ascrivo alla sezione delle amorfe, risultano di materia vetrosa, e si dicono perliti; se ne conoscono numerosi esempî in Ungheria, in Francia, fra gli Euganei, nell'isola di Ponza, all'Ascensione ecc. Esse presentano segni di contrazione accusata da minute soluzioni di continuità (³).

Non comprendo fra le sferoliti propriamente dette i noduli di calcedonio o quarzo di certe rocce eruttive, perchè furono plasmate, se ben mi appongo, in matrici già passate allo stato solido e debbono considerarsi come produzioni secondarie.

Sono invece contemplate le così dette sferoliti a croce nera dei petrografi, le quali rappresentano a parer mio, una fase iniziale nella formazione delle sferoliti normali, e quelle denominate dal Cossa sferoidoliti, che io non saprei distinguere dalle prime (⁴).

II. — Morfoliti (⁵).

Sono questi noduli di concentrazione non generati come le sferoliti in seno ad un magma incandescente e fluido o pastoso, ma in una roccia concreta, che poteva essere molle e cedevole, perchè impregnata d'acqua, non però liquefatta, e a temperatura non molto alta. Esse rimasero isolate solamente quando intervenne la decomposizione o disintegrazione della stessa roccia. Molte morfoliti sono cristalline ed altre amorfe; le prime risultano bene spesso di fibre cristalline o cristalli prismatici im-

(¹) Alluaud, Bull. Soc. géol. de France, VII, 1850, pag. 297; Hatch F. H., *On the spheroid-bearing granite of Mullaghberg, Co. Donegal.*, Quart. Journ. Geol. Soc., august 1888.

(²) Lovisato D., *Sopra il granito a sferoidi di Ghistorrai* ecc., Rend. della R. Acc. dei Lincei, 6 dic. 1835 e 6 giugno 1886; Fouqué, *Sur les nodules de la granulite de Ghistorrai près Fonni en Sardaigne*, Bull. de la Soc. Minér. de France, tome X, pp. 57-63, 1887.

(³) Secondo Fouquè e Levy il perlitismo sarebbe dovuto alla formazione di minute fenditure in seno ad un magma vetroso, che passava per raffreddamento allo stato solido. Bonney aveva già espresso l'ipotesi che la struttura perlitica fosse conseguenza di contrazione.

(⁴) Siffatti adunamenti di cristalli prismatici microscopici furono osservati nella diorite quarzifera porfiroide di Cossato (*Ricerche chimiche e microscopiche in roccie e minerali d'Italia*, pag. 46, tav. IV. Torino, 1875-4880).

(⁵) Questa denominazione è adoperata da Abbot per noduli diasprigni dell' Egitto (*Concretions*, Sout-Eastern Naturalist, 1907, pag. 10).

perfetti, divergenti da un centro comune, o pure da un feltro di elementi lamellari. aggruppati parimente intorno ad un centro, e vi si manifestano potenti forze cristallogeniche che si esercitarono nell'atto della formazione dei noduli; in essi si svilupparono, inoltre, attrazioni elettive, in virtù delle quali si avvicinarono particelle dotate di analoga costituzione chimica. Potè variare fra un involucro e l'altro la composizione mineralogica dei componenti, pur presentando fra loro certe relazioni, ma si mantenne costante per ciascun involucro. Così si dànno arnioni di minerali ramiferi, con alternanze di calcocite, bornite e calcopirite.

Non mancano esempî di morfoliti, nei quali il centro è occupato da un corpo estraneo, che può essere un granello di sabbia. un ciottoletto, un cristallo. Se il corpo centrale fosse organico non si tratterebbe più di morfolite, ma di biolite; la distinzione, d'altronde, fa d'uopo avvertirlo, apparisce talvolta irrazionale, per il fatto che certi corpi organici, ridotti alla condizione di gusci calcarei o di scheletri silicei, si comportarono come materia minerale, e che in altri casi il nucleo organico originario subì tale alterazione da non lasciar più scorgere la forma e la struttura primitive.

A determinare la formazione degli oggetti pertinenti a questo gruppo intervenne qualche volta l'azione di acque mineralizzate, di fenomeni idrotermali od anche di emanazioni. In altre parole, essi conseguono, in certi casi, da speciali modalità di metaformismo; e sarebbe perciò opportuno di scindere in più gruppi questo complesso eterogeneo. D'altra parte, non vi è chi non veda la stretta affinità di alcune morfoliti con tipi d'altri gruppi, ad esempio di bioliti e di pseudomorfoliti.

Varietà principali:

a) Sferette fibroso-raggiate o formate da feltri, costituiti di elementi lamellari di silicati diversi, principalmente di zeoliti, od anche di aragonite, generate in losime di giacimenti matalliferi, tufi, rocce metamorfiche.

Certi noduletti riferibili a questa varietà risultano di involucri concentrici non aderenti fra loro, e perciò si possono considerare come oetiti, così alcune sferette di thomsonite raccolte a Casarza nella Liguria orientale (¹);

b) noduli ed ammassi macrocristallini di pirite, marcasite, galenite, barite ecc., concrezioni criptocristalline di calcocite, calcopirite, bornite, limonite, goethite, manganite ecc. (²). Alla medesima varietà sono forse da riferirsi i noduli di idrossido di manganese ferrifero, generati per deposito chimico nelle profondità marine;

c) adunamenti calcedoniosi ad involucri, noti sotto il nome di ciottoli d'Egitto (propongo di denominarli egiptoliti) e le oetiti che ne dipendono (Deserti libico ed arabico);

d) concrezioni di selenite, comuni nella regione dei soffioni boraciferi, ove segnano il punto d'emergenza di antichi getti di vapore ora esauriti (Volterrano);

(¹) Issel A., *Datolite e scolecite del terr. di Casarza* (*Liguria*), Boll. R. Com. geol., X, Roma, 1879; Riva Piera, *Thomsonite del terr. di Casarza ligure*, R. Ist. Lomb. di Sc. Lett., Rendiconto 25 giugno 1914.

(²) Certi noduli di fosforiti ad involucri fibroso-raggiati criptocristallini si possono considerare come morfoliti, ma derivano indubbiamente da bioliti i cui corpi organici subirono profonde alterazioni.

e) concrezioni di apatite ad involucri associati ai prodotti di fenomeni idrotermali siderolitici (Lalebanque nel Quercy);

f) lenti ed amigdale di gesso ceroide, originate per concentrazione in terreni marnosi contenenti solfato di calcio (Maremma Toscana).

Le varietà *a* e *b* dipendono essenzialmente dalle forze cristallogeniche e da affinità elettive e non mancano di analogia colle sferoliti; la var. *c* ripete in gran parte il tipo nodulare da acque mineralizzate e da una energica concentrazione; le var. *d* e *e* ebbero principalmente origine da fenomeni idrotermali, e si possono considerare come casi speciali di metamorfismo. La var. *f*, finalmente, accusa una intensa concentrazione ed affinità elettiva.

Ulteriori indagini avranno certamente per conseguenza l'aggiunta di altre varietà da riferirsi alle morfoliti; e non escludo che taluna di quelle passate in rassegna, in ispecie la var. *d*, non debba ascriversi a gruppi autonomi.

III. — Pseudomorfoliti.

Attribuisco questa nuova denominazione a numerosi corpi (gran parte dei quali menzionati dagli autori come concrezioni), i quali consistono normalmente in aggregati di granuli sabbiosi, pertinenti ad una o a più specie mineralogiche, o di particelle terrose, cementati da un materiale agglutinante, che può essere calcite, silice idrata, limonite, manganite, od altro sale, introdotto sotto forma di soluzione in un deposito sciolto o clastico, il quale adempie all'ufficio di matrice. La forma loro può essere semplice (prevalentemente sferoidale, lenticolare, ovoidale) o composta, vale a dire geminata, multipla, botrioidale ad elementi per lo più sferici, ma non mancano esempî di aggregati claviformi, pistilliformi, fungiformi, cilindroidi ecc. La struttura è ad involucri concentrici.

La forma nodulare consegue da un fenomeno di aggregazione intorno ad uno o più centri. Il centro corrisponde qualche volta ad un piccolo cristallo integro o frammentario; ma bene spesso non v'ha particella centrale apprezzabile. La grossezza o l'eterogeneità dei granuli o delle particelle aggregate, la scarsa copia del cemento ed altre circostanze che sfuggono all'osservazione, hanno per effetto il prodursi di corpi irregolari od anche di grumi informi, anzichè di noduli sferoidali, lenticolari o ellissoidali, quali sono nei casi tipici.

Esempî. Noduli del saldame, presso Pola e Dignano [1]; noduli di arena quarzosa del Buntsandstein dei pressi di Heidelberg; noduli di fosforite dei pressi di Frejus.

Parecchie le varietà, fra le quali:

a) le *imatraliti* (*Imatrastein* dei Tedeschi) della Finlandia, distinte da che l'aggregato presenta solchi e rilievi fra loro paralleli, corrispondenti ai piani di stratificazione della matrice. Un esempio istruttivo è dato dalle concrezioni argilloso-

(1) Si veda in proposito: Marchetti C., *Le concrezioni del saldame di Repentabor presso Trieste*, Atti del Museo Civ. di St. nat. di Trieste, IX, 1895.

calcaree di un deposito alluviale situato a mezzogiorno di Udine, procuratemi dal prof. Gortani, e un altro dalle lenti dell'argilla di Bognanco, illustrate dall' ingegnere S. Traverso (¹);

b) le bambole del Reno, concrezioni calcitiche, nelle quali sono impigliati materiali terrosi e sabbiosi in gran copia; assumono, come è noto, forme di sferoidi o di ellissoidi compenetrati, che ricordano rozzi fantocci. Caratteristici nel *loess* della valle del Reno;

c) certe concrezioni di Minhla in Birmania sono perfettamente sferiche e ricettano circa il 50 °/₀ di minuta sabbia quarzosa, saldamente cementata da idrossido di ferro. Sono destituite di nucleo centrale ed hanno struttura oscuramente concentrica;

d) oetiti limonitiche. Assumono la forma di cavità ovoidi, nell' interno delle quali si trova un nucleo mobile, che risuona quando la pietra sia scossa. Siffatta particolarità consegne talvolta da che si produsse entro una cavità di una roccia clastica un involucro limonitico, in cui furono acclusi come in una scatola ciottoletti pertinenti alla matrice. L' interpretazione da me proposta, non senza qualche perplessità, è fondata sull'esame di tre esemplari raccolti ad Ituzaingo, nell'alto Paranà, dal prof. Gaetano Rovereto.

I noti romboedri delle arenarie di Fontainebleau, i quali, quantunque dotati delle forme geometriche proprie alla calcite, ricettano proporzione ingente di sabbia silicea (perfino il 60 per 100), ci offrono un caso affine alle morfoliti riferibili alle var. *a* e *b*, senonchè la forma loro non è qui subordinata ad un fenomeno di concentrazione, ma invece alla forza cristallogenica, alla quale obbedisce la calcite; perciò non sono, a parer mio, pietre figurate, ma veri cristalli.

Nel giacimento di Salzlagenbusch, presso Heidelberg, contenuti in un giacimento arenaceo di Bundsandstein, si trovano termini intermedî fra gruppetti di cristalli scalenoedrici, nei quali la calcite impiglia gran copia di sabbia silicea, e veri noduli, in cui non v'ha più traccia di forma cristallina (²).

IV. — Ostracoliti.

Intendo alludere, con questo vocabolo, agli adunamenti nodulari cristallini od amorfi, che ebbero origine in seno a cavità preesistenti di rocce ignee o metamorfiche. Nella pluralità dei casi si accrebbero mediante involucri che si depositavano dalla periferia verso il centro, il quale potè rimaner vuoto (nelle così dette geodi), od essere occupato da un liquido. Si dà anche il caso di un vacuo, entro il quale permane un nucleo solido, come in certe oetiti, diverse da quelle che ebbi già occasione di ricordare. Non mi dissimulo come l'applicazione dei criterî distintivi adottati lasci adito a qualche dubbio, per il fatto che è difficile verificare se l'adunamento si sia prodotto in una cavità ben definita di una roccia già solidificata e raffreddata, o non piuttosto

(¹) Traverso S., *Forme lenticolari dell'argilla di Bognanco* (*Ossola*), Atti della Soc. Ligustica di Sc. nat. e geogr., IV, Genova, 1893.

(²) Ricevetti un certo numero di esemplari di tali concrezioni per il Museo geologico affidato alle mie cure, dal prof. D. W. Salomon di Heidelberg.

in seno ad un magma incandescente, come le sferoliti. In certe ostracoliti la struttura fibroso-raggiata rivela l'azione di forze cristallogeniche e di una concentrazione di materia, che si verificava con procedimento inverso rispetto all'accrescimento centripeto delle geodi. Segue l'enumerazione delle varietà più notevoli:

a) calcedonio ed altre varietà di silice in sferoidi, a struttura concentrica, adunati entro cavità ben circoscritte. Bene spesso permane un vacuo interno sulla cui parete sono impiantati cristalli di quarzo, in forma di prisma esagono terminato da piramide esagonale (il vertice della piramide è diretto verso il centro della cavità). Si tratta in altre parole di geodi; è noto come il quarzo appartenga d'ordinario alla varietà ametista;

b) a Salto nella valle del Rio Uruguay, entro piccole nicchie di una roccia basaltica, si trova un involucro di calcedonio bigio o azzurrastro, translucido, che ricetta una piccola quantità di liquido, residuo della soluzione che diede luogo originariamente al deposito calcedonioso (si tratta propriamente di ostracoliti enidre);

c) questa varietà comprende gli adunamenti cristallini fibroso-raggiati di stilbite, natrolite, analcime, cabasite, apofillite, armotoma, come pure di jalite, calcedonio e aragonite, propria alle amigdaloidi, ed anche gli aggregati cristallini calcitici delle spiliti. Le rocce ignee della Valle di Fassa, del Capo di Bove, delle Isole dei Ciclopi, forniscono esempî classici di simili ostracoliti;

d) costituiscono una quarta varietà i noduli selciosi e quarzosi ad involucri della piromeride, se pure, come a me pare, questi furono plasmati quando il magma che li accoglie aveva già raggiunto lo stato solido.

V. — Bioliti.

Si produssero in seno a depositi sedimentarî più o meno plastici, in virtù di un fenomeno molecolare, per il quale si accentrarono e si distribuirono, secondo un ordine determinato, particelle organiche od inorganiche, risultandone corpi nodulari di forma e composizione diversa secondo i casi, ma impigliati in una matrice. Agente precipuo di tale concentrazione fu l'affinità elettiva di certe particelle organiche ed inorganiche, per le altre di ugual natura sparse in un deposito. In certi casi, oltre a siffatta affinità, intervenne subordinatamente la forza cristallogenica.

Esiste in generale un centro d'attrazione che corrisponde ad un corpo organico; ma bene spesso, non si dà nel nodulo un centro ben definito, ed allora si adunarono in breve spazio corpi organici microscopici, come conchiglie, foraminifere, radiolarie, spicule di spugne, diatomee ecc. Non mancano eziandio concentrazioni, nelle quali intorno al corpo organico centrale macroscopico si riunirono anche numerosissimi fossili microscopici.

Avvenne costantemente, nei noduli di cui tengo discorso, che la materia del corpo organico centrale o quello dei corpuscoli sparsi nella matrice provocò, o favorì, decomponendosi, il fenomeno di concentrazione dal quale ebbe origine la pietra figurata, e determinò quei mutamenti chimico-molecolari che cementarono e resero saldo il complesso.

Quali precisamente sieno state le reazioni verificatesi fra la materia animale o vegetale che si decomponeva e i minerali del deposito ambiente, come e perchè si producesse contemporaneamente un movimento molecolare centripeto, non è dato spiegare se non in alcuni casi che saranno esaminati a suo tempo.

La forma del nodulo a fossile centrale è più o meno subordinata a quella del corpo organico incluso: pesce, crostaceo, conchiglia, echinoderma, cono di conifera, ecc.

La materia minerale si modellò più o meno completamente sul fossile, in modo da occultarne le sporgenze e le anfrattuosità e spesso lo compenetrò e lo sostituì per pseudomorfosi [1].

Intorno agli avanzi di pesci si formarono d'ordinario corpi ellissoidali assai depressi, in corrispondenza delle due facce laterali del fossile. I fusti, i rami, i rizzomi, le radici delle piante diedero origine a concrezioni cilindroidi, talvolta ramose.

Molte volte piccoli e tenui corpi organici provocarono la formazione di noduli o lenti od arnioni voluminosi e regolari. Raramente per fatto di grossi fossili risultarono adunamenti notevoli per dimensioni e regolarità.

Dall'esame di rocce salde (quelle che denominai picnogene), le quali si producono attualmente nelle depressioni oceaniche, emerge spontanea la certezza che le bioliti a fossili microscopici abbiano avuto origine abitualmente in seno alle acque marine. È ben sicuro che nei casi più frequenti anche la varietà a fossile centrale voluminoso, quando questo appartiene a specie marina, si formasse pure nelle stesse condizioni.

Da quanto precede risulta che possono distinguersi nel quinto gruppo le due varietà principali:

a) a fossile centrale più o meno voluminoso (fanerobioliti). Si osserva che questo è bene spesso convertito per pseudomorfosi in limonite, pirite, marcasite, ematite, calcite, siderite, silice, ecc.;

b) a fossili microscopici (criptobioliti); esse risultano di corpi organici assai numerosi, sparsi senza ordine, generalmente più fitti nella parte interna, ed anche nel centro, che non alla periferia, e vi sono associati materiali inorganici, come calcite, argilla, sottile sabbia silicea, minerali metallici, in proporzioni variabili.

Se ci facciamo ad esaminare un nodulo di concentrazione riferibile alla seconda varietà, osserviamo che vi si trovano adunati di preferenza organismi tenuissimi, silicei (come scheletri di radiolarie e spicule di spugne) o calcarei (come gusci di foraminifere), che alla concentrazione delle particelle silicee e calcari fu estranea la cristallizzazione e che risultò poco apprezzabile l'influenza della massa.

Esempî della prima sono i noduli ellittici e compressi, contenenti avanzi di *Amblypterus*, od anche carpoliti, rinvenuti nel deposito permiano di Sarrebrück. Molti altri, internamente occupati da un ramuscolo di *Walchia*, si raccolsero nella formazione carbonifera di Barnbley in Inghilterra. Sono comunissimi quelli formati intorno a brachiopodi e crinoidi nei sedimenti siluriani della Boemia.

[1] Ritengo che nei casi di pseudomorfosi intervenne generalmente l'azione di materiali disciolti, penetrati attraverso il nodulo incipiente fino a contatto del fossile.

I noduli, riferibili alla seconda varietà, i quali assumono qualche volta la forma di lenti, pagnotte, amigdale e raggiungono grandi dimensioni, sono rappresentati dagli adunamenti di piromaca sparsi nelle formazioni cretacee superiori della Francia settentrionale e delle Isole Britanniche. Son quelli denominati *chailles* nel Jura francese, *charveyrons* nel Lionese, *pierres a fusil* in altri territorî della Francia, *cherts* e *flint* in gran parte dell' Inghilterra, *pot-stones* nel Norfolk. In Italia ne porgono esempio i noduli selciosi di Cittiglio (nel Bergamasco), le cui radiolarie furono illustrate dal prof. F. Parona (¹), quelli selciosi di Cassagna (Liguria orientale), quelli a *Pullenia* delle vicinanze di Torriglia (²), gli adunamenti di calcare a Globigerina dei pressi di Varzi (nel Piacentino), i noduli di selce rossa della scaglia dei pressi di Teolo, fra gli Euganei, ricchissimi di radiolarie (³), i noduli selciosi cretacei, piriformi dei pressi di Vico Garganico, contenenti foraminifere, radiolarie, spicule di spongiari.

Si riferiscono alla stessa varietà parecchie sorta di fosforiti nodulari, ad esempio quelle della Tunisia meridionale (illustrate da Tempère) gremite di diatomee, quelle del Capo di Leuca, e del senoniano dei dintorni di Parigi, ricche di globigerine e d'altre foraminifere, quelle assai comuni nelle assise mesozoiche dell' Inghilterra che risultano di coproliti più o meno alterate e di detriti organici (⁴).

Il fatto che in certi fondi marini si formano anche attualmente aggregati essenzialmente costituiti di gusci di globigerine, assai ricchi di fosfato calcico, sparge qualche luce sulle condizioni nelle quali ebbero origine i noduli di fosforite contenenti organismi marini.

VI. — Pisoliti.

A differenza delle morfoliti, furono generate in seno ad un liquido, cioè ad una soluzione acquea più o meno mineralizzata, alla temperatura ordinaria od anche termale. Il deposito che diede loro origine si produsse per effetto di una reazione intervenuta in seno al liquido od anche in conseguenza della evaporazione, o di mutamenti nella temperatura del solvente, talvolta in virtu dell'azione fisiologica esercitata da microorganismi vegetali. La forma loro, più o meno regolarmente sferoidale, fu determinata da che la precipitazione si produsse in generale, nell'acqua in movimento, per lo più intorno a corpuscoli che partecipavano alla agitazione del liquido. Tali corpuscoli sono, secondo i casi, granelli di sabbia, conchiglie. uova d'insetti, batte-

(¹) C. F. Parona, *Radiolarie nei noduli selciosi del calcare giurese di Cittiglio presso Laveno*, Boll. della Soc. geol. ital., IX, fasc. I, Roma, 1890.

(²) A. Issel, *Dei noduli a radiolarie di Cassagna* ecc., Atti della Soc. Ligustica Sc. nat. geog., I, n. 1, Genova, 1890; id., *Torriglia e il suo territorio*, Boll. della Soc. geol. it., vol. XXV, fasc. I, Roma, 1906.

(³) Squinabol S., *Radiolarie fossili di Teolo* (*Euganei*), Mem. R. Acc. Sc. Lett. ed Arti di Padova, XIX, 1902; id., *Le radiolarie dei noduli selciosi nalla scaglia degli Euganei*, Riv. it. di Paleont., IX, fasc. IV, Bologna, 1903; id., *Radiolarie cretacee deqli Euganei*, Padova, 1904.

(⁴) Si dànno noduli di fosforite nei quali il fosfato calcico impregna il tessuto di spugne fossili.

riacee, frustoli di piante diverse. Le pisoliti propriamente dette (var. *a*) sono formate il più delle volte da involucri concentrici di calcite o di aragonite.

Conservo nella mia collezione esemplari dell'isola Meleda, del Covolo della Guerra presso Lumignano, della Grotta del Marmo di Ulossai (Sardegna) ecc.

Nelle acque calcarifere termali la produzione delle pisoliti si verifica più rapidamente e con maggiore intensità; così in quelle di S. Filippo in Toscana.

Si conoscono esempî non comuni di pisoliti di piccole dimensioni, generate in seno ad acque sottili lacustri (ad esempio nel lago di Utah) e marine (queste furono segnalate tra i frangenti delle isole Bahama).

Le pisoliti calcaree, a centro organico, si possono considerare come termini di transizione fra il tipo delle pisoliti propriamente dette e quello delle bioliti a fossile centrale; senonchè giova ricordare come alla formazione del primo sia necessaria l'acqua in movimento, condizione superflua nella genesi del secondo.

Ascrivo alla var. *b* i noduletti calcarei, biancastri, di forme svariate, per lo più dolicomorfi, ellissoidali o cilindrici, rinvenuti sul fondo di piccole pozze d'acqua limpida nella valle Secca, affluenti del Polcevera presso Valleregia.

In questi il prof. Ottone Penzig ebbe ad osservare che, quando la concrezione vien disciolta mediante un acido minerale, abbandona un residuo organico tenue e molle formato di fitti filamenti sottilissimi e incolori, ondulati (quasi crespi) fra loro aggrovigliati, che appartengono ad una specie di *Streptothrix*, filamenti ai quali si associano radi avanzi di *Oscillaria* (1).

Quasi sempre si trovano nell'interno dei noduletti i resti di un nucleo organico, cioè frustoli o brandelli di muschi o di capelvenere. Su questi probabilmente si sviluppò la vegetazione degli *Streptothrix*, che determinò la precipitazione del carbonato di calcio dall'acqua ricca di sali calcarei.

In altre concrezioni analoghe, riferibili alla medesima varietà, fu accertata la presenza di cianoficeacee diverse (*Schizothrix*, *Strigonema*, *Rivularia*, *Calotrix* ecc.) promotrici della precipitazione. In tutti questi casi ritengo che il movimento giratorio determinato dall'acqua non fosse necessario alla genesi dei noduli, come, d'altronde, si può desumere indirettamente dalla forma irregolare dei medesimi.

Nella var. *c* (sideropisoliti), ben distinta, non solo le pisoliti risultano di limonite o di altro sale di ferro, associato talvolta a manganese, costantemente depositato in virtù dell'azione fisiologica promossa da microorganismi, ma ancora la forma nodulare è indipendente dai movimenti dell'acqua.

Speciali batterî ferrigeni analoghi ai solfobatterî pertinenti al tipo *Beggiatoa*, sono capaci, come dimostrarono le osservazioni di Winogradsky (avvalorate poi dal Lieske), di convertire l'ossido di ferro diffuso nell'acqua in ossidulo e di fissarlo sulla propria guaina, quando ricetta cellule viventi (2). Insieme all'ossidulo di ferro sarebbe precipitato anche ossido di manganese. Una di queste forme, la *Leptothrix ochracea*, secondo il Molisch (3), pur esercitando la sua azione sopra l'ossidulo di ferro, richie-

(1) O. Penzig, *Sopra certe concrezioni di origine vegetale*, Atti della Soc. ital. per il Progresso delle Scienze, sesta riunione, Genova 1912, pag. 824, Roma, 1913.

(2) Winogradsky, *Beitrage zur Morphologie und Physiologie der Bacterien*, 1888.

(3) Molisch, *Die Tiefenbacterien*, Jena, 1910.

derebbe essenzialmente l'intervento del manganese per esercitare la propria attività. Lieske, il quale studiò principalmente le *Spyrophyllum tenue*, potè accertare che questa, non solo ha bisogno per vivere di sopraossidare l'ossidulo di ferro, ma gode eziandio della proprietà di assimilare l'anidride carbonica.

Altri organismi, come i funghi del genere *Citromyces*, hanno proprietà affatto diverse inquantochè sono suscettibili di ridurre, in seno alle acque, i sali ferrici in sali ferrosi; ma non risulta fin qui che questi vegetali intervengano nella formazione delle pisoliti ([1]).

In conclusione, le relazioni che intercedono tra i depositi solidi figurati e non figurati che si producono in natura in virtù dell'azione fisiologica dei microorganismi, apparisce assai varia e complessa, e non è ancora sufficientemente conosciuta, anche a causa delle straordinarie difficoltà tecniche da superarsi per investigarla.

Il prof. Artini ha segnalato, ad oriente di El Ellan in Somalia, numerose sferette, che presentano i caratteri esterni delle sideropisoliti, nell'interno delle quali si trova un nucleo di calcare cristallino bigio bruniccio; qualche volta vi ha nella parte centrale una piccola cavità, la cui parete è rivestita di calcite cristallina. Siffatti corpi accennano a termini intermedî fra le pisoliti normali e le limonitiche. Prima di attribuir loro un posto nella sistematica, sarebbe necessario investigare quale sia la loro origine e specialmente se si formano in seno ad acque minerali o entro una matrice. Non escludo che certi noduli iniziati in seno ad acque mineralizzate in movimento come pisoliti, abbiano acquistato maggiori dimensioni, accrescendosi per concentrazione in seno ad un mezzo plastico, come avvenne in generale delle morfoliti e pseudomorfoliti.

Le così dette ooliti non sono per me che pisoliti di minori dimensioni.

È noto come innumerevoli sferette, corrispondenti al volume delle prime o a quello delle seconde, quali calcitiche, quali ferruginose, si trovano insieme cementato in certe formazioni, risultandone le rocce dette pisolitiche ed oolitiche.

Si troveranno in nota alcune indicazioni bibliografiche ([2]).

VII. — Pseudopisoliti.

Fino a che io non riesca a procurarmi più precisi e completi particolari, intorno a due tipi poco noti di concrezioni, parmi opportuno di collocarli, almeno provvisoriamente, in un gruppo speciale sotto il nome di pseudopisoliti.

([1]) In ordine all'azione dei ferrobatteri si veda: Jost L., *Vorlesungen über Pflanzenphysiologie*, pag. 306, Jena, 1913.

([2]) Fournet J., *Détails au sujet de la formation des oolithes calcaires* etc., 1853. — Seeley H. G., *On the origin of oolithic texture limestone rocks*, Brit. Ass., Bath meeting, pag. 674, 1889. — Thielsen Dyes, Annales of Botany, vol. V, 1890-91, pag. 225. — Powel C., *Observations on some calcareous pebbles*, Minnesota botan. studies, ser. III, part. I, Minneapolis, 1893, pp. 75-78. — Murray G., Physiological Memoires, vol. I, 1895, pp. 74 79. — Meunier S., *Sur l'origine et le mode de formation du fer oolithique de la Lorraine*, Comptes Rendus Ac. des Sc., séance du 22 avril 1901. — Linck G., *Die Bildung des Oolithe und Rogensteine*, Neues Jahrb., XVI, 1903, pag. 495. — Levy M., *Formation des oolithes*, Compt. Rend. Ac. des Sc., séance du 7 février 1910. — Cayeux, *Les algues calcaires du groupe des Girvanella et la form. des oolithes*, Compt. Rend. Ac. des Sc., séance du 7 février 1910.

Uno dei due consiste in dischetti di pirite, che ricordano, per il loro aspetto, monete erose; ma sono tuttavolta aspre al tatto per la sporgenza di tenui elementi cristallini. Furono rinvenuti in piccole depressioni acquitrinose del terreno, alla superficie del ricco deposito fossilifero tortoniano di Sant'Agata (Alessandria). Secondo la mia interpretazione, si formarono, in virtù della reazione avvenuta fra l'acido solfidrico svolto in seno al liquido da residui organici in decomposizione e un sale di ferro (probabilmente un idrossido) introdotto in quelle pozze delle acque di dilavamento. Differiscono essenzialmente dalle pisoliti normali per la materia di cui risultano, e per la circostanza che ebbero origine in acque ferme. Dalle sideropisoliti si distinguono, sia per la composizione, sia per la forma.

Il secondo tipo di concrezione è dato da quei dischetti un po' concavi, a foggia di scodelline, e da certe specie di vasetti naturali conici od imbutiformi illustrati dal Bombicci, che li rinvenne alla Porretta e in altri punti del Bolognese, e ne diede la figura nel suo *Corso di Mineralogia* ([1]), ritenendo che fossero formati di aragonite. Panebianco mise in chiaro più tardi come uno di quelli oggetti risultasse di calcite ([2]). Dal canto mio, raccolsi, molti anni or sono, uno degli accennati dischetti presso Campiglia (prov. di Pisa), e ho potuto verificare, in base ai suoi caratteri ottici, che è propriamente aragonitico. Suppongo, senza poter addurre validi argomenti in soccorso della mia ipotesi, che gli uni e gli altri abbiano avuto origine per opera di acque mineralizzate, le quali si raccoglievano in piccole cavità del terreno, d'onde poco a poco si evadevano per meati aperti inferiormente ([3]). Di questo fenomeno ravviso le tracce nella forma delle concrezioni e nelle strie circolari, parallele al margine, di cui sono provviste.

Secondo ogni verosimiglianza, le scodelline e ciotole aragonitiche erano formate da acque termo-minerali.

VIII. — **Septarie.**

Queste sono propriamente pietre figurate per contrazione, diverse dalle precedenti perchè sono finite; vale a dire non aderiscono normalmente ad una matrice, come le basaltiti e le xeroliti. Dicendo che sono finite non intendo attribuir loro il carattere dell'isolamento; accluse da principio in una matrice, passarono qualche volta allo stato libero in conseguenza dello sfacelo della roccia madre, o pure per effetto della denudazione o del dilavamento. Esse risultano essenzialmente di materia pelitica, spesso impregnata e indurita da calcite cristallina o da altro minerale concreto, e furono iniziate, almeno nella pluralità dei casi, da un fenomeno di concentrazione, che diede luogo a zolle sferoidali, ellittiche, amigdalari o lenticolari. Intanto, diminuendo queste di volume per il prosciugamento e l'indurimento della materia plastica, furono attraversate da soluzioni di continuità, le quali passarono da parte a parte tutta la zolla, o pure si manifestarono solo nell'interno, propagan-

([1]) Ed. 2ª, vol. II, pag. 578, fig. 391, Bologna, 1875.
([2]) *Nota su di alcune concrezioni delle argille scagliose*, Padova, 1898.
([3]) Forse in alcuni casi il liquido assumeva un movimento vorticoso.

dosi dal centro alla periferia, la quale potè mantenersi integra. Nel primo caso, secrezioni formatesi posteriormente riempirono il vacuo e diedero origine a setti più o meno saldi; questi sono sporgenti quando, per effetto di alterazione dovuta agli agenti esterni od anche in seguito alla fluttuazione, rimase eliminato l'involucro periferico del nodulo.

Le varietà più notevoli di questo gruppo che ebbi agio di esaminare, sono qui appresso enumerate:

a) Noduli che presentano internamente soluzioni di continuità dirette dal centro alla periferia, a guisa di raggi, bene spesso associate ad altre orientate in varî sensi. Il complesso di fessure o crepacci che ne risulta divide in tanti poliedri irregolari la regione interna dell'adunamento. Si possono considerare come septarie incipienti.

b) Noduli nei quali le fenditure, dirette in varî sensi, incominciano alla periferia e si estendono verso il centro assottigliandosi, senza attraversare l'intera massa della septaria.

c) Noduli, nei quali i vacui, distribuiti come nella varietà precedente, sono occupati da un minerale concrezionato, cristallino, d'ordinario calcite, il quale sporge per lo più all'esterno, simulando strette legature. Se ne dànno di lenticolari, come una grossa septaria raccolta a Sassello e conservata nel museo di Genova, e più comunemente di ellissoidali, come parecchie rinvenute nel Vogherese e nei pressi di Varzi, le quali ricordano, per l'aspetto loro, salami od altre carni insaccate.

d) In una varietà assai rara la contrazione, verificatasi in seno ad una zolla marnosa, ebbe per conseguenza l'isolamento entro il nodulo di un nucleo libero, più o meno voluminoso, formato di materiali pelitici, risultandone una oetite diversa da quelle precedentemente menzionate. La raccolta del Museo di Genova ne possiede un esemplare di cui è ignota la provenienza.

Fa d'uopo segnalare il caso di noduli, nei quali lo stesso oggetto presenta ad un tempo i caratteri di biolite e quelli di septaria: tale è quello di certe concrezioni fosforitiche dei pressi di Frejus in Provenza. Non mi dissimulo l'incertezza che ne risulta nell'applicare i criterî dell'ordinamento proposto; d'altra parte, non mi parrebbe legittimo eliminare il gruppo delle septarie per distribuirne i componenti tra le pseudomorfoliti e le bioliti. Conviene dunque rassegnarsi ai difetti e alle incongruenze inevitabili, nel classificare oggetti che non costituiscono vere unità specifiche e sono dovuti alla concomitanza di fenomeni diversi.

IX. — **Stalattiti.**

Le stalattiti sono pietre figurate, di forma normalmente conoide, aderenti per la base ad una superficie rocciosa e libere nel rimanente. Mentre assumono struttura macro o microcristallina nelle varietà calcitiche e aragonitiche, appariscono criptocristalline nelle limonitiche e nelle calcedoniose. Si dànno, d'altronde, tutte le possibili condizioni intermedie fra le stalattiti cristalline calcitiche normali e le druse di calcite a cristalli ben definiti.

Per render conto in modo adeguato di quanto concerne la morfologia e il modo di formazione di queste pietre, sarebbe necessario un intero volume. Qui sono sufficienti, pei fini che mi sono proposti, poche e brevi nozioni generali, intese a lumeggiare il posto loro assegnato.

Una stalattite calcitica pertinente al tipo comune nelle nostre caverne, consegue, come ognun sa, dalla precipitazione di un sale di calcio, per opera di una soluzione molto diluita, che stilla da tenui meati, precipitazione provocata da decomposizione chimica di detto sale (bicarbonato di calcio) e da evaporazione del solvente; essa subisce l'influenza delle condizioni termiche, delle correnti aerêe ecc. Nei casi normali (var. *a*), cresce dall'alto al basso per aggiunta di materia alla sua estremità, ed aumenta nella spessezza mediante successivi involucri; inoltre, mentre da principio era tubiforme, si rende poco a poco impervia. Intanto il suo assetto cristallino originario, determinato generalmente in principio dall'associazione di minutissimi romboedri compenetrati, si muta in una struttura fibroso-raggiata, intorno all'asse della concrezione.

Non fa d'uopo avvertire come, mercè un fenomeno analogo, si genera da ogni stillicidio calcarifero che cade sul suolo di una cavità sotterranea, una concrezione somigliante, la quale cresce invece dal basso all'alto, e dicesi stalagmite (var. *b*). Congiungendosi ad una stalattite sovrapposta, essa dà origine ad una colonna, d'ordinario dilatata alle due estremità; mentre, se l'acqua mineralizzata scorre in falda più o meno sottile, lungo una parete verticale o leggermente inclinata, ne risultano panneggiamenti lapidei, che assumono disposizioni svariatissime secondo le particolarità della superficie rocciosa, le condizioni dell'ambiente, la natura del liquido incrostante ecc.

Le concrezioni stalattitiche e stalagmitiche a base di calcite sono talmente comuni nelle caverne scavate nelle formazioni calcaree, in ogni parte del mondo, che sarebbe superfluo lo addurre esempî. Dirò piuttosto che si conoscono concrezioni simiglianti (pur prodotte da deposito chimico e dalla evaporazione, od anche dal raffreddamento di acque mineralizzate), costituite di aragonite, limonite, goethite, siderite, manganite, calamina, smithsomite, calcedonio. Esse sono molto frequenti e, in tesi generale, meno voluminose delle calcitiche; la genesi loro meriterebbe di essere studiata caso per caso, senonchè sarebbe qui inopportuna un'analisi minuziosa e particolareggiata.

La bibliografia delle stalattiti, straordinariamente ricca in quanto concerne la parte descrittiva, è invece piuttosto deficiente in ordine alla teoria. Debbo tuttavolta segnalare in proposito una Memoria di Prinz [1], nella quale si trovano sagaci osservazioni sulla genesi di questi corpi e sulle circostanze per le quali assumono forme abberranti. Occupandosi delle stalattiti tubulari del Belgio, questo scienziato dimostrò come sono iniziate il più delle volte da pile di romboedri, suscettibili di unirsi secondo leggi diverse. La direzione loro è in certi casi subordinata all'asse principale, in altri a coppie di spigoli di un dato romboedro, e può mutare parecchie

[1] Prinz W., *Les cristallisations des grottes de Belgique*, Nouv. Mém. de la Soc. Belge de Géol. Paléont. Hydrol., Bruxelles, 1908.

volte nella medesima concrezione. Ulteriori modalità morfologiche, meno frequenti, derivano dalla associazione di romboedri a scalenoedri e a prismi diversi. I fenomeni subordinati alla ostruzione dei tubi stalattitici e alla formazione di nuovi orifizî che servono di uscita alle acque incrostanti dánno origine ad appendici, rami, innesti, dai quali viene alterato il tipo morfologico originario. Le disposizioni più capricciose conseguono inoltre da correnti aeree, squilibrî di temperatura, fasi di straordinaria piovosità e di siccità eccezionale nel territorio in cui si formano, d'onde mutamenti nella copia e nella natura dei stillicidî.

Prinz segnalò nelle stalattiti di alcune caverne del Belgio casi di vere geodi, tappezzate di cristalli determinabili, ed anche esempî di geodi enidre, accludenti, cioè, una piccola quantità del liquido generatore della concrezione.

D'altronde, fa d'uopo avvertire che, fra le stalattiti e le stalagmiti propriamente dette, da un lato, e le cristallizzazioni o druse dall'altro, si dànno tutti i gradi intermedii possibili. Una bella serie di esemplari, nei quali le transizioni appariscono ad ogni occhio veggente, fu donata al Museo geologico di Genova dal prof. O. Penzig, che la ricevette da una caverna non altrimenti determinata dell'arcipelago greco.

È certo che in alcune cavità sotterranee si formano delle conche stalagmitiche, occupate da acque calcarifere, che adempiono all'ufficio di veri bacini di cristallizzazione, nei quali lentamente e tranquillamente si plasmano nitidi poliedri di calcite; così ad Engihoul nel Belgio. Non è il caso di ricordare in queste pagine i simboli delle forme che hanno origine col mutarsi delle condizioni nelle quali si effettua la cristallizzazione.

La struttura fibrosa (con fibre perpendicolari all'asse), associata a quella ad involucri, sostituisce abitualmente, con lo svilupparsi della concrezione, la compage originaria.

Le correnti d'aria non solo determinano lo sviluppo asimmetrico delle concrezioni, ma anche talvolta la spezzatura di quelle che sono più sottili e fragili. Una bacchetta infranta, a frammenti spostati, continua a crescere e provoca bizzarre anomalie nell'architettura tanto complicata degli edifizî sotterranei.

Svariate singolarità dipendono dalla instabilità del suolo delle grotte nelle quali si formano le concrezioni, instabilità dovuta ad oscillazioni sismiche o a fenomeni tectonici.

Oltre al Prinz, M. P. Merril si occupò delle stalattiti, investigando l'origine di quelle da lui osservate in caverne americane. Barny e Holroyd segnalarono esempî di torsione nella Blue-John-Mine a Castleton in Inghilterra. G. Fritsch fece conoscere le concrezioni filamentose della grotta di Jenolau in Australia (1), e pregevoli contributi alle indagini di cui tengo discorso furono recati da Brezina in uno studio sulle stalattiti della Carniola (2).

(1) *Die Tropfsteinhöhlen von Jenolau in Neu-Sudwales. Die Woche*, n. 50, 1906.
(2) *Wie wachsen die Steine*, Wien, 1890.

X. — Pseudostalattiti.

I liquidi, i quali, mentre cadono sotto forma di filamenti o di stille, si solidificano per raffreddamento, dànno origine a formazioni irregolarmeute coniche, aderenti per la base, che crescono d'ordinario dall'alto al basso analogamente alle stalattiti. Sono ghiaccio a struttura criptocristallina nei così detti ghiacciuoli. Sono vetri nei colaticci di certe lave assai scorrevoli.

Ognun sa che in virtù di un fenomeno analogo a quello che dà origine alle stalagmiti si producono anche ghiacciuoli e colaticci, che crescono dal basso all'alto. Particelle d'acqua animate in seno all'atmosfera da rapido movimento (subordinatamente a fenomeni di attrazione e repulsione elettrica), mentre la temperatura raggiunge il grado della congelazione, o è inferiore a questo, costituiscono chicchi di grandine o di galaverna, più o meno cristallini, i quali si possono legittimamente considerare come noduli isolati, analoghi alle pisoliti; perciò volendo applicare i criterî del mio ordinamento anche all'acqua, si dovrebbe istituire un gruppo speciale anche per i chicchi d'acqua congelata. La differenza fra stalattiti e pisoliti, da una parte, pseudostalattiti, grandine (ed anche galaverna) dall'altra, consiste in ciò che nelle prime il deposito si effettua in tesi generale per fatto di una reazione chimica (solo sussidiariamente per modificazioni nelle condizioni fisiche del solvente), mentre nelle seconde è esclusivamente conseguenza di fenomeni fisici, verificatisi nell'atmosfera.

Si dànno nella grandine, come nelle pisoliti normali, forme di sfera, di sferoidi più o meno depressi od incavati ai poli, di emisferi, di ovoidi, di lenti, di conoidi ecc. Rispetto alla struttura, sono comuni i noduli di ghiaccio fibroso-raggiati, quelli a strati concentrici alternativamente opachi, cioè nevosi, e trasparenti, altri che sembrano risultare dalla saldatura di più spicchi, od anche di frammenti cementati, e non mancano aggregati più o meno regolari di cristalli; si citano, fra gli altri, serie di cristalli romboedrici saldati fra loro mediante i vertici. Inoltre si osservarono sferoidi schiacciati, dai quali sporgono angoli solidi, ed altri emisferici coperti di aghi cristallini in parte della loro superficie.

La grandine risulta qualche volta di corpuscoli di ghiaccio torbido che presentano canaletti aerei normali alla superficie. È questa la varietà denominata *galaverna* nell'Alta Italia, *vernasca*, *brucello*, *solvetro* in Toscana, *verglas* in Francia, varietà che si crede dovuta all'agghiacciamento di goccioline di pioggia, nell'atto in cui attraversano l'atmosfera.

Rispetto alle dimensioni, giova ricordare come, fra i casi di grandine in granuli assai minuti e quelli rarissimi di chicchi pugillari e perfino cefalari, si citano tutti i casi intermedî.

Fra la grandine propriamente detta e la neve (aggregato di cristallini a simmetria esagonale), un termine di transizione costituisce il nevischio o neve granulare (*gresil* dei Francesi). La formazione della grandine diede luogo a numerose osservazioni ed ipotesi, che costituiscono un capitolo attraente della meteorologia e che ap-

punto per ciò non possono essere contemplate in uno scritto esclusivamente dedicato alle discipline geologiche.

Secondo indagini del Futterer, i colaticci di ghiaccio presentano una struttura analoga a quella delle vere stalattiti, ma meno manifesta; vi si osservano infatti assetto raggiato, attorno a un asse verticale, di elementi cristallini con orientazioni varie, e inclusioni aeriformi che accusano la disposizione ad involucri concentrici propria alle concrezioni coniche pendenti dalle vôlte delle cavità sotterranee. Si tratta essenzialmente di adunamenti di ghiaccio, che vanno crescendo dall'asse verso la periferia e dall'alto al basso, nei colaticci discendenti, la qual cosa avviene di ogni sostanza fluida o vischiosa, come vetro o stearina liquefatti, quando, cadendo, sotto forma di filamenti liquidi o di stille, passa allo stato solido. Le forze cristallogeniche non esercitano che lieve azione sul fenomeno, nè modificano in modo apprezzabile la forma dei solidi che ne risultano. Si può spiegare in modo analogo la formazione dei colaticci ascendenti, direi quasi, per analogia, stalagmitici, senonchè si accrescono dal basso all'alto.

Gli ingrossamenti o cercini dei colaticci dipendono senza dubbio da che in certi momenti l'abbassamento della temperatura determinò la rapida solidificazione di veli acquei superficiali in alcuni tratti, facendo ostacolo alla discesa del liquido e quindi al regolare accrescimento del cono nei tratti sottostanti.

Così avviene anche delle stalattiti propriamente dette, sulle quali le condizioni dell'ambiente e della soluzione, variabili tra un dato periodo di tempo e l'altro, e fra un tratto e l'altro della concrezione, determinano più rapido e copioso deposito di materia minerale in alcuni punti, colla formazione di rilievi irregolari, mammelloni, costole, nodi ecc.

Le lave vetrose del Kilauea, che, subordinatamente alla propria fusibilità e all'alta temperatura raggiunta, si trovarono nella condizione di un fluido più o meno scorrevole, versandosi dall'orlo del cratere ai livelli sottostanti, o stillando tra le rupi di magma già concreto, in guisa da alimentare cascatelle ignee, acquistarono per raffreddamento consistenza sempre maggiore, finchè, rapprendendosi, si foggiarono in colaticci conici o cilindroidi, simili nella forma a stalattiti, colaticci nei quali è facile verificare l'accrescimento e l'allungamento avvenuti per sovrapposizione di nuovi strati (1).

Le pseudostalattiti del Kilauea sono essenzialmente costituite di materia vetrosa nerastra, che ricetta microliti di natura diversa e suol essere coperta di efflorescenze cristalline. D'ordinario risultano di tubi assai irregolari e bitorzoluti, per il fatto che muta da un tratto all'altro la direzione, ed offrono numerosi rigonfiamenti e strozzature. La tessitura loro è quella propria alle scorie.

La cognizione delle bizzarre forme di solidificazione assunte dalle lave vetrose è già assai antica; si deve a E. S. Dana l'illustrazione di colaticci simili a stalattiti e stalagmiti osservati in una galleria naturale formatasi nelle vicinanze di Hilo entro una colata, e d'altri cui diedero origine le lave del Kilauea. Si tratta di magma

(1) In modo analogo l'acqua, che trabocca e cade in falde o cascatelle da un recipiente o stilla da crepacci e da fessure, si foggia per congelamento in ghiacciuoli.

eminentemente vetroso che risulta dai consueti minerali del basalte, escluso il peridoto; vi si notano localmente minuti cristalli tabulari di labradorite con augite e magnetite dentritica.

Esempî caratteristici di tali colaticci sono dati in parecchie figure del *Manual of geology* di J. D. Dana (fourth edition) alla pag. 294. Altri non meno istruttivi, come pure sezioni microscopiche delle rocce di cui risultano, sono assai ben rappresentati in una serie di tavole a corredo di una recente Memoria di I. Friedländer, intitolata: *Ueber die Kleinformen der vulcanischen Produkte* (1).

XI. — Pelagositi.

Sotto il nome di pelagosite fu descritto fin dal 1877, se non sono in errore, un minerale bruno o nerastro, dotato di lucentezza vitrea, che assume bene spesso l'aspetto di gocce di catrame, e costituisce come un intonaco o una incrostazione, alla superficie di rupi calcaree al battente del mare, cioè poco al disotto o al disopra del livello medio. Osservato primamente nell'isola di Pelagosa, questo minerale fu rinvenuto nell'isola d'Elba, in Corsica, fra Antibo e Nizza, al Capo d'Aglio, in Algeria, nell'isola della Riunione. Lo raccolsi io stesso in copia nell'isolotto di Bergeggi, attorno al promontorio di Portofino, a Sturla e lungo le rive dell'isolotto Gallinaria. È notevole il fatto che, mentre in Liguria si trova principalmente sul calcare dolomitico mediotriassico e sul calcare marnoso eocenico, come pure sui cogoli calcarei e quarzosi di un conglomerato oligocenico, all'Elba e in Corsica riveste rocce feldispatiche e alla Riunione lave basaltiche. Si tratta adunque di una produzione indipendente dalla superficie rocciosa alla quale aderisce.

L'analisi chimica della pelagosite di qualsiasi provenienza dimostra che essa è costantemente costituita di carbonato di calcio impuro, e dai suoi caratteri ottici si inferisce che risulta di calcite a struttura minutamente cristallina.

La natura e le proporzioni delle sostanze estranee variano assai tra i diversi esemplari, secondo la roccia alla quale aderiva l'incrostazione o l'intonaco, ma non manca mai la materia organica.

Lungo le rive di conglomerato prossime al porto di Portofino, e entro il medesimo, la pelagosite costituisce una zona di intonaco nerastro che misura circa un metro sul livello medio del mare, nei tratti situati a ridosso, e presso a poco il doppio in quelli più esposti all'impeto delle onde.

Ebbi ad osservare in molti punti che la stessa zona è rappresentata da alghe originariamente verdi, che dànno origine colla propria alterazione, quando hanno cessato di vivere, ad un intonaco nerastro carbonioso, non lucido. Al microscopio si può osservare che entro al tessuto cellulare della pianta, ridotto alla condizione di maglia nera, si deposita la pelagosite incipiente, sotto forma di calcite minutamente cristallina, la quale trae la propria tinta scura dalla materia carboniosa derivata dalle alghe decomposte.

(1) Friedländer I., *Ueber die Kleinformen der vulkanischen Produkte*, Zeitschr. für Vulkanologie, I, tav. LXIII, LXIV, LXV, LXVI.

In breve, la formazione del minerale sarebbe iniziata dalla decomposizione della pianta e si continuerebbe poi nella guisa dei consueti depositi chimici.

I cenni fin qui esposti si riferiscono ad una varietà di stimate piuttostochè di pietra figurata; ma fra gli esemplari di pelagosite conservati nella raccolta del Museo di Genova, ve ne ha uno, cui quadra invece quest'ultima denominazione, perciocchè costituisce piccole concrezioni ovoidali o lenticolari, aderenti, paragonabili a certe stalagmiti che assurgono da suolo melmoso. Hanno circa 3 mm. di diametro e sono bigie, con una zona traente al bruno nella parte che aderisce alla roccia.

Reco in nota alcune indicazioni bibliografiche relative alla pelagosite (1).

XII. — Microcondriti (2).

Accenno sotto questo nome alle sferette nere di magnetite, più o meno nichelifera, e d'altri minerali che cadono spesso sulla terra dagli spazî celesti, e si raccolgono sui nevai e sulla neve fresca, ove è facile distinguerle. Se ne dànno anche di microscopiche, le quali si possono rintracciare facilmente esaminando con sufficiente ingrandimento i residui solidi ottenuti dalla fusione delle nevi. Questi corpuscoli si trovano pure nelle melme oceaniche delle maggiori profondità, specialmente nella così detta argilla rossa del Pacifico. I naturalisti che illustrarono i saggi di fondo riportati dalla spedizione talassografica del *Challenger* avvertono che le sferette attirabili dalla calamita dei sedimenti abissali sono generalmente coperte da una tenue vernice vitrea, e presentano qualche volta piccole depressioni copelliformi. Bene spesso ricettano un nucleo di ferro metallico. Altri corpuscoli sferici o sferoidali, di color giallo traente al bruno e con splendore bronzino, risultano di silicati anzichè di ossido di ferro.

Nelle sezioni microscopiche di rocce clastiche si osservano qualche volta corpuscoli di origine cosmica, cioè sferette opache e nere attirabili dalla calamita analoghe a quelle segnalate sulla neve fresca. Per conto mio ricordo di averne vedute nelle marne plioceniche della Piazza De Ferrari in Genova e nel calcare marnoso sopraeocenico dei pressi di Torriglia. Si citano, dagli autori, simili ritrovamenti verificatisi

(1) Stossich, Boll. della Soc. Adriatica di Sc. nat., III, pag. 529, Trieste, 1877; Biasoletto e Vierthaler, Ibidem, IV, pag. 134; Marchesetti C., Ibidem, V, 2ª parte, pag. 283, e VII, fasc. I, 1882; Moser e Tschermak, Min. und Petrogr. Mitth., I, pag. 174, Wien, 1878; Descloiseaux, Bull. de la Soc. Géol. de France, VI, pag. 86, Paris, 1778; Frenzel, Jahrb. f. Min., 1878, pag. 733; De Lapparent. *Traité de Géologie*, 3e ed., Ie partie, pag. 325, Paris, 1893; Issel e Traverso, *Nota sul lit. fra Vado e Spotorno*, Atti della Soc. Ligust. di Sc. nat. e geogr, VI, Genova, 1895; Issel, *L'evol. delle rive marine in Liguria*, Boll. della Soc. Geog. Ital., 1911, fasc. IX, X, XI, XII.

(2) Si vedano in proposito le opere o Memorie qui appresso enumerate:

Wyville Thomson, *The voyage of the Challenger*. London, 1877; Murray e Renard, *Notice sur la classification, le mode de formation et la distribution géographique des sédiments de mer profonde*, Bull. du Musée d'Hist. nat. de Belgique, III, Bruxelles, 1884; Murray e Renard, *The Nature*, n. 755, London, 17 april 1884; Bonizzi P., *Osservazioni microscopiche sulle polveri dell'aria*, Roma, 1885; Issel A., *Note geologiche sugli alti fondi marini*. Bull. de la Société Belge de Géol., de Paléont. et d'Hydrol., II, Bruxelles, 1888.

nei materiali estratti dal pozzo di Grenelle presso Parigi e dalle terebrazioni del suolo di Modena, come pure in depositi mesozoici e paleozoici (¹).

Conviene avvertire che corpuscoli strettamente affini ai precitati e del pari attirabili dalla calamita, si trovano commisti, nei luoghi abitati, ai pulviscoli atmosferici, perchè ripetono la propria origine dalla combustione del carbon fossile e dai camini delle officine metallurgiche.

XIII. — Folgoriti (²).

È noto come nei punti in cui si produce una scarica elettrica si manifesta una temperatura altissima, suscettibile di produrre la fusione e la volatizzazione di certi corpi. Perciò le rocce colpite dal fulmine sono spesso coperte di un intonaco di vetro o smalto, talvolta anche scoriaceo o bolloso, dovuto alla fusione superficiale della roccia. Sono queste vere stimate piuttostochè pietre figurate, e si osservano di preferenza sulle rocce granitiche, dioritiche, diabasiche, anfiboliche, pirosseniche, come pure sulle lave in genere, sugli gneiss e gli scisti cristallini.

Le alte vette più esposte alle bufere e frequentemente visitate dal fulmine, quelle ad esempio del Monviso, del Cervino, del Monte Bianco in ispecie il Dôme du Gouter, ed alcune dei Pirenei, fra le altre il Pic du Midi, ci offrono numerose tracce del fenomeno.

Se i punti colpiti risultano di rocce poco consistenti o meglio di materiali sciolti, come detriti di falda o sabbie, si formano, oltre alle aree più o meno profondamente vetrificate, tubi irregolari, tortuosi, talvolta diramati, che penetrano assai addentro nella massa rocciosa, e segnano il percorso della meteora. Questi, suscettibili di essere raccolti e studiati, sono per me pietre figurate, e meritano di essere citati nella mia rassegna.

I tubi di cui si tratta sono verticali od obliqui, più o meno allungati (si protraggono talvolta per oltre una diecina di metri), di diametro disuguale, non superiore, al'esterno, di 5 centimetri (generalmente assai minore), a pareti che misurano da mezzo millimetro a più di due centimetri e mezzo di spessezza, e si dividono bene spesso in più rami o ramuscoli, a terminazione conica. Essi sono formati di vetro diafano, lucido ed opalino, od anche granoso, subopaco, e come incrostato esternamente di materia vitrea; colore d'ordinario traente al giallastro, che scomparisce coll'immersione nell'acido cloridico. È notevole la fragilità e tenue consistenza loro, per modo che raramente si riesce ad estrarli integri; inoltre vanno soggetti, col tempo, a disaggregarsi spontaneamente.

Segnalati fin da tempo remoto (dal pastore Hermann nel 1711 e dall'Hensel nel 1805), F. Arago fu il primo ad investigarne con diligenza l'origine e a farne conoscere i caratteri (³). Se ne conoscono esemplari raccolti in ogni paese ed osservati sopra rocce di specie svariatissime.

(¹) Meunier e Tissandier, Comptes Rendus Ac. Sc., 1878, pag. 450; Murray e Renard, *Report on deep-sea deposits*, pag. 334, London, 1891.

(²) Furono dette anche *astrapaliti* o tubi *fulminari*.

(³) Arago F., *Oeuvres complètes publiées par J. A. Barral*, IV, Paris, 1854,

J. Dana accenna a folgoriti osservate negli Stati Uniti d'America, presso Pensacola, le quali consistono in tubi di vetro chiaro, lunghi due piedi, quasi esenti di granuli di quarzo; furono descritti da Diller nel 1884 ([1]). Rutley fece conoscere, nel 1889 solchi capricciosamente prodotti dalla folgore e coperti di un rivestimento vetroso sopra lo scisto a glaucofane del Monviso. Diller rinvenne sul monte Thielson nell'Oregon (Columbia meridionale) tubi interamente vestiti da un intonaco vetroso, praticati dal fulmine nel basalto; misurano pochi centimetri di lunghezza. Secondo R. C. Hills, sul West Peak, nel Colorado, tubi fulminari vetrificati, si trovano entro una diorite augitica. W. S. Bayley descrisse fin dal 1872 una folgorite formatasi nelle sabbie presso Waterville. Altre furono segnalate sulla vetta trachitica del Toluca, nel Messico, da von Humboldt. Abich cita simili ritrovamenti sul piccolo Ararat in una andesite augitica.

Non esiste, per quanto mi consta, una memoria speciale concernente le folgoriti, e le nostre cognizioni in proposito consistono in cenni recati nelle monografie relative al fulmine, in trattati di meteorologia, in annuarî scientifici e in periodici di astronomia e di meteorologia, come pure in relazioni di viaggio. Fra le numerose note bibliografiche, gentilmente per me raccolte dal chiar. prof. Ignazio Galli, trascrivo qui appresso le principali ([2]).

XIV. — Anemoliti.

Certe pietre figurate traggono speciali caratteri distintivi da che, essendo costituite di materiali detritici, ed impregnate di acqua, formarono un impasto suscettibile di arrotolarsi in pallottole, per effetto di energica proiezione o in virtù di trasporto per opera di gagliarda corrente atmosferica. Così le ceneri trachitiche della solfatara di Pozzuoli, travolte dai vapori che prorompono da alcuni punti di quel cratere, diedero origine a sferette, impropriamente denominate pisoliti vulcaniche. Sono analoghe quelle rinvenute fra i ruderi di Pompei, delle quali si occupò Lacroix ([3]).

Altre, rinvenute nel Lazio, lungo l'orlo superiore del lago di Albano, mi furono inviate dall'ing. Clerici, e così pure le sferette tufacee più voluminose (di circa 2 centimetri di diametro) raccolte dal medesimo a Bravetta, parimenti nel Lazio.

Ricorderò infine le pallottoline assai piccole (del diametro di uno a due millimetri) contenute fra i detriti più tenui espulsi dal Vesuvio nel 1822. Queste erano certo formate dall'agglutinarsi della cenere inumidita dalla condensazione dei vapori acquei durante l'eruzione.

Ammesso il fatto che i pulviscoli vulcanici cadono non di rado sulla terra, agglutinati in sferette per effetto della proiezione sofferta, era facile argomentare che

([1]) Dana J., *Manual of geology*, fourth ed., pag. 265, New York, 1895.

([2]) Sestier F., *De la foudre, de ses formes et de ses effets*, Paris, Baillère, 1866; Martin T. H., *La foudre, l'électricité et le magnétisme chez les anciens*, Paris, Didier, 1866; De Fonvielle W., *Éclairs et tonnerres*, Paris, Hachette, 1874.

([3]) *Revue scientifique*, 3 novembre 1906.

anche le polveri di altra natura, travolte ed elaborate da correnti atmosferiche, dovessero dar luogo ad analogo fenomeno.

Il Clerici, descrivendo certe polveri sciroccali, raccolte nel marzo del 1911 in varî punti d'Italia, notò come quelle cadute a Roma, all'asciutto, fossero in gran parte agglomerate in pallottoline (¹). A questo osservatore sembra difficile spiegare la formazione dei glomeruli, ammettendo che goccioline d'acqua abbiano impastato il materiale polverulento depositato sul suolo all'asciutto, e, per renderne conto in modo più soddisfacente, suppone che, nell'innalzarsi, la corrente atmosferica si raffreddasse provocando la condensazione dell'acqua, che avrebbe così inumidito i pulviscoli, i quali si sarebbero adunati poscia in glomeruli per il rimescolio sofferto. Questa ipotesi vien confermata, secondo il Flores, dalla distribuzione delle pallottole in Italia, perchè, mentre le più voluminose caddero a Trapani ed altre minori ad Isernia, non se ne raccolsero che di piccolissime a Roma e mancarono a Bologna, ove non sarebbero pervenute che le polveri più tenui e leggere (²).

A me sembra che la condensazione dell'umidità atmosferica necessaria all'agglomeramento delle particelle possa essere avvenuta, indipendentemente dall'altitudine, per la concomitanza di correnti fredde e asciutte e di altre calde e umide a livelli diversi, date favorevoli contingenze atmosferiche.

XV. — Vulcanoliti.

Il vocabolo che serve a distinguere il XV gruppo significa come si tratta di prodotti vulcanici, di quelli, s'intende, dotati di forma peculiare e che costituiscono individui morfologici.

Alludo alle bombe e alle saette vulcaniche, delle quali sarebbe qui intempestiva la descrizione. Basti avvertire, per definire il gruppo nei fini della mia Memoria, che risultano essenzialmente di brandelli di lava vischiosa, sospinti con violenza durante i parossismi eruttivi dagli spiragli vulcanici. Questi brandelli accludono d'ordinario un nucleo d'altra lava od anche di roccia non lavica, strappata alle pareti del camino o del focolare vulcanico, ed assunsero forma di fuso, di pera, di sferoide, od anche cilindroide, con torsione più o meno manifesta di una estremità o di entrambe; inoltre presentano spesso rimboccatura del magma che le avvolge, per effetto della rotazione subìta, allorchè furono espulsi.

Non di rado le bombe vulcaniche scagliate fuori del cratere esplodono, e ciò dipende indubbiamente dalla tensione dei vapori e gas premuti nella parte interna di esse, che è d'ordinario vacuolare o porosa. S'intende come la scemata pressione atmosferica, che il proiettile incontra quando raggiunge una certa altitudine, favorisca la reazione dei detti gas e vapori sull'involucro periferico impervio che li contiene, d'onde lo scoppio.

(¹) Clerici E., *Sulle polveri sciroccali cadute in Italia nel marzo 1901*, Boll. della Società geol. ital., XX, Roma, 1901.

(²) Flores E., *Polveri sciroccali e pisoliti meteoriche*, Boll. della Soc. geol. ital., Roma, 1908.

Non sarebbe malagevole desumere notizie particolareggiate intorno alle vulcaniti dalle numerosissime relazioni pubblicate sui più memorabili parossismi eruttivi e sui proiettili scagliati dai singoli spiragli. La bibliografia conta migliaia di numeri, nei quali la materia è svolta, sia sotto il punto di vista dei fenomeni, sia rispetto ai prodotti espulsi. Ma lo scopo che mi propongo è specialmente indirizzato all'ordinamento, e sotto questo aspetto i materiali non sono molto copiosi; ritengo perciò non peccare di predilezione per la scuola italiana attenendomi in proposito alle nozioni esposte dal nostro compianto Mercalli [1]. Prima di tutto comprendo fra gli oggetti della mia disamina quelli soltanto da lui denominati proietti figurati; cioè:

a) le bombe scoriacee, irregolari, nelle quali il magma è assai fusibile;

b) le compatte e pesanti, con due tipi morfologici distinti: uno appuntato alle due estremità e l'altro da una sola parte. Esse sono complessivamente denominate, dalle guide vesuviane, saette o ferilli, e risultano di un nucleo di lava vecchia avvolto di lava nuova; sono queste che esplodono più spesso innalzandosi sopra il cratere;

c) i proietti trachidoidi, formati precipuamente di trachiti o andesiti. Per la fusibilità assai minore non assumono figura fusiforme e non presentano segni di torsione.

Escludo adunque di proposito deliberato dal novero delle pietre figurate i massi informi, i brandelli di lava, sia compatta sia scoriacea, le così dette focacce non arrotondate, gli adunamenti di lava cordata, i lapilli comuni, grandi e piccoli, come pure i lapilli in cristalli integri od infranti, a spigoli ed angoli solidi freschi o logorati.

Dal punto di vista puramente morfologico, ritengo che si possono distinguere le vulcaniti in sferoidali, ellittiche, fusiformi, piriformi e cilindroidi; queste alla loro volta possono essere rettilinee, arcuate o tortuose.

Il prof. G. Ponte segnalò testè sotto il nome di bombe chiomate una varietà di proiettili vulcanici non ancora nota, da lui osservata fra i materiali espulsi dallo Stromboli durante le esplosioni del 13 novembre e del 10 dicembre 1915. Si tratta di frammenti di vecchie rocce del vulcano (doleriti) rivestiti di scorie filamentose, di color grigio-giallastro, che ricordano per l'aspetto loro chiome ravviate [2].

In ordine alla materia, ognun vede come siano possibili tante varietà quante sono quelle delle rocce che assumono lo stato vischioso o pastoso entro al focolare vulcanico. Senza entrare in minuti particolari in proposito, avvertirò come l'involucro periferico sia bene spesso diverso dal nucleo, il quale può risultare anche di roccia non propriamente vulcanica. Per citare uno dei casi meno frequenti, ricorderò come fra le bombe dell'Etna eruttate nel 1883, ne fossero segnalate anche di quarzose (parzialmente vetrificate), dal Riccardi, il quale le sottopose all'esame di Silvestri, Daubrée, Fouqué e von Lasaulx. Questi proiettili sono circondati da un involucro lavico.

[1] *I vulcani attivi della terra* ecc., Milano, U. Hoepli ed., 1907.

[2] Ponte G., *Lo Stromboli dopo il parossismo del 1915*, Atti della R. Accademia dei Lincei serie V, seduta del 5 marzo 1916, Roma, 1916.

Dal punto di vista descrittivo, mi piace richiamare alla memoria del lettore quanto è esposto intorno ai proiettili vulcanici nelle opere classiche di Poulett Scrope, Phillips, Fouqué, Silvestri, Sartorius von Waltershausen, Judd, Johnston Lavis (1).

XVI. — Peleiti.

Un gruppo prossimo a quello delle vulcaniti e alle anemoliti si può ammettere per le peleiti o *capelli di Pele*, filamenti di lava vitrea, tirata per opera di vènti gagliardissimi, ove questi investivano il magma incandescente e scorrevole. Le lave capillari furono osservate in gran copia nel cratere del Kilauea, e ne diedero conto parecchi vulcanisti, fra i quali Brigham (2), Dana (3), Friedländer.

W. Hamilton riferisce che, durante l'eruzione avvenuta nel 1766 nell'isola Réunion, i dintorni del cratere furono ricoperti di vetro giallo, flessibile, in sottili filamenti di due a tre piedi di lunghezza, lungo i quali erano distribuiti globetti vetrosi poco distanti l'uno dall'altro. Tali filamenti vitrei sono ricordati eziandio dal Velain (4). Mercalli menziona la lava capillare anche fra i prodotti del Vesuvio, ma in quantità assai piccola (5).

Le peleiti del Kilauea, che ebbi agio di esaminare (6), appariscono al microscopio come tubetti nitidissimi, diafani, giallastri, omogenei in gran parte della loro lunghezza, in altra parte con inclusioni aeriformi; alcuni di essi presentano flessioni e rigonfiamenti, questi corrispondenti d'ordinario a bolle di gas.

Al pari degli altri vetri vulcanici scoriacei o filamentosi, quelli del Kilauea, dell'isola Réunion e dello stesso Vesuvio non hanno composizione costante, e, circa la loro costituzione chimica media, non mi consta che si possiedano esaurienti indagini.

XVII. — Basaltoliti.

Le pietre figurate per contrazione, le quali diedero luogo a tipi diversi, ripetono i caratteri distintivi da una materia originariamente vischiosa o plastica, la quale, passando allo stato solido, subì una diminuzione di volume, e fu quindi attraversata da soluzioni di continuità o piani di ritiro, nei casi normali, perpendico-

(1) Poulett Scrope, *The geology and extint volcanoes of central France*, London, 1858. — Id., *Les volcans*, Paris, 1864. — Phillips, *Vesuvius*, Oxford, 1869. — Fouqué, *Santorin et ses eruptions*, Paris, 1879. — Silvestri, *I fenomeni vulcanici presentati dall'Etna*, Torino, 1879. — Sartorius von Waltershausen e Lasaulx, *Der Aetna*, Leipzig, 1880. — Judd, *Volcanoes*, London, 1881. — Johnston-Lavis, *The Southitalian volcanoes*, Neaple, 1891.

(2) Brigham W., *Notes on the volcanic phenomena of the Hawaiian Islands*, Memoirs of the Boston Soc. of nat. Hist., 1868.

(3) Dana, *Manual of Geology*, 4a ed., New-York, 1895.

(4) Velain, *Recherches faites à Aden, à la Réunion* etc., Paris, 1875.

(5) Mercalli, *I vulcani attivi della terra*, pag. 107, Milano, U. Hoepli, 1907.

(6) Queste furono raccolte e donate al Museo di Genova dal mio amico capitano Enrico Alberto D'Albertis.

lari alla superficie di più rapido raffreddamento. Esse possono scindersi nei due gruppi delle aderenti e delle finite. Le prime, generalmente prismatiche, fanno parte di un espandimento eruttivo al quale sono unite per la base; le seconde sono poliedri irregolari, isolati da ogni parte.

Fra le prime si dànno i prismi a 6, meno frequentemente a 3, 4, 5 lati, come pure i parallelepipedi irregolari (in generale quadrangolari), di svariate dimensioni, anche grandissimi, di parecchie specie di rocce ignee. Le une e le altre costituiscono il gruppo che io denomino *basaltoliti*, le cui forme, assunte per raffreddamento, sarebbe superfluo descrivere, essendo assai comuni, massime negli espandimenti di rocce basiche, e trovandosene illustrazioni particolareggiate nei trattati di Geologia, nonchè in numerose memorie speciali.

I prismi formati dalla contrazione delle rocce ignee nel solidificarsi raggiungono, secondo Geikie, fin 60 m. d'altezza [1]. Verticali e rettilinei nei casi più comuni, appariscono talvolta più o meno inclinati sull'orizzonto allorchè la superficie sulla quale si distese il magma non era verticale e si mostrano raramente incurvati, nei casi in cui si produssero movimenti nello stesso magma, mentre la sua solidificazione non era compiuta. Detti prismi sono bene spesso intersecati di diaclasi trasversali, e queste diedero adito in certi casi agli agenti esterni, in ispecie alle acque meteoriche, i quali esercitarono intensa azione chimico-fisica sulla roccia, determinando lo smussamento e l'arrotondamento degli angoli e degli spigoli. Da ciò transizione dal tipo prismatico al nodulare, cioè conversione dei prismi in pile di sferoidi.

Oltre al basalte, che offre in molti paesi esempî di forme colonnari e di estesi espandimenti foggiati a gradinata, furono segnalate: trachite quarzosa [2], fra le Montagne rocciose, fonolite [3], a Fernando de Noronha, ossidiana [4] nello Jellowstone Park, in prismi ben definiti. La medesima particolarità si trova, ma non così palesemente, in adunamenti di lherzolite [5], di diabase [6], di porfidi [7].

Si ammette dai più autorevoli geologi che le rocce ignee, e specialmente i basalti, assunsero forme di pietre figurate in virtù di un rapido raffreddamento, conseguito in tesi generale passando allo stato solido in seno ad acque marine o lacustri.

Gli annali della nostra disciplina sono ricchi di descrizioni e di figure, dalle quali appariscono gli aspetti caratteristici delle rocce basaltiche o d'altre che assumono forma colonnare. Gli esempî più suggestivi sono forniti dal Mont Dore e dal Cantal in Francia, dall'isola di Müll e da quella di Staffa nella Scozia, dal Siebengebirge in Germania, dal Vicentino e dagli scogli dei Ciclopi in Italia, dall'isola di Teneriffa e dalla Réunion fuori d'Europa. Guettard, Dolomieu, Brongniart, Faujas fra i francesi; Hutton, Davy, Poulett Scrope fra gli inglesi; Abich, de Buch fra i

(1) Geikie J., *Traité pratique de géologie*, trad. Lemoine, Paris, 1900.
(2) Neumayr M., *Storia della Terra* trad. Moschen, I, pag. 597, Torino, 1890.
(3) Dana, *Manual of Geology*, 4ª ed., fig. 222, New-York, 1895.
(4) Dana, loc. cit., fig 224.
(5) Accenno all'ammasso di « Pria Borgheise », alle falde del Monte Penna.
(6) Presenta fratture di ritiro ed abbozzi di poliedri in varî punti della Liguria orientale.
(7) Sul lago di Lugano, secondo Stoppani (*Corso di Geologia*, III, pag. 567).

tedeschi; Fortis, Brocchi, Breislak fra gli italiani, per accennare solo ad autori omai antichi e noti a tutti i geologi, ne diedero pregiate illustrazioni.

Quanto alla teoria della basaltizzazione, non saprei trovare esposizione più perspicua e più completa di quella che si trova nel *Corso di Geologia* di Antonio Stoppani, nel vol. III, alla pag. 549 e seg.

Mi proponevo di aggiungere alcune citazioni di autori che si occuparono recentemente delle rocce colonnari, alle poche già addotte a corredo di questi cenni; ma ho dovuto persuadermi che la scelta si è fatta malagevole in conseguenza del numero grandissimo di Memorie e Note sulla materia, pubblicate in questi ultimi tempi. In una stampa di M. Stark sulle province petrografiche [1] sono ricordati i titoli di 533 lavori relativi quasi esclusivamente a rocce ignee!

Avverto, in ultimo, come io abbia assegnato la denominazione di basaltoliti ai poliedri di contrazione presentati dalle rocce ignee e non quella di basaltiti, perchè già adoperata per designare una varietà di melafiro rinvenuta in Sassonia.

XVIII. — **Xeroliti.**

Analoghe figure, quantunque meno regolari (alludo alle xeroliti), si trovano in copia nei sedimenti melmosi, recentemente solidificati per prosciugamento, nei letti disseccati di acquitrini, stagni, paludi, laghi, lagune, come pure lungo le rive del mare. Le rocce in cui si osservano consistono prevalentemente in argilla, marna, limo. Nei casi tipici si tratta di prismi verticali, a 6 lati, di svariate dimensioni, poco sviluppati in altezza in confronto della base, che può misurare pochi decimetri e perfino qualche metro quadrato di superficie. Non di rado sono associati ad impronte fisiologiche, in ispecie ichniti, e a piccole cavità prodotte dalla caduta, sopra la superficie superiore molle e plastica, di gocce di pioggia (udoliti).

Il collocamento delle xeroliti fra le pietre figurate suscita in me qualche dubbio e non deve essere accolto senza riserve, per il fatto che presentano solo eccezionalmente individui ben definiti, e costituiscono il più delle volte superficie rocciose più o meno fissurate, alle quali si conviene piuttosto la denominazione di stimate. Ho creduto tuttavolta di accogliere questo partito per il riflesso che sono strettamente affini alle basaltoliti.

Un solo esempio ritengo sufficiente, visto il fine che mi propongo, per dimostrare come i piani di frattura, per contrazione dell'argilla, sieno suscettibili di determinare solidi prismatici analoghi a quelli del basalte. Esso fu osservato da G. B. Brocchi presso il villaggio di Misendi aulla riva del Nilo, e descritto nel suo *Giornale* (vol. I, pag. 239), con le parole seguenti, che trascrivo da una citazione dello Stoppani [2]:

« Nella sezione verticale della ripa alta da tre a quattro piedi, si presentò in un sito una serie di prismi colonnari, formati dal limo depositato di fresco dal Nilo e mezzo disseccato. Erano alcuni in posizione verticale, altri inclinati, altri ancora

(1) *Petrographische Provinzen*, Auftrag der Mineralog. Gesellsch., Jena, 1914.

(2) *Corso di Geologia*, III pag. 551.

disordinati ed accatastati insieme, e presentavano tutti quegli accidenti che si ravvisano nei terreni basaltini. La forma di cotesti prismi era la pentagona, l'esagona, ed in parecchi era irregolare, il diametro di mezzo piede più o meno, fino a quello di due piedi. Assai mi spiacque di non aver meco un disegnatore, il quale ne facesse uno schizzo, perchè offrivano in piccolo una vivissima immagine de' terreni colonnari vulcanici ».

Come vere xeroliti sono da citarsi le forme prismatiche irregolari presentate dai tufi, i quali, malgrado l'origine vulcanica, si comportarono, passando allo stato solido, come rocce sedimentari, assunsero cioè il carattere colonnare, non per effetto di raffreddamento e contrazione, ma in conseguenza di prosciugamento e contrazione, come pure quelle di certe arenarie metamorfiche e di litantraci.

Considerate le xeroliti così sommariamente descritte come var. *a*, altre, nelle quali un minerale concrezionato, generalmente calcite o quarzo, occupò le soluzioni di continuità ed apparisce all'esterno a guisa di rilegature, si possono distinguere come var. *b*, e, quelle nelle quali, essendo rimossa la matrice, per effetto di fenomeni posteriori di erosione o di dissoluzione, permane l'accennato minerale a guisa di un complesso areolare, formato di sottili sepimenti, che limitano aree poliedriche, saranno da designarsi come var. *c*. Esemplari di siffatta varietà si conservano talvolta nei musei come campioni di quarzo areolare. Si tratta in certo modo di un modello interno di xerolite normale. Non fa d'uopo avvertire come queste varietà corrispondano a diversi tipi di septaria, ma ne differiscono perchè alle fratture di ritiro, conseguite dalla contrazione, non si associa il carattere nodulare.

J. D. Dana esibisce nel suo manuale di Geologia una figura suggestiva della var. *a* e della var. *c* [1].

XIX. — Carasioliti.

Mi piace adottare questa denominazione per le pietre che acquistarono forme bizzarre, onde furono paragonate a fantocci, a bambole, a funghi, ecc., per fatto della corrosione di cui subirono gli effetti e portano le tracce; corrosione esercitata da acque dissolventi, d'ordinario mineralizzate e talvolta anche termali. Esse sono aderenti o libere e normalmente risultano di rocce dotate di facile solubilità, come salgemma, gesso, anidrite, calcare. Allorchè l'azione chimica si manifestò su quest'ultima roccia per opera di acque termominerali, lasciò d'ordinario residui caratteristici insolubili, come materiali terrosi, ricchi di silice e d'idrossidi metallici.

Nei lembi di calcare corroso, singolarmente frastagliati, riferibili a siffatte pietre figurate, si osservano spesso le tracce degli strati e straterelli ed interstrati originarî. Ove la roccia era più solubile, si produssero solchi ed incavi paralleli; corrispondono invece a rilievi i tratti più resistenti all'azione chimica. I solchi corrispondono in alcuni esempari a strozzature interposte fra rigonfiamenti sferoidali, e la pietra risveglia allora l'idea di rozzi fantocci.

[1] *Manual of geology*, 4th ed., fig. 64 e 65, New York, 1895.

Di tali pietre figurate per corrosione cito soltanto quelle che osservai in prossimità della formazione ofiolitica a Tavarone, nella Liguria orientale, ed altre raccolte sul Monte Cento Croci e alle falde dell'Antola, come pure nelle vicinanze di Aulla; ma sarebbe facile moltiplicare gli esempî.

Le carasioliti riferibili alla varietà isolata, si trovano bene spesso associate alle aderenti entro gli strati di roccie permeabili o penetrabili, che servirono di veicolo alle acque mineralizzate. Esse non di rado somigliano a ciottoli, ma con forme più irregolari, ed offrono d'ordinario alla superficie solchi e cordoni subordinati alla stratificazione e rilievi dovuti ad inclusioni di materiali meno solubili.

Nella mia Memoria intitolata: *Il calcefiro di Rovegno in Val di Trebbia* (¹), diedi la figura di due carasioliti isolate (tav. V, fig. 2, 3). Già mi ero occupato di calcari erosi e figurati, per opera di acque minerali, in altra stampa pubblicata in collaborazione coll'ing. L. Mazzuoli (²).

XX. — Psefiti.

Non senza esitazione sono indotto ad istituire un gruppo di pietre figurate per i ciottoli e le ghiaie, e ciò affine di integrare il mio ordinamento. S'intende di leggieri che queste differiscono dalle precedenti perchè, libere e isolate, conseguirono le forme loro (sferoidi, ellissoidi, ovoidi, cilindroidi, lenticolari, discoidali, poliedriche ecc.) essendo meccanicamente elaborate dalle acque o dall'attrito glaciale, e solo, in via molto subordinata, per soluzione e corrosione chimica.

Tutti sanno come l'elaborazione dei ciottoli e delle ghiaie si produca principalmente per effetto del moto ondoso, delle correnti e delle maree, nelle acque marine poco profonde, nei laghi, nei fiumi, nei torrenti e nei rivi, nelle cascate, per fatto delle acque continentali, animate da movimento più o meno rapido. Fanno eccezione alla regola i così detti ciottoli triquetri, corpi irregolarmente poliedrici foggiati dall'attrito glaciale.

Non è il caso di entrare qui in una minuta analisi delle forme peculiari assunte da questi corpi secondo le condizioni diverse nelle quali si produce il logoramento, e subordinatamente alla forma originaria, alla durezza, alla tenacità, alla scistosità e sfaldabilità delle singole specie di rocce. Aggiungerò che sono suscettibili di assumere forme e struttura anormali, allorchè, prima di raggiungere la condizione di ciottoli o ghiaie, passarono per quella di sferolite, di morfolite, di pseudomorfolite, di ostracolite ecc., o pure quando si tratta di fossili più o meno rimaneggiati.

Per me le ghiaie e le ghiaiette non differiscono dai ciottoli che per le minori dimensioni, ed ammetto convenzionalmente, fra i ciottoli, solo quei corpi i quali non oltrepassano il volume dei cefalari e non sono minori degli avellanari; escludo quindi dal novero i massi più o meno voluminosi, elaborati sia dal mare, sia dai corsi

(¹) Annali del Museo Civico di St. nat. di Genova, serie 2ª, IX, Genova, 1899.

(²) *Relazione degli studî fatti per un rilievo delle masse ofiolitiche* ecc., Boll. del R. Comit. geol., Roma, 1881.

d'acqua, sia dai ghiacciai, come pure lascio da parte sabbioni, arene grosse e sottili, quantunque l'origine loro sia bene spesso non diversa da quella delle psefiti propriamente dette.

I ciottoli e le ghiaie acclusi nei conglomerati presentano spesso al contatto l'uno dell'altro cavità, solchi e depressioni, i quali destano l'idea di quelli che sarebbero prodotti da corpi arrotondati e duri premuti sopra altri di analoga forma, più o meno cedevoli. Così si manifesta il fenomeno conosciuto dei geologi sotto il nome d'*impressione*, il quale ripete la propria causa solo in via molto subordinata dalla pressione reciproca esercitata l'uno sull'altro dagli elementi della roccia, e, prevalentemente, dall'azione chimica dovuta ad acque più o meno mineralizzate, rimaste lungamente comprese negli interstizî che intercedono tra due o più di tali elementi contigui.

Le impressioni debbono essere considerate come stimate, e solo per incidenza è qui opportuno ricordarle come particolarità notevoli dei ciottoli proprî a certi giacimenti. Il prof. F. Sacco illustrò, molti anni addietro, alcuni campioni assai suggestivi di ciottoli improntati provenienti dalla formazione tongriana del Piemonte ([1]). In tutti i conglomerati della Liguria non mancano esemplari ugualmente istruttivi. Nei depositi in cui mi fu dato studiarli, in quelli cioè di Portofino, Celle, Santa Giustina, Croce Fieschi, per quanto riflette la formazione oligocenica, nel ciottolato di Ventimiglia rispetto alla pliocenica, l'impressione si trova quasi esclusivamente nei ciottoli di natura calcare; in altri, come nella puddinga di Millesimo, gli elementi sono serpentinosi ([2]).

Senza indugiarmi più oltre intorno ai ciottoli in genere, mi piace far conoscere un tipo di tali corpi non comune, per il fatto che risultano di antracite e sono compresi in uno strato della medesima roccia coltivato nella miniera di Cretaz pertinente alla formazione carbonifera della Thuille. Si tratta di ghiaie di piccole dimensioni, lenticolari, intensamente nere, lucidissime e che portano tracce visibili di stratificazione. Esse furono raccolte per il Museo di Genova dal prof. S. Squinabol. La matrice è granosa, detritica, un po' rubiginosa. Parecchi giacimenti di litantrace accludono ciottoli formati da questo medesimo combustibile, e la loro presenza fu invocata tra gli argomenti favorevoli alla tesi di coloro che ammettono la rapida conversione dei residui vegetali in carbon fossile.

XXI. — Metamorfiti.

Con questo vocabolo intendo designare le pietre figurate dalla alterazione di basaltoliti, xeroliti od anche di frammenti di roccia originariamente poliedrici per fatto della stratificazione e della scistosità, i quali assunsero posteriormente figura arrotondata, e struttura ad involucri. D'ordinario, sono noduli incipienti o meglio

([1]) *Les conglomerats du Flysch*, Mém. de la Soc. Belge de Géol., de Paleont. et d'Hydrol., III, Bruxelles, 1889.

([2]) I ciottoli oligocenici, improntati, dell'Appennino Ligure furono spesso spezzati, e i frammenti loro, saldati da cemento calcitico, appariscono notevolmente spostati dalla posizione originaria.

abbozzi di noduli; e non è ad escludersi che abbiano talvolta a convertirsi, in seguito ad ulteriore elaborazione molecolare, in morfoliti perfette.

I graniti foggiati a sferoidi, non però sferolitici, i basalti e specialmente il così detto gabbro rosso (diabase alterata) della formazione ofiolitica, tanto sviluppato nella Liguria orientale, ne offrono esempî istruttivi. Questa roccia a Reppia, a Libiola, a Prete Michele presso Bonassola, e in altri punti, è attraversata in varî sensi da soluzioni di continuità dovute a contrazione verificatasi nell'atto del raffreddamento e della solidificazione. Le acque meteoriche e gli altri agenti atmosferici attaccarono poco a poco gli spigoli e gli angoli solidi dei poliedri, sostituendoli con superficie curve, ne alterarono le facce dalla periferia verso l'interno, determinando la progressiva idratazione e rubefazione della roccia, e inducendo in essa una struttura ad involucri che non vi preesisteva, struttura accusata da zone concentriche a colori diversi. In breve, si può cogliere sul fatto la conversione di una massa rocciosa affetta da soluzioni di continuità (d'ordinario da fratture di ritiro) in una congerie di arnioni, nei quali è iniziata una distribuzione elettiva delle particelle di cui risultano.

Mentre nelle bioliti e nelle morfoliti si verifica un fenomeno che ha bene spesso per punto di partenza e per causa iniziale un fossile od altro corpo estraneo, od anche l'adunarsi intorno ad un punto centrale del nodulo di materiali della stessa specie, nelle metamorfiti la forma nodulare consegue principalmente da un fenomeno estrinseco che procede dall'esterno all'interno. Ma non escludo che intervenga, simultaneamente, anche una concentrazione molecolare, risultandone transizioni tra un tipo e l'altro.

Sono assai istruttivi, dal punto di vista della genesi degli adunamenti nodulari, certi calcari marnosi da me osservati ai Piani di Creto, presso Genova, e nella valle del Laccetto (Torriglia), i quali non differiscono affatto nei caratteri esterni da quelli abitualmente compresi nella stessa formazione [1], e subirono tuttavolta, per effetto di fenomeni estrinseci, determinati verosimilmente da agenti meteorici, profonda modificazione molecolare, accusata da facili sfaldature anormali. Queste consentono di isolare, mercè lieve percossa o moderata pressione, noduli lenticolari, inorganici, paragonabili a grosse nummuliti. Il piano principale di tali noduli è parallelo alla stratificazione, che esercita azione manifesta sulla forma e sulla orientazione loro. In questo fenomeno, che meriterebbe ulteriori indagini, ravviso una concentrazione di particelle, alla quale non è forse estranea la materia organica diffusa nella roccia.

Daubrée ha dimostrato come, se, per effetto della pressione, una roccia plastica, ad esempio l'argilla, sia costretta a passare per angusto orifizio circolare, si converta in un cilindro a struttura scistosa, che si sfoglia concentricamente rispetto alla superficie del cilindro; ma siffatto fenomeno è completamente diverso da quello della sfaldatura ad involucri dei noduli incipienti di natura pelitica, il quale per le condizioni del giacimento non accusa energica azione meccanica sofferta dalla matrice.

[1] Piano eocenico superiore a fucoidi e ad *Helminthoida*.

XXII. — Simblositi.

Fra le pietre figurate che ripetono la propria origine da fenomeni assai complessi debbo ricordare quelle denominate da G. Abbot (il quale ne fece oggetto di accurata illustrazione) *honeycomb*, vale a dire concrezioni a favo. Io traduco questo vocabolo con la parola *simblositi*, avvertendo che sarebbe etimologicamente più corretta la voce *cerioliti*; ma si potrebbe confondere con ceriti, attribuita a minerali di cerio. In base all'esame di buon numero di esemplari tipici, che ho sotto gli occhi per cortesia del precitato naturalista, sono venuto nella persuasione che in una prima fase iniziale furono abbozzati come stimate dalla azione dissolvente e disgregante delle acque meteoriche sopra depositi stratificati di sabbie debolmente concrete, risultandone serie di cellette, allineate orizzontalmente o quasi per effetto della stratificazione e verticalmente in seguito al procedere dall'alto al basso, per il proprio peso, dell'acqua circolante nella massa rocciosa (1); ciascuna celletta consegue dalla rimozione di uno o più granelli di sabbia. In una seconda fase, i granelli di sabbia superstiti, avendo acquistato un certo grado di mobilità, obbedirono ad una forza centripeta, che impartì al complesso un nuovo assetto, e ne risultarono serie rettilinee di cellette distribuite a guisa di raggi intorno ad un centro determinato, e serie circolari in straterelli concentrici; la pietra acquistava così struttura e forma nodulare. L'edifizio si rendeva quindi più regolare e più resistente in una terza fase, nella quale, sopravvenute acque incrostanti, si ingrossavano le pareti delle cellule, e queste si facevano più simmetriche, in modo da ricordare gli alveoli di un favo.

Ma non è a dirsi che l'evoluzione del nodulo avesse così raggiunto il suo compimento. Avvenne, in alcuni casi, che continuasse il deposito chimico precedentemente iniziato, cagionando l'obliterazione parziale delle piccole cavità, che furono convertite in tenui meati o in pori. Intanto, si formarono all'esterno rilievi cilindroidi e digitazioni; da ciò l'aspetto di polipai assunto da simili concrezioni.

Io non conosco che gli esemplari di simblositi donati dal sig. G. Abbot al Museo di Genova, i quali provengono dall'arenaria wealdiana di Eridge Rocks. Inoltre, non ho mancato di tener conto di quelli più svariati e raccolti anche in altri punti, illustrati dallo stesso autore nelle sue pubblicazioni (2).

Una pietra figurata che conservo nella mia raccolta, ricorda per il suo aspetto un cervello di piccolo mammifero ed è registrata col nome provvisorio di *simblosite*, var. *circonvoluta*; ma il suo posto nella classificazione è ancora incerto. Le sue circonvoluzioni, ripetono, io credo, la propria origine da una fase d'erosione, verificatasi a spese di un deposito di limo, fase susseguita da un successivo processo d'incrostazione. Essa fu raccolta nella valletta del Veilino presso il camposanto di Genova.

(1) Questa fase è messa in luce da una superficie rocciosa osservata da G. Abbot ad Eridge e da lui figurata in una tavola del suo opuscolo *Excursion to Eridge and Tunbridge Wells* (1909).

(2) Abbot G., *Concretions*, Trans. of the South-eastern Union of Scient. Soc., 1907; *Excursion to Eridge and Tunbridge Wells*, Proc. of the Geol. Association, XXI, part. 4ª, 1909; *Discoid limestones wich simulate organic characteres*, Reprinted from « The Pioneer »., 1814.

L'esame microscopico del residuo ottenuto trattando l'esemplare con un acido minerale diluito, accusa gran copia di materia organica pertinente ad alghe microscopiche, le quali ebbero sicuramente parte nella genesi della concrezione.

CONCLUSIONI.

A seconda delle loro affinità i diversi tipi summentovati si possono adunare nelle tredici classi seguenti:

1°) Noduli nei quali risulta prevalente una concentrazione e una distribuzione elettiva di materiali organici od inorganici e, nei casi normali, forma arrotondata o di aggregato di elementi arrotondati [1] (sferolili, morfoliti, pseudomorfoliti, bioliti).

2°) Corpi nei quali la forma sferoidale od ellissoidale consegue da quella di una cavità in cui si svilupparono (ostracoliti).

3°) Corpi la cui forma svariatissima ripete principalmente la propria origine da successivi depositi intorno ad un asse verticale, sopra una superficie, o intorno ad un centro comune. Questo fenomeno dipende da precipitazione chimica, da solidificazione di liquido o da azione fisiologica esercitata mediante microorganismi (stalattiti, pseudostalattiti, pisoliti, pelagositi).

4°) Concrezioni discoidali, a ciotola o imbutiformi, la cui figura è determinata dal recipiente in cui si modellavano (pseudopisoliti).

5°) Corpi nodulari subordinati a concentrazione e a successiva contrazione (septarie);

6°) Corpi la cui forma consegue dall'aver subìto un arrotolamento, dovuto a proiezione od anche agli effetti di energiche correnti atmosferiche, mentre erano pastosi o vischiosi (anemoliti, vulcaniti).

7°) Corpi sferoidali o tubiformi plasmati da una sofferta fusione (microcondriti, folgoriti).

8°) Corpi, originariamente vischiosi, divenuti filiformi, in virtù di gagliarde correnti atmosferiche (peleiti).

9°) Corpi che assunsero figura poliedrica per contrazione (basaltoliti, xeroliti).

10°) Corpi che conseguirono forma nodulare per effetto di alterazione chimico-fisica proceduta dalla periferia verso il centro (metamorfiti).

11°) Corpi foggiati quasi esclusivamente per logoramento meccanico (psefiti).

12°) Corpi foggiati in principal modo per azione dissolvente e chimica (carasioliti).

13°) Corpi elaborati per successione di fenomeni diversi (simblositi).

Come si è veduto, la maggior parte delle pietre figurate assume forme di adunamenti, quali sferoidali, quali ovoidali, ellissoidali, lenticolari, amigdalari ecc., gli uni semplici gli altri multipli, costituiti cioè di due o più individui associati o compenetrati; in altre parole si tratta dei così detti *noduli*. Giova investigare, da un punto di vista più generale, come abbia avuto origine siffatto tipo morfologico.

[1] In alcuni casi si manifestano anche segni di contrazione.

Abbot desume dalle proprie indagini (ed io accetto pienamente le sue conclusioni) che i noduli possono formarsi in seno a corpi solidi, e senza il concorso di organismi. Egli ebbe pure ad osservare che nella genesi dei noduli le molecole procedono qualche volta a ritroso della gravità; e ciò si spiega invocando i fenomeni ben noti della capillarità.

Argomento, da quanto potei osservare, che in casi assai frequenti la costituzione di adunamenti nodulari è subordinata alla presenza di corpi organici, e fu iniziata dalla decomposizione delle parti molli di animali o di piante. Parte essenziale nella costituzione di molti fra essi è da attribuirsi ai gusci microscopici delle foraminifere, agli scheletri delle radiolarie, alle spicule delle spugne, alle armature delle diatomee, a piccole conchiglie o a tritume di organismi, quale si trova in molte coproliti. Intervenne talvolta un'azione fisiologica.

I noduli, e specialmente quelli che ricettano le spoglie di organismi microscopici, ebbero origine nei fondi marini ove l'acqua è più profonda e tranquilla, bene spesso entro melme impalpabili, che si trovano in uno stato intermedio fra lo stato solido e il liquido; lo dimostra l'esame di noduli in formazione e di rocce concrete generati in seno a sedimenti abissali.

È evidente in tutti i noduli che le particelle di cui risultano subirono un movimento di concentrazione, il più delle volte non disgiunto da una distribuzione elettiva, in virtù della quale si adunarono in singoli involucri sostanze chimicamente uguali ed analoghe, per lo più nella condizione di pigmenti, pulviscoli, granuli, frustoli assai minuti e leggeri. Molte volte il punto di partenza di questo fenomeno fu un corpo organico, in altri casi un cristallo, un ciottoletto, un frammento di roccia. Finalmente in un gran numero di noduli si esercitarono energicamente le forze cristallogeniche, in virtù delle quali la materia di cui risultano assunse struttura cristallina; e si dànno anche aggregati nei quali i caratteri delle druse cristalline prevalgono rispetto a quelli proprî ai noduli.

L'azione accentratrice esercitata dai corpi organici non sembra generalmente adeguata al loro volume; in altre parole non si mostra più energica in quelli di maggiori dimensioni. È assai comune la conversione per pseudomorfosi in minerali diversi (limonite, pirite, siderite, calcite, silice ecc.) delle conchiglie, dei gusci di brachiopodi e di crostacei, dei polipai che servirono di centro ad adunamenti nodulari e d'incentivo alla formazione loro.

Il fenomeno di concentrazione, che contribuì, nella pluralità dei casi, alla formazione dei noduli, fu talvolta accompagnato o susseguito da riduzione di volume, d'onde una contrazione che si accusa con soluzioni di continuità o separazione di un nucleo.

Nelle sferoliti i fenomeni di assetto nodulare ad involucri concentrici e di distribuzione elettiva di minerali diversi ebbero origine in seno ad un magma liquefatto. Di ciò porge sicura prova la formazione di sferoliti ricchi di tridimite, verificatasi durante il raffreddamento del cristallo fuso riferibile alla varietà *quinquet* (cristallo a base di silicati di piombo, sodio e potassio) avvenuta nel 1914, entro i crogiuoli della vetreria di Baccarat, quando i lavori dell'officina furono interrotti a causa dell'invasione germanica.

La temperatura raggiunta dal cristallo in fusione era di 1350°; quella alla quale si separò la tridimite in tavolette esagonali di circa 800° (1).

Terminerò affermando come nei tipi di pietre figurate compresi sotto il nome di bioliti la materia organica abbia preso parte preponderante; e ritengo che non sia stata estranea alla produzione di noduli, che ricettavano originariamente spoglie di animali o di piante, anche in molti casi nei quali queste non appariscono più. La decomposizione della materia organica si mostra infatti incentivo potente di reazioni chimiche e di mutamenti molecolari in seno ai materiali politici. Spero mi sia concesso in avvenire di sviluppare questi miei concetti, avvalorandoli di opportuni documenti.

È facile intendere come nei noduli il tipo sferoidale sia stato bene spesso alterato dalle condizioni nelle quali si produceva l'accrescimento della pietra; così, ad esempio, nei terreni stratificati lo sviluppo si verificava più agevolmente parallelamente al piano degli strati e si originavano di preferenza forme lenticolari. Fra le pisoliti, quelle che avevano origine nel fondo della depressione in cui si raccoglievano le acque incrostanti, per l'ostacolo stesso opposto dalla parete rocciosa al loro sviluppo, assumevano forma emisferica, e se il movimento delle acque induceva precipuamente nelle piccole concrezioni un movimento di rotazione intorno ad un asse orizzontale, si foggiavano in corpi fusiformi o cilindracei.

Quanto ai noduli multipli, ognun vede come derivino indubbiamente da che si iniziarono a breve distanza l'uno dall'altro due o più noduli semplici, i quali vennero a contatto fra loro, e poi si saldarono più o meno intimamente. In alcuni casi l'associazione degli elementi semplici fu tanto profonda da mascherare in certo modo gli individui originarî, e ne risultarono varietà morfologiche nuove, più o meno bizzarre: ovoidi o cilindroidi affetti da strozzature, amigdale dai margini lobati, adunamenti fungiformi, botrioidali ecc.

Terminerò tributando i più caldi ringraziamenti ai colleghi ed amici che vollero prestarmi il loro valido concorso: al prof. Guido Pellizzari, il quale eseguì per me alcune analisi chimiche; al prof. Ernesto Manasse, cui debbo l'esame petrografico di parecchie sezioni sottili; al prof. Ignazio Galli, e al prof. Ottone Penzig, che mi somministrarono note bibliografiche; al prof. Alessandro Portis, il quale mi comunicò cenni descrittivi di una rara folgorite; al prof. Pilade Lachi, autore di ottime fotografie microscopiche, eseguite a mia richiesta; al prof. Paolo Principi, cui debbo altre fotografie destinate ad illustrare questi appunti; al sig. G. Abbot, che mi offrì generosamente esemplari e figure di noduli (2).

(1) Revue scientifique, 15-22 juillet 1916, pag. 435.

(2) Ho usufruttato in questa Memoria solo piccola parte dei materiali relativi allo studio delle pietre figurate che mi furono forniti dalla benevolenza altrui o che ebbi agio di raccogliere personalmente. Per ragioni indipendenti dalla mia volontà non mi è stato possibile di pubblicare le figure desunte dalle accennate fotografie, come pure le osservazioni, pervenutemi troppo tardi, dai colleghi Pellizzari, Manasse e Portis; ma spero mi sia concesso di corredarne un altro lavoro, ormai quasi compiuto.

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª Transunti.
2ª Memorie *della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali.*
3ª Memorie *della Classe di scienze morali storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — Transunti. Vol. I-VIII. (1876-84).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — Rendiconti. Vol. I-VII. (1884-91).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — Rendiconti *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali* Vol. I-XXV. (1892-1916). Fasc. 4°. Sem. 2°.
Rendiconti *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XXIV. (1892-1916). Fasc. 3-4.
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XI. Fasc. 11.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XII. Vol. XIV. Vol. XV. Fasc. 1-3.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia è di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

Ermanno Loescher & C.° — *Roma, Torino e Firenze.*
Ulrico Hoepli. — *Milano, Pisa e Napoli.*

MEMORIE DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

(Anno CCCXIII 1916)

Serie Quinta — Volume XI — Fascicolo XII.

ARISTIDE STEFANI

CONTRIBUTI
ALLA
FISIOLOGIA DEL CUORE E DEI VASI

Smithsonian Institution
SEP 2 9 1924

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI
PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI
1916

Contributi alla fisiologia del cuore e dei vasi.

Memoria del Socio A. STEFANI

presentata nella seduta del 4 gennaio 1916

Arrivato oramai nel settantesimo anno di vita, m'è parso che il miglior modo di adoperare a vantaggio degli studî l'attività che ancora mi rimane, sia quello di rivedere e di coordinare il lavoro compiuto, convinto che nessuno può essere critico migliore dell'autore stesso, quando egli sia animato da vero spirito di verità.

In questi sentimenti sta l'origine dell'attuale Memoria, che riassume, in modo coordinato, i risultati degli studî fatti sulla fisiologia del cuore e dei vasi, Memoria che sarà seguìta da altre, se il tempo e le forze me lo permetteranno.

SOMMARIO

Parte prima. — **CUORE.**

Capitolo I. Premesse - applicazione del metodo pletismografico allo studio del carico e dello scarico del cuore, e stato delle cognizioni intorno allo scarico medio. — Cap. II. Fistola del pericardio e genesi della curva cardiovolumetrica. — Cap. III. Caratteri della curva cardiovolumetrica: 1. Parte discendente; 2. Parte ascendente; 3. Passaggi; 4. Onde; 5. Altezza; 6. Differenze fra le curve cardiovolumetriche a battiti rarefatti e quelle a battiti di frequenza ordinaria; 7. Durata relativa dei periodi componenti una rivoluzione cardiaca; 8. Aumento progressivo del volume del cuore, prodotto dalla dispnea; sangue residuo e azione del salasso; 9. Tono del cuore; 10. Conclusione. — Cap. IV. Rapporti delle curve cardiovolumetriche con quelle del battito, del polso arterioso e del polso venoso: 1. Cardiovolume e cardiogramma; 2. Cardiovolume e polso arterioso; 3. Cardiovolume e polso venoso; 4. Conclusione.— Cap. V. Della attività diastolica. 1. Rilasciamento attivo delle fibre muscolari del cuore in rapporto con le moderne dottrine sulla irritabilità e sulla espansione attiva dei muscoli. 2. Azione aspirante del cuore. *a*) Cenno storico e stato della questione all'inizio delle mie ricerche; *b*) Dottrina dell'aspirazione sistolica; *c*) Dottrina della aspirazione diastolica: per elasticità, per ingresso del sangue nelle coronarie durante la diastole, per espansione attiva delle pareti del cuore; *d*) Esperienze di Goltz e Gaule e mie. — Cap. VI. Ricerche fatte per provare la reale esistenza di una attività diastolica. 1. Azione, sul circolo, di una pressione nella cavità del pericardio; *a*) Effetti di una pressione pericardica progressivamente crescente e zero fisiologico della pressione sanguigna; *b*) Altezza della pressione venosa e della pressione pericardica nel momento in cui il circolo è da questa arrestato, *pressione diastolica o forza espansoria del*

cuore e misura di essa. 2. Azione del vago sulla attività espansoria del cuore: *a*) Effetti del taglio dei vaghi sull'altezza della pressione diastolica; *b*) Effetti della stimolazione del vago sull'altezza della pressione diastolica. 3. Azione del vago sulla forma delle curve cardiovolumetriche: *a*) Effetti del taglio dei vaghi; *b*) Effetti della stimolazione del vago (elettrica, dispnoica e pressoria). 4. Azioni farmacologiche sulla attività espansoria del cuore: *a*) Digitale; *b*) Atropina. *c*) Stricnina; 5. Conclusioni. — Cap. VII. Eccitazione termica del centro bulbare inibitore dei movimenti del cuore, e significato della innervazione cardiaca del vago: 1. Eccitazione termica del centro bulbare inibitore dei movimenti del cuore. 2. Significato della innervazione cardiaca del vago (eccitabilità dispnoica, pressoria e termica) — Cap. VIII. Rivista di alcune pubblicazioni: Ebstein, Henderson, Nicolai, Schmiedeberg, Straub, Piper.

Parte seconda. — VASI.

Capitolo I. Premesse sugli uffici dei vasi e sulla origine fisica e fisiologica dei movimenti di questi. — Cap. II. Mutamenti del lume vasale prodotti da pressione interna, e quindi di origine fisica: 1. Metodo di ricerca; 2. Esperienze; 3. Conclussioni. — Cap. III. Mutamenti del lume vasale in vasi sottoposti a pressione costante, e quindi d'origine fisiologica; metodi di ricerca: 1. Mutamenti d'origine locale; 2. Mutamenti d'origine centrale; 3. Mutamenti d'origine riflessa. — Cap. IV. Azioni vasomotorie di stimoli fisiologici circolanti nel sangue: 1. Urea; 2. Sangue dispnoico e carbossidato; 3. Sali biliari; 4. Temperatura del sangue; 5. Pressione del sangue. — Cap. V. Dimostrazione di nervi vasomotori per mezzo di circolazioni artificiali. — Cap. VI. Circolazione collaterale. — Cap. VII. Inversione della reazione vasomotoria locale prodotta dall'aumento della dose del farmaco. — Cap. VIII. Considerazioni generali: 1. Tono e movimenti ritmici dei vasi; 2. Sensibilità dei vasi; 3. Movimenti vasali d'origine locale e d'origine centrale; 4. Attitudine di uno stesso stimolo a spiegare azioni locali e centrali di carattere opposto.

PARTE PRIMA

CUORE.

CAPITOLO I.

Premesse: applicazione del metodo pletismografico allo studio del carico e dello scarico del cuore e stato delle cognizioni intorno allo scarico medio.

Nel 1877 iniziai delle ricerche sul carico e scarico del cuore, con metodo pletismografico, registrando, per mezzo della fistola del pericardio, i mutamenti del volume del cuore, i quali non possono dipendere che dal carico e dallo scarico dello stesso; e nello studio di questo argomento, di capitale importanza per la fisiologia del cuore e della circolazione, perseverai per una quindicina d'anni, dimostrando fatti che interessano specialmente la genesi del carico (1).

Le ricerche da me eseguite sono numerose e svariate, ma tutte logicamente collegate fra di loro e tutte concorrenti a dimostrare un fatto di molto interesse: *che,*

(1) I lavori da me pubblicati in argomento sono: *Nuovo metodo per studiare le variazioni del volume del cuore e gli effetti di una pressione nella cavità del pericardio.* Accad. medica di Ferrara, 1877. — *Intorno alle variazioni del volume del cuore ed alla aspirazione diastolica.* Accad medica di Ferrara, 1878; Arch. per le scienze mediche, vol. III, 1878. — *Intorno al modo con cui il vago agisce sul cuore.* Accad. medica di Ferrara, 1882; Rivista clinica, 1882. — *Contribuzione farmacologica alla dottrina della attività della diastole* (in collaborazione con G. Gallerani). Arch. per le scienze mediche, vol. XIV, 1890. — *Cardiovolume, pressione pericardica e attività della diastole.* Accad. medica di Ferrara, 1891; Archives italiens de Biologie, tom. XVIII, 1892.

Il mio primo lavoro: *Nuovo metodo* ecc. fu comunicato all'Accademia di Ferrara il 24 novembre 1877, senza sapere che il 28 maggio dello stesso anno era stato comunicato all'Accademia delle scienze di Parigi un lavoro del François-Frank, in cui era descritto lo stesso metodo, *Changements de volume et debits du cœur* [Compt. rend., LXXXIV, pag. 1242 (1877)].

Che le mie ricerche con la fistola del pericardio siano state iniziate prima che fosse apparsa la comunicazione del François-Frank, ne fa fede il Mosso, il quale, nel suo lavoro *Sul polso negativo* (Arch. per le scienze mediche, 1878) in una nota, a pp. 23-24, scrive che fino dal maggio 1877 io aveva a lui comunicato una serie di esperienze sui cambiamenti del volume del cuore, eseguite con la fistola del pericardio.

Da questa nota del Mosso rimane dimostrato che la fistola del pericardio, per lo studio delle variazioni del volume del cuore, fu praticata di mia iniziativa, e che le prime ricerche con questa fistola furono da me eseguite contemporaneamente al François-Frank, e che la priorità delle stesse spetta quindi egualmente al François-Frank ed a me.

cioè, anche il carico è regolato da una attività del cuore; ed esse costituiscono perciò un tutto organico.

Ad una pubblicazione coordinata di esse andavo pensando da qualche anno, senza mai decidermi, perchè avrei amato di aggiungere alle vecchie qualche nuova ricerca coi mezzi d'indagine più moderni.

La mia perplessità fu vinta dalla lettura di recenti lavori, la quale mi persuase che era mio debito di disseppellire, finchè era ancora in tempo, i miei vecchi studî perchè poco conosciuti e non sempre giustamente interpretati; e dalla considerazione che la mancanza di nuove ricerche era in parte compensata dalle ripetute conferme che i miei risultati avevano avuto nell'Istituto.

L'obbiezione più grave alle mie ricerche pletismografiche è che il pericardio non può costituire un buon pletismografo, perchè le sue pareti non sono rigide. Questa obbiezione me la sono fatta io per primo, all'inizio dei miei lavori; e non avrei insistito in essi, se non mi fossi persuaso che, per la mancanza di rigidità nelle pareti del pericardio, non poteva essere intaccato il valore comparativo dei risultati, e che gli errori derivanti da questa mancanza di rigidità non potevano essere notevoli, come farò conoscere più innanzi.

Però, considerando che le pareti del pericardio non sono rigide, e che la diminuzione del volume del cuore non rappresenta esattamente lo scarico reale dei ventricoli, ma lo scarico dei ventricoli diminuito della quantità di sangue che durante lo stesso entra nelle orecchiette (e rispettivamente si dica rispetto al carico), mi sono astenuto dal calcolare la quantità dello scarico e del carico dall'abbassamento e dall'innalzamento della leva registratrice, e mi sono limitato a studiare i rapporti fra scarichi e carichi, il tempo e il modo con cui questi si compiono, tenendo conto specialmente di quei caratteri delle curve registrate, il cui significato non può essere dubbio.

Prima che io mi dedicassi a questi studî, si era cercato, in diversi modi, di determinare lo *scarico medio* dei ventricoli del cuore *per rivoluzione* e *per secondo*; ma nessuna indagine era stata fatta sullo scarico reale delle singole rivoluzioni, nè sul tempo, nè sul modo con cui esso si compie; e, rispetto al carico, tutti si erano limitati a considerarlo, per necessità idraulica, come eguale allo scarico.

Ma se per necessità idraulica il carico medio deve essere eguale allo scarico medio, non si può escludere che il carico di una rivoluzione possa essere diverso dallo scarico che lo precede, e che la differenza sia poi compensata nelle rivoluzioni successive ([1]).

Le curve cardiovolumetriche, registrando il tempo e il modo con cui si compiono il carico e lo scarico, e registrando le eventuali differenze quantitative fra i medesimi,

([1]) Una considerazione analoga si può fare rispetto allo scarico complessivo del cuore, che fu calcolato raddoppiando lo scarico medio di un ventricolo. Se lo scarico medio del ventricolo destro deve essere eguale a quello del sinistro (poichè altrimenti il sangue si accumulerebbe nella grande oppure nella piccola circolazione, e l'altra rimarrebbe esangue), non si può però escludere che in una data rivoluzione lo scarico del ventricolo destro possa essere diverso da quello del sinistro, e che la differenza si compensi nelle rivoluzioni successive.

ci possono evidentemente fornire dei lumi preziosi intorno alle cause, in genere, del carico e dello scarico, e specialmente intorno ai rapporti causali fra questo e quello.

Quando iniziai le mie ricerche, si ammetteva che lo scarico medio di un ventricolo del cuore fosse per l'uomo, di circa c.c. 180. Ma gravi erano le critiche che si potevano muovere ai metodi con cui questa cifra era stata calcolata; e successive ricerche dimostrarono che essa è in realtà molto lontana dal vero, e che la quantità di detto scarico si aggira invece intorno a soli c.c. 60.

La cifra di c.c. 180 fu calcolata in base alla capacità anatomica dei ventricoli, alla velocità del sangue nell'aorta, e alla durata di una circolazione completa.

Partendo dalle premesse che la quantità di sangue, che si raccoglie nei ventricoli durante la diastole, corrisponda alla capacità anatomica degli stessi, e che nella sistole i ventricoli si svuotino completamente, lo scarico del cuore fu considerato come eguale alla capacità anatomica dei ventricoli, vale a dire, per ciascun ventricolo, c. c. 180 circa (1). Ma le premesse suindicate non sono ammissibili teoricamente, e sperimentalmente sono state dimostrate erronee.

Le pareti del cuore sono elastiche e contrattili; e, perciò, non solo la capacità dei ventricoli deve variare a seconda che maggiore o minore è la pressione del sangue in essi contenuto, ma lo scarico ed il carico dei medesimi devono variare a seconda che più o meno completa è nella sistole la contrazione delle loro pareti ed a seconda che nella diastole è più o meno completo il rilassamento delle stesse. E in fatto, come si vedrà più innanzi, ho potuto dimostrare che lo scarico del cuore ora è più ed ora è meno completo, per cui, alla fine della sistole, residua nei ventricoli una quantità di sangue ora maggiore ed ora minore (*sangue residuo* o *stagnante*); e che alla fine della diastole il cuore si trova in uno stato ora di maggiore ed ora di minore rilassamento, e che quindi il sangue in esso contenuto ora è in quantità maggiore ed ora in quantità minore (*tono del cuore*).

La impossibilità di dedurre lo scarico dei ventricoli dalla loro capacità anatomica era da prevedersi considerando che, mentre dalle ricerche anatomiche risulta essere nell'uomo la capacità del ventricolo destro superiore a quella del sinistro, per necessità idraulica lo scarico medio del ventricolo destro deve essere eguale a quello del sinistro, perchè altrimenti il sangue si accumulerebbe nella piccola o nella grande circolazione, rimanendo l'altra, più o meno, esangue; ma non era però da prevedersi che lo scarico medio del cuore fosse tanto inferiore alla capacità anatomica dei ventricoli, siccome è da ritenersi in base alle ricerche più recenti.

Volkmann (2) prima, e poi Vierordt (3), cercarono di determinare lo scarico medio del cuore misurando la velocità del sangue nell'aorta. La quantità di sangue, che in

(1) Secondo i dati, generalmente accettati, di Hiffelsheim e Robin (Journ. d. l. Anat. et d. l. Physiol. 1864), la capacità media del ventricolo destro dell'uomo è di c.c. 195, e quella del sinistro è di c.c. 177.

(2) Volkmann, *Die Hämodynamik.* Leipzig, 1850, pag. 204.

(3) Vierordt, *Erscheinungen und Gezetze der Stromgeschwindigkeit des Blutes.* Frankfurt, 1858, pag. 104.

una unità di tempo passa attraverso la sezione trasversa dell'aorta, rappresenta la quantità di sangue di cui il ventricolo sinistro si scarica nella detta unità; e perciò, se si potesse conoscere quella, sarebbe conosciuta anche questa.

Secondo le leggi idrauliche, la quantità di liquido che nella unità di tempo passa attraverso la sezione di un tubo è eguale alla velocità, con cui il liquido si muove, moltiplicata per la detta sezione; e per conseguenza, dato il lume dell'aorta, quando fosse determinata la velocità del sangue nella stessa, si potrebbe calcolare la quantità di sangue che passa attraverso di essa, e quindi lo scarico del ventricolo sinistro, nella unità di tempo: scarico che, diviso per il numero dei battiti effettuatisi nella stessa unità, darebbe lo scarico medio per rivoluzione.

In base ai risultati di misure della velocità del sangue nell'aorta, eseguite su animali di diversa specie, il Volkmann calcolò lo scarico medio del ventricolo sinistro, per rivoluzione, come eguale ad $^1/_{400}$ del peso del corpo, e quindi, per un uomo di kgr. 70, di cc. 175 circa; e, pochi anni dopo, i calcoli del Volkmann furono confermati dal Vierordt. Secondo questo sperimentatore, lo scarico medio del ventricolo sinistro sarebbe stato solamente un po' maggiore, $^1/_{353}$ del peso del corpo.

Le cifre del Volkmann e del Vierordt sono in sufficente accordo con la capacità anatomica dei ventricoli; ma gravi sono gli appunti che si possono fare al modo con cui furono ottenute.

Anche lasciando da parte i difetti dell'*emodrometro del Volkmann* con cui fu misurata la velocità del sangue, e lasciando anche da parte che la velocità del sangue non fu misurata nell'aorta ma calcolata dalla velocità misurata nella carotide, è da rilevarsi che non è possibile di formulare una media della velocità del sangue nelle grosse arterie che possa servire di base per calcolare il carico del cuore, e ciò per il fatto che troppo grandi e irregolari sono le oscillazioni che si verificano nella detta velocità. E come non è possibile una media attendibile della velocità del sangue nell'aorta, così non è neppure possibile una media esatta del lume dell'aorta in vita, e ciò per i mutamenti continui che esso subisce in causa del polso.

Hering (1) misurò per primo la durata di una circolazione nel cavallo dimostrando che essa si compie in 27 rivoluzioni del cuore, e il Vierordt successivamente dimostrò che in 26-28 rivoluzioni si compie la circolazione completa del sangue in tutti i mammiferi, di qualunque specie e di qualunque grandezza, qualunque sia la frequenza dei battiti rispettivi (2).

(1) Hering, *Tiedmann und Treviranus Zeitschrift für Physiologie*, III, 1829.

(2) Vierordt, *Erscheinungen und Gesetze* etc.

Riporto dalla fisiologia della circolazione del Tigerstedt (*Die Physiologie des Kreislaufs*. Leipzig, 1893) la seguente tabella relativa alla durata di una circolazione ed al numero dei battiti cardiaci che si verifica, durante la stessa, in mammiferi di specie e grandezza diversa:

Specie	Peso	Durata di una circolazione in secondi	Numero delle pulsazioni in un minuto	Numero dei battiti cardiaci durante una circolazione
Coniglio	kgr. 1.4	7.46	210	26.1
Capretto	» 3.8	14.14	110	26.0
Cane	» 9.2	16. 7	96	26.7
Cavallo	» 380.0	31. 5	55	28.7

In 26-28 rivoluzioni, il cuore dovrebbe dunque scaricare nel circolo tutta la massa del sangue; e per conseguenza, dividendo questa massa per 26-28, si dovrebbe avere lo scarico medio del ventricolo sinistro per rivoluzione.

La massa del sangue, secondo le ricerche del Weber, corrisponde nei mammiferi al 7-8 % del peso del corpo: e perciò, per un uomo di kgr. 70, essa dovrebbe essere di kil. 5 circa, e quindi in quest'uomo lo scarico medio del ventricolo sinistro dovrebbe essere: $\frac{5000}{28} = 180$ c. c. circa.

Anche questa cifra corrisponde alla capacità anatomica dei ventricoli come quelle del Volkmann e del Vierordt; ma come queste, secondo le più recenti ricerche, è da ritenersi molto lontana dal vero.

Il compiersi di una circolazione completa del sangue, in tutti i mammiferi, in 26-28 rivoluzioni del cuore, dimostra che esiste, senza dubbio, un rapporto tra la massa del sangue e lo scarico medio del cuore; e se la cifra surriferita è lontana dal vero, la causa è da cercarsi nella poca esattezza dei metodi con cui si misura la durata di una circolazione (¹); nel fatto che la durata di una circolazione non può essere la stessa nei diversi distretti vascolari, e che perciò il sangue che parte dal cuore non ritorna tutto contemporaneamente al cuore; e nel fatto che la massa del sangue, nell'animale su cui si sperimenta, può essere diversa dalla media data dal Weber.

Nel 1886, e quindi alcuni anni dopo l'inizio delle mie ricerche cardiovolumetriche, Grehant e Quinquaud (²) tentarono di determinare nel cane lo scarico del ventricolo destro, calcolando la quantità di sangue che deve passare attraverso i polmoni in una unità di tempo per poter scaricare il CO^2 esalato, o per poter caricarsi dell'O^2 assorbito nella stessa unità di tempo; e simili ricerche, che segnano un notevole progresso in argomento, furono, pochi anni dopo, ripetute dallo Zuntz (³).

Se la differenza in CO^2 fra il sangue che va ai polmoni e quello che dai polmoni ritorna, fosse di 5 vol. per 100 vol. di sangue, per scaricare 5 cc. di CO^2 dovrebbero evidentemente passare per i polmoni 100 cc. di sangue.

(¹) La durata di una circolazione si misura, com'è noto, misurando il tempo che il ferrocianuro di potassa o di soda, iniettato in una vena, impiega a comparire nella vena omonima dell'altro lato. Ma in questo modo non si misura, in realtà, il tempo che impiega il sangue, che parte dal cuore, a ritornare al cuore; sibbene il tempo minimo col quale il sangue può fare questo tragitto. E se a questa considerazione si aggiunge che il sale iniettato, non solo viene trasportato meccanicamente dal sangue, ma si diffonde anche in questo, è logico di ritenere che il tempo, impiegato, in media, dal sangue scaricato dal cuore, per ritornare al cuore, abbia ad essere maggiore di quello indicato dall'Hering e dal Vierordt.

(²) Grehant et Quinquaud, *Recherches expérim. sur la mesure du volume du sang qui traverse les poumons en un temps donné*. Compt. rend. d. l. Soc. d. biologie, 1886.

Secondo una citazione del Nicolai (Nagel's Handbuch der Physiol., B. I, pag. 749. Braunschweig, 1909), l'idea di calcolare lo scarico del cuore dagli scambî respiratorii risale al Fick.

(³) Zuntz, *Ueber eine neue Methode zur Messung der circulirende Blutmenge*. Arch. d. Pflüger, B. LV, 1894.

In base ai risultati delle ricerche di Grehant e Quinquaud e poi dello Zuntz, lo scarico medio del ventricolo destro nell'uomo si calcola di cc. 75 circa, quantità inferiore alla metà di quella ammessa dal Volkmann; e questa cifra trova conferma nel calcolo che segue.

Il consumo medio di O^2 da parte di un uomo adulto, nelle 24 ore, si calcola di litri 500; e la differenza in O^2 fra il sangue che va e quello che ritorna dai polmoni si calcola, in media, di 7 vol. per 100 vol. di sangue. Ciò posto, per assumere 500 litri di O^2 dovrebbero passare nelle 24 ore, attraverso i polmoni, circa 7000 litri di sangue, perchè $7:100 = 500: 7143$.

E se nelle 24 ore passano 7000 litri di sangue, in un secondo passeranno per i polmoni cc. 81 circa, e quindi, per rivoluzione, cc. 68, dato che la frequenza media dei battiti del cuore sia di 71 al minuto (1).

Lo Stolnikow (2), nel 1886, e, pochi anni dopo, il Tigerstedt (3) tentarono di misurare direttamente lo scarico del ventricolo sinistro.

A tale scopo, lo Stolnikow semplificò, nel cane, la circolazione mediante la legatura di tutte le arterie che derivano dall'aorta, ad eccezione dell'ascellare destra e delle coronarie, e mediante la legatura di tutte le vene prossime al cuore, ad eccezione della giugulare, della cava superiore e della coronaria. In conseguenza di ciò, tutto il sangue scaricato dal ventricolo sinistro dovea passare per l'ascellare, ad eccezione di quel poco che serviva alla nutrizione del cuore, e il sangue veniva portato al cuore solamente dalla giugulare e dalla vena coronaria. Nella vena giugulare il sangue, precedentemente defibrinato, entrava da apposito vaso, sotto una pressione eguale alla pressione venosa. Dall'arteria ascellare il sangue entrava in un tubo graduato che ne misurava la quantità, e da questo poteva passare nella giugulare e circolare di nuovo. In simili condizioni il cuore può continuare a contrarsi, perchè non rimane interrotta la circolazione attraverso ad esso ed attraverso ai polmoni.

Il Tigerstedt tentò di misurare direttamente lo scarico del ventricolo sinistro, evitando i gravi turbamenti circolatorii che si verificano nelle esperienze dello Stolnikow, e ciò mediante l'applicazione, all'aorta del coniglio, del misuratore della corrente di Ludwig. L'operazione non è certo delle più facili; ma pare che con un po' di pratica si possano ottenere buoni risultati. Operando in questo modo, il Tigerstedt eliminò anche alcuni errori derivanti dalla circolazione semplificata dello Stolnikow, e particolarmente quello dipendente dalla soppressione delle resistenze dei capillari che normalmente ostacolano lo scarico del ventricolo sinistro.

Lo Stolnikow, in base ai risultati delle sue ricerche nel cane, calcolò lo scarico medio per rivoluzione del ventricolo sinistro dell'uomo cc. 78; e il Tigerstedt, in base ai risultati delle sue ricerche nel coniglio, lo calcolò cc. 55.

(1) Secondo alcune mie note, questo calcolo è stato fatto dal Place; ma non ho trovato la indicazione del lavoro.

(2) Stolnikow, *Die Eichung des Blutstromes in der Aorta des Hundes*. Arch. f. (Anat. u.) Physiologie, 1886.

(3) Tigerstedt, *Studien über die Blutvertheilung in Korper*. Skand. Arch. f. Physiologie, 1891.

Queste cifre non si possono, certo, accogliere senza riserve, ma non devono essere molto lontane dal vero.

Riassumendo, in base ai risultati ottenuti per mezzo degli scambî respiratorii, e in base ai risultati delle misure dirette, parmi che si possa ammettere che lo scarico medio, per rivoluzione, di un ventricolo del cuore, nell'uomo adulto, si aggiri intorno a cc. 60-70, quantità corrispondente ad $^1/_3$ circa di quella che si ammetteva, allorquando furono iniziate le mie ricerche pletismografiche, in base alla capacità anatomica dei ventricoli, alla velocità del sangue nell'aorta e alla durata di una circolazione completa del sangue.

CAPITOLO II.

Fistola del pericardio e genesi della curva cardiovolumetrica.

Siccome ho già detto, la fistola del pericardio fu proposta da me come mezzo per indagare il carico e lo scarico del cuore, nel 1877 ([1]).

Costituendo il pericardio un sacco perfettamente chiuso, allorquando sia soppresso ogni movimento respiratorio, l'aumento e la diminuzione della pressione nella cavità del pericardio non possono dipendere che da un aumento o da una diminuzione del volume del contenuto pericardico: cuore ed origini dei grossi vasi ([2]).

I mutamenti di volume, che si verificano nelle origini dei grossi vasi in rapporto colle diverse fasi della rivoluzione cardiaca, sono, a mio avviso, di troppo piccolo grado per modificare in modo sensibile la pressione pericardica; e quando si considerano in relazione ai mutamenti del volume del cuore, essi non possono costituire che una quantità, dirò così, trascurabile. Le oscillazioni manometriche delle grosse vene sono appena sensibili ai manometri ad acqua; e se nelle arterie la pressione presenta dei mutamenti notevoli, le pareti arteriose, per compenso, hanno uno spessore tale, che il volume del vaso non può subire troppo grandi variazioni.

I mutamenti della pressione nel pericardio, a respirazione sospesa, devono dunque essere attribuiti, essenzialmente, a mutamenti del volume del cuore; e siccome il volume dei muscoli in riposo non differisce da quello dei muscoli in contrazione, ed i liquidi sono, praticamente, incompressibili, così i mutamenti volumetrici del cuore devono essere riferiti esclusivamente ad aumento o diminuzione della quantità di sangue contenuto nel cuore. E perciò, se si potessero registrare i mutamenti della

([1]) A. Stefani, *Nuovo metodo per studiare le variazioni del volume del cuore e gli effetti di una pressione nella cavità del pericardio.* Accademia medica di Ferrara, 1877.

([2]) Anche i mutamenti della pressione addominale, dipendenti da emissione di feci e di urine, da sviluppo e da uscita di gas, possono influire sulla pressione pericardica; ma, per chi ha un po' di pratica nelle ricerche grafiche, non sarà difficile il distinguere l'azione eventuale, sulla pressione pericardica, dei fatti sopraindicati dall'azione, sulla stessa, della sistole e della diastole del cuore.

pressione nella cavità del pericardio, a respirazione sospesa, si registrerebbero il carico e lo scarico del cuore.

Per registrare i mutamenti di pressione nella cavità pericardica, ho praticato la fistola del pericardio, e, innestata una cannula nell'apertura di questa membrana, ho messo in comunicazione la cavità del pericardio con un tamburino di Marey; e per eliminare l'azione, sulla pressione pericardica, dei movimenti muscolari in genere e dei movimenti respiratorî in ispecie, ho registrato la detta pressione in animali curarizzati, mentre rimaneva sospesa la respirazione artificiale, con cui i detti animali si mantenevano in vita. La fig. 1 rappresenta schematicamente l'esperienza.

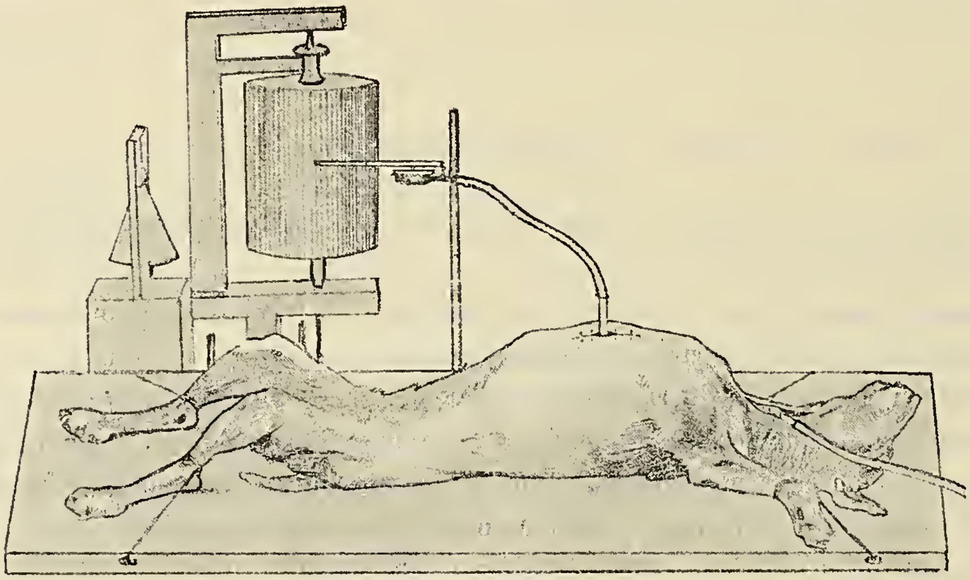


Fig. 1. — Cane curarizzato con fistola del pericardio e cavità del pericardio in comunicazione con un tamburino di Marey, che segna sopra il chimografo le oscillazioni della pressione pericardica. La cannula innestata nella trachea serve per la respirazione artificiale.

La fistola del pericardio fu da me praticata esclusivamente nei cani, che ritengo essere gli animali più opportuni per simili esperienze. Curarizzato l'animale e messa in opera la respirazione artificiale, si apre il torace dal lato sinistro, a poca distanza dallo sterno, mediante il taglio, oltre che delle parti molli, anche di due o tre coste. Il taglio delle coste è seguìto spesso da grave emorragia, che deve essere frenata prima di procedere innanzi coll'esperienza, perchè il sangue rende più difficile l'esecuzione degli atti operativi, e perchè, accumulandosi nella cavità del torace, e del pericardio specialmente, può turbare la funzione del cuore. Aprendo il torace lateralmente, per ragioni anatomiche ben note, l'emorragia è minore, ma la fistola non corrisponde così bene allo scopo come quando il torace è aperto più all'avanti.

Aperto il torace, si afferra il pericardio per mezzo di un uncino acuto. Questo è l'atto più difficile, perchè l'uncino, specialmente negli animali in cui il pericardio è coperto da adipe, può essere infisso troppo superficialmente, senza penetrare in cavità, e lasciare poi la presa quando viene stirato; e perchè l'uncino può essere infisso troppo profondamente ed entrare nelle carni del cuore, irritando le fibre del miocardio

e impedendo che il pericardio possa essere sollevato verso l'apertura praticata nel torace.

Allo scopo di evitare simili inconvenienti, si prende di mira una parte del pericardio non coperta da adipe, al disopra dei ventricoli, e si profitta del breve momento della sistole ventricolare per infiggere l'uncino in qualche piega che durante la stessa si forma nella membrana pericardica.

Uncinato il pericardio, esso viene stirato verso l'apertura del torace; e in una delle pieghe, che si formano per questa trazione, si infigge un secondo uncino alla distanza di 4-5 millimetri dal primo. Mentre i due uncini sono entrambi stirati verso l'apertura praticata nel torace, si incide fra essi il pericardio in modo da formare un'apertura lunga 5-6 millimetri; si insinua in questa apertura una cannula in precedenza preparata, e intorno alla stessa si lega quindi strettamente il pericardio con filo robusto, passando questo filo sotto gli uncini che tengono il pericardio sollevato.

Così operando, si è sicuri che la cavità del pericardio rimane in comunicazione coll'ambiente solamente per mezzo della cannula in essa innestata; e perciò, mettendo questa cannula in comunicazione con un tamburino di Marey, ogni mutamento di pressione nella cavità del pericardio si dovrà tradurre sulla cavità del tamburino, facendone alzare od abbassare, corrispondentemente, la leva, i cui movimenti sono registrati sul chimografo.

Perchè i mutamenti di pressione nella cavità del pericardio fossero perfettamente corrispondenti, proporzionali, ai mutamenti del volume del cuore, sarebbe necessario che le pareti nel pericardio fossero rigide. Per correggere il difetto dipendente da mancanza di rigidità del pericardio, dopo di avere innestato la cannula nel pericardio, giova di richiudere, mediante sutura, l'apertura del torace; perchè in seguito a questa chiusura la pressione atmosferica non può agire direttamente sulla superficie esterna del pericardio, ma solo per l'intermezzo dei polmoni, delle pareti toraciche e delle pareti e dei visceri addominali. I mutamenti della pressione pericardica, in queste condizioni, devono quindi corrispondere, con molta approssimazione, ai mutamenti di volume del cuore, benchè le pareti del pericardio non siano rigide [1].

Nel praticare la sutura della ferita toracica, si deve aver cura che la cannula sporga convenientemente attraverso la stessa e che sia bene assicurata alle labbra di essa, stirando leggermente il pericardio in alto.

La sutura della ferita toracica giova anche per ostacolare il progressivo abbassamento della temperatura interna, che si verifica negli animali curarizzati.

La cannula che ho trovato più opportuna è una delle solite cannule di vetro, che si fabbricano nei laboratorii, del diametro di 4-5 millimetri e della lunghezza di

(1) Quando si volessero misurare esattamente i mutamenti del volume del cuore per mezzo degli spostamenti della leva pletismografica, sarebbe certamente necessario di collocare il cuore in una cavità a pareti rigide, come fecero Roy ed Adami, *Remarks of the failure of the heart from overskain*, Brit. med. Journ. 1888; e successivamente l'Henderson, *The volume curve of the ventricles of the mammalian heart* etc. (American Journ. of physiol., vol. XVI, 1906). Ma quando, più che i dati assoluti, interessano i dati relativi; quando si desidera di conoscere, specialmente, se il carico e lo scarico di una rivoluzione sono stati maggiori o minori del carico e dello scarico di un'altra rivoluzione e come si sono compiuti, ritengo che al cardiometro del Roy sia preferibile la fistola del pericardio.

circa 15 centim., curva in modo che nella sua estremità libera, sporgente dal torace, si possa facilmente innestare il tubo di gomma in congiunzione col tamburino di Marey.

La curarizzazione deve essere spinta al grado da sopprimere ogni movimento respiratorio spontaneo.

La curva, segnata dalla leva del tamburino di Marey in comunicazione con la cavità del pericardio per mezzo della fistola pericardica, fu da me denominata *curva cardiovolumetrica.*

La diminuzione del volume del cuore, producendo diminuzione della pressione pericardica, produce abbassamento della leva: e perciò la *parte discendente* della curva cardiovolumetrica rappresenterà lo scarico del cuore; e rispettivamente, la *parte ascendente* ne rappresenterà il carico. Un decorso orizzontale nella detta curva significherà che, nel tempo corrispondente, il cuore non ha mutato di volume: lo che potrebbe derivare tanto da mancanza di entrata e di uscita di sangue dal cuore, quanto da eguaglianza fra l'entrata e l'uscita.

Il cuore normalmente si scarica del sangue in esso contenuto solamente per mezzo della sistole dei ventricoli, perchè la sistole delle orecchiette (fatta astrazione da qualche piccolo reflusso che può provocare nelle vene), non fa che travasare il sangue dalla cavità degli atrii in quella dei ventricoli. Ma nel tempo stesso che i ventricoli si scaricano, le orecchiette si caricano, e perciò la diminuzione del volume del cuore non corrisponde esattamente allo scarico ventricolare, ed è invece minore di esso di quella quantità di sangue che entra nelle orecchiette durante la sistole ventricolare. Non si conosce quale sia il valore di questa quantità; ma si sa che essa non può essere che una piccola frazione del carico auricolare, e che questo alla sua volta non è che una frazione del carico ventricolare; e, considerando tutto ciò, parmi che, senza incorrere in grave errore, si possa riguardare la *linea discendente* come rappresentante lo *scarico* dei ventricoli, e rispettivamente la *ascendente* come rappresentante il carico degli stessi [1].

La *altezza della parte discendente* indicherà quindi la quantità dello scarico dei ventricoli; e, rispettivamente, l'*altezza della parte ascendente* indicherà la quantità del carico dei medesimi.

Se la parte discendente si arresterà ad un livello più alto di quello a cui era discesa nella rivoluzione precedente, ciò significherà che lo scarico è stato meno completo in confronto alla rivoluzione precedente; vale a dire che nei ventricoli, dopo la sistole, è rimasta una maggiore quantità di sangue; e rispettivamente, se discenderà ad un livello più basso, ciò significherà, invece, che lo scarico è stato più completo. E così, se la parte ascendente salirà a maggiore altezza, ciò indicherà che il cuore si è caricato di maggior quantità di sangue; e, se si arresterà ad un livello più basso, ciò indicherà che il cuore si è caricato di minore quantità di sangue.

L'inclinazione della parte discendente e della ascendente indicherà la rapidità dello scarico e del carico, e la durata dell'una e dell'altra il tempo che scarico e carico impiegano per effettuarsi.

[1] Simili conclusioni sono confermate dalle osservazioni dell'Henderson (lavoro sopracitato), secondo le quali, nel cane, lo scarico delle orecchiette nei ventricoli corrisponde solamente a qualche frazione di centimetro cubico.

Se il carico e lo scarico si faranno in modo continuo, continue saranno anche le linee che li rappresentano; e se saranno interrotti, si verificheranno, lungo le stesse, delle onde o delle intaccature.

Per la buona riuscita di queste ricerche, è necessario che il curaro sia di buona qualità, che produca cioè la sospensione completa di ogni movimento volontario, e in particolare della respirazione, senza turbare il regolare funzionamento del cuore, e, più specialmente, senza paralizzare il vago.

CAPITOLO III.

Caratteri delle curve cardiovolumetriche, e loro significato.

I caratteri che vengono qui descritti si riferiscono a curve cardiovolumetriche, ottenute mentre i battiti del cuore erano notevolmente rarefatti per la eccitazione dispnoica del vago, prodotta dalla sospensione della respirazione artificiale; e su questa circostanza richiamo specialmente l'attenzione.

Per procedere con metodo, descriverò distintamente la parte discendente, la parte ascendente, i passaggi, le onde, l'altezza e la durata relativa delle varie parti di queste curve; dirò quindi della differenza fra le curve a battiti rarefatti e le curve a battiti di frequenza ordinaria, dell'aumento progressivo del volume del cuore che si produce nella dispnea e delle oscillazioni che talora si osservano nel detto volume; e, dopo di ciò, formulerò le conclusioni basandomi specialmente su quei caratteri, il cui significato non può essere dubbio.

***

1. **Parte discendente.** — La parte discendente *ab* (fig. 2, 3, 4) che è prodotta, come ho detto, dalla diminuzione del volume del cuore, e rappresenta quindi

Fig. 2. — Curve cardiovolumetriche ottenute durante la eccitazione dispnoica del vago; *ab*, parte discendente; *ba*, parte ascendente; *bc*, linea rapidamente ascendente della parte ascendente; *ca*, linea lentamente ascendente della parte ascendente. — N. B. Tutti i tracciati vanno letti da sinistra a destra.

lo scarico dei ventricoli, è formata da una linea pochissimo inclinata, che discende cioè rapidamente, non interrotta, di solito, da oscillazioni.

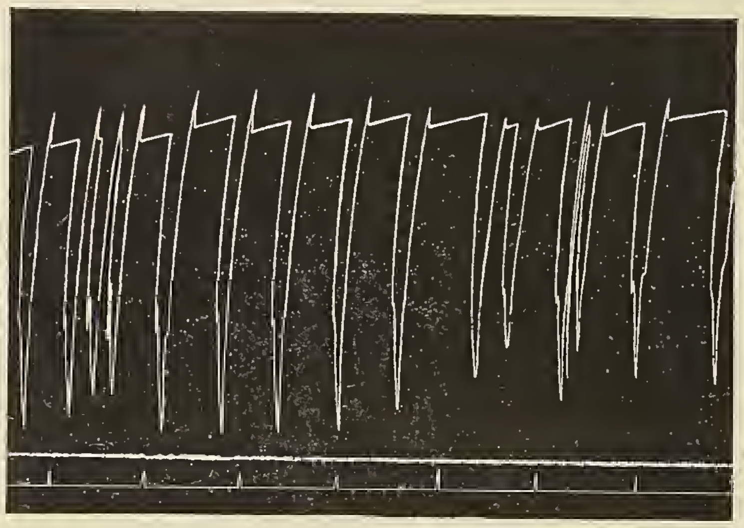


Fig. 3. — Curve cardiovolumetriche ottenute durante la eccitazione dispnoica del vago, come le precedenti, fig. 2.

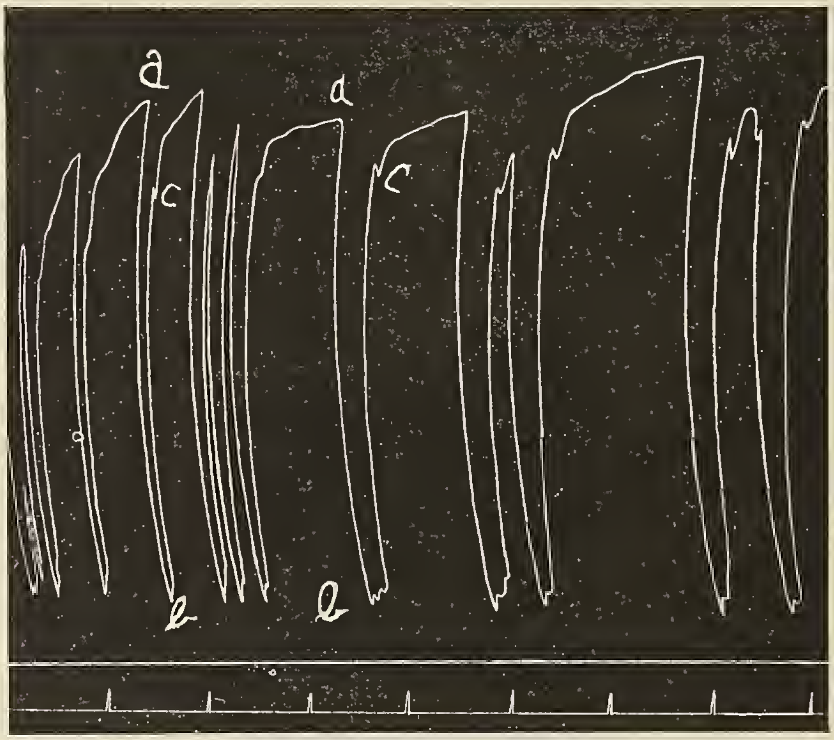


Fig. 4. — Curve cardiovolumetriche ottenute durante la eccitazione disponoica del vago come le precedenti, fig. 2 e 3; *a b*, etc. come nella fig. 2.

Questi caratteri della linea discendente dimostrano che lo scarico corrispondente del cuore si fa in modo rapido e continuo.

* * *

2. Parte ascendente. — La parte ascendente, che è prodotta dall'aumento del volume del cuore e rappresenta quindi il carico dei ventricoli, è formata da due linee distinte, la prima delle quali, *b c*, sale rapidamente, e la seconda, *c a*, sale in-

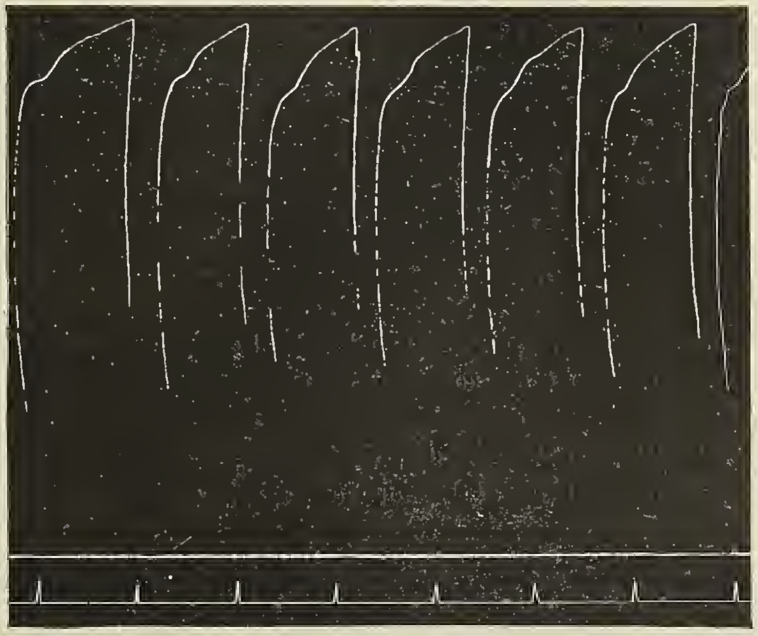


Fig. 5. — Curve cardiovolumetriche ottenute durante la eccitazione dispnoica del vago, come le precedenti, fig. 2, 3, 4.

vece lentamente (figg. 2, 3, 4, 5). La rapidità, con cui sale la linea *b c*, è talora poco diversa da quella con cui discende la linea *a b*.

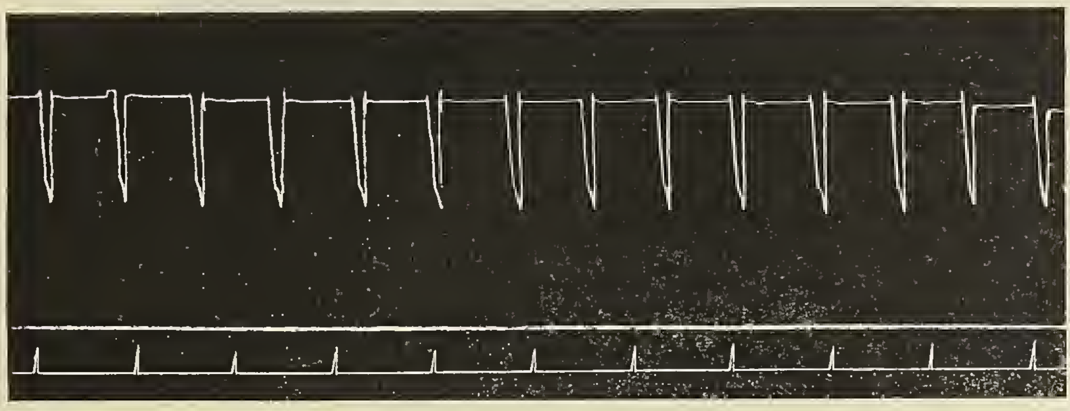


Fig. 6. — Curve cardiovolumetriche ottenute durante la eccitazione dispnoica del vago.

Questi caratteri dimostrano che il carico del cuore si fa in due tempi, prima rapidamente e poi lentamente; e che per conseguenza in una rivoluzione cardiaca si devono distinguere, non due, ma tre periodi: il *periodo dello scarico*, il *periodo del carico rapido* ed il *periodo del carico lento*.

L'altezza a cui si porta, nella curva cardiovolumetrica, la linea *b c*, rappresentante il carico rapido, è variabile; e quanto più essa sale, tanto più inclinata viene ad essere, per necessità, la linea successiva *c a*, rappresentante il carico lento. Talora la linea *b c* sale fino all'altezza da cui ha origine la parte discendente, e in tal caso la linea *c a* viene necessariamente ad essere orizzontale (fig. 6), indicando, con tale decorso, che, nel tempo corrispondente, il volume del cuore è rimasto invariato; e talvolta essa si porta anche ad un'altezza maggiore, e in tal caso la linea *c a* viene

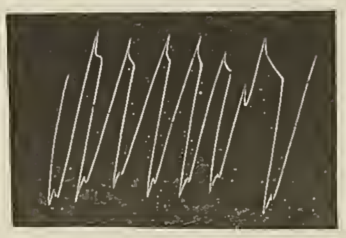


Fig. 7. — Curve cardiovolumetriche ottenute durante la eccitazione dispnoica del vago.

ad essere discendente (figg. 7 e 8), indicando che nel tempo rispettivo si è verificata una diminuzione del volume del cuore e quindi uno scarico, anzichè un carico.

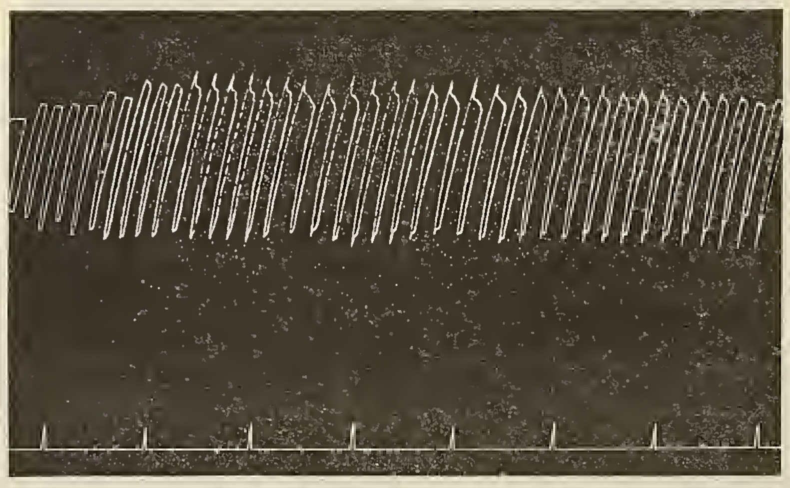


Fig. 8. — Curve cardiovolumetriche ottenute durante la eccitazione dispnoica del vago.

Queste particolarità dimostrano che variabile è la quantità di sangue di cui il cuore si carica nel periodo del carico rapido, e che in questo periodo talora il cuore si carica completamente e perfino si sovraccarica.

L'effettuarsi del carico in modo prima rapido e poi lento, il variare del momento in cui dal carico rapido si passa al carico lento e il variare quindi della quantità di sangue di cui il cuore si carica nel periodo del carico rapido, e il passaggio, di solito repentino, come dirò più innanzi, dal carico rapido al carico lento, dimostrano che la causa del carico rapido deve essere diversa da quella del carico lento. E quando si considera il modo con cui sale la linea del carico rapido e il modo con cui sale la linea del carico lento, la prima idea che si presenta alla mente è che il carico rapido sia prodotto da una dilatazione attiva dei ventricoli del cuore,

che aspira il sangue venoso, e che il carico lento si produca invece passivamente per l'afflusso continuo, al cuore, del sangue venoso, la cui pressione, progressivamente aumentando, distende progressivamente le cavità ventricolari. Ciò posto, nel periodo del carico rapido il cuore sarebbe attivo e passivo solo nel periodo del carico lento; e nella rivoluzione cardiaca si dovrebbero perciò distinguere: la *funzione sistolica*, determinante lo scarico, la *funzione diastolica*, determinante il carico rapido, ed il *riposo*, corrispondente al carico lento.

Ma, dato che il cuore si carichi in un primo tempo attivamente, in forza di un'aspirazione da esso prodotta, e in un secondo tempo passivamente, in causa dell'afflusso continuo del sangue venoso, come si può interpretare il fatto che talora, nel periodo in cui dovrebbe verificarsi il carico lento, non si verifica invece carico alcuno, siccome è dimostrato dal decorso orizzontale, e perfino discendente, della linea corrispondente?

A mio avviso, questo fatto dipende dal tono del cuore, di cui dirò più innanzi, il quale non permette un'ulteriore distensione delle pareti cardiache, e arresta quindi l'afflusso venoso, producendo anche qualche reflusso, nelle vene, del sangue che era già entrato nel cuore.

A differenza della parte discendente, la parte ascendente è di solito interrotta da onde, che per lo più sono in numero di due: una subito dopo il suo inizio, e l'altra nel passaggio dal carico rapido al carico lento (fig. 2).

***

3. **Passaggi**. — La parte discendente *ab* si inizia sempre in modo repentino, mentre vario è il modo con cui dalla discendente si passa alla ascendente *bc*.

Di solito il passaggio dall'una all'altra è repentino, e la repentinità può essere tale che il principio della linea ascendente si confonde con la fine della discendente (figg. 2, 3).

Talora invece la linea ascendente *bc* è preceduta da un *plateau* (fig. 4), rappresentato da una linea un po' ondulata, a decorso orizzontale o leggermente obliquo; ed in qualche caso il passaggio dalla discendente alla ascendente è graduato, formato cioè da una linea curva.

Questi fatti dimostrano che le valvole arteriose si aprono in modo subitaneo, per cui il sangue viene, dirò così, dai ventricoli lanciato nelle arterie; che diverso è il modo con cui il cuore inizia il suo carico; e che il *plateau* non è un fatto costante.

La repentinità, con cui il carico rapido succede di solito allo scarico, conferma evidentemente l'origine di esso da una attività cardiaca.

Il passaggio del carico rapido *bc* al carico lento *ca*, in generale, è repentino (figg. 2, 3); ma può anche essere graduato (fig. 9), e spesso è contrassegnato da un'onda (figg. 2, 3). Un passaggio repentino dal carico rapido alla parte successiva fu da me sempre osservato quando il cuore, nel periodo del carico rapido, si carica completamente (fig. 6), e quando si sovraccarica (figg. 7, 8).

Il passaggio repentino dal carico rapido al carico lento dimostra, che la causa del carico rapido non può essere quella stessa che produce il carico lento; la causa

dell'uno deve essere diversa da quella dell'altro. E il modo graduato con cui questo passaggio talora si verifica, si accorda con la natura passiva del carico lento.

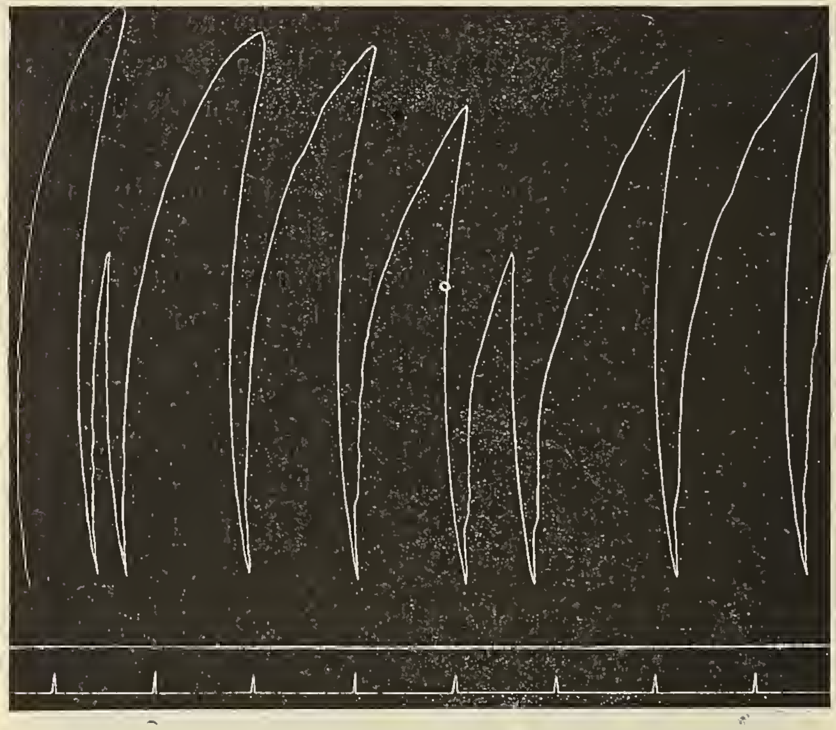


Fig. 9. — Curve cardiovolumetriche ottenute durante la eccitazione dispnoica del vago come le precedenti.

* * *

4. Onde. — Nella gran maggioranza dei casi, le curve cardiovolumetriche presentano delle onde, che credo opportuno di distinguere, in rapporto al momento in

Fig. 10. — Curve cardiovolumetriche ottenute subito dopo la sospensione della respirazione artificiale; da *a* a *b* prima di stimolare il vago, e da *b* a *c* durante una stimolazione elettrica del vago con debole corrente indotta.

cui si verificano, in onde che *precedono il carico lento* ed in onde che *si effettuano durante il carico lento*. Le prime si compiono nei periodi di attività del cuore e

corrispondono alle onde predicrotiche del polso; e le seconde si compiono invece durante il riposo del cuore.

Le onde che precedono il carico lento sono rapide, con vertici acuti; ma variabile è la loro altezza. Mentre in alcuni casi questa è così piccola da renderle appena riconoscibili (figg. 2, 3), in altri casi invece essa è molto notevole (fig. 10).

I momenti, in cui più di frequente queste onde si verificano, sono poco dopo il principio del carico rapido e alla fine dello stesso; ma esse si possono osservare

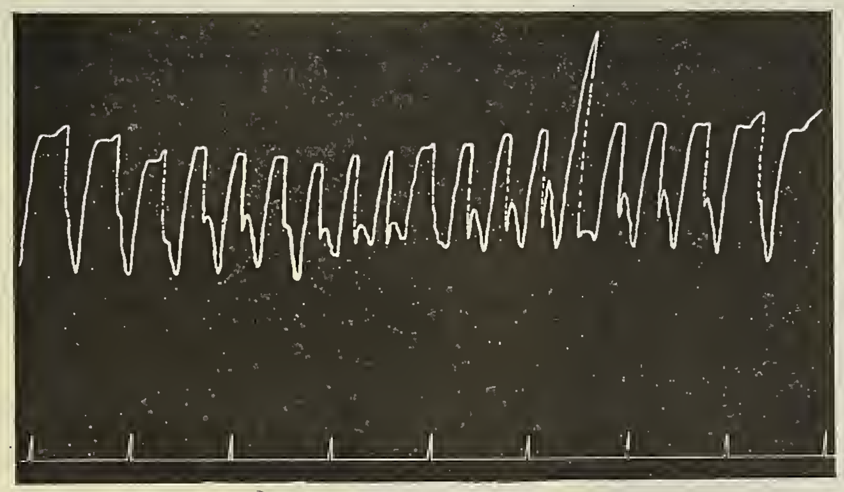


Fig. 11. — Curve cardiovolumetriche ottenute durante la eccitazione dispnoica del vago.

anche lungo la linea dello scarico (figg. 3-10). In qualche caso ho notato la migrazione graduata di un'onda dalla linea dello scarico a quella del carico rapido, e il ritorno quindi della stessa alla posizione primitiva (fig. 11).

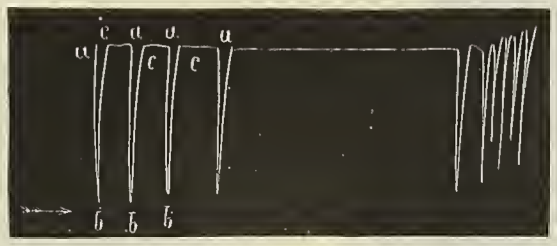


Fig. 12. — Curve cardiovolumetriche durante la eccitazione dispnoica del vago.

Nel cane, di solito, queste onde sono in numero di due, una poco dopo il principio ed una alla fine del carico rapido; ma possono presentarsi anche in numero maggiore e minore, e possono anche mancare (fig. 12): e in certe condizioni, di cui dirò più innanzi, ho potuto osservare un aumento progressivo della loro altezza e del loro numero (fig. 13).

Rispetto alla genesi di queste onde, mi limito a notare che, per il momento in cui si verificano, esse non possono essere prodotte da sistoli auricolari; che alcune di esse per la loro altezza, e perchè, come dirò in seguito, trovano corrispondenza in onde in senso inverso nella curva del battito cardiaco (figg. 30, 32, 33 ecc.) si devono, a mio avviso, considerare come sistoli complementari; che per la loro inco-

stanza, per il loro variare di numero, di grandezza e di posizione, e per la loro migrazione, non si può attribuire ad esse un origine di natura fisica, quale sarebbe la chiusura delle valvole del cuore

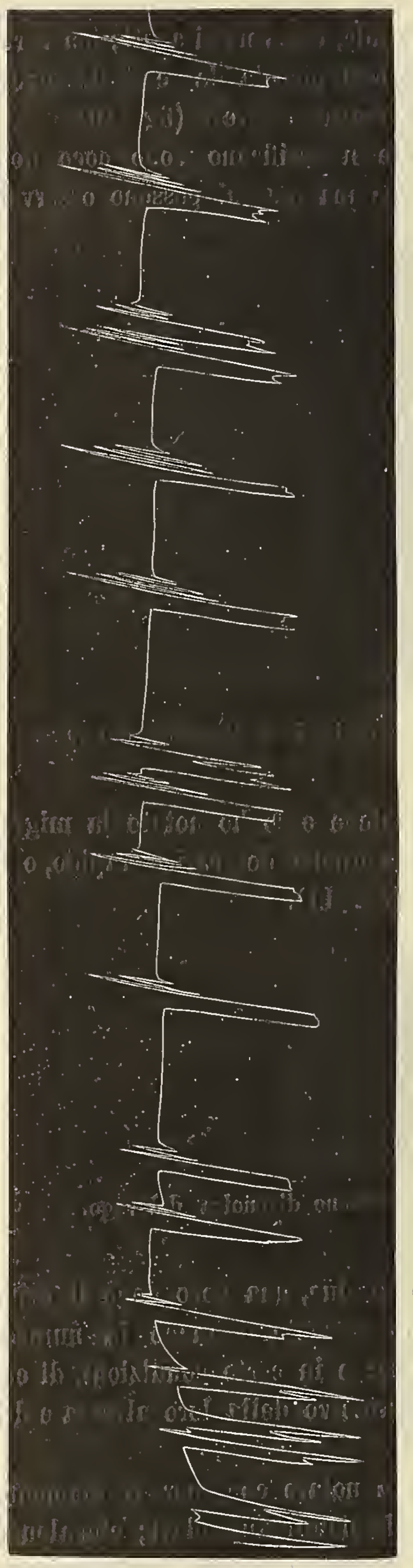


Fig. 13. — Curve cardiovolumetriche ottenute durante la compressione dell'aorta toracica. Cane curarizzato; torace ampiamente aperto; respirazione artificiale con lenti e blandi movimenti; la compressione dell'aorta è fatta in corrispondenza della seconda o terza curva.

Le onde rapide che talora si osservano alla fine del carico, con aumento progressivo di numero e di altezza (fig. 13), per la loro forma e per il loro graduato sviluppo non possono essere che il prodotto di rapide contrazioni del miocardio; ed hanno particolare interesse per la fisiologia delle fibre muscolari del cuore, dimostrando che queste, oltre alla ordinaria contrazione sistolica, possono compiere anche contrazioni di rapidità assai maggiore, poco diversa da quella con cui si compie la scossa dei muscoli striati dello scheletro.

Il Fredericq (1) ammette che la sistole ventricolare sia costituita, non da una scossa muscolare unica, come è stato ammesso dal Marey, ma da più scosse, le quali si sommano formando un tetano. Accettando questo modo di vedere, le onde che si presentano nel periodo dello scarico e del carico rapido si potrebbero interpretare come il prodotto di scosse muscolari, che non si sono fuse così da formare un tetano completo. Ma queste onde potrebbero derivare anche da non perfetta contemporaneità fra la contrazione di alcuni e la contrazione di altri fasci del miocardio; e questa origine sarebbe in accordo colla osservazione di Roy e Adami (2), che la contrazione dei muscoli papillari non è contemporanea a quella delle pareti del cuore: e non sarebbe in contraddizione colla classica dottrina di Marey, secondo la quale, nella sistole le fibre muscolari del cuore compiono una semplice scossa.

Le *onde che si osservano nel periodo del carico lento* (fig. 14), a differenza delle precedenti, sono lente e di piccola altezza. Verificandosi durante la chiusura delle valvole

(1) Fredericq, *La pulsation du coeur chez le chien*. Travaux du laborat. Paris, 1888.
(2) Roy and Adami, *Heartbeat and pulse wave*. London 1890.

arteriose e l'apertura delle valvole atrioventricolari, esse, a mio avviso, non possono derivare che da oscillazioni della pressione venosa, oppure da oscillazioni del tono del cuore, di cui dirò più innanzi.

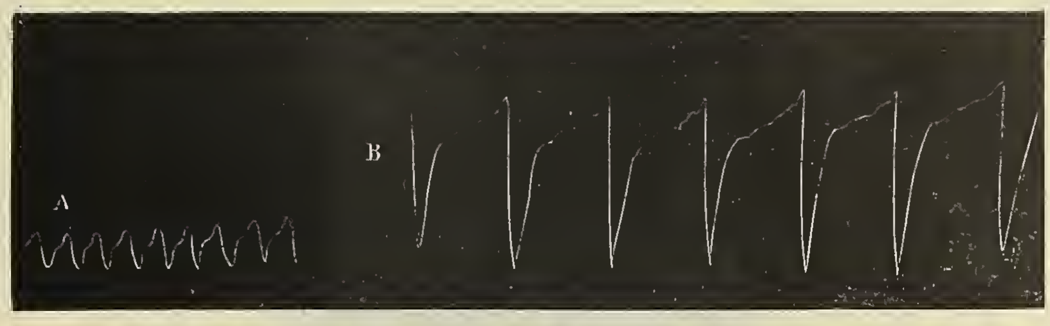


Fig. 14. — A, Curve cardiovolumetriche ottenute subito dopo la sospensione della respirazione artificiale; B, Curve cardiovolumetriche ottenute dallo stesso cane un minuto dopo.

In qualche caso, immediatamente prima dello scarico, ho osservato un'onda che differisce dalle onde che si verificano durante il carico lento, perchè più rapida e

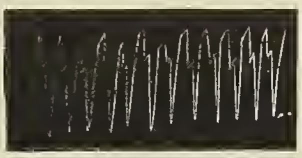


Fig. 15. — Curve cardiovolumetriche ottenute durante la eccitaziono dispnoica del vago.

perchè costituita da un notevole abbassamento seguìto da innalzamento così piccolo che talora è ridotto a una semplice intaccatura (fig. 15).

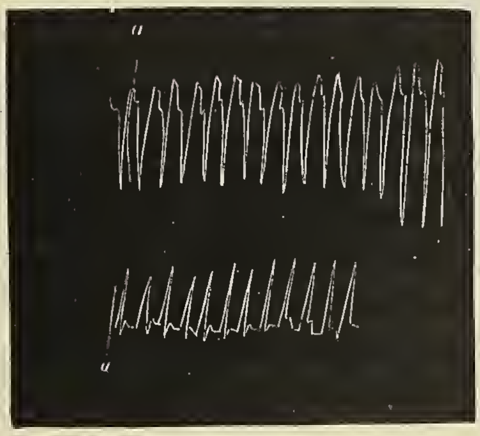


Fig. 16*a*.

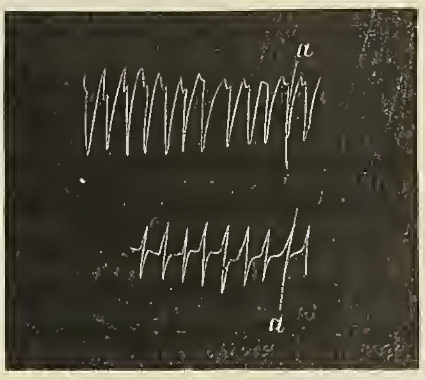


Fig. 16*b*.

Fig. 16*a* e 16*b*. — Il tracciato superiore rappresenta curve cardiovolumetriche, e l'inferiore curve del battito ottenute contemporaneamente; *aa*, momenti corrispondenti.

Questa speciale onda sarebbe prodotta, a mio avviso, da una sistole auricolare che scarica il sangue, non nel ventricolo, ma nelle grosse vene; e ciò perchè essa precede l'innalzamento sistolico del battito (fig. 16*a* e fig. 16*b*), e perchè coincide

con un piccolo innalzamento della pressione nelle vene (fig. 17). Lo scarico, in questo caso, dalle orecchiette nelle vene, anzichè nei ventricoli, dipenderebbe dal tono di questi, che non permette una ulteriore distensione delle loro pareti [1]. Ma, conside-

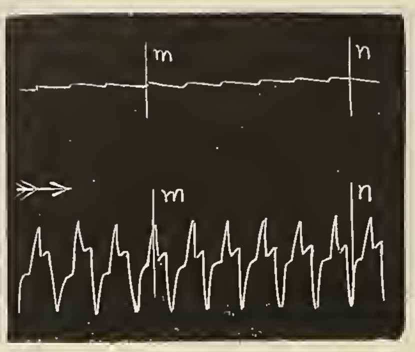


Fig. 17. — Il tracciato inferiore rappresenta curve cardiovolumetriche ed il superiore curve di polso venoso, ottenute, contemporaneamente, mediante manometro a bicarbonato di soda in comunicazione colla cava superiore; *mm*, *nn*, momenti corrispondenti.

rate le condizioni delle mie esperienze, comprendo bene che questa interpretazione non può essere espressa senza riserva.

***

5. **Altezza.** — Rispetto all'altezza è da considerarsi: 1°) l'altezza della parte discendente *ab*; 2°) l'altezza della parte ascendente *ba*; 3°) l'altezza delle linee *bc* (carico rapido) e *ca* (carico lento) che formano la parte ascendente; 4°) il livello del punto più basso e del punto più alto rispetto al livello dei medesimi punti nelle curve cardiovolumetriche precedenti e successive.

Quanto maggiore sarà lo scarico, tanto maggiore sarà la diminuzione del volume del cuore, e tanto più in basso si porterà quindi la parte discendente; e rispettivamente, quanto maggiore sarà la quantità del carico, tanto maggiore sarà l'aumento del volume del cuore, e tanto più in alto si porterà la parte ascendente; e analogamente si dica rispetto alle linee *bc* e *ca*, che rappresentano il carico rapido e il carico lento.

Se poi la parte discendente discenderà più in basso, in confronto alle curve cardiovolumetriche precedenti o successive, ciò significherà che lo scarico è stato più completo, vale a dire, che alla fine della sistole è residuata nei ventricoli una minore quantità di sangue, e rispettivamente si dica nel caso inverso.

E così, se la parte ascendente salirà più in alto, ciò significherà che il cuore si è caricato di maggiore quantità di sangue; e viceversa se si porterà ad una altezza minore.

Per le ragioni già indicate, non ho cercato a quanti centimetri cubici corrispondesse un dato innalzamento o abbassamento della leva; mi sono limitato a studiare

[1] Venendo registrati per mezzo della fistola del pericardio i mutamenti di volume del cuore intero, un abbassamento della curva cardiovolumetrica non può dipendere che da scarico di sangue dal cuore nei vasi; e perciò, se questo scarico non si verifica dal cuore nelle arterie, esso si dovrà verificare dal cuore nelle vene.

le variazioni del carico e dello scarico, e in rapporto ad esse le curve da me ottenute dimostrano:

a) che uno stesso cuore può scaricarsi e caricarsi di quantità di sangue molto diverse. Questo fatto è dimostrato dai livelli più alti e più bassi a cui possono portarsi la parte discendente e la parte ascendente delle curve cardiovolumetriche, ottenute da un medesimo cuore (figg. 10, 18, 19);

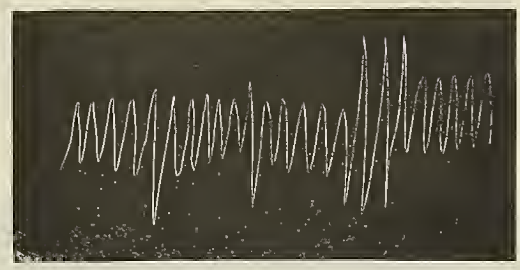


Fig. 18. — Curve cardiovolumetriche ottenute poco dopo la sospensione della respirazione artificiale.

b) che, indipendentemente da mutamenti della frequenza dei battiti, possono verificarsi mutamenti nella quantità del carico e nella quantità dello scarico. Questo

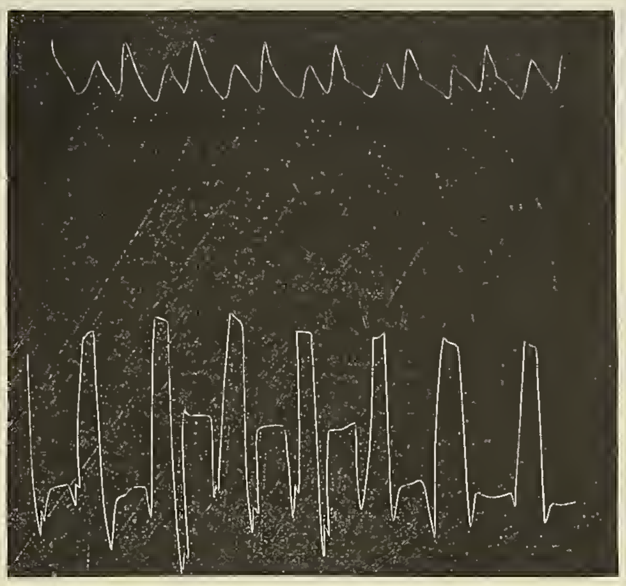


Fig. 19. — Il tracciato superiore rappresenta curve del polso carotideo ottenute mediante manometro elastico in comunicazione colla carotide, e l'inferiore rappresenta curve cardiovolumetriche ottenute, contemporaneamente, durante la eccitazione dispnoica del vago.

fatto è dimostrato dagli innalzamenti, maggiori e minori, che si possono verificare nella parte ascendente, e dagli abbassamenti, maggiori e minori, che si possono verificare nella parte discendente delle curve cardiovolumetriche, mentre il cuore continua a battere con la stessa frequenza (fig. 18 e 19);

c) che il carico e lo scarico possono rimanere invariati, mentre aumenta e diminuisce la frequenza delle rivoluzioni cardiache. Questo fatto è dimostrato dalla fig. 4;

d) che scarico e carico di una rivoluzione non sono sempre fra di loro corrispondenti, e che può mancare anche la corrispondenza fra lo scarico e il carico della rivoluzione precedente. Questi fatti sono dimostrati dalla fig. 19, nella quale si vede la parte ascendente salire ad un livello superiore a quello da cui aveva preso origine la discendente, e la discendente arrestarsi ad un livello superiore a quello da cui aveva preso origine la parte ascendente della rivoluzione precedente;

e) che alla fine della sistole rimane nei ventricoli una quantità di sangue ora maggiore ed ora minore, *sangue residuo* o *stagnante*. Questo fatto è dimostrato dall'arrestarsi della parte discendente delle curve cardiovolumetriche a livelli ora più alti ed ora più bassi (fig. 20);

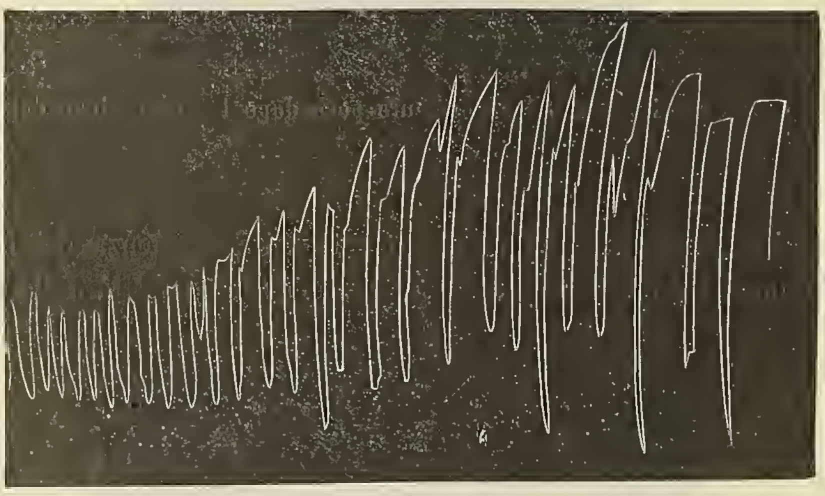


Fig. 20. — Curve cardiovolumetriche ottenute durante una eccitazione dispnoica progressiva del vago.

f) che variabile è la proporzione del sangue di cui il cuore si carica nel periodo del carico rapido; il cuore può completare il suo carico in questo periodo. e in questo periodo si può anche sopracaricare, per cui nel periodo successivo, anzichè caricarsi, si scarica di una parte del sangue di cui si era caricato (figg. 6, 7, 8).

L'attitudine del cuore a caricarsi di maggiore o minore quantità di sangue (anche indipendentemente da qualunque mutamento nella frequenza dei suoi battiti), e la frequente mancanza di corrispondenza fra scarico e carico di una stessa rivoluzione dimostrano che il carico del cuore non può essere considerato come un fatto puramente passivo, e che esso invece è subordinato ad una attività fisiologica del cuore, confermando le conclusioni formulate in base ai caratteri della parte ascendente delle curve cardiovolumetriche, del passaggio dalla discendente alla ascendente, e del passaggio dal carico rapido al carico lento.

Scarico e carico rapido del cuore sono entrambi fatti funzionali attivi, indipendenti, entro certi limiti, l'uno dall'altro. E siccome, per attività propria del cuore, il carico può essere maggiore o minore e lo scarico può essere più o meno completo, *così, dati due cuori di eguale capacità, in una rivoluzione, scaricherà maggiore copia di sangue quello che nella diastole precedente si sarà caricato maggiormente, e che nella sistole farà uno scarico più completo.*

Potendo il cuore, per sua attività, caricarsi di maggiori o minori quantità di sangue, e scaricarsi più o meno completamente, lo scarico del cuore non può essere calcolato, come ho già fatto conoscere, in base alla capacità anatomica dei ventricoli; ed una diminuzione nella frequenza dei battiti può non essere accompagnata da diminuzione della pressione arteriosa, siccome di solito avviene.

***

6. **Differenze fra le curve cardiovolumetriche a battiti rarefatti e quelle a battiti di frequenza ordinaria.** — In linea generale, ho osservato che le curve cardiovolumetriche che si ottengono subito dopo la sospensione della respi-

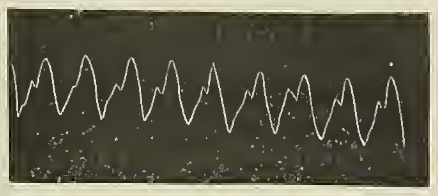


Fig. 21. — Curve cardiovolumetriche ottenute subito dopo la sospensione della respirazione artificiale, quando non era ancora incominciata la eccitazione dispnoica del vago.

razione artificiale, quando il cuore batte ancora con la ordinaria frequenza, si distinguono per un'altezza minore, perchè i passaggi dal carico allo scarico e da questo a quello sono più graduati, perchè il carico rapido ed il carico lento sono meno distinti, e perchè le onde sono meno rapide (fig. 21; vedi anche fig. 14). E in base a questi caratteri si dovrebbe concludere che l'attività del carico nelle ordinarie condizioni è poca, e può forse anche essere nulla (vedi più innanzi, Cap. VI, 3: « Azione del vago sulla forma della curva cardiovolumetrica »).

***

7. **Durata relativa dei periodi componenti una rivoluzione cardiaca.** — Le curve cardiovolumetriche dimostrano che, col diminuire della frequenza dei battiti cardiaci, aumenta specialmente la durata del periodo del carico lento, mentre la durata del periodo dello scarico e del periodo del carico rapido rimane quasi invariata (figg. 3, 4, ecc.); e in base a questo fatto si deve concludere che non esistono rapporti costanti fra la durata della rivoluzione cardiaca e la durata dei singoli periodi di essa.

La variabilità dei rapporti fra la durata della rivoluzione cardiaca e la durata dei suoi singoli periodi, oltre che dal fatto che con la rarefazione dei battiti aumenta a gran preferenza la durata del periodo del carico lento, dipende anche dal fatto che il carico rapido è talora preceduto da *plateau* (fig. 4), e talora invece succede allo scarico in modo, dirò così, fulmineo (figg. 2, 3).

Le curve cardiovolumetriche riprodotte dalla fig. 14 dimostrano che, quando il cuore batteva colla frequenza di circa 100 per minuto, curve A, la durata dei due primi periodi (scarico e carico rapido) era, presso a poco, eguale a quella del terzo (carico lento); mentre quando lo stesso cuore batteva con la frequenza di 38

per minuto, curve B, la durata del periodo di carico lento era maggiore del doppio della durata complessiva degli altri due periodi, di scarico e di carico rapido.

La durata dei periodi di scarico e di carico rapido rimane pressochè invariata quando i battiti si rallentano, purchè durante gli stessi non si verifichino delle onde, che rappresentano, a mio avviso, sistoli complementari.

Il fatto che, col diminuire della frequenza dei battiti, aumenta, quasi esclusivamente, la durata del periodo di carico lento, conferma il concetto che solamente questo periodo sia passivo, e che gli altri due periodi siano invece entrambi attivi, dipendenti cioè da attività proprie del cuore.

*
* *

8. **Aumento progressivo del volume del cuore, prodotto dalla dispnea; e azione del salasso sul sangue residuo.** — Se si prolunga la registrazione delle curve cardiovolumetriche dopo di avere sospesa la respirazione artificiale, oltre alla diminuzione della frequenza dei battiti, si nota un aumento progressivo del volume del cuore, aumento che si produce, non solo perchè ad ogni rivoluzione aumenta il carico, ma anche perchè lo scarico diventa sempre meno completo, perchè cioè alla fine della sistole rimane nei ventricoli una quantità di sangue progressivamente maggiore (fig. 22). Questa quantità, giudicando dall'altezza delle curve cardiovolumetriche, può arrivare a tal grado da costituire il quintuplo, ed anche più, di quella che forma lo scarico ordinario.

Meritevole di speciale considerazione è la curva riprodotta dalla fig. 23, non solo perchè dimostra quanto notevole possa essere la quantità di sangue che a poco a poco finisce per residuare nei ventricoli in seguito alla sospensione del respiro; ma perchè offre la prova più evidente che l'aumento progressivo del volume del cuore è realmente dovuto all'aumento progressivo del sangue che residua nei ventricoli dopo la sistole. Questa prova è data da quello scarico tre volte, circa, maggiore dei precedenti, che si osserva lungo il tratto *B*, per mezzo del quale il volume del cuore, alla fine della sistole rispettiva, è ritornato alla grandezza che esso aveva al principio della esperienza.

Se la sospensione della respirazione artificiale è preceduta dal taglio dei vaghi, essa non produce nè rallentamento dei battiti, nè aumento progressivo del volume del cuore (fig. 24 e 46).

Questo fatto è molto importante, perchè dimostra che l'aumento progressivo del volume del cuore, nelle dette condizioni, è dovuto ad un'azione diretta, *espansoria*, del vago, dipendente dalla eccitazione dispnoica del centro di questo nervo, e non da altre cause, come sarebbe il maggiore ostacolo che oppone allo scarico del ventricolo sinistro l'innalzamento della pressione arteriosa, che si verifica in seguito alla sospensione del respiro in forza della eccitazione dispnoica del centro vasocostrittore. L'innalzamento della pressione arteriosa si verifica, tanto se i vaghi sono integri quanto se sono tagliati, ed anzi, in questo caso, in proporzione maggiore; e l'aumento del volume del cuore si verifica invece solamente se i vaghi sono integri.

Ho cercato se il salasso avesse qualche azione sul sangue che residua nel cuore dopo la sistole in causa della dispnea; ed ho trovato che, se si pratica un salasso,

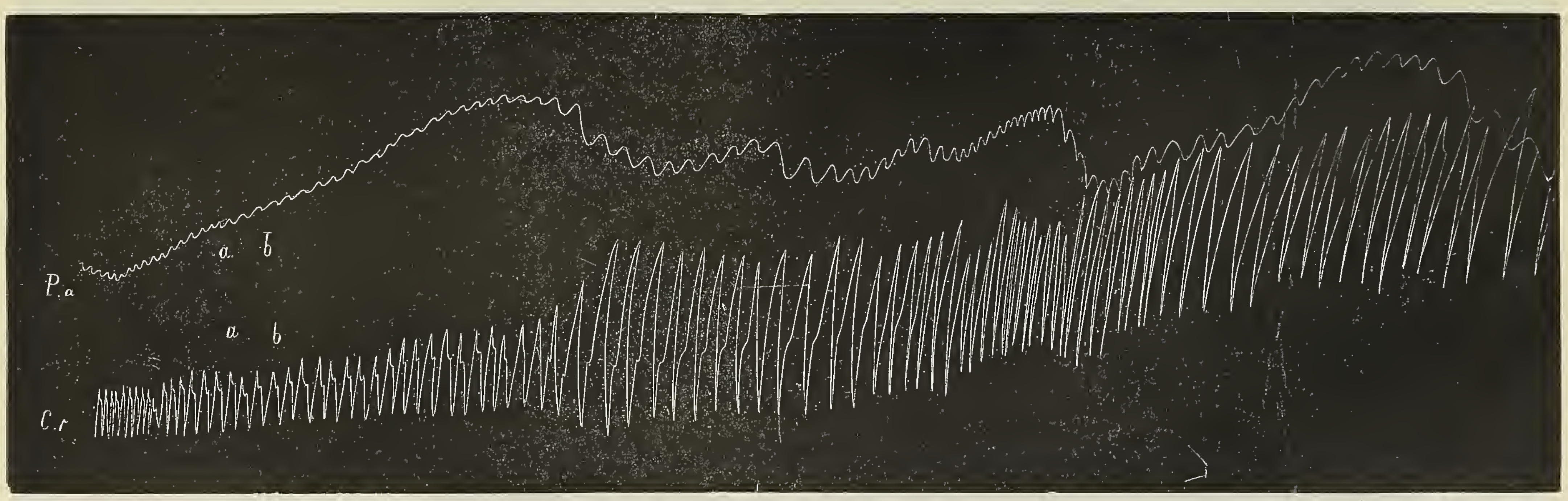


Fig. 22[illegible] — *Pa.* Pressione arteriosa, registrata mediante manometro elastico in comunicazione colla carotide; *C. v.* Curve cardiovolumetriche ottenute contemporaneamente. La respirazione artificiale era stata sospesa poco prima che incominciasse la registrazione ed è rimasta poi sempre sospesa.

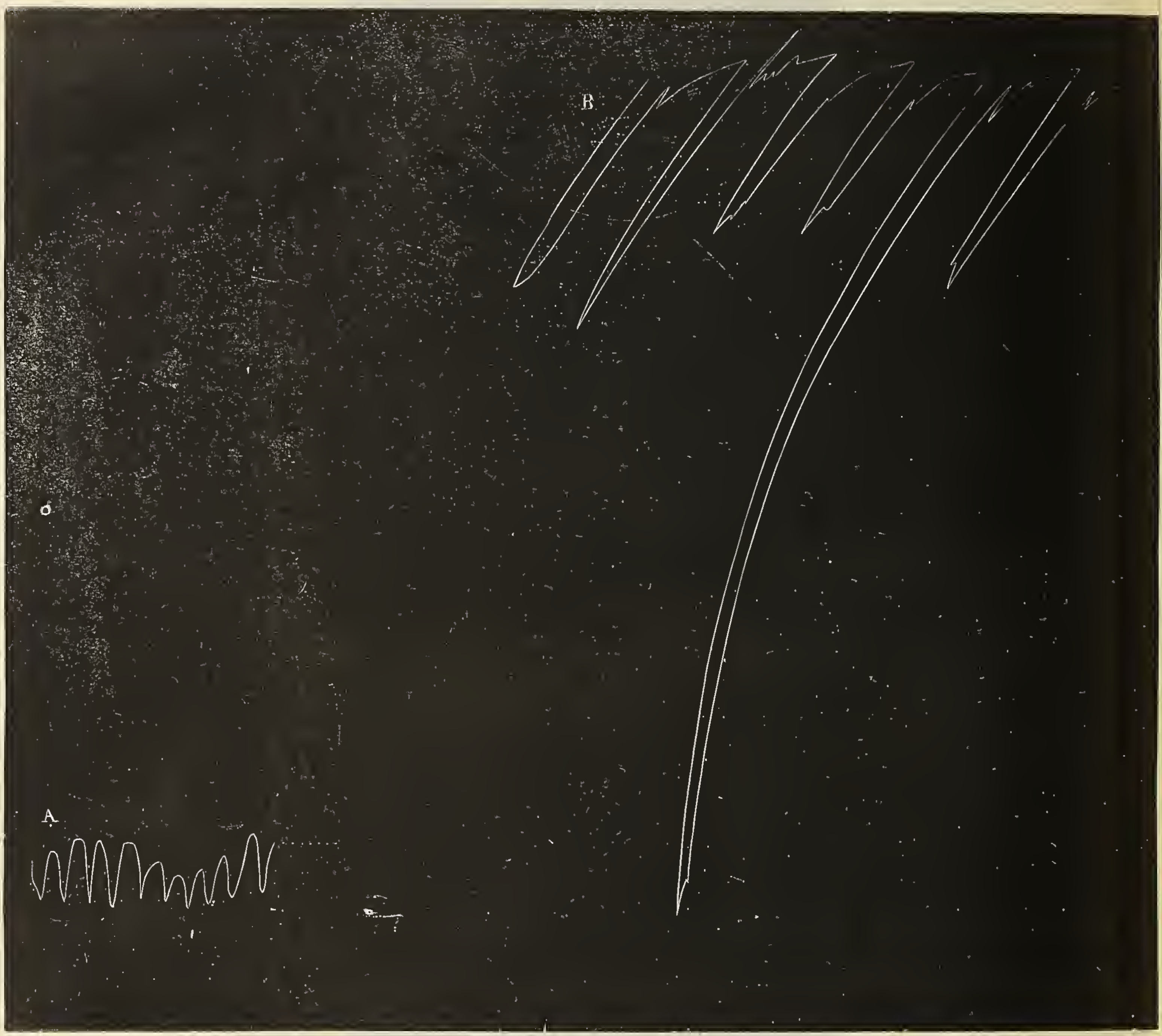


Fig. 23. — A. Curve cardiovolumetriche ottenute subito dopo la sospensione della respirazione artificiale, prima che incominciasse la eccitazione dispnoica del vago; B. Curve cardiovolumetriche ottenute dallo stesso cane, 100 secondi dopo la sospensione della respirazione.

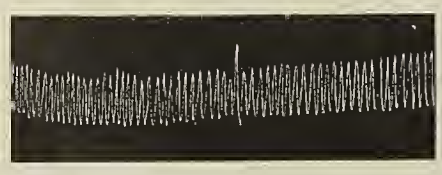


Fig. 24. — Curve cardiovolumetriche a respirazione sospesa, ottenute dopo il taglio dei vaghi.

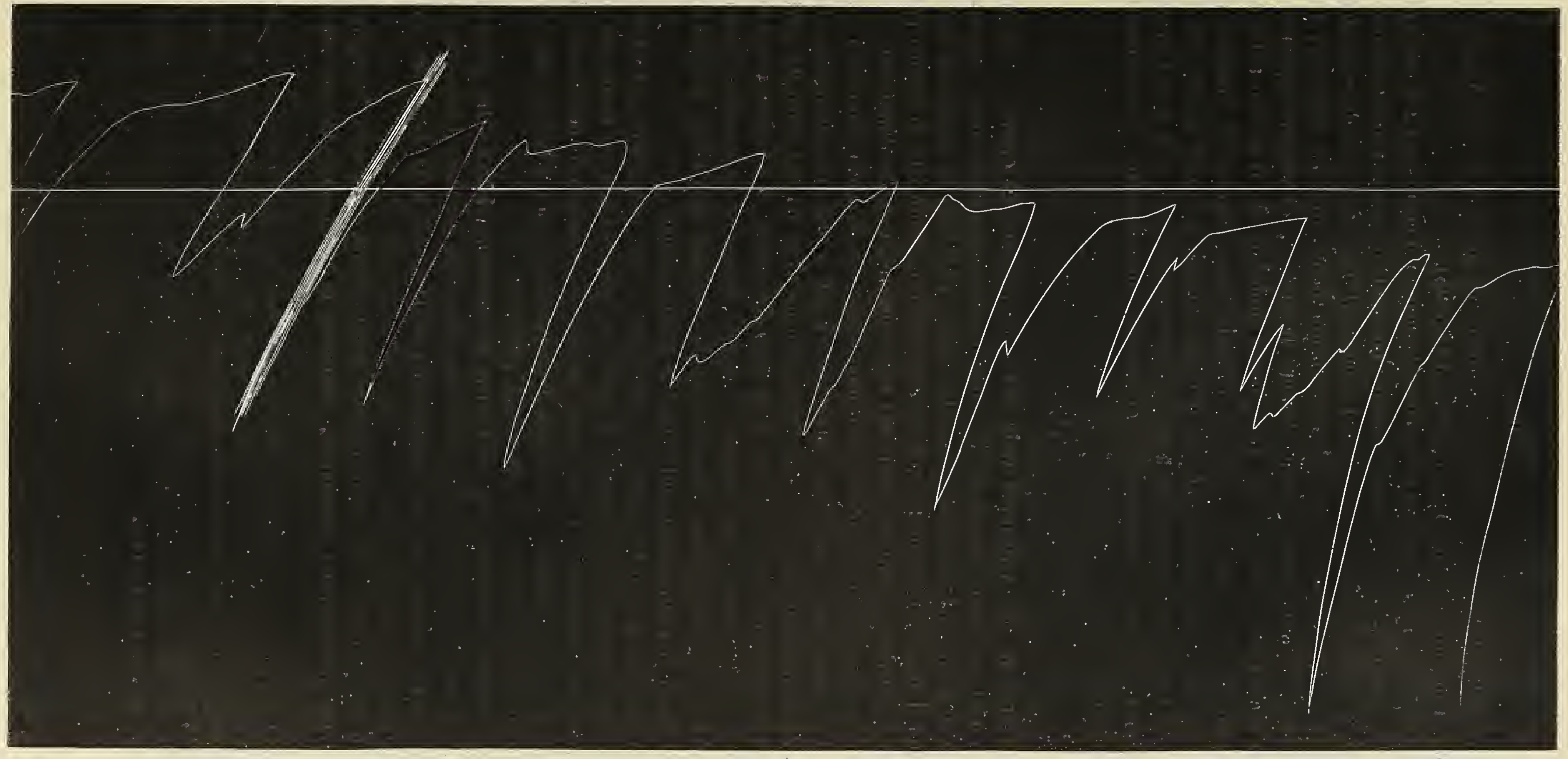


Fig. 25. — Curve cardiovolumetriche ottenute due minuti dopo la sospensione della respirazione artificiale. Nel momento che corrisponde alla interruzione del tracciato si pratica un salasso aprendo l'arteria femorale, e immediatamente il volume del cuore va progressivamente diminuendo.

quando la quantità del sangue residuo ha raggiunto un grado notevole, il cuore si libera rapidamente di essa, in poche rivoluzioni (fig. 25).

L'azione scaricatrice del salasso sul sangue stagnante nel cuore era stata osservata anche dal Tigerstedt [1], il quale aveva prodotto l'accumulo di questo sangue nel cuore aumentando, con la trasfusione, la massa del sangue. Il Tigerstedt spiegò meccanicamente quest'azione, subordinandola all'abbassamento della pressione arteriosa; ma dal momento che l'accumulo nel cuore, durante la dispnea, di sangue stagnante è prodotto da eccitazione espansoria del vago, parmi probabile che il salasso abbia ad agire, oltre che in via meccanica, anche in via fisiologica, sopprimendo l'eccitazione espansoria del vago. Qualunque però sia il modo con cui il salasso agisce, sta in fatto che esso favorisce lo scarico del sangue stagnante nel cuore; e in base a questo fatto si possono spiegare i benefici effetti di esso in molte malattie, e specialmente nella pneumonite.

***

9. **Oscillazione del volume medio del cuore. Tono del cuore.** — Talora per una serie di rivoluzioni, senza che si verifichi alcun mutamento nella frequenza delle stesse, il carico del cuore prevale sullo scarico, ed il volume medio del cuore aumenta quindi progressivamente; e per un'altra serie di rivoluzioni lo scarico prevale invece sul carico, il volume medio del cuore progressivamente diminuisce.

In conseguenza di ciò le curve cardiovolumetriche, conservando invariati i loro caratteri, si designano sopra una linea ampiamente e più o meno regolarmente ondulata (figg. 26, 27). Questo fatto, da me osservato e descritto fin dal 1878 [2], porta evidentemente ad ammettere l'esistenza di un *tono del cuore*, di intensità variabile. Ma, prima di affermare la reale esistenza di questo tono, era necessario di potere escludere che le dette oscillazioni dipendessero da eventuali movimenti respiratorii spontanei, i quali si effettuassero nullostante la curarizzazione.

A tale scopo ho aperto la trachea, e, innestata in essa una cannula, ho messo in comunicazione, per mezzo di questa, la cavità dei polmoni con un tamburino di Marey. Date queste condizioni, i più leggeri movimenti respiratorii, modificando la pressione nella cavità polmonare, avrebbero dovuto rivelarsi con movimenti della leva del tamburino in comunicazione con la cavità polmonare.

La registrazione contemporanea delle curve cardiovolumetriche e della pressione polmonare, nel modo sopraindicato, ha dimostrato che nella pressione polmonare non si verificava alcuna oscillazione in corrispondenza delle grandi onde designate dalle curve cardiovolumetriche (fig. 26).

La leva del tamburino in comunicazione con la cavità polmonare ha segnato, sopra una linea perfettamente orizzontale, solamente le curve cardiopneumatiche di

[1] Tigerstedt und Johansson, *Ueber die Ursache der Stabilität des Blutdrucks bei verschiedener Füllung der Gefässhöhle* (Mitth. v. physiol. Labor. d. Carol. med. chir. Institut in Stokolm, 1889); *Ueber die gegenseitigen Beziehung des Herzens und der Gefässe* (Skandin. Arch. f. Physiol. II B., pag. 409, an. 1891).

[2] A. Stefani, *Intorno alle variazioni del volume del cuore ed alla aspirazione diastolica.* Atti dell'Accad. med. di Ferrara, 1878.

Voit e Lossen, illustrate dal Ceradini e dal Mosso, le quali, siccome è noto, sono state attribuite ai mutamenti del volume del cuore, dipendenti dal carico e dallo scarico.

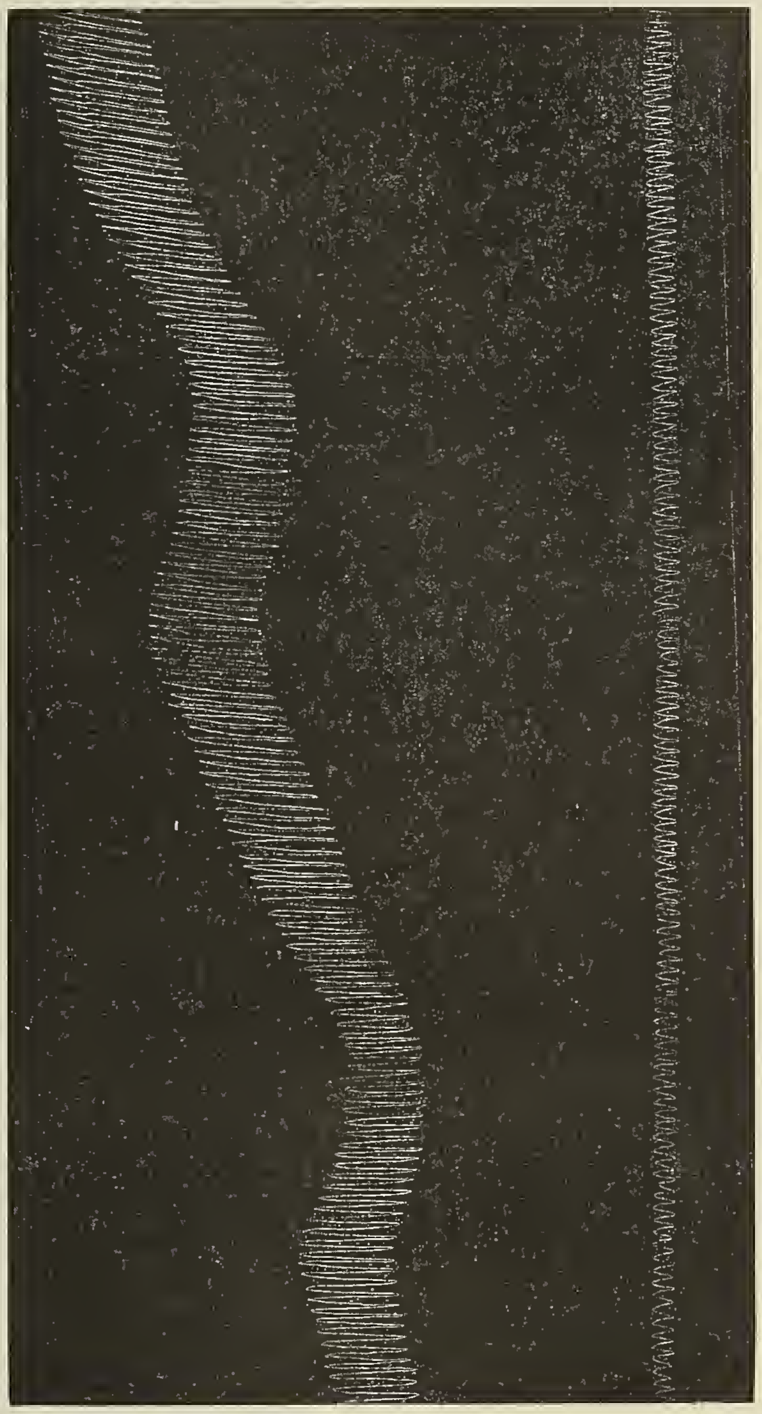


Fig. 26. — Il tracciato superiore rappresenta curve cardiovolumetriche ottenute dopo il taglio dei vaghi, mentre era sospesa la respirazione artificiale; ed il tracciato inferiore rappresenta curve cardiopneumatiche ottenute contemporaneamente.

Questi risultati escludono la derivazione delle grandi onde, segnate dalle curve cardiovolumetriche, da movimenti respiratorii; ed esse non possono quindi riferirsi che a mutamenti nello stato di contrazione del miocardio, ad *oscillazioni di un tono del cuore.*

Le curve riprodotte dalle figg. 26 e 27 sono state ottenute dopo il taglio dei vaghi; ma oscillazioni del tono del cuore si verificano anche a vaghi integri, siccome lo dimostrano alcuni tracciati riprodotti dalle precedenti figure.

Ma perchè alla cavità polmonare si trasmettevano i mutamenti del volume del cuore dipendenti dal carico e dallo scarico dello stesso (curve cardiopneumatiche) e non si trasmettevano i mutamenti del volume del cuore dipendenti dalle oscillazioni del suo tono?

Non ho dati sperimentali per rispondere a questa domanda; e perciò mi limito a notare che, data l'origine delle curve cardiopneumatiche dal carico e dallo scarico del cuore, la causa del fatto sopraindicato potrebbe trovarsi nel modo lento e graduato con cui si compiono i mutamenti del volume del cuore dipendenti da oscillazioni del tono, in confronto al modo repentino con cui si verificano quelli che dipendono dal carico e dallo scarico.

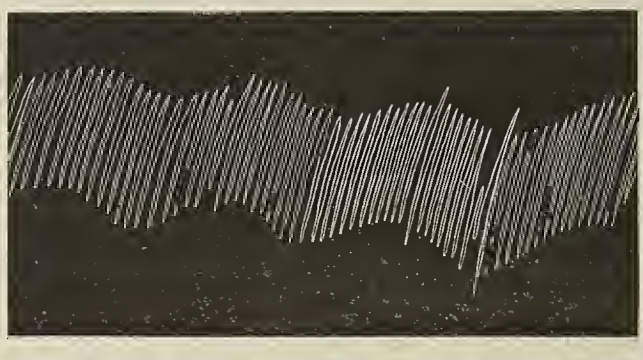


Fig. 27. — Curve cardiovolumetriche ottenute dopo il taglio dei vaghi, mentre la respirazione era sospesa.

In qualche caso ho visto le grandi oscillazioni del volume del cuore decorrere parallele ad onde che si verificavano nella pressione arteriosa, *onde di Traube* (fig. 28).

Onde simili a quelle da me descritte nel 1878 rispetto al volume del cuore intero furono osservate dal Fano nel 1886, registrando le contrazioni delle orecchiette del cuore isolato di tartaruga, e, con frase felice, esse furono da lui denominate *oscillazioni del tono delle orecchiette* ([1]).

Dopo le osservazioni mie e del Fano, assieme ai movimenti ritmici, furono osservate oscillazioni del tono in quasi tutti i muscoli lisci, dell'intestino, della vescica, degli ureteri, dei vasi, etc.; e tono e ritmicità sono quindi da riguardarsi come proprietà appartenenti tanto alle fibre muscolari del cuore, quanto alle fibre muscolari liscie ([2]).

*
* *

10. **Conclusioni**. — Dall'esame delle curve cardiovolumetriche, ottenute per mezzo della fistola del pericardio, a respirazione sospesa, e quindi durante la eccitazione dispnoica del centro del vago, risulta che:

1°) il carico del cuore può aumentare e diminuire indipendentemente dallo scarico che lo precede, e indipendentemente dalla frequenza dei battiti cardiaci;

([1]) G. Fano, *Sulle oscillazioni del tono auricolare del cuore*. Sperimentale, 1886.
([2]) Vedi parte seconda di questa Memoria. Cap. VII, *Tono e movimenti ritmici dei vasi*.

2°) il carico del cuore si fa in due tempi: prima rapidamente e poi lentamente (*carico rapido* e *carico lento*);

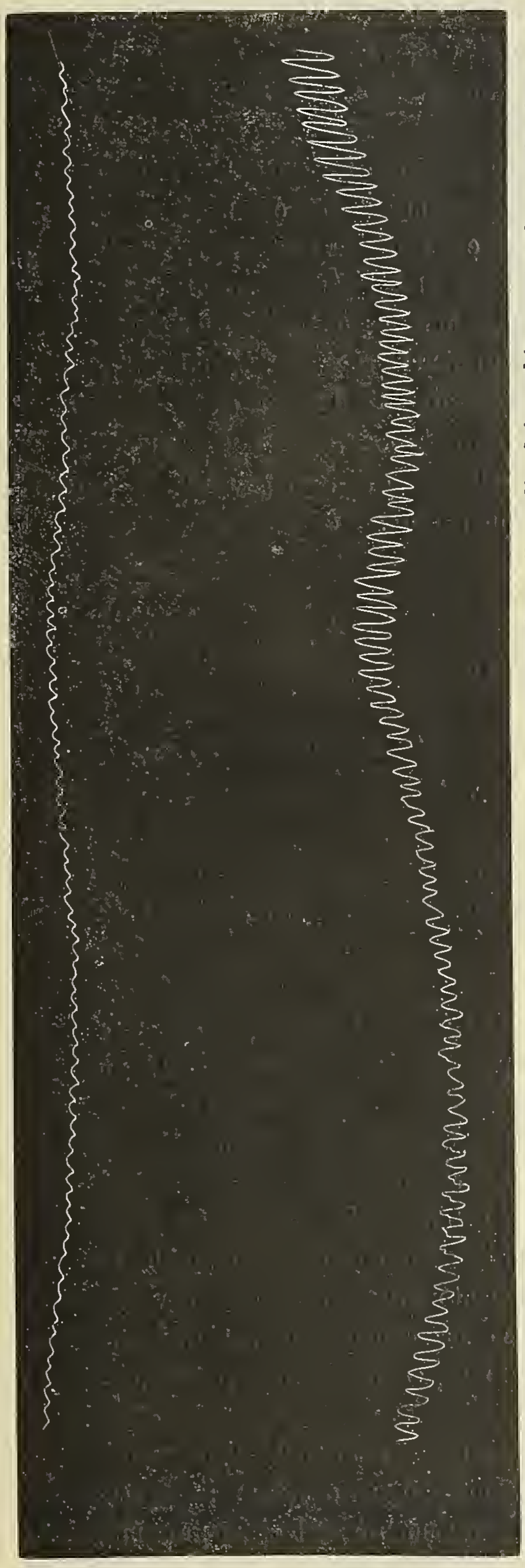


Fig. 28. — Il tracciato inferiore rappresenta curve cardiovolumetriche ottenute dopo il taglio dei vaghi, mentre la respirazione era sospesa; e il superiore rappresenta la pressione nella carotide, registrata contemporaneamente.

3°) il carico rapido succede, non di rado, allo scarico in modo repentino, determinando, anche da solo, il riempimento completo del cuore, in un tempo pressochè eguale a quello in cui si compie lo scarico.

Questi fatti non si possono, a mio avviso, spiegare, se non ammettendo che il cuore abbia anche l'attitudine ad espandersi attivamente. L'attività espansoria del cuore dà origine al carico rapido, mentre il carico lento si compie in modo passivo per l'afflusso del sangue al cuore. E quindi nella rivoluzione cardiaca si devono distinguere tre tempi o periodi: il *periodo dello scarico*, il *periodo del carico rapido* ed il *periodo del carico lento*. Di questi tre periodi, i due primi sono entrambi attivi, il prodotto cioè di distinte attività funzionali del cuore: l'*attività sistolica* e l'*attività diastolica*; ed il terzo è invece passivo e rappresenta il *riposo* del cuore.

4°) la sistole e la diastole si compiono sopra uno stato variabile di contrazione del cuore, *tono del cuore*. Le oscillazioni di questo tono devono necessariamente influire, tanto sullo scarico quanto sul carico del cuore;

5°) dopo la sistole, rimane nei ventricoli una quantità variabile di sangue, *sangue residuo* o *stagnante*, il quale resta sottratto alla circolazione;

6°) lo stato dispnoico del sangue determina un aumento progressivo della quantità di sangue che residua nei ventricoli dopo la sistole, e quindi un progressivo aumento del volume del cuore;

7°) questo aumento progressivo del volume del cuore nella dispnea è subordinato ad un'azione espansoria del vago sul cuore;

8°) il salasso favorisce lo scarico del sangue che rimane stagnante nel cuore dopo la sistole;

9°) in una rivoluzione cardiaca, durante il periodo del carico rapido e anche dello scarico, si possono verificare degli scarichi secondarî (*sistoli complementari*);

10°) le fibre muscolari del cuore, oltre alla contrazione sistolica, possono produrre anche contrazioni assai più rapide;

11°) da uno stesso cuore si possono ottenere curve cardiovolumetriche diverse, non solo per durata e per altezza, ma anche per mancanza o presenza di *plateau*, per il modo con cui il carico succede allo scarico, e al carico rapido succede il carico lento, e per il numero e per l'altezza delle onde che si osservano lungo le stesse. La rivoluzione del cuore non si compie dunque sempre nello stesso modo; e le forme diverse di cardiogrammi, ottenute dai varî sperimentatori, e più specialmente la presenza o mancanza in essi del *plateau*, non sono quindi da attribuirsi solamente a maggiore o minore sensibilità degli strumenti registratori, ma anche al diverso modo di funzionare del cuore. Le rivoluzioni cardiache possono differire fra di loro, non solo per *quantità* (durata e altezza), ma anche per *qualità*.

CAPITOLO IV.

Rapporti fra la curva cardiovolumetrica e le curve del battito del polso arterioso e del polso venoso.

Contemporaneamente alle curve cardiovolumetriche, ho registrato le curve del battito, del polso arterioso e del polso venoso, ottenendo i risultati che seguono.

***

1. **Cardiovolume e cardiogramma.** — Il battito del cuore veniva registrato mediante il cardiografo di Marey, applicato sul lato destro del torace del cane, dove il battito era dalla mano meglio sentito; e la curva cardiovolumetrica veniva registrata, nel solito modo, per mezzo della fistola del pericardio. I cani erano curarizzati, e, durante la registrazione, era sospesa la respirazione artificiale.

In base ai risultati ottenuti posso dire, in linea generale, che lo scarico del cuore corrisponde alla linea ascendente del cardiogramma, il carico rapido alla discesa rapida che ad essa succede, ed il carico lento alla parte consecutiva del cardiogramma. Cardiovolume e cardiogramma si corrispondono quindi, in linea generale, in senso inverso (fig. 29, 30), e in qualche caso la corrispondenza fra le due curve è stata veramente mirabile (fig. 31, 32, 33).

Da queste figure risulta: che alla ascesa pronta e rapida del cardiogramma corrispondeva una discesa egualmente pronta e rapida del cardiovolume; che ad un subitaneo passaggio dalla linea ascendente alla discendente nel cardiogramma corrispondeva un passaggio egualmente subitaneo della discendente alla ascendente nel cardiovolume; che ad un rapidissimo abbassamento del cardiogramma sino alla linea

fondamentale, e anche al di sotto, corrispondeva un rapidissimo innalzamento del cardiovolume sino alla sua massima altezza; che al decorso orizzontale, oppure lentamente ascendente o discendente, della parte successiva del cardiogramma, corrispondeva

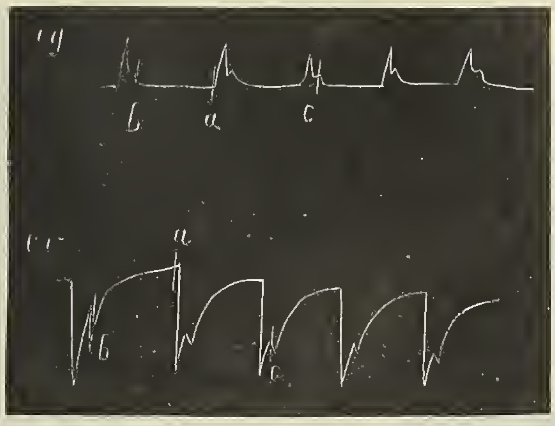


Fig. 29. — Il tracciato inferiore rappresenta curve cardiovolumetriche ed il superiore curve cardiografiche ottenute contemporaneamente; *a a*, *b b*, *c c*, momenti corrispondenti.

un decorso egualmente orizzontale, oppure lentamente discendente o ascendente, del cardiovolume nel periodo del carico lento; che alla mancanza di *plateau* nel cardio-

Fig. 30. — Il tracciato inferiore rappresenta curve cardiovolumetriche ed il superiore curve cardiografiche ottenute contemporaneamente; *a a*, *b b*, momenti corrispondenti.

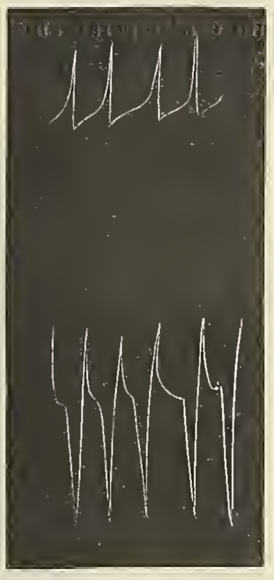


Fig. 31. — Il tracciato inferiore rappresenta curve cardiovolumetriche ed il superiore curve cardiografiche ottenute contemporaneamente.

gramma corrispondeva mancanza pure di *plateau* nel cardiovolume; che alle onde del cardiogramma corrispondevano onde in senso inverso nel cardiovolume; che alla mancanza di onde nel cardiogramma corrispondeva mancanza di onde anche nel cardiovolume.

La corrispondenza con scarichi e carichi del cuore delle onde lungo il cardiogramma porta naturalmente a ritenere, che queste onde derivino da sistoli secondarie, o complementari, siccome è stato ammesso dal Fredericq.

Fig. 32.

Fig. 33.

Il tracciato inferiore rappresenta curve cardiovolumetriche ed il superiore curve cardiografiche ottenute contemporaneamente.

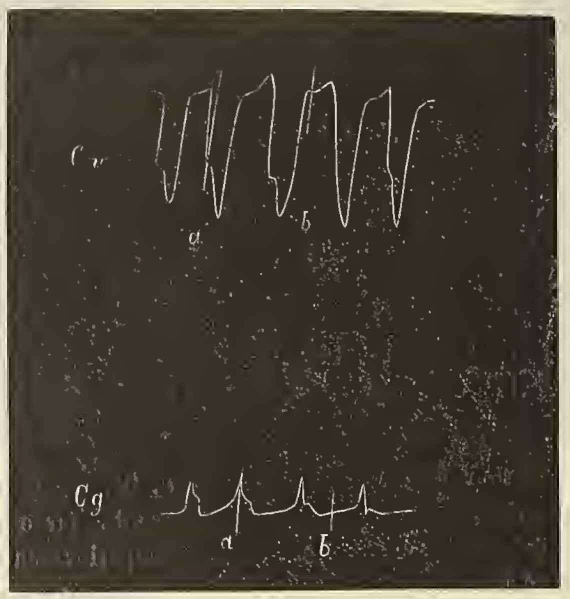


Fig. 34. — Il tracciato superiore rappresenta curve cardiovolumetriche e l'inferiore curve cardiografiche ottenute contemporaneamente; *a a*, *b b*, momenti corrispondenti.

La ascesa massima del cardiogramma coincide, in via generale, con la discesa massima del cardiovolume; ma in qualche caso la ascesa massima del cardiogramma coincide invece con un'onda lungo la linea discendente del cardiovolume (fig. 34): e in questa

coincidenza, che è assolutamente eccezionale, il François-Franck (1) credette di trovare una conferma della dottrina del Marey, secondo la quale lo scarico del cuore si continua sino alla fine del *plateau* del cardiogramma. A mio avviso, il fatto surriferito dimostra invece, solamente, che anche lo scarico principale del cuore può essere interrotto.

Come il François-Franck, ho notato anch'io una piccola precedenza della linea ascendente del cardiogramma sulla discendente del cardiovolume (fig. 29); e, come il François-Franck, considero anch'io questa piccola precedenza come dipendente dal tempo che impiega il sangue contenuto nei ventricoli ad acquistare la pressione necessaria per aprire le valvole arteriose (*periodo di tensione del Landois*).

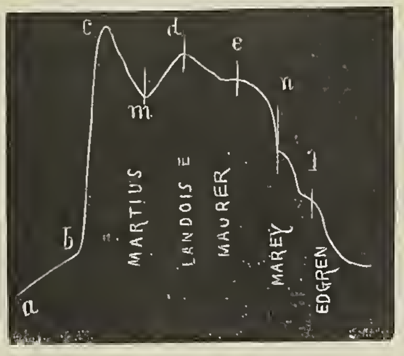


Fig. 35. — Figura schematica tolta dal Fredericq. Secondo Martius il secondo tono si verifica nel momento *m*, secondo Landois nel momento *d*, secondo Maurer nel momento *c*, secondo Marey nel momento *n*, e secondo Edgren nel momento *f*.

Se in una rivoluzione si compiono, oltre allo scarico principale, anche scarichi secondarî, ne viene di conseguenza, che la chiusura definitiva delle valvole arteriose dovrebbe essere preceduta da brevi chiusure temporanee, le quali potrebbero spiegare i risultati contradittorii rispetto al momento del cardiogramma che corrisponde alla chiusura di dette valvole (fig. 35), e potrebbero anche essere la causa del terzo tono del cuore, descritto da Einthowen (2).

***

2. **Cardiovolume e polso arterioso.** — La registrazione del polso arterioso fu ottenuta per mezzo dello sfigmoscopio di Marey, innestato nella carotide del cane e coniugato con un timpano a leva; e la registrazione del cardiovolume fu ottenuta come nelle esperienze precedenti.

Rispetto a queste ricerche, mi limito a ricordare che dalle stesse sono stato dimostrate la coincidenza della linea discendente del cardiovolume con la ascendente del polso carotideo e la coincidenza dell'onda dicrota di questo polso coll'onda che si verifica alla fine del carico rapido.

(1) François-Frank, *Changement de volume et debits du coeur*. Travaux du laboratoire de Marcey, Paris 1878.

(2) W. Einthowen, *Ein dritter Herzton*. Archivio di Pflüger, B. 120, an. 1907.

*
* *

3. **Cardiovolume e polso venoso.** — Ho registrato la pressione della cava superiore mettendo questa vena in comunicazione con un manometro a bicarbonato di soda coniugato con un timpano di Marey, ed ho registrato il cardiovolume nel solito modo. Il metodo, con cui fu registrata la pressione venosa, è stato, certo, molto primitivo; ma se per la sua poca sensibilità non si potevano registrare i minuti particolari relativi alle oscillazioni di detta pressione, mediante lo stesso si doveva però sempre registrare la forma fondamentale della curva della pressione venosa e la corrispondenza fra i momenti di questa coi momenti della curva cardiovolumetrica.

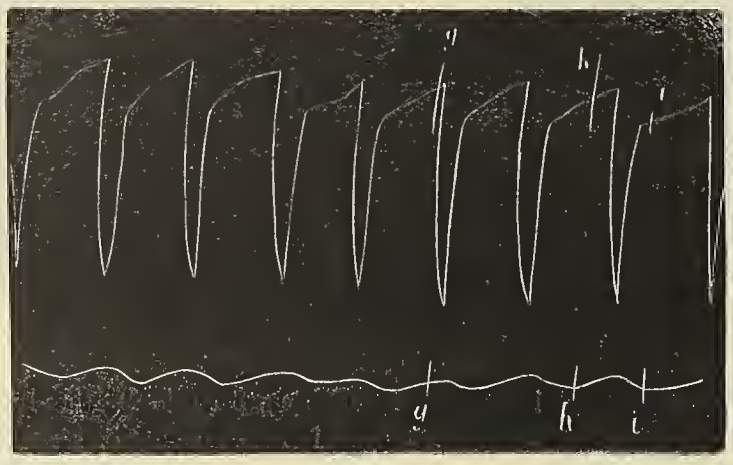


Fig. 36*a*. — Cane curarizzato, respirazione sospesa da un minuto e mezzo, circa. Il tracciato superiore rappresenta curve cardiovolumetriche e l'inferiore curve di polso venoso, ottenute, contemporaneamente, mediante manometro a bicarbonato di soda in comunicazione colla cava discendente; *gg*, *hh*, *ii*, momenti corrispondenti.

Queste ricerche sono state eseguite mentre i battiti del cuore erano molto rarefatti per l'eccitazione dispnoica del vago, dipendente dalla sospensione della respirazione artificiale; e su questo particolare richiamo l'attenzione, perchè esso costituisce una condizione assai favorevole per la determinazione dei momenti corrispondenti nelle due curve.

I risultati di queste ricerche sono rappresentati dalle fig. 36*a*, 36*b*, 37, secondo le quali il polso venoso era costituito da un rapido abbassamento coincidente col periodo del carico rapido del cuore, seguìto da un lento innalzamento; per cui la sua forma era, fondamentalmente, inversa a quella del polso arterioso.

Nella fig. 37 l'abbassamento della pressione venosa incomincia realmente qualche tempuscolo dopo l'inizio del carico rapido; ma, in base alle altre curve e all'andamento di questa stessa curva, è da ritenersi che la piccola precedenza sia dovuta a difetto sperimentale.

L'abbassamento della pressione venosa nel momento del carico rapido, dimostrato da queste ricerche, è un fatto di fondamentale importanza per la fisiologia del cuore, perchè dimostra che nel periodo del carico rapido il cuore aspira il sangue venoso, e che per conseguenza la diastole ventricolare è realmente attiva.

Nelle curve della pressione venosa, da me registrate, non si osservano onde che possano essere riferite alla sistole e alla diastole delle orecchiette; e questo fatto dimostra, non che queste onde manchino, ma che il metodo non era abbastanza sensibile per registrarle.

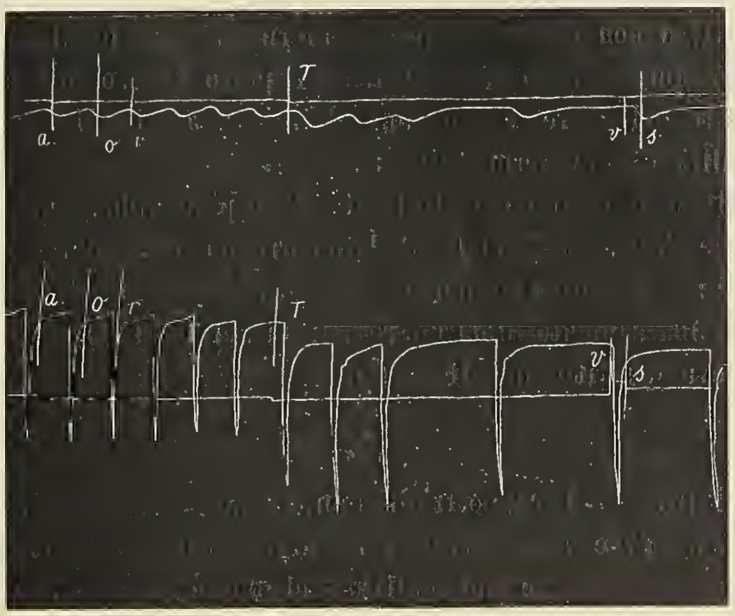


Fig. 36*b*. — Il tracciato inferiore rappresenta curve cardiovolumetriche e il superiore curve di polso venoso ottenute, contemporaneamente, mediante manometro a bicarbonato di soda in comunicazione colla cava superiore; *aa*, *oo*, *tt*, *vv*, *ss*, momenti corrispondenti.

In alcuni casi ho ottenuto una curva di polso venoso di forma inversa, costituita cioè da un rapido innalzamento seguìto da lento abbassamento, e quindi simile a quella del polso arterioso (fig. 17).

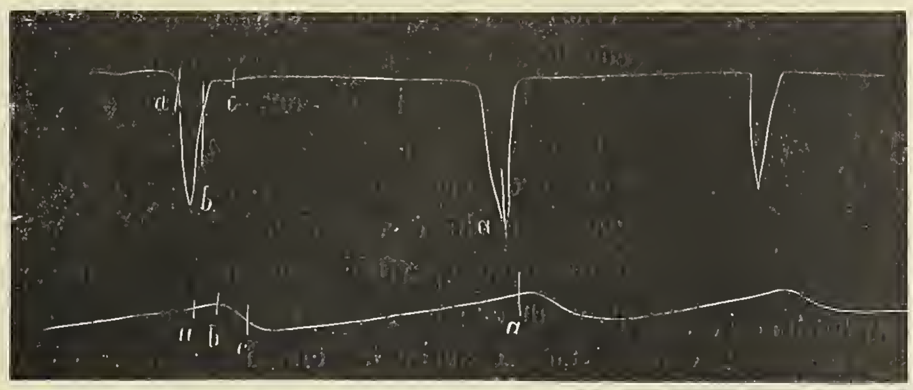


Fig. 37. — Il tracciato superiore rappresenta curve cardiovolumetriche e l' inferiore curve di polso venoso, ottenute, contemporaneamente, mediante manometro a bicarbonato di soda in comunicazione colla cava superiore; *aa*, *bb*, *cc*, momenti corrispondenti.

L' innalzamento della pressione venosa registrato da queste curve era, a mio avviso, determinato dal fatto, che la sistole auricolare, invece di scaricare il sangue nel ventricolo, lo scaricava nelle vene; e ciò perchè le pareti ventricolari non si lasciavano distendere, in causa del tono in cui si trovavano. Questa interpretazione

si fonda sul fatto che a questa forma di polso venoso corrispondeva quella forma di curva cardiovolumetrica di cui ho parlato a pag. 690, nella quale lo scarico, al suo inizio, è interrotto da un'onda o da una intaccatura, e sul fatto che l'inizio dello scarico, coincidente coll'innalzamento della pressione venosa, precedeva l'innalzamento della curva del battito (fig. 16).

Ma, si accetti o non si accetti questa interpretazione, quello che preme di rilevare è, che si possono avere forme diverse di polso venoso, dipendenti dal diverso modo di funzionare del cuore, e che una data forma di polso venoso non esclude quindi la possibilità di una forma diversa.

La forma di polso venoso caratterizzata da rapido abbassamento e lento innalzamento fu da me dimostrata nel 1878 (1) e corrisponde a quella descritta dal Gottwalt (2) nel 1881; e la forma di polso venoso caratterizzata da rapido innalzamento seguito da lento abbassamento fu da me registrata nel 1891 (3), e corrisponde a quella che il Riegel aveva descritto nel 1882 (4).

* * *

4. **Conclusioni.** — I rapporti di tempo fra i tre periodi cardiovolumetrici (*scarico*, *carico rapido* e *carico lento*) e le curve del polso arterioso, del polso venoso e del battito del cuore, si possono schematicamente rappresentare con la fig. 38, nella quale il periodo dello scarico coincide con la linea ascendente del polso arterioso e del cardiogramma e coll'ultima parte dell'ascendente del polso venoso; il periodo del carico rapido coincide con la prima discesa rapida del polso arterioso e del cardiogramma e con la discesa rapida del polso venoso; e il periodo del carico lento coincide con la seconda parte della linea discendente del polso arterioso e con la parte fondamentale del cardiogramma e con la ascesa lenta del polso venoso.

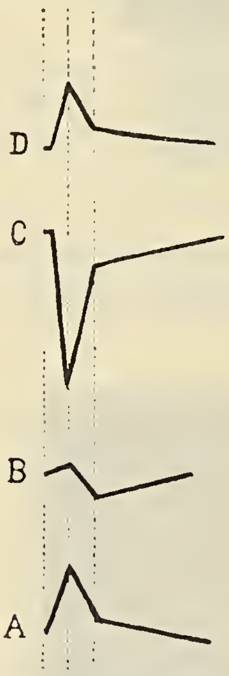


Fig. 38. — A, battito del cuore. — B, polso venoso. — C, Cardiovolume. - D, polso arterioso.

Il fatto di maggiore importanza, dimostrato da queste ricerche, è la coincidenza dell'abbassamento della pressione venosa col periodo del carico rapido del cuore, perchè esso dimostra che il cuore, al principio della diastole, sviluppa, o, più precisamente, può sviluppare un'azione aspirante sul sangue venoso; ma interessante è anche la coincidenza delle onde del cardiogramma con onde in senso inverso nel cardiovolume,

(1) A. Stefani, *Intorno alle variazioni del volume del cuore* ecc. Accademia medica di Ferrara, 1878.

(2) Gottwalt, *Der normale Venenpuls.* Archivio di Pflüger., B. 25, an. 1881.

(3) A. Stefani, *Cardiovolume, pressione pericardica e attività della diastole.* Accad. medica di Ferrara, 1891.

(4) Riegel, *Experimentelle Untersuchungen über Venenpuls.* Deutsch. Archiv. f. Klin. Mediz. 1882.

perchè essa dimostra che alle onde del cardiogramma corrispondono scarichi e carichi del cuore, appoggiando la dottrina del Fredericq [1], secondo la quale queste onde sono prodotte da sistoli complementari.

CAPITOLO V.

Della attività diastolica.

I caratteri delle curve cardiovolumetriche ed i rapporti di queste curve colle curve del polso venoso portano ad ammettere, siccome ho già fatto conoscere, che il cuore si carichi, non solo passivamente, ma che si possa caricare anche per una sua propria attività, la quale si esplica nel primo tempo della diastole, *attività diastolica*. Questa attività, come io la intendo, è caratterizzata da due fatti essenziali:

1°) rilasciamento attivo delle fibre del miocardio, determinato, cioè, da speciali processi fisiologici;

2°) aspirazione delle cavità ventricolari del cuore sul sangue venoso, determinata dal detto rilasciamento.

Siccome ciascuno di questi fatti potrebbe verificarsi indipendentemente l'uno dall'altro, perchè, teoricamente, le fibro-cellule del cuore potrebbero rilasciarsi in forza di speciali processi fisiologici che si compiono in esse, senza produrre alcun lavoro meccanico, senza distendere attivamente le cavità ventricolari e produrre quindi aspirazione sul sangue venoso, e perchè una aspirazione da parte delle cavità ventricolari potrebbe avvenire indipendentemente da un rilasciamento attivo delle fibre del miocardio, per elasticità delle pareti cardiache, così questi due fatti devono essere distintamente studiati.

*
* *

1. **Rilasciamento attivo delle fibre muscolari del cuore.** — Il rilasciamento attivo delle fibre muscolari del cuore si collega con la *dottrina della espansione attiva delle fibre muscolari*, la quale deriva dalla *dottrina*, oggi generalmente ammessa, intorno alla *irritabilità*.

Nel 1879, ho fatto conoscere come la irritabilità si possa subordinare alla nutrizione, considerandola quale dipendenza del ricambio dalle condizioni fisico-chimiche dell'ambiente, e riguardando quindi lo stimolo come una condizione, fisica o chimica, capace di modificare il ricambio dell'elemento organizzato.

Essendo la nutrizione composta di due processi opposti, i processi di assimilazione ed i processi di disassimilazione, che nelle condizioni normali si devono perfettamente compensare perchè altrimenti rimarrebbe alterata la costituzione degli elementi organizzati, così ho ammesso che vi siano stimoli i quali fanno aumentare e diminuire i processi di assimilazione, e stimoli che fanno aumentare e diminuire i processi di disassimilazione, producendo squilibrî diversi, i quali costituiscono altrettante forme di eccitazione; e che per ogni elemento organizzato esistano quindi due

[1] L. Fredericq, *La pulsation du cœur chez le chien*. Travaux du laboratoire de Liège, Paris 1888.

forme fondamentali di eccitazione, l'una caratterizzata da prevalenza dei processi disassimilativi e l'altra caratterizzata da prevalenza dei processi assimilativi.

Questi concetti, da me pubblicati nel 1879 nella Enciclopedia medica del Vallardi, all'articolo *Nervoso* (sistema: fisiologia), e poi nel 1883 nella *Fisiologia generale del sistema nervoso* (Milano, Vallardi, 1883), sono quelli stessi che informano la *dottrina sulla irritabilità*, pubblicata dall'Hering nel 1889 (¹), vale a dire, dieci anni dopo la mia prima pubblicazione; dottrina, oggi, generalmente accettata, e conosciuta sotto il nome di questo fisiologo. E tutto ciò fu già da me fatto rilevare nella Nota sulla *Irritabilità*, pubblicata negli Atti del r. Istituto veneto di scienze lettere ed arti, anno 1899.

Infatti il concetto fondamentale che informa la dottrina dell'Hering è che la irritabilità rappresenti la dipendenza del ricambio degli elementi organizzati dalle condizioni dell'ambiente; e quindi si ammette, dalla stessa, che la irritazione consista in un mutamento del ricambio in favore ora dei processi assimilativi ed ora dei processi disassimilativi, e che lo stimolo non sia che un mutamento nelle condizioni fisico-chimiche dell'ambiente, capace di produrre dei mutamenti nel ricambio.

La parte nuova della dottrina dell'Hering, e certamente meritevole della maggiore considerazione, è che nell'elemento organizzato si trovi, non solo la causa del suo speciale ricambio, ma anche la causa per cui si ricompone poi l'equilibrio fra l'assimilazione e la disassimilazione dallo stimolo turbato.

Nelle mie pubblicazioni sopracitate, dopo di avere esposti i concetti dottrinali, ho anche mostrato come con essi si possa interpretare la dilatazione attiva dei vasi, attribuendola a prevalenza dei processi assimilativi sui dissimilativi delle fibre muscolari dei vasi, e come con essi si possano interpretare l'azione del vago sul cuore e le azioni di arresto in genere, conside andole come dipendenti da mutamenti del ricambio, di carattere opposto a quelli che rappresentano l'ordinario stato di eccitazione dell'organo.

In coordinazione coi concetti sovraesposti, l'allungamento delle fibre muscolari, consecutivo alla loro contrazione, viene ad essere, non un fatto passivo, dipendente esclusivamente dalla cessazione dello stato di contrazione, ma un fatto attivo, prodotto da un aumento dei processi assimilativi, rimasti in deficenza durante la contrazione, in forza del quale si ristabilisce nella fibra muscolare l'equilibrio nutritizio; e quindi una forma di eccitazione, di carattere opposto a quella che è rappresentata dalla contrazione muscolare, *dottrina della espansione attiva delle fibre muscolari.*

Fra i sostenitori di questa dottrina mi limito a ricordare l'Engelmann, il Biedermann, ed il Verworn (²); ed i fatti principali a sostegno di essa sono i seguenti:

(¹) E. Hering, *Zur Theorie der Vorgänge in der lebendingen Substanz.* Lotos, IX, 1889, pag. 35.

(²) Engelmann, *Ueber die myogene Ursprung der Herzthätigkeit und über automatische Erregbarkeit als normale Eigenschaft peripherischer Nervenfasern* (Onderzoek. ingen gedaan in het Physiol. Laboratorium der Utrechtsche Hoogschool IV, Utrecht 1897); Biedermann, *Elektrophysiologie*, Jena, 1895, pp. 71 e seg.; Verworn, *Allgemeine Physiologie*, Jena 1895, pp. 476 e seg.

a) il tempo sempre maggiore che impiega il muscolo contratto a rilasciarsi, quanto più si ripete la contrazione, e quindi quanto più il muscolo si affatica [1]. Questo fatto dimostra che l'allungamento del muscolo, consecutivo alla contrazione, non è un fatto passivo, ma un fatto dipendente da processi fisiologici che si compiono nella fibra muscolare; perchè, se esso fosse passivo, dovrebbe prodursi sempre allo stesso modo, indipendentemente dal lavoro compiuto dal muscolo;

b) l'azione espansoria che spiega l'anodo alla chiusura, e l'azione espansoria che spiega il catodo alla apertura di una corrente continua sul muscolo contratto per azione della veratrina [2]. Questo fatto prova l'esistenza di stimoli espansorii;

c) l'oscillazione positiva che si verifica nella corrente propria del cuore in riposo, sotto lo stimolo del vago [3]. Questo fatto dimostra che sotto lo stimolo del vago, che arresta i movimenti del cuore, nelle fibre muscolari del cuore si verificano dei processi opposti a quelli che si verificano nelle fibre dei muscoli striati, quando si stimolano i loro nervi motorii. Come è bene noto, la corrente propria dei muscoli striati, sotto la stimolazione dei loro nervi motori, subisce una oscillazione negativa;

d) i mutamenti di carattere opposto, che si verificano nella eccitabilità dei nervi percorsi da una corrente continua nelle vicinanze dell'anodo e nelle vicinanze del catodo (*elettrotono*) [4]. Questo fatto dimostra che l'anodo promuove, nei nervi, processi opposti a quelli che produce il catodo;

e) l'azione locale dilatatrice che spiega la stricnina sui vasi a piccola dose, e l'azione costrittrice che essa spiega sugli stessi a dose maggiore. Su queste azioni della stricnina sui vasi, opposte a seconda della dose, da me dimostrate nel 1902 [5], mi riservo di riferire particolarmente nella seconda parte di questa Memoria. Qui mi limito a notare che questo modo di agire della stricnina non si può intendere senza ammettere l'esistenza di stimoli espansori, e che, dopo le mie osservazioni sulla stricnina, furono dimostrate azioni opposte sui vasi, a seconda della dose, anche da parte della veratrina, della pilocarpina, della eserina e della atropina.

La dilatazione, a piccola dose, prodotta dai suindicati alcaloidi, non può essere che l'effetto di uno stimolo espansorio, perchè la costrizione, prodotta dalle dosi maggiori, esclude che essa possa essere effetto di azioni paralizzanti.

In conformità alle dottrine sulla irritabilità e sulla espansione attiva delle fibre muscolari, la diastole del cuore dovrebbe compiersi, non per la semplice cessazione della sistole, ma per lo stabilirsi, nel miocardio, di processi opposti a quelli che determinano la sistole: per lo stabilirsi, cioè, di una prevalenza dei processi assimi-

(1) O. Funke, *Ueber den Einfluss der Ermüdung auf den zeitlichen Verlauf des Muskelthätigkeit*. Archivio di Pflüger, B. 8, an. 1872.

(2) W. Biedermann, *Elektrophysiologie*, Jena, 1895, pag. 227. Vedi anche Atti della Accademia di Vienna, 1884-1885.

(3) W. Gaskell, *Ueber die elektrische Veränderungen welke in dem ruhenden Herzmuskel die Reizung des Vagus begleiten*. Ludwig's 70 Geburtstage, Leipzig 1886.

(4) E. Pflüger, *Untersuchungen über die Physiologie des Elektrotonus*, Berlin 1859, parti 4ª e 7ª.

(5) Stefani e Vasoin, *Azione locale della stricnina sui vasi sanguigni*. Atti del R. Istituto Veneto di scienze lettere ed arti, tom. 61, an. 1902.

lativi sui disassimilativi, in virtù della quale si verifica nel cuore quella perfetta *restitutio in integrum*, che lo preserva dall'esaurimento. E in questo senso depone il fatto che, secondo le osservazioni del Biedermann (¹), alla chiusura di una corrente continua, l'anodo spiega sul cuore della rana, e anche più manifestamente sul cuore della lumaca, un'azione inibitrice, o, meglio, diastolica, all'opposto del catodo; e rispettivamente il catodo, all'apertura, spiega un'azione diastolica, all'opposto dell'anodo (²).

Ma l'espansione attiva delle fibre del miocardio è capace di produrre lavoro meccanico e quindi aspirazione sul sangue venoso?

(¹) W. Biedermann, *Elektrophysiologie*, Jena 1895, pp. 220 e seg.

(²) Riporto nella seguente nota, testualmente, quanto ho pubblicato intorno alla irritabilità nell'articolo *Nervoso* (sistema: fisiologia) della Enciclopedia medica italiana (Vallardi, Milano 1879, lettera N, pp. 130 e seg), e poi nella *Fisiologia generale del sistema nervoso* (Milano, Vallardi 1883, pp. 156 e seg.).

Nell'articolo *Nervoso* (sistema, fisiologia) si legge:

« Per comprendere le modificazioni che caratterizzano la eccitazione nervosa, credo necessario di esporre alcune idee generali intorno alla eccitabilità.

« La funzione fondamentale di tutti gli elementi organizzati è la nutrizione, e da essa derivano tutte le manifestazioni funzionali dei medesimi.

« La nutrizione si compone di due atti, l'assimilazione e la disassimilazione, i quali sono legati a processi chimici di riduzione e di ossidazione. . . . . Affinchè si compia un regolare processo di nutrizione, è necessario che l'elemento organizzato sia circondato da speciali condizioni fisiche e chimiche. . . . . ed un mutamento di queste condizioni deve perciò essere causa di mutamenti del processo nutritivo, i quali possono consistere, tanto in aumento dei processi di ossidazione, quanto in aumento dei processi di riduzione, e saranno quindi accompagnati, nel primo caso, da fenomeni di liberazione di forza, e nel secondo da fenomeni di immagazzinamento.

« *L'eccitabilità degli elementi organizzati non rappresenta che la dipendenza del processo della nutrizione dalle condizioni fisico-chimiche dell'ambiente. . . . . E perciò lo stimolo è costituito da ogni mutamento delle condizioni fisico-chimiche, che circondano l'elemento organizzato, valevole a modificarne il processo della nutrizione*; *e la eccitazione dai mutamenti provocati dallo stimolo nel processo chimico della nutrizione dell'elemento medesimo*. . . . .

« I fenomeni di eccitazione che più facilmente ci colpiscono sono quelli legati a liberazione di forza, e perciò il movimento meccanico fu il fenomeno di eccitazione più anticamente osservato; ma, come i fenomeni di liberazione di forza, così anche i fenomeni di immagazzinamento di essa possono costituire fatti di eccitazione; ed io non posso che riguardare come tale la riduzione chimica che si compie nelle cellule a clorofilla, sotto l'azione della luce e del calore.

« Le cellule a clorofilla, a parer mio, sono il tipo di quelli elementi organizzati, la cui nutrizione, sotto l'azione di uno stimolo, si modifica in favore dei processi di riduzione; mentre le fibre muscolari sono il tipo di quelli la cui nutrizione si modifica in favore dei processi di ossidazione.

« Sotto un punto di vista generale, la eccitazione può essere dunque rappresentata tanto da prevalenza dei processi di ossidazione e di disassimilazione, quanto da prevalenza dei processi di riduzione o di assimilazione.

« La nutrizione degli organi animali ha, di particolare, che viene modificata da uno stimolo tutto speciale, la *eccitazione nervosa*, che non sappiamo in che consista. In tesi generale, le modificazioni nutritive prodotte dalla eccitazione nervosa possono consistere tanto in favore dei processi di ossidazione o di riduzione, quanto in favore dei processi di disassimilazione o di assimilazione; e perciò è necessario di studiare queste modificazioni nei casi speciali ».

Sono quindi passati in rassegna questi casi; e dove si tratta della dilatazione attiva dei vasi, è detto, che il miglior modo di interpretare questo fatto è quello di ammettere, secondo le idee

*
* *

2. **Azione aspirante del cuore.** — *a*) Cenno storico e stato della questione allo inizio delle mie ricerche. — Galeno riconosceva nel cuore un organo fornito di tutte le condizioni necessarie per attirare il sangue, ed anzi ammetteva che l'azione aspirante di esso fosse di maggiore importanza dell'azione premente: « *Maiore vi cor dilatatum attrahat necesset est, quam contractum expellat* (1).

Vesalio accettò pienamente la dottrina di Galeno, e attribuì la sistole del cuore alla contrazione delle sue fibre circolari e la diastole alla contrazione delle longitudinali. Questa dottrina trovò caldi fautori; ma poi fu completamente abbandonata, per la ragione che nessuno potè mai osservare che i due ordini di fibre si contraessero in tempi diversi, e per la ragione che la pressione nelle vene prossime al cuore non è così bassa, come dovrebbe essere se un'azione aspirante fosse sviluppata dal cuore per mezzo della contrazione delle sue fibre (2).

Harvey (3) si oppose a Vesalio; negò che la diastole si potesse effettuare per contrazione di qualche ordine di fibre muscolari, ed insegnò che il cuore non si poteva dilatare se non come una spugna che riprende la sua forma al cessare della compressione, *sicut spongia, vi prius compressa, dum redit ad costitutionem suam.* Questo concetto dell'Harvey fu ripreso dal Magendie, e, in epoca più recente, dal Goltz.

---

sovraesposte, che i nervi vasodilatatori siano nervi promotori, a preferenza, di processi di assimilazione; e là dove si tratta delle azioni di arresto, è detto che il miglior modo di interpretare queste azioni consiste nell'ammettere che le fibre inibitorie promuovano, negli organi, processi opposti a quelli che caratterizzano la ordinaria eccitazione degli stessi.

Nella *Fisiologia generale del sistema nervoso* si legge:

« La funzione fondamentale degli elementi organizzati è la nutrizione, e da essa derivano tutte le manifestazioni funzionali dei medesimi. Ma il processo chimico della nutrizione ha bisogno di speciali condizioni fisiche e chimiche, le quali, modificandosi, possono essere causa di relativi mutamenti nella *quantità e qualità degli scambî.* Secondo il mio modo di vedere, *l'eccitabilità degli elementi organizzati rappresenta la dipendenza del processo nutritivo dei medesimi dalle condizioni fisico-chimiche dell'ambiente.* E perciò lo *stimolo viene ad essere costituito da ogni mutamento di queste condizioni capace di modificare. nel quale e nel quanto, la nutrizione degli elementi organizzati*; e l'*eccitazione, alla sua volta, non rappresenta se non il risultato di queste modificazioni nutritizie, le quali potranno consistere in aumento, assoluto o relativo, dei processi di ossidazione o riduzione, di disassimilazione o assimilazione* ».

(1) Galeno, *De usu partium,* L. VI, C. 15, Ed. Frœbel, Basilaee, 1549.

(2) Vesalio, *De corporis humani fabrica.* Basilaee, 1543, L. VI. Vesalio paragonava il cuore ad una piramide composta di vimini, la quale, per l'avvicinarsi del vertice alla base, perde di altezza, ma acquista, nel tempo stesso, di capacità: « Cordis dilatationem quae mucronis ipsius ad « basis centrum est attractio, et omnium laterum cordis distensionem rectae efficiunt fibrae mucro- « nem versus basim contrahentes. Quod sane ita perficitur, ac si vimineo circulo orbiculatim, ea- « demque serie complurimas juncorum scirporumve radices connecteres, et capitibus illorum simul » collectis, velut pyramiden quamdam efformares, ac demum funiculum ex mucronis medio per cir- « culi centrum dimitteres, quo deorsum tracto, pyramis brevior, intusque multo capacior redderetur ».

(3) Harvey, *Exercitatio anatomica de motu cordis* etc. Frankfurt, 1628, Cap. II.

L'opposizione dell' Harvey, continuata dal Lower ([1]), aveva tolto credito alla dottrina della diastole attiva nel senso di Vesalio; ma ben presto essa riprese vigore per le osservazioni del Vaust e del Pechlin ([2]), secondo le quali il cuore pulsante, ad ogni rivoluzione, dilata la mano che lo stringe. Questo fatto fu più tardi confermato dal Bichat ([3]), che pure si schierò fra i sostenitori della dottrina Vesaliana.

Ma se egli è vero che il cuore, ad ogni rivoluzione, tende ad aprire la mano che lo stringe, non era però dimostrato che questo avvenisse nella diastole; ed il Weber ([4]), esplorando contemporaneamente il cuore ed il polso, potè dimostrare che l'urto del cuore contro la mano si compie durante la sistole e non durante la diastole dei ventricoli: « *Manus cor amplexa non ab expanso corde premitur, sed a contracto, cuius ambitus a contractione ventriculorum augetur* ».

Prima del Weber, Realdo Colombo ([5]) aveva già notato, che alcuni scambiavano la sistole con la diastole, per la ragione che il cuore si ingrossa quando si contrae.

La dottrina dell'aspirazione cardiaca entrò nel campo sperimentale con le ricerche sulla pressione venosa. Una pressione negativa nelle vene prossime al cuore, a torace aperto, avrebbe evidentemente costituito la prova che il cuòre aspira il sangue venoso.

Le ricerche del Barry ([6]), del Weyrich ([7]), del Volkmann ([8]), dell'Jacobson ([9]) ecc., dimostrarono l'esistenza di una pressione negativa nelle vene prossime al cuore, ma solamente a torace chiuso. e per conseguenza la pressione negativa, da questi autori dimostrata, non poteva costituire una prova sicura della aspirazione cardiaca.

Il Wedemeyer ([10]) osservò che la pressione nelle vene prossime al cuore presenta delle piccole oscillazioni sincrone coi battiti cardiaci, oltre alle grandi oscillazioni sincrone coi moti resipratoriî, già osservate dal Barry. Ma le piccole oscillazioni osservate dal Wedemeyer potevano dipendere, non solo da una ritmica aspirazione del cuore, ma anche da una ritmica diminuzione di ostacoli allo scarico delle vene; e perciò esse non potevano costituire una prova della aspirazione cardiaca.

Per chiarire l'origine di queste onde, si cercò di determinare in quale momento della rivoluzione cardiaca esse si verificassero. Secondo il Wedemeyer ([11]), la parte discendente, di queste piccole onde, corrispondeva alla diastole degli atrii e quindi

([1]) Lower, *Tractatus de corde* etc. Amstelodami apud Elzevirum, 1671, Cap. II, pag. 75.
([2]) Citati da Mosso e Pagliani, *Critica della attività diastolica*. Torino, 1876.
([3]) Bichat, *Anatom. génér.*, tom. III, pag. 401. Parigi, 1812.
([4]) Weber, *De pulso, resorptione, auditu et tactu*. Lipsiae 1834, pag. 12.
([5]) Realdi Columbi Cremonensis, *De re anatomica*, L. XIV: *De viva sectione*, Venetiis, 1558. Citato dal Ceradini nella *Scoperta della circolazione*. Milano, 1876, pag, 87.
([6]) Barry, *Exper. researc. on the influenc. atmospherical pressure* etc. London. 1826.
([7]) Weyrich, *De cordis aspiratione experimenta*. Dorpat, 1853.
([8]) Volkmann, *Haemodynamik*. Leipzig, 1850, pag. 171.
([9]) Jacobson, Arch. f. pathol. Anat., Bd. 36, pag. 80; 1866.
([10]) Wedemeyer, *Untersuch. über den Kreislauf des Blutes*. Hannover, 1828.
([11]) Secondo la citazione di Mosso e Pagliani, *Critica sperimentale* ecc. Torino, 1876, pag. 12.

alla sistole dei ventricoli. Il Poiseuille [1] e il Weyrich [2] confermarono le osservazioni del Wedemeyer; ma successivamente lo Chauveau [3] ed il Fick [4] osservarono, invece, che la discesa dell'onda si verificava in corrispondenza della diastole ventricolare. Dopo il Fick, il Luciani [5] ottenne dei risultati incerti, e il Mosso [6] pubblicò dei tracciati, secondo i quali il massimo della pressione venosa nella vena giugulare si verifica durante la sistole ventricolare [7].

Un argomento favorevole alla aspirazione diastolica, non nel senso di Vesalio, ma nel senso più modesto dell' Harvey, venne fornito dalla osservazione del Fick [8], che il cuore dei mammiferi, asportato dall'animale, e quindi senza movimenti, quando cessa la compressione, praticata dalla mano sui suoi ventricoli in modo da imitarne la sistole, produce un'aspirazione misurabile dal manometro, e corrispondente a circa 15-20 cm. di H^2O.

Questo esperimento, facile a ripetersi, parrebbe provare che il cuore, quando cessa la sistole, assume la forma diastolica per la sua elasticità, aspirando il sangue venoso. Ma il valore dimostrativo di esso vien meno, quando si considera, che con la compressione della mano non si può portare il cuore nello stato in cui esso si trova realmente durante la sistole, e quando si considera che il cuore, appena cessa di battere, è preso dalla rigidità.

Mosso e Pagliani [9], nel 1876, tentarono di risolvere la questione dell'attività della diastole con esperienze dirette, misurando, cioè, se e quale resistenza il cuore pulsante della rana poteva superare per sviluppare la cavità ventricolare. A tale scopo cercarono quale fosse la pressione sulla superficie esterna di detto cuore, preparato col metodo del Luciani, capace di impedire la formazione della cavità ventricolare e quindi il carico del cuore; e trovarono che il cuore della rana, così preparato, poteva sviluppare la sua cavità, in opposizione ad una pressione di 15-20 mm. di H^2O.

Siccome questo valore era molto inferiore a quello che si attribuiva alla aspirazione diastolica, così i risultati di questi autori poterono essere pubblicati in prova della non esistenza di questa aspirazione, mentre in realtà essi costituiscono invece il primo fatto sperimentale che ne dimostra l'esistenza.

Riassumendo, i fatti provati, alla comparsa del lavoro di Mosso e Pagliani (1876), erano i seguenti:

(1) Poiseuille, *Recherches sur les causes du mouvement du sang dans les veines*. Journal de Magendie, 1830.

(2) Weyrich, loc. cit.

(3) Chauveau, *Études pratiques sur les mouvements vasculaires* etc. Gaz. Méd. de Paris, 1858, n. 57.

(4) Fick, *Ueber die Schwankungen des Blutdruckes* etc. Accad. med. di Würzburg, 1873.

(5) Luciani, *Risposta alla critica sperimentale della attività diastolica*. Rivista clinica, 1876.

(6) Mosso, *Sul polso negativo*. Arch. ddlle scienze mediche, 1878.

(7) Credo opportuno di qui ricordare che, secondo le mie ricerche (pag. 706 e seg.), il polso venoso può avere forme diverse.

(8) Fick, *Bemerkungen über einige Versuche zur Erläuterung der Mechanik des Herzens*. Archivio di G. Müller, 1849, pag, 283.

(9) Mosso e Pagliani, *Critica sperimentale della attività diastolica*. Torino, 1876.

a) Era provato che nelle vene prossime al cuore la pressione è negativa; ma non si sapeva, se questa pressione fosse dovuta esclusivamente alla pressione negativa toracica, oppure, in parte, anche ad aspirazione del cuore.

b) Era provato che nelle vene prossime al cuore, oltre alle oscillazioni sincrone coi movimenti respiratorii, si verificano anche oscillazioni sincrone coi moti del cuore (*polso venoso*); ma, mentre alcuni autori ammettevano che l'abbassamento della pressione venosa coincidesse con la diastole ventricolare, altri invece ammettevano che esso coincidesse colla sistole.

c) Era provato che il cuore dei mammiferi, sùbito dopo di aver cessato di battere, sviluppa un'aspirazione, quando si apre la mano che lo stringe; ma non era provato, se la sistole portasse il cuore in istato di tensione elastica, come la compressione della mano *post mortem*.

d) Era provato che il cuore di rana poteva sviluppare la sua cavità ventricolare in opposizione ad una pressione di 15-20 mill. di acqua.

Questi pochi fatti, di significato incerto, avevano dato origine a due dottrine sull'azione aspirante del cuore, molto diverse fra di loro: la *dottrina della aspirazione sistolica*, secondo la quale il cuore aspirava il sangue venoso durante la sistole ventricolare; e la *dottrina della aspirazione diastolica*, secondo la quale il cuore aspirava il sangue venoso durante la diastole ventricolare.

b) Dottrina della aspirazione sistolica. — Questa dottrina si fondava specialmente sulle osservazioni di Weyrich, secondo le quali l'abbassamento della curva del polso venoso si verifica durante la sistole ventricolare.

Ma come il cuore poteva agire da pompa aspirante, mentre agisce da pompa premente?

Purkinje e Nega [1] avevano ammesso, che il cuore aspirasse il sangue venoso durante la sistole ventricolare, perchè nella sistole si abbassa la base dei ventricoli del cuore dilatando così gli atri.

L'abbassamento, nella sistole, della base del cuore, si vede distintamente nel cuore di rana messo allo scoperto, mediante l'asportazione della parte anteriore del torace.

Il Landois [2] ed il Mosso [3] avevano ammesso che la sistole ventricolare producesse un'aspirazione sul sangue venoso, perchè si accompagna a diminuzione del volume del cuore, la quale deve spiegare un'azione aspirante anche sul sangue venoso dal momento che essa spiega un'azione aspirante sulla cavità polmonare, dimostrata dalle onde di Voit e Lossen (ved. pag. 699), e dal momento che essa spiega un'azione aspirante sulla cavità del torace, dimostrata da quell'abbassamento del torace, che il Mosso indicò col nome di *polso negativo*. Il Mosso ed il Landois aveano anche

[1] Purkinje, Jahresber. d. schles. Gesell., Breslau 1843, pag. 157; Nega, Casper's Wochenschrift, 1851, pag. 651. Citati dal Rollett nella *Fisiologia della circolazione* (Hermann's Handbuch der Physiologie (B. IV, Leipzig 1879).

[2] Landois, *Graphische Untersuchungen über den Herzschlag*. Berlin, 1876.

[3] Mosso, *Sul polso negativo*. Archivio per le scienze mediche, 1878.

supposto che una piccola aspirazione sul sangue venoso potesse essere prodotta dal sollevamento della parete toracica prodotto dall'urto sistolico del cuore.

Non si può escludere che le condizioni indicate dal Landois e dal Mosso possano determinare una qualche aspirazione sul sangue venoso; ma esse non possono certo essere la causa principale del polso venoso, perchè questo si verifica anche quando il torace è aperto.

c) Dottrina della aspirazione diastolica. — Come la precedente dottrina si appoggiava specialmente sulle osservazioni, secondo le quali la pressione venosa si abbassava durante la sistole ventricolare (Weyrich); così questa dottrina si appoggiava specialmente sulle osservazioni, secondo le quali la pressione venosa si abbassava invece durante la diastole ventricolare (Chauveau, Fick).

Rispetto al meccanismo di questa aspirazione, nessuno ammetteva che essa si effettuasse per contrazione di speciali fasci di fibre muscolari, come aveva ammesso Vesalio. L'ultimo sostenitore di questa dottrina, per quanto mi consta, è stato lo Spring (1). E si ammetteva, invece, che essa si effettuasse:

a) per elasticità del cuore;

b) per ingresso del sangue nelle arterie coronarie del cuore durante la sistole ventricolare;

c) per espansione attiva delle fibre muscolari del cuore.

Aspirazione diastolica per elasticità delle pareti del cuore. — Il Magendie (2) e, prima del Magendie, l'Harvey, aveano ammesso, siccome ho già detto, che il cuore si dilatasse per la elasticità delle sue pareti al cessare della sistole, come si dilata una spugna, quando viene a mancare la pressione che la comprime; *ut spongia, vi prius compressa, dum redit ad costitutionem suam.* Simile concetto, in favore del quale deponevano le osservazioni del Fick sulla aspirazione che produce il cuore isolato quando si apre la mano che lo stringe, era in accordo con la dottrina del Fontana intorno alla elasticità muscolare, secondo la quale nel muscolo si devono distinguere due forze in opposizione fra di loro, la *contrattilità* e la *elasticità*. Quando il muscolo si contrae, esso muta di forma in opposizione alla sua elasticità, ed entra perciò in istato di tensione elastica; e quando cessa la contrazione, esso riprende la sua forma primitiva con uno sforzo corrispondente alla tensione elastica in cui era stato messo dalla contrazione, e ritorna così in istato di equilibrio elastico.

Aspirazione diastolica per ingresso del sangue nelle arterie coronarie del cuore durante la diastole. — Secondo il Brücke (3), la dilatazione diastolica dei ventricoli si sarebbe verificata, perchè nelle arterie coronarie entrava il sangue dall'aorta, non durante la sistole, ma durante la diastole ventricolare; e ciò perchè le valvole arteriose, essendo aperte, chiudono durante la sistole

(1) Spring, *Sur les mouvements du coeur*. Bruxelles, 1871.
(2) Magendie, *Précis élémentaire de physiologie*, IV ediz. Bruxelles, 1834, pag. 294.
(3) von Brücke, *Der Verschluss der Kranzschlagadern durch d. Aortenklappen*. Wien, 1855.

l'orificio aortico delle coronarie, che trovasi dietro di esse. Quando, all'inizio della diastole, le valvole arteriose si chiudono, l'orificio delle coronarie rimane scoperto, e solo allora il sangue può dall'aorta entrare in queste arterie, le quali perciò vengono distese, distendendo alla loro volta le pareti dei ventricoli, in modo da formare una cavità che aspira il sangue venoso. Secondo questa dottrina, la diastole ventricolare sarebbe quindi un fenomeno analogo alla erezione.

La dottrina del Brücke, nota sotto il nome di *dottrina dell'autogoverno del cuore*, rimarrà nella scienza come documento della genialità di quell'insigne fisiologo. Ma essa è stata definitivamente demolita dalla dimostrazione: 1°) che l'orificio delle coronarie non è sempre dietro le valvole aortiche (Hyrtl) (1); 2°) che le valvole aortiche, quando sono aperte, durante la sistole ventricolare, non stanno addossate contro le pareti dell'aorta, e fra esse e l'aorta rimane invece uno spazio (Ceradini) (2); 3°) che il polso delle coronarie è sincrono con quello della carotide (Martin e Segdwich) (3).

Aspirazione diastolica per espansione attiva delle fibre del miocardio. — Il Luciani (4), nel 1871, avea espresso l'opinione che le fibre del miocardio, al cessare della sistole, si allungassero per attività propria, formando la cavità ventricolare, soppressa dalla sistole stessa; e, in conformità a questo concetto, anzichè la dottrina del Fontana sulla elasticità muscolare, egli seguiva invece quella del Weber, secondo la quale il muscolo può trovarsi in due stati, di riposo e di contrazione, a ciascuno dei quali corrisponde una forma speciale, che esso muscolo assume in forza della elasticità che gli è propria in ciascuno di questi stati. Quando il muscolo passa dallo stato di riposo a quello di contrazione, esso assume, secondo il Weber, la forma propria al muscolo in contrazione con uno sforzo corrispondente alla elasticità propria del muscolo in contrazione; e rispettivamente, quando il muscolo passa dallo stato di contrazione a quello di riposo, assume la forma del muscolo in riposo con uno sforzo corrispondente alla elasticità propria del muscolo in riposo.

In appoggio al concetto dell'allungamento, per attività propria, delle fibre contratte del miocardio, il Luciani ricordava le osservazioni del Coats (5), secondo le quali, stimolando il vago nella rana, si ottiene talora un abbassamento progressivo dell'altezza sistolica, senza mutamenti nella frequenza dei battiti.

d) Esperienze di Goltz e Gaule e mie. — Tale era lo stato della scienza in rapporto all'azione aspirante del cuore, quando, nell'anno 1878, a poca distanza di tempo, comparvero il lavoro di Goltz e Gaule (6) sulla pressione nelle

(1) Hyrtl, *Ueber die Selbsteuerung des Herzens*. Wien, 1855.

(2) Ceradini, *Il meccanismo delle valvole semilunari*. Sperimentale, 1872.

(3) Martin and Segdwich, *Observations of the mean pressure and the characters of the pulse-wave in the coronary arteries*. Journal of physiologie, III, 1881, pag. 165.

(4) Luciani, *Della attività della diastole cardiaca*, Bologna 1871. *Risposta alla critica sperimentale della attività diastolica di Mosso e Pagliani* (Rivista clinica. Bologna, 1876).

(5) Coats, *Wie ändert sich durch die Erregung des Vagus die Arbeit und die inneren Reize des Herzens*. Lavori del laboratorio di Ludwig, 1869.

(6) Goltz e Gaule, *Ueber die Druckverhältnisse im Innern des Herzens*. Archivio di Pflüger, Bd. XVII, 1878.

cavità del cuore, ed il mio [1] sulle variazioni volumetriche del cuore e sulla aspirazione diastolica.

Goltz e Gaule, mediante uno speciale manometro a minimo, che veniva messo in comunicazione colle cavità del cuore per mezzo di cannule insinuate, per la giugulare, nell'atrio destro e nel ventricolo destro, e per la carotide nel ventricolo sinistro, hanno messo fuori di questione l'esistenza di una aspirazione cardiaca, dimostrando nelle cavità del cuore una pressione negativa abbastanza notevole, anche a torace aperto, e tanto più bassa, quanto maggiore era lo spessore delle pareti cardiache.

La pressione negativa, dimostrata da Goltz e Gaule nelle cavità cardiache del cane, è stata:

ventricolo	sinistro	— 23,5	mm. Hg.
"	destro	— 17,2	" "
atrio	destro	— 11,0	" "

Questa pressione negativa fu dal Goltz riferita alla elasticità delle pareti del cuore, in accordo coi concetti del Magendie e dell'Harvey.

Nel mio lavoro *Sulle variazioni volumetriche del cuore e sulla aspirazione diastolica* veniva, contemporaneamente, dimostrato, per mezzo della fistola del pericardio, che il cuore del cane si può dilatare, e caricare quindi di sangue, anche se la pressione sulla sua esterna superficie supera di 15-20 cm. di H^2O la pressione del sangue nell'atrio destro.

In tal modo, con procedimento diverso, sono stati da me confermati i risultati del Goltz; non solo, ma le mie ricerche sono venute, per così dire, ad integrare quelle del Goltz, perchè con esse è stato anche dimostrato, come farò conoscere più innanzi, che l'aspirazione cardiaca è regolata dal vago, ed ha quindi una origine fisiologica.

CAPITOLO VI.

Ricerche per dimostrare la reale esistenza di una attività diastolica.

Per provare che il cuore possiede realmente l'attitudine di caricarsi per attività propria, ho fatto quattro ordini di ricerche: 1°) ricerche intorno all'azione che spiega sul circolo una pressione nel pericardio; 2°) ricerche intorno all'azione che spiega il vago sulla attività espansoria del cuore; 3°) ricerche intorno all'azione che spiega il vago sulla forma delle curve cardiovolumetriche; 4°) ricerche intorno all'azione che spiegano alcuni farmaci sulla attività espansoria del cuore.

*
* *

1. **Azione, sul circolo, di una pressione nel pericardio.** — Una pressione nella cavità del pericardio costituisce evidentemente un ostacolo alla dilata-

[1] Stefani, *Intorno alle variazioni del volume del cuore ed alla aspirazione diastolica.* Accademia medica di Ferrara, 25 luglio 1878.

zione e quindi al carico del cuore; e se il cuore non possiede l'attitudine di dilatarsi attivamente, il carico non dovrebbe essere più possibile e la circolazione dovrebbe quindi arrestarsi, quando la detta pressione fosse tale da fare equilibrio alla pressione venosa.

Partendo da queste premesse, mi sono proposto di dimostrare: 1°) quali siano gli effetti, sul circolo, di una pressione progressivamente crescente nella cavità del peri cardio; 2°) quale sia la differenza fra l'altezza della pressione necessaria per impedire il carico del cuore, e quindi arrestare il circolo, e l'altezza contemporanea della pressione venosa.

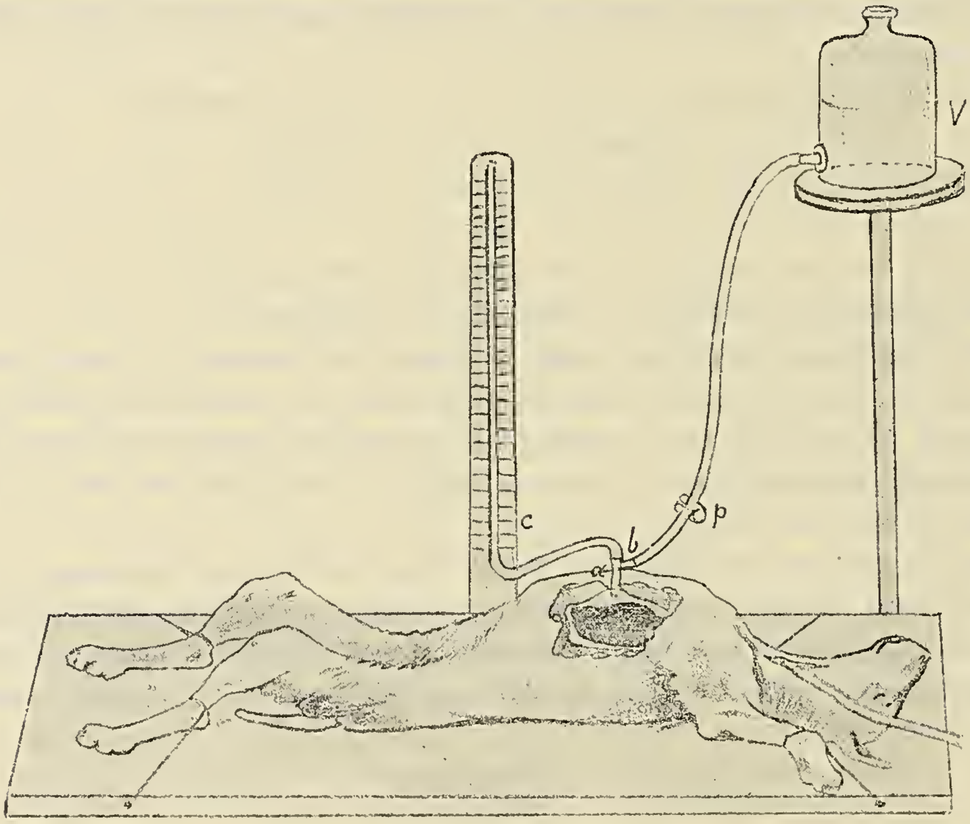


Fig. 39. — Questa figura rappresenta il modo con cui veniva fatta e misurata la pressione nella cavità del pericardio; V, vaso di pressione; *b*, ramo laterale del tubo a T innestato nella cavità del pericardio; *a*, ramo principale del tubo a T in comunicazione, coll'un capo, colla cavità del pericardio e coll'altro col tubo graduato, *c*, funzionante da manometro; *p*, pinza con cui si chiude ed apre il tubo che porta la soluzione fisiologica dal vaso di pressione nella cavità del pericardio.

a) Effetti, sul circolo, di una pressione pericardica progressivamente crescente. — Per conoscere gli effetti, sul circolo, di una pressione progressivamente crescente nella cavità del pericardio, praticata la fistola, si lascia entrare la soluzione fisiologica nella detta cavità, si misura la pressione progressivamente crescente nella stessa, e contemporaneamente si registra la pressione arteriosa e si misura la pressione venosa [1].

Per fare entrare a poco a poco la soluzione fisiologica nella cavità del pericardio, mi sono servito di un vaso di pressione V (fig. 39), in comunicazione, mediante un

[1] A. Stefani, *Nuovo metodo* ecc., 1877; *Intorno alle variazioni* ecc, 1878; *Cardiovolume* ecc., 1891

tubo di gomma, con la cannula innestata nel pericardio; e per misurare la pressione della detta soluzione nella cavità del pericardio, ho applicato alla cannula innestata nel pericardio un tubo a T, il quale veniva disposto in modo che il ramo laterale, *b*, fosse in direzione orizzontale, e il ramo principalo, *a*, coll'un capo in comunicazione colla cannula innestata nel pericardio e coll'altro capo con un tubo graduato, *c*, che serviva da manometro. La soluzione fisiologica entrava nelle cavità del pericardio per il ramo *b*, e la pressione nel pericardio era misurata dall'altezza a cui essa saliva nel tubo graduato. Mediante apposita pinza, *p*, si permetteva o si sospendeva la discesa della soluzione fisiologica dal vaso V.

La pressione arteriosa era registrata da un manometro innestato nel moncone centrale di una carotide, coniugato con un timpano di Marey; e la pressione venosa era misurata da un manometro a bicarbonato di soda, innestato nel moncone centralo della giugulare destra.

Anche queste ricerche furono eseguite su cani curarizzati, sospendendo la respirazione artificiale quando si faceva la lettura delle altezze della pressione pericardica e della pressione venosa.

Queste ricerche hanno dimostrato che:

1°) di mano in mano che si eleva la pressione nel pericardio, aumenta la frequenza dei movimenti del cuore (fig. 40);

2°) in seguito all'innalzamento progressivo della pressione del pericardio, si verifica un abbassamento, prima lento e poi rapido, della pressione arteriosa;

3°) l'abbassamento della pressione arteriosa si accompagna con innalzamento della pressione venosa. L'abbassamento della pressione arteriosa è però in proporzione molto maggiore del contemporaneo innalzamento della pressione venosa;

4°) per il progressivo innalzamento della pressione pericardica le oscillazioni sfigmiche, oltre che più frequenti, diventano sempre più piccole, e finiscono per scomparire poco prima che la pressione arteriosa sia divenuta eguale alla venosa. Quando le oscillazioni sfigmiche sono scomparse, il manometro innestato nella carotide segna una linea, non solo retta, ma orizzontale, o quasi (fig. 40).

L'innalzamento della pressione venosa e l'abbassamento della arteriosa sono, evidentemente, la conseguenza dell'ostacolo che la pressione pericardica oppone al carico del cuore. La pressione venosa si eleva, perchè è ostacolato il deflusso venoso; e la pressione arteriosa si abbassa, perchè, in conseguenza, diminuisce lo scarico del cuore nelle arterie, e perciò il polso diventa sempre più piccolo. Ma da che dipende la maggiore frequenza dei battiti cardiaci?

Essendo notorio che l'aumento della pressione arteriosa produce rallentamento dei battiti cardiaci eccitando il centro del vago, parmi logico l'ammettere che l'acceleramento degli stessi, che si verifica in seguito all'aumento della pressione pericardica, dipenda da un'azione inibitoria che l'abbassamento della pressione arteriosa spiega sul detto centro. Però, oltre all'abbassamento della pressione arteriosa, a produrre il detto acceleramento deve concorrere anche qualche altro fattore, perchè, sul principio dell'esperienza, mentre l'acceleramento dei battiti va crescendo, la pressione arteriosa, dopo essersi un po' abbassata, si mantiene stazionaria, o quasi, ad un livello di poco inferiore al livello normale (fig. 40).

L'azione dei vaghi sull'acceleramento sopraindicato non si può dimostrare mediante il taglio degli stessi, perchè questo taglio, nei cani, è seguìto, come è ben noto, da grande aumento nella frequenza dei movimenti del cuore.

Qualunque sia il modo con cui la pressione pericardica fa aumentare la frequenza dei battiti cardiaci ([1]), merita di essere rilevato che, per mezzo di questo aumento, vengono neutralizzati gli effetti sinistri della pressione pericardica sul circolo, perchè, in virtù di esso, rimane invariato, o quasi, lo scarico del cuore nella unità di tempo, nullostante la diminuzione dello scarico per rivoluzione, e la pressione arteriosa può così mantenersi all'altezza necessaria per i bisogni circolatorii.

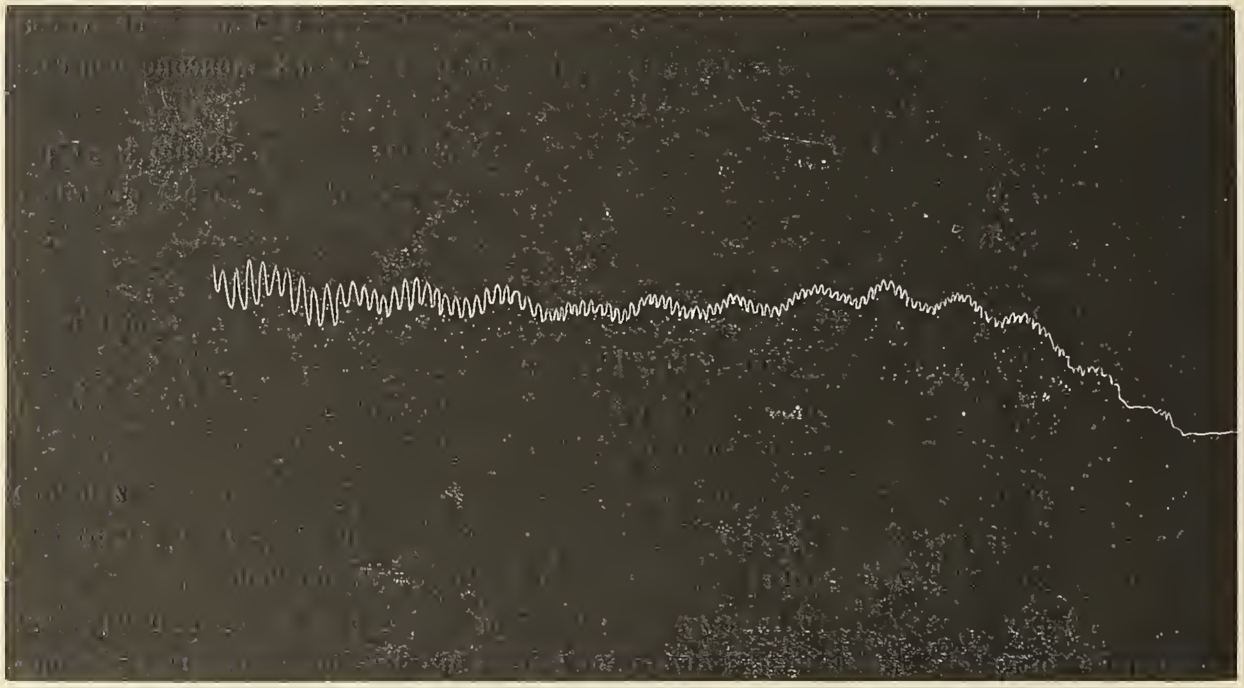


Fig. 40. — Pressione nella carotide mentre aumenta progressivamente la pressione nella cavità di pericardio. La registrazione della pressione è fatta per mezzo di un manometro elastico. La respirazione artificiale non è sospesa, ma fatta con movimenti blandi.

La pressione pericardica ostacola il carico; ma il cuore, eseguendo un maggior numero di scarichi, versa nella unità di tempo, nelle arterie, presso a poco la stessa quantità di sangue.

Questo compenso è possibile però solamente entro certi limiti; quando la pressione pericardica raggiunge una data altezza, esso non può più verificarsi, e allora la pressione arteriosa discende, quasi precipitosamente, e le oscillazioni sfigmiche, dopo di essere divenute sempre più piccole, scompaiono, e il manometro nella carotide segna una linea retta e orizzontale (fig. 40).

([1]) In un mio lavoro del 1896 (*Azione della pressione arteriosa sui vasi e sul cuore.* Atti del R. Istituto veneto, tom. VII, serie VII) ho dimostrato che la pressione arteriosa non spiega, in via riflessa, alcuna azione nè sul cuore nè sui vasi, e che l'azione rallentatrice della pressione sui battiti del cuore si compie anche se i depressori sono stati tagliati.

Il meccanismo, con cui è compensato l'ostacolo al carico del cuore, prodotto dalla pressione pericardica, corrisponde a quello con cui è compensata la diminuzione del campo respiratorio per lesioni polmonari, versamenti pleurici, etc. (1).

Come è noto, in simili condizioni aumenta la frequenza dei movimenti respiratorii, si verifica la *dispnea di frequenza*, e così nella unità di tempo viene introdotta nei polmoni, presso a poco, la stessa quantità d'aria, come nello stato normale, benchè minore sia la quantità d'aria introdotta ad ogni ispirazione.

E giacchè sono entrato in questo argomento, non posso a meno di notare, che anche il meccanismo, con cui sono compensati gli ostacoli al passaggio del sangue dal cuore nelle arterie, è analogo al meccanismo con cui sono compensati gli ostacoli al passaggio dell'aria dall'atmosfera nei polmoni. La stenosi aortica è compensata con scarichi più rari e più abbondanti, e la stenosi laringea con ispirazioni più rare e profonde, *dispnea di profondità*.

Coll'elevarsi della pressione pericardica, la pressione venosa si eleva, e l'arteriosa si abbassa, siccome ho detto, in proporzione molto maggiore. Questo fatto dipende dalla maggiore ampiezza del letto della corrente venosa in confronto a quello della corrente arteriosa.

Quando la circolazione veniva arrestata dalla pressione pericardica, ed il manometro innestato nella carotide, dopo di essere rapidamente disceso, segnava una linea retta e orizzontale, secondo le mie osservazioni, la pressione arteriosa era di 15-20 mm. Hg. e la pressione venosa di 10-15 centimetri di soluzione di bicarbonato di soda, vale a dire di circa 10 mm. Hg. Lo zero dei manometri fu determinato alla fine di ogni esperienza, aprendo la carotide, e rispettivamente, la giugulare.

La pressione che si verifica nei vasi dell'animale vivente, quando è soppressa l'azione del cuore e quindi la circolazione, rappresenta lo *zero fisiologico* della pressione sanguigna, e dipende dal rapporto fra la quantità del sangue e la capacità del sistema vascolare; e perciò i miei risultati dimostrano che, nello stato normale, la quantità di sangue contenuta nel sistema circolatorio è tale da mantenere i vasi in uno stato di tensione elastica, corrispondente, presso a poco, a 15 mm. Hg.

Le cifre, da me ottenute, rispetto alla detta pressione, sopprimendo il carico del cuore mediante la pressione nel pericardio, corrispondono a quelle in precedenza ottenute dal Brunner (2), arrestando il cuore mediante la stimolazione del vago; ma il metodo della pressione pericardica, per molti riguardi, è preferibile a quello della stimolazione del vago.

Quando è soppressa l'azione del cuore, per la legge dei vasi comunicanti, la pressione arteriosa si dovrebbe equilibrare con la venosa; e se nelle surriferite espe-

(1) In una mia pubblicazione del 1888, in collaborazione col dottor Sighicelli (*In qual modo il vago polmonare modifica il ritmo di respirazione quando aumenta e quando diminuisce la pressione nella cavità dei polmoni*. Sperimentale, an. 1888), ho dimostrato che la *dispnea di frequenza*, dipendente da diminuzione del campo respiratorio, e la *dispnea di profondità*, dipendente da stringimenti lungo le vie respiratorie, si verificano in via riflessa per mezzo dell'azione che la diminuzione e l'aumento della pressione polmonare spiegano sulle terminazioni del vago polmonare.

(2) Brunner, Zeitschr. f. rat. Med. 1855. Vedi Rollett, *Physiol. des Blutes und der Blutbewegungen* (Hermann's Handb. d. Physiol., B. IV, Th. 1, pag. 247. Leipzig, an. 1880).

rienze il perfetto equilibrio non si è verificato, ciò si deve ascrivere alle grandi resistenze che oppongono i capillari al movimento del sangue, ed alla progressiva diminuzione della forza che spinge il sangue attraverso i medesimi, causata dall'abbassamento progressivo della pressione arteriosa e dal contemporaneo innalzamento della venosa. Se la funzione del cuore si potesse sopprimere per un tempo più lungo senza produrre la morte, l'equilibrio fra la pressione arteriosa e la pressione venosa si verificherebbe indubbiamente.

La pressione che fa il sangue contro le pareti dei vasi, quando è soppressa l'azione del cuore, ha una notevole importanza fisiologica, perchè costituisce una condizione fisica indispensabile all'effettuarsi della circolazione. Se questa pressione mancasse, il sangue, scaricato dal cuore nelle arterie, si arresterebbe nelle stesse, come in uno stagno. E la necessità della detta pressione per la circolazione spiega il fatto, che dopo gravi perdite di sangue la circolazione si arresta, se non si provvede sollecitamente ad aumentare la massa del sangue.

Lo zero fisiologico della pressione del sangue non si può determinare dopo la morte, perchè, appena l'animale muore, esce dai vasi una notevole quantità di liquido.

b) Altezza della pressione venosa e altezza della pressione pericardica nel momento in cui il circolo è da questa arrestato [1]. In queste esperienze la pressione venosa e la pressione pericardica erano misurate come nelle precedenti; l'arresto del circolo era indicato dal manometro a mercurio innestato nella carotide; lo zero del manometro in comunicazione con la giugulare fu determinato come nelle ricerche precedenti, aprendo la vena alla fine dell'esperienza, e così lo zero del manometro innestato nel pericardio fu determinato aprendo alla fine dell'esperienza il sacco pericardico; i cani erano curarizzati e la respirazione artificiale veniva sospesa, poco prima di fare le letture delle altezze nei manometri.

Riporto i risultati di otto esperienze, tutte su cani.

Numero progressivo delle esperienze	Nel momento in cui la circolazione si arresta		Eccedenza della pressione pericardica sulla pressione venosa
	Pressione pericardica	Pressione nella vena cava superiore	
1	35 cent. H^2O	10 cent. H^2O	25 cent. H^2O
2	20 » »	6 » »	14 » »
3	40 » »	8 » »	32 » »
4	27 » »	13 » »	14 » »
5	27 » »	8 » »	19 » »
6	27 » »	13 » »	14 » »
7	25 » »	14 » »	11 » »
8	26 » »	12 » »	11 » »
Media . . .	**28.4** » »	**10.4** » »	**18** » »

[1] A. Stefani, *Intorno alle variazioni del volume del cuore* ecc., Ferrara 1878; *Cardiovolume* ecc., Ferrara 1891.

Dalla surriferita tabella, risulta che, allorquando la pressione pericardica arrestava il circolo, essa era superiore a quella della giugulare, in media, di 18 centim. di H^2O; e questo fatto dimostra che, per impedire il carico del cuore, era necessaria nel pericardio una pressione superiore a quella del sangue venoso, di 18 centim. d'acqua, e quindi che il cuore si dilatava per azione propria, con uno sforzo pari a 18 centim. di H^2O, che corrispondono a 14 mm. di Hg circa, sforzo che fu da me indicato col nome di *pressione diastolica* [1].

Simili risultati furono da me pubblicati nel 1878, rilevando il perfetto accordo di essi con quelli pubblicati qualche mese prima da Goltz e Gaule, in rapporto alla pressione negativa nelle cavità del cuore (vedi pag. 719). Gli uni e gli altri si completano a vicenda, dimostrando che il cuore ha l'attitudine di espandersi attivamente, e che quindi, oltre alla *funzione sistolica*, si deve in esso riconoscere anche una *funzione diastolica*.

*
* *

2. **Azione del vago sulla attività espansoria del cuore.** — Per conoscere se il vago spiega sul cuore un'azione espansoria, ho cercato se il taglio e la stimolazione dei vaghi modificavano l'altezza della pressione diastolica.

a) Effetti del taglio dei vaghi sull'altezza della pressione diastolica. — Per dimostrare l'azione del taglio dei vaghi sulla pressione diastolica, ho determinato quale fosse la pressione pericardica necessaria per arrestare il circolo, prima e dopo il taglio dei vaghi. A rigore, sarebbe stato necessario di determinare anche l'altezza della pressione venosa nel momento in cui il circolo si arrestava, perchè la pressione diastolica, come ho già fatto conoscere, è misurata dalla differenza fra la pressione pericardica e la pressione venosa nel momento in cui il circolo viene arrestato dalla pressione pericardica. Ma, per semplificare la esperienza, ho creduto di poter omettere la misura della pressione venosa, considerando che, quando il circolo si arresta, la pressione venosa sale sempre, presso a poco, nello stesso animale, alla medesima altezza, siano i vaghi integri oppure tagliati, e che perciò le differenze fra le pressioni pericardiche arrestatrici del circolo, prima e dopo il taglio dei vaghi, misurano, con molta approssimazione, le differenze delle rispettive pressioni diastoliche.

Le esperienze a questo scopo eseguite sono state in numero di cinque, ed i risultati dalle stesse ottenuti sono riassunti nella seguente tabella:

(1) Benchè la respirazione artificiale fosse da poco sospesa, allorquando la pressione pericardica arrestava il circolo, il centro del vago doveva trovarsi in istato di incipiente eccitazione dispnóica in causa dell'anemia del midóllo allungato, dipendente dal progressivo rallentamento della circolazióne.

Numero progressivo delle esperienze	Pressione pericardica arrestante il circolo		Diminuzione della pressione diastolica dopo il taglio dei vaghi
	Prima del taglio dei vaghi	Dopo il taglio dei vaghi	
1	35 cent. H^2O	20 cent. H^2O	15 cent. H^2O
2	26 » »	16 » »	10 » »
3	21 » »	12 » »	9 » »
4	24 » »	13 » »	11 » »
5	23 » »	13 » »	10 » »
MEDIA . . .	26 » »	15 » »	11 » »

Da questa tabella risulta che la pressione diastolica diminuisce notevolmente in seguito al taglio dei vaghi, in media di 11 centim. H^2O, pari a circa 9 mm. Hg. Essendo stata la pressione diastolica, a vaghi integri, di circa 14 mm. Hg, e diminuendo essa, per il taglio dei vaghi, di circa 9 mm. Hg, ne viene di conseguenza che, a vaghi tagliati, essa dovrebbe essere di soli 5 mm. Hg.

b) Effetti della stimolazione del vago sull'altezza della pressione diastolica. — Visti gli effetti del taglio, ho cercato di conoscere quale fosse l'azione della stimolazione dei vaghi sulla pressione diastolica. A tale scopo ho stimolato il vago, destro o sinistro, appena il circolo veniva arrestato dalla pressione pericardica.

Se l'eccitazione del vago aumenta l'attività espansoria del cuore, stimolando il detto nervo nelle condizioni sopraindicate, il cuore dovrebbe riprendere l'attitudine di caricarsi, e il circolo quindi ristabilirsi. E questo è precisamente quello che con queste esperienze sono riuscito ad ottenere ([1]).

Il ristabilimento del circolo, arrestato dalla pressione pericardica, per opera della stimolazione del vago, è documentato dalle grafiche riprodotte dalle figg. 41-42.

Queste grafiche dimostrano, che in seguito alla stimolazione elettrica del vago, nullostante la persistenza della pressione pericardica, sono ricomparse nella carotide le oscillazioni sfigmiche soppresse, e si è prontamente e rapidamente rialzata la pressione arteriosa, che era discesa allo zero fisiologico, fino a raggiungere il livello normale.

Il risultato non poteva essere più dimostrativo; e non posso a meno di dire che esso ha prodotto in me grande impressione.

Nelle grafiche riprodotte dalle figg. 41-42 si vede, che al primo arresto della circolazione, prodotto dalla pressione pericardica, è succeduto, dopo alcuni secondi, un ristabilimento spontaneo, completo della stessa, il quale è stato seguito da un secondo arresto, che sarebbe stato, con tutta probabilità, definitivo, se il vago non fosse poi stato stimolato elettricamente.

([1]) A. Stefani, *Intorno alle variazioni del volume del cuore*, ecc. Atti dell'Accad. medica di Ferrara, 1878.

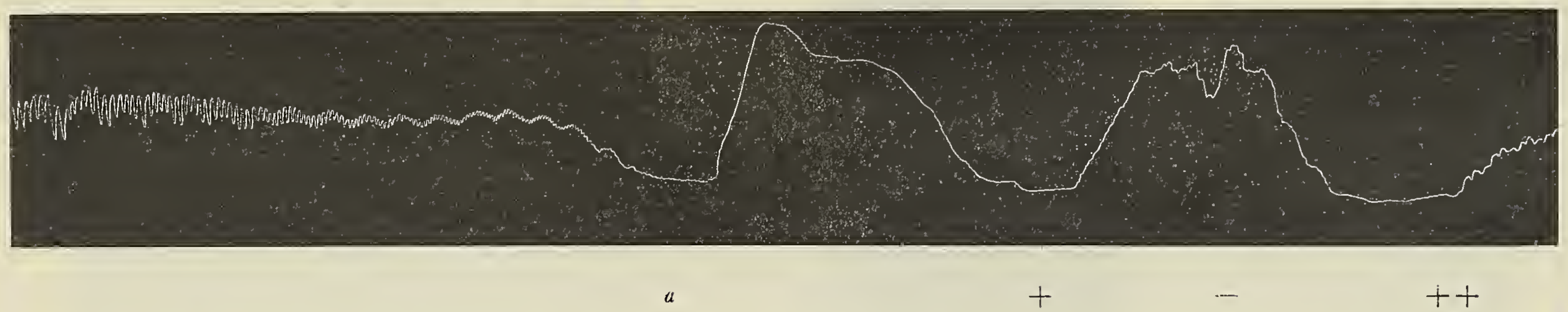


Fig. 41. — Cane curarizzato, fistola del pericardio, respirazione artificiale con movimenti blandi, pressione carotidea registrata per mezzo di un manometro elastico; tracciato ridotto a metà per mezzo della fotografia. In causa di un aumento progressivo della pressione nella cavità del pericardio si abbassa progressivamente la pressione arteriosa, il polso diventa sempre più piccolo e frequente e finalmente la circolazione si arresta in *a*. A questo arresto, dopo alcuni secondi, succede un ripristino spontaneo della circolazione, con innalzamento della pressione arteriosa al disopra del livello primitivo e ricomparsa delle oscillazioni sfigmiche; ma, poco dopo, la pressione comincia di nuovo ad abbassarsi progressivamente, scompaiono le oscillazioni sfigmiche e la circolazione si arresta di nuovo. Durante questo secondo arresto, in +, si stimola il vago al collo con corrente indotta e la circolazione subito si ristabilisce; la pressione si eleva rapidamente e ritornano le oscillazioni sfigmiche; in — si sospende lo stimolo e la circolazione si arresta per la terza volta, portandosi la pressione, come in precedenza, allo zero fisiologico. Durante questo terzo arresto, in + +, si stimola di nuovo il vago, con corrente indotta, e per la terza volta la circolazione si ristabilisce; la pressione arteriosa si eleva e ricompaiono le oscillazioni sfigmiche.

Sulle prime non riuscivo a spiegarmi il perchè del ristabilimento spontaneo, che si è compiuto in modo eguale a quello che si verificò poi per opera della stimolazione del vago; ma ben presto ho compreso, che esso si doveva riferire allo stato dispnoico del sangue dipendente dalla sospensione della circolazione, stato dispnoico che eccita, come è ben noto, il centro bulbare inibitore dei movimenti del cuore. Ristabilitasi la circolazione, lo stato dispnoico del sangue è scomparso; ed essendo così venuta a mancare la eccitazione del vago, il cuore non ha più potuto dilatarsi, e quindi la circolazione si è nuovamente arrestata.

Ma le fibre del vago erano sempre eccitabili, e il cuore era capace di rispondere alla loro eccitazione; e perciò la stimolazione elettrica del vago, durante il secondo arresto del circolo, ha determinato un novello ristabilimento, che è cessato appena fu sospeso lo stimolo.

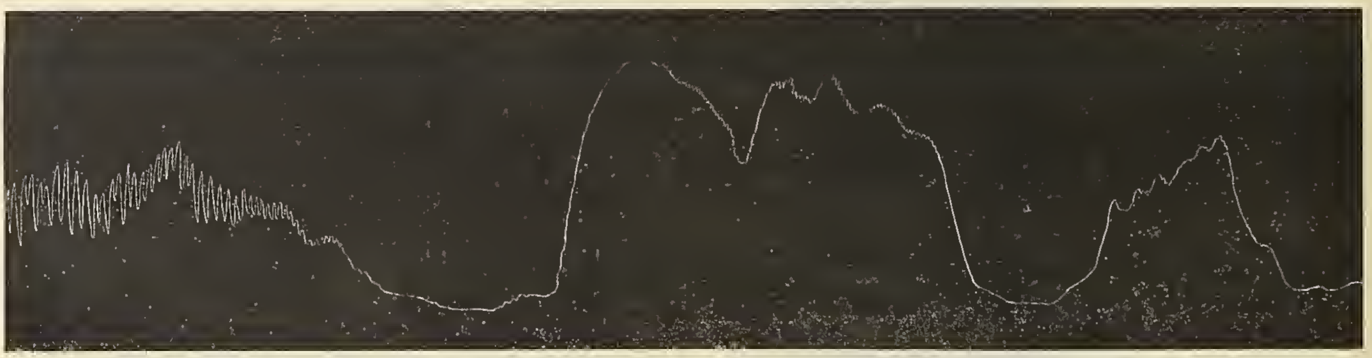


Fig. 42. — Tracciato dalla pressione arteriosa ottenuto in altro esperimento perfettamente conforme al precedente, e ridotto a metà per mezzo della fotografia. *a*, +, — come nella figura precedente.

Al terzo arresto del circolo, in causa di una nuova stimolazione elettrica del vago, è succeduto un terzo ristabilimento, ma meno completo, probabilmente, per l'incipiente esaurimento del vago e del cuore.

Se il vago viene stimolato quando la pressione pericardica non ha ancora arrestato completamente il circolo, ma ha determinato un notevole abbassamento della pressione arteriosa ed un aumento, pure considerevole, della frequenza del polso con impicciolimento delle oscillazioni sfigmiche, la pressione arteriosa si rialza, mentre le oscillazioni sfigmiche diventano meno frequenti e più ampie. Mediante lo stimolo del vago, si può dunque correggere la deficienza del carico, allorquando questa più non è compensata dall'aumento della frequenza dei battiti del cuore. La fig. 43 dimostra i fatti sopraindicati, e costituisce un bell'esempio di aumento di pressione arteriosa, contemporaneo a diminuzione della frequenza dei movimenti del cuore.

Lo stimolo del vago, durante l'arresto della circolazione, prodotto dalla pressione pericardica, talora determina solamente la ricomparsa di qualche oscillazione sfigmica, senza rialzamento della pressione arteriosa.

Considerando le condizioni complesse di queste ricerche (curarizzazione, respirazione artificiale, pressione pericardica e arresto del circolo), si capisce come spesso non si riesca ad ottenere i risultati sopraindicati; e a tale proposito credo opportuno

di notare, che condizione essenziale per il buon risultato di queste ricerche è la buona qualità del curaro, e che il curaro di buona qualità oggi è piuttosto raro.

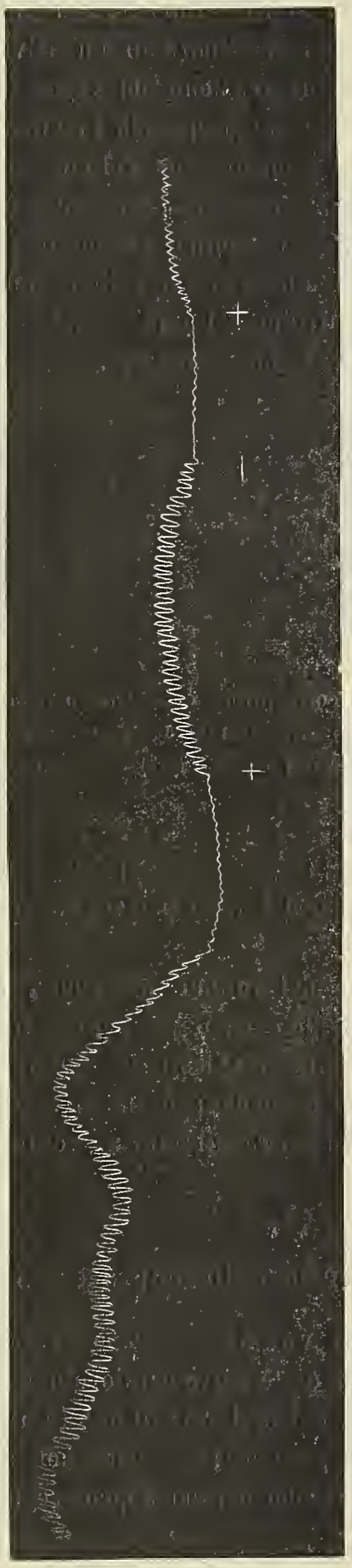


Fig. 43. — Cane curarizzato, fistola del pericardio, respirazione artificiale con movimenti blandi, tracciato della pressione carotidea, ottenuto mediante manometro elastico, mentre aumenta progressivamente la pressione nella cavità del pericardio. La pressione arteriosa progressivamente si abbassa, le oscillazioni sfigmiche diventano più piccole e frequenti. In + si stimola il vago al collo con corrente indotta, e la pressione arteriosa si innalza e le oscillazioni sfigmiche diventano più ampie e meno frequenti. In — si sospende lo stimolo e la pressione si abbassa e la circolazione tende di nuovo ad arrestarsi. Un nuovo stimolo del vago in + determina un nuovo innalzamento della pressione arteriosa, una maggiore ampiezza e una minore frequenza delle oscillazioni sfigmiche.

Se, nelle surriferite esperienze, la eccitazione del vago ripristinava il circolo, perchè aumentava la forza espansoria del cuore, rendendo possibile il carico ad onta

della compressione pericardica, la detta eccitazione del vago avrebbe dovuto produrre un aumento del volume del cuore; e perciò mi sono studiato di provare, se questo aumento, in realtà, si verificava. Una simile dimostrazione avrebbe evidentemente costituito una interessante conferma della esistenza di un'attività diastolica e della subordinazione di questa attività alla innervazione del vago.

Per dimostrare se la eccitazione del vago, quando la circolazione era arrestata dalla pressione pericardica, produceva aumento del volume del cuore, ho messo in comunicazione il manometro a soluzione fisiologica, che misurava la pressione pericardica, con un tamburino di Marey, ed ho quindi stimolato il vago.

Se lo stimolo del vago produceva aumento del volume del cuore, esso avrebbe dovuto produrre un innalzamento del livello del liquido nel detto manometro, e, per conseguenza, un innalzamento della leva del tamburino.

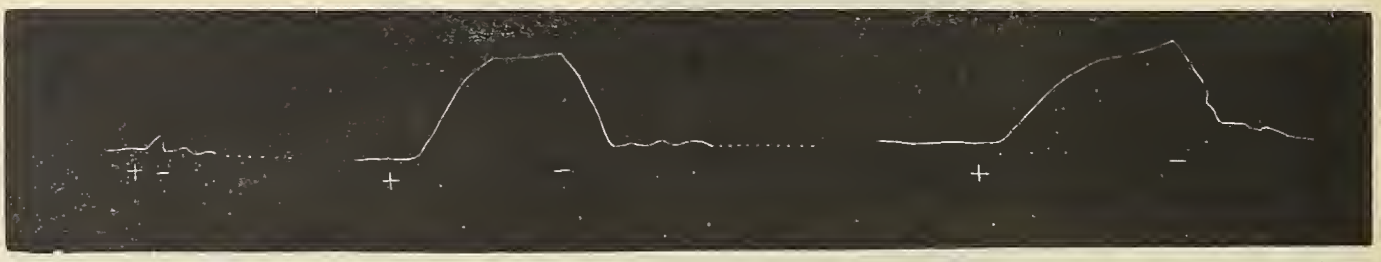


Fig. 44. — In causa di una pressione pericardica progressivamente crescente scompaiono le oscillazioni cardiovolumetriche. In + viene stimolato il vago al collo prima con stimolo debole e poi con stimolo più forte, e in — si sospende la stimolazione. In seguito allo stimolo del vago il cuore si dilata prima rapidamente e poi più lentamente, e quando si sospende lo stimolo, il volume del cuore diminuisce rapidamente.

Operando in tal modo ([1]) ho ottenuto la grafica riprodotta dalla fig. 44, la quale dimostra, che realmente la stimolazione del vago è stata seguìta da aumento del volume del cuore.

Secondo questa grafica, l'aumento del volume del cuore, sotto lo stimolo del vago, è stato pronto, ma prima più rapido e poi più lento; mentre la diminuzione, al cessare dello stimolo, è stata precipitosa. Questi particolari si spiegano, considerando che la dilatazione del cuore era ostacolata dalla pressione pericardica, e che questa coadiuvava invece il ritorno del cuore dilatato al volume primitivo.

***

3. Azione del vago sulla forma della curva cardiovolumetrica.

a) Effetti del taglio dei vaghi. — Dopo il taglio dei vaghi, oltre alla durata, diminuisce anche l'altezza delle curve cardiovolumetriche; aumenta l'inclinazione della parte discendente, per cui la durata di questa diventa eguale a quella della ascendente; i passaggi sono più graduati; il carico non si distingue più in rapido e lento, e le onde secondarie mancano o sono appena segnate (fig. 24, 45, 46).

([1]) A. Stefani, *Intorno al modo con cui il vago agisce sul cuore.* Atti Accad. Medica, Ferrara, 1882.

Le curve cardiovolumetriche dopo il taglio dei vaghi hanno quindi molta rassomiglianza con quelle che si ottengono subito dopo la sospensione del respiro, quando il cuore batte con la frequenza ordinaria.

La minore altezza può essere spiegata, in parte almeno, con la minore durata; ma gli altri caratteri, mi sembra, che non si possano interpretare senza ammettere una minore attività, tanto della sistole quanto della diastole.

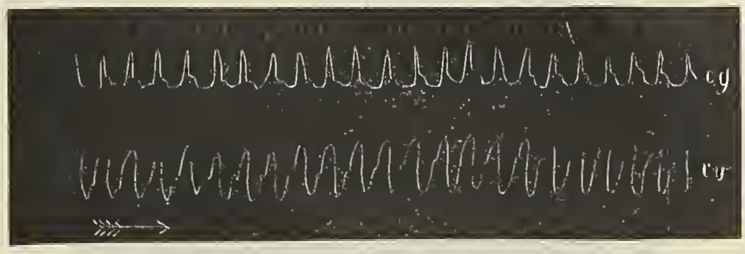


Fig. 45. — Cane curarizzato, vaghi tagliati, respirazione artificiale sospesa. Il tracciato inferiore rappresenta curve cardiovolumetriche ottenute un minuto, circa, dopo la sospensione della respirazione artificiale, ed il tracciato superiore rappresenta curve del battito ottenute contemporaneamente.

La minore energia della diastole sarebbe in accordo con le ricerche precedenti, le quali dimostrarono che per il taglio del vago diminuisce la forza diastolica, e

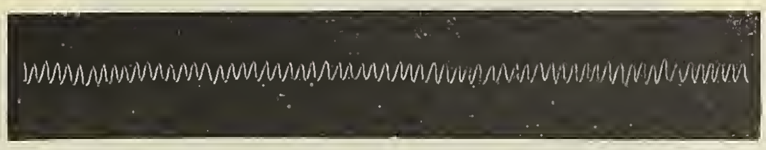


Fig. 46. — Curve cardiovolumetriche ottenute dopo il taglio dei vaghi, a respirazione artificiale sospesa.

la minore energia della sistole si potrebbe subordinare alla minore energia della diastole, e più precisamente alla minore intensità dei processi riparatori da cui questa dipende.

Ma il fatto di maggiore importanza è che, dopo il taglio dei vaghi, la sospensione della respirazione artificiale non produce più mutamenti nelle dette curve: esse continuano a succedersi con la stessa frequenza, con la stessa altezza, con la stessa forma, come le oscillazioni di un pendolo. Questo fatto dimostra, siccome ho notato a pag. 19, che l'aumento del volume del cuore, consecutivo alla sospensione del respiro, è realmente subordinato alla eccitazione dispnoica del vago.

I soli mutamenti che talora si osservano nelle curve cardiovolumetriche dopo il taglio dei vaghi, in seguito alla sospensione della respirazione, sono rappresentati dalle oscillazioni del tono del cuore (pag. 698).

b) Effetti della stimolazione del vago. — Il vago può essere stimolato artificialmente per mezzo della elettricità, e può essere stimolato in modo più fisiologico, eccitando il suo centro per mezzo dello stato dispnoico, della pressione e

della temperatura del sangue. Ho potuto registrare curve cardiovolumetriche durante la stimolazione elettrica, dispnoica e pressoria, e dirò distintamente di esse.

Stimolazione elettrica. — La stimolazione elettrica fu sempre fatta con la slitta di Du Bois Reymond [1].

Regolando la intensità della corrente in modo da ottenere solo il rallentamento dei battiti cardiaci, si determinano mutamenti notevoli nella forma delle curve cardiovolumetriche, i quali si riferiscono non solo alla durata delle stesse, ma a tutti gli altri caratteri, e sono, per quanto mi sembra, di non dubbio significato (fig. 10).

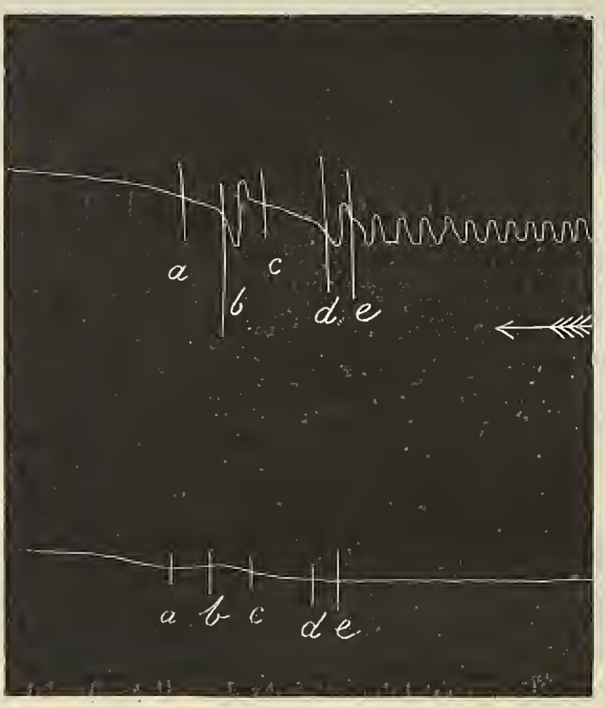


Fig. 47. — Il tracciato superiore rappresenta curve cordiovolumetriche e l'inferiore l'andamento contemporaneo della pressione venosa registrata mediante manometro a bicarbonato di soda, in comunicazione colla cava discendente. In *e* si stimola il vago con corrente indotta appena sensibile alla lingua; *aa, bb, cc, dd, ee* momenti corrispondenti. Questo tracciato, a differenza degli altri, va letto da destra a sinistra.

La *parte ascendente*, che corrisponde al carico rapido, sale immediatamente, e con grande rapidità, ad un'altezza notevolmente maggiore. La rapidità con cui essa sale, è analoga a quella con cui discende la discendente. A questa ascesa rapida succede repentinamente un'ascesa lenta, oppure una linea orizzontale, oppure una linea discendente, le quali dimostrano che, per opera del carico rapido, il cuore talora si carica completamente e perfino si sovraccarica.

Il carico, che secondo queste curve è promosso dallo stimolo del vago, deve, a mio avviso, essere considerato come attivo per la repentinità con cui si inizia, per la rapidità con cui si compie, e per la netta demarcazione fra esso e il periodo successivo; ed in conferma di questa conclusione noto che, in coincidenza con esso, ho potuto registrare un abbassamento della pressione venosa (fig. 47 *bb*).

[1] A. Stefani, *Cardiovolume*. Acc.

La *parte discendente* presenta mutamenti poco notevoli e subordinati, per quanto mi sembra, a quelli della ascendente. Questi mutamenti consistono in una maggiore altezza e in una maggiore rapidità, che dimostrano effettuarsi la sistole con scarico maggiore e con maggiore energia. Il maggiore scarico dipende certamente dal carico maggiore; e la maggiore energia può essere considerata come effetto del maggior ristoro del cuore, collegato con la maggiore attività diastolica.

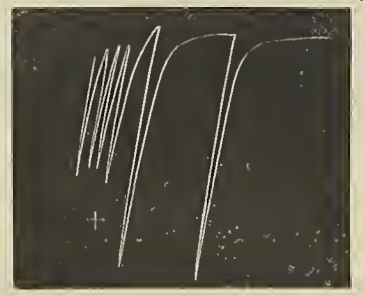


Fig 48. — Curve cardiovolumetriche ottenute dopo il taglio dei vaghi. In + viene stimolato il moncone periferico del vago sinistro con corrente indotta debole.

In alcuni casi, alla fine della sistole, il cuore ha volume minore (fig. 48) e in altri maggiore (fig. 10), lo che dimostra che lo scarico si fa ora in modo più completo ed ora in modo meno completo.

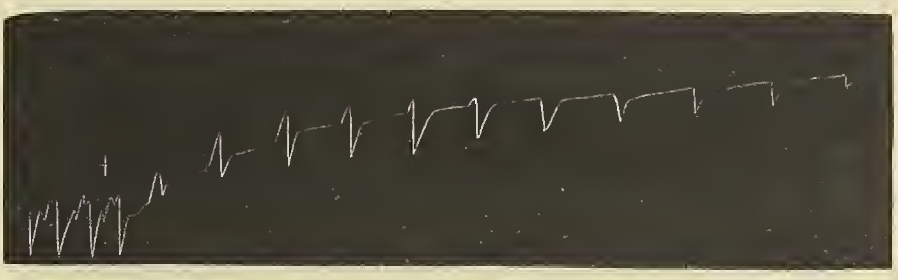


Fig. 49. — Curve cardiovolumetriche; respirazione artificiale sospesa. In + viene stimolato il vago con corrente indotta, senza poi interrompere la stimolazione.

I *passaggi* sono tutti più repentini, indicando una maggiore energia tanto della sistole quanto della diastole.

Le *onde secondarie*, di solito, aumentano di numero e di altezza (fig. 10); però si dànno anche dei casi in cui esse mancano (fig. 48).

Allorquando la intensità dello stimolo è tale da produrre l'arresto del cuore, si osserva che questo arresto è sempre preceduto da un aumento rapido del volume del cuore, a cui fa seguito un aumento sempre più lento, finchè il volume del cuore rimane stazionario.

Alla linea orizzontale, rappresentante la stazionarietà, non si arriva però sempre in modo così semplice. In alcuni casi si arriva ad essa mediante una serie di curve cardiovolumetriche di durata sempre maggiore e di altezza sempre minore, nelle quali la parte discendente si arresta ad un livello sempre meno basso, e la ascendente sale ad un livello sempre più alto (fig. 49).

In altri casi il cuore raggiunge il volume massimo mediante aumenti repentini, seguìti da diminuzioni di grado minore (fig. 50); mediante quindi dei movimenti, il cui ritmo parrebbe inverso a quello della rivoluzione ordinaria. Questa forma si combina di frequente con la precedente, come lo dimostrano le figg. 51 e 52.

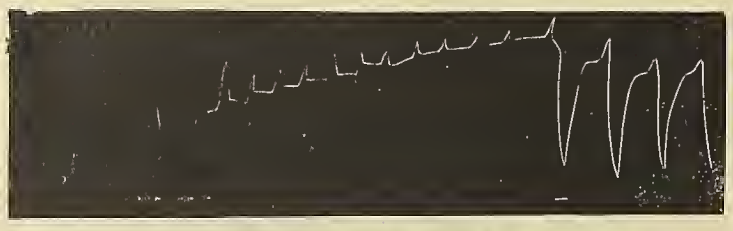


Fig. 50. — Curve cardiovolumetriche; respirazione artificiale sospesa. In + viene stimolato il vago con corrente indotta, ed in — cessa la stimolazione.

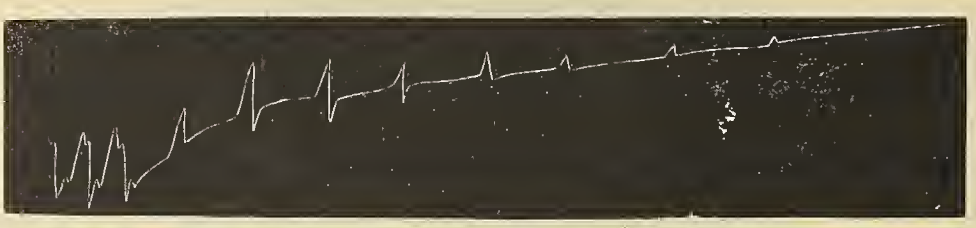


Fig. 51. — Curve cardiovolumetriche; respirazione aritificiale sospesa. Il vago viene stimolato con corrente indotta, senza interrompere poi la stimolazione.

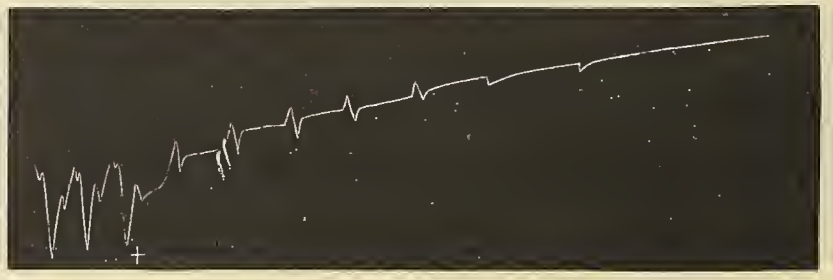


Fig. 52. Curve cardiovolumetriche; respirazione artificiale sospesa. In + viene stimolato il vago con corrente indotta, senza interrompere poi la stimolazione.

Fig. 53. — Curve cardiovolumetriche; respirazione artificiale sospesa. In + viene stimolato il vago con corrente indotta forte, senza interrompere poi la stimolazione.

In altri casi si arriva alla stazionarietà per mezzo di una specie di scala, i cui gradini si formano, perchè il cuore si dilata a sbalzi, senza poi quasi affatto contrarsi (fig. 53).

Considerando che le curve sopraindicate sono prodotte dai mutamenti di volume del cuore intero, i repentini aumenti di volume, dalle dette curve registrati, non si possono attribuire a sistoli auricolari, perchè queste, siccome ho notato, non possono modificare il volume del cuore intero, non facendo che travasare il sangue dalle cavità auricolari nelle ventricolari; e dovendo escludere questa origine, non saprei trovare altra causa di essi se non in repentine dilatazioni attive dei ventricoli. Date le condizioni sperimentali, simile interpretazione non si può certamente esprimere senza riserve; ma in appoggio di essa starebbe anche il fatto che, in coincidenza con questi aumenti, ho potuto talora registrare un piccolo abbassamento della pressione venosa (fig. 53 *bis*).

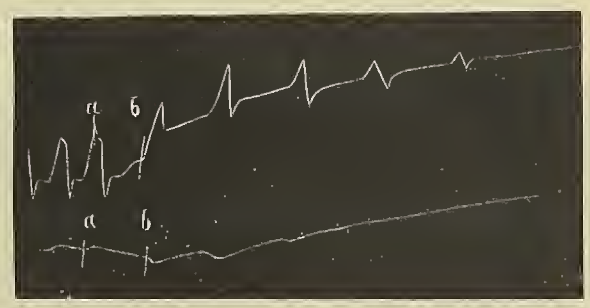


Fig. 53 *bis*. — Il tracciato superiore rappresenta curve cardiovolumetriche, e l'inferiore l'andamento contemporaneo della pressione venosa registrata mediante manometro a bicarbonato di soda in comunicazione colla vena cava superiore — *aa*, *bb*, momenti corrispondenti. Respirazione artificiale sospesa. In *a a*, viene stimolato il vago al collo.

Stimolazione dispnoica (¹). — Sospendendo la respirazione artificiale, il centro del vago, come è noto, viene stimolato dallo stato dispnoico, che si stabilisce nel sangue; e la stimolazione di esso va progressivamente crescendo di intensità, perchè, quanto più a lungo la respirazione rimane sospesa, tanto più dispnoico il sangue diventa (²).

I mutamenti, che si verificano nella curva cardiovolumetrica per la eccitazione dispnoica del centro del vago, sono fondamentalmente eguali a quelli che si verificano per la eccitazione elettrica del vago, che rallenta, senza arrestare, i battiti del cuore; ma specialmente caratteristico di questa stimolazione è l'aumento progressivo del volume del cuore, per aumento progressivo della quantità di sangue che residua nei ventricoli dopo la sistole (pag. 694). Ho già notato che la quantità di sangue, che può residuare nei ventricoli in causa della eccitazione dispnoica del vago, può costituire parecchi multipli dello scarico ordinario (fig. 23).

Dopo il taglio dei vaghi, come ho già detto, la sospensione della respirazione artificiale non produce aumenti del volume del cuore (pag. 694). Solo quando il cuore è prossimo a morire per asfissia, si può osservare un aumento progressivo del suo

(¹) L'azione stimolante dello stato dispnoico del sangue sul centro del vago, inibitore del cuore, fu dimostrata dal Traube (Allg. med. Centralztg. 1862, n. 25, e 1863, n. 97), il quale fece conoscere che, in seguito alla sospensione del respiro, si rallentano i battiti cardiaci e che questo rallentamento non si verifica, se i vaghi sono stati prima tagliati.

(²) A. Stefani, *Variazioni del volume del cuore* ecc., 1878; *Cardiovolume* ecc., 1891.

volume. I soli mutamenti che si possono osservare nelle curve cardiovolumetriche dopo il taglio dei vaghi, in seguito alla sospensione del respiro, sono quelli che costituiscono le oscillazioni del tono del cuore.

A pag. 694 ho fatto conoscere che l'accumulo progressivo, nel cuore, di sangue stagnante, in seguito alla sospensione del respiro, non dipende dall'aumento della pressione arteriosa, ma da un'azione diretta dei vaghi sul cuore, perchè esso non si verifica, se la respirazione si sospende quando i vaghi sono tagliati. Con ciò, per altro, non intendo di escludere che l'aumento della pressione arteriosa possa produrre un aumento del volume del cuore ostacolandone lo scarico; ma di questa azione della pressione arteriosa sullo scarico dirò fra poco, trattando della stimolazione pressoria del vago.

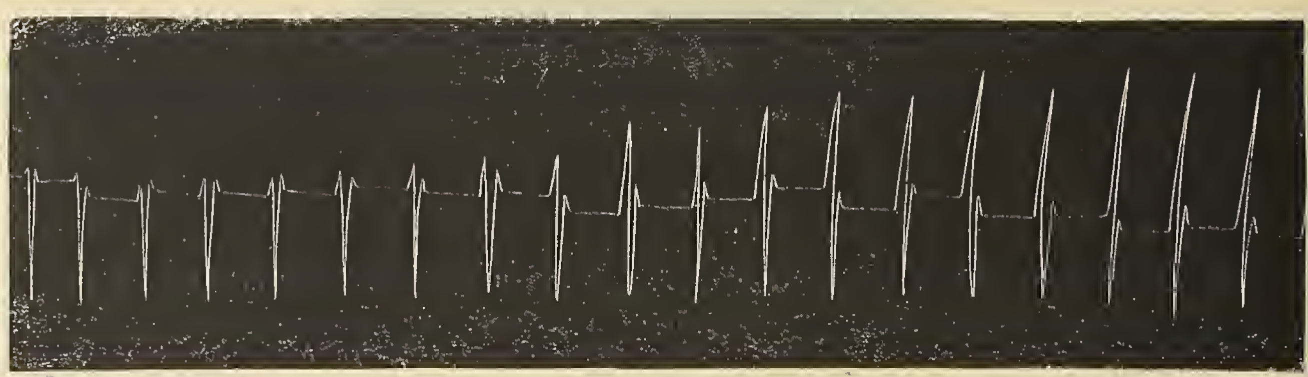


Fig. 54. — Curve cardiovolumetriche ottenute cento secondi, circa, dopo la sospensione della respirazione artificiale. Vaghi intatti.

In qualche caso, dopo una lunga sospensione del respiro a vaghi integri, ho ottenuto una curva (fig. 54), la cui forma ricorda quelle delle figg. 49, 51 e 52, ottenute stimolando elettricamente il vago. Secondo questa curva, il volume del cuore aumenta in modo, dirò così, esplosivo, dopo di essere rimasto per qualche tempo stazionario, e a questo aumento esplosivo succede bruscamente una rapida diminuzione; il ritmo ordinario del cuore pare, quasi direi, invertito, perchè alla stazionarietà succede un carico rapido, e a questo, bruscamente, lo scarico: la diastole precede la sistole. È interessante di osservare come questo particolare ritmo si possa stabilire a poco a poco, in modo graduato (fig. 54).

Rispetto alla interpretazione di questa strana curva, non posso che ripetere quanto ho già detto trattando delle curve ottenute stimolando elettricamente il vago; vale a dire, che dell'aumento repentino del volume del cuore, precedente la diminuzione e consecutivo alla stazionarietà, non saprei trovare altra causa che in una dilatazione attiva del cuore.

S t i m o l a z i o n e   p r e s s o r i a. — Per aumentare la pressione arteriosa, si chiudeva l'aorta toracica mediante la compressione digitale, fatta dall'indice della mano destra insinuato attraverso un'apertura praticata nel torace. Insieme con la curva cardiovolumetrica, veniva registrata anche la pressione arteriosa, mediante un manometro applicato nel moncone centrale della carotide e coniugato con timpano a leva, e così rimaneva indicato anche il momento in cui l'aorta veniva compressa. Le registrazioni erano fatte subito dopo la sospensione della respirazione artificiale per evitare,

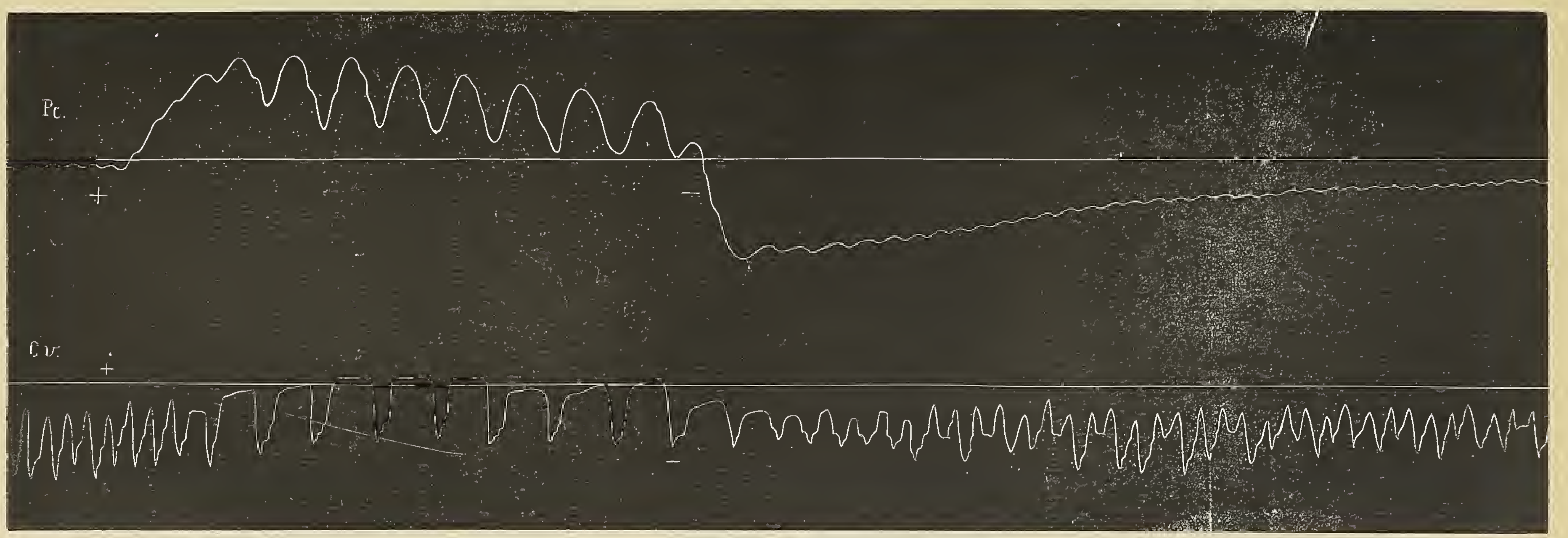


Fig. 55. — Il tracciato inferiore rappresenta curve cardiovolumetriche, ed il superiore l'andamento contemporaneo della pressione arteriosa registrata mediante manometro a mercurio in comunicazione colla carotide. In + viene compressa l'aorta mediante l'indice introdotto nel torace per un'apertura praticata in questo; in — cessa la compressione dell'aorta. — Vaghi intatti — respirazione artificiale con movimenti blandi — torace aperto.

in parte almeno, che gli effetti della pressione si sommassero con quelli della dispnea (¹).

La fig. 55 dimostra che l'aumento della pressione arteriosa produce, nelle curve cardiovolumetriche, dei mutamenti analoghi a quelli che producono le stimolazioni elettrica e dispnoica del vago; vale a dire, rarefazione con aumento di altezza e maggior sviluppo del carico rapido. Ma, come del tracciato dispnoico è caratteristico l'aumento progressivo del volume del cuore, così del tracciato pressorio, secondo le mie risultanze, è caratteristico invece l'aumento delle onde secondarie. Meritevole di particolare considerazione è il tracciato riprodotto dalla fig. 13, il quale dimostra che, in seguito alla compressione dell'aorta, alla fine del carico rapido, si è verificato un aumento progressivo del numero e dell'altezza di dette onde. Le curve pressorie si distinguono inoltre dalle dispnoiche, poichè il passaggio dalla diminuzione all'aumento del volume non è repentino, ed avviene per mezzo di un *plateau* con qualche ondulazione (fig. 13).

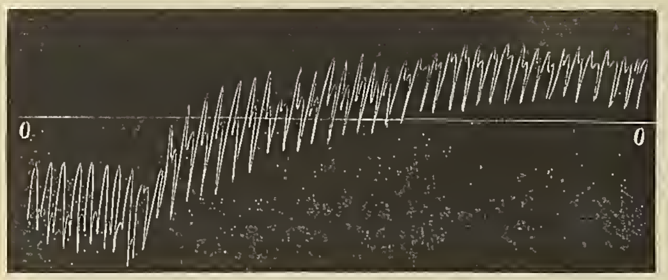


Fig. 56. — Curve cardiovolumetriche ottenute dopo il taglio dei vaghi. La compressione dell'aorta toracica, mediante il dito introdotto nella cavità del torace attraverso ad una apertura praticata nello stesso, è immediatamente seguita da notevole aumento del volume del cuore, senza mutamenti degni di nota nella forma delle curve cardiovolumetriche.

L'aumento della pressione arteriosa produce poco o nessuno accumulo, nel cuore, di sangue residuo, al contrario di quanto era da supporsi considerando l'ostacolo che esso costituisce allo scarico del cuore, finchè il cuore si trova in buone condizioni di nutrizione; e produce, invece, pronto e notevole aumento del volume del cuore, appena il cuore incomincia ad essere sofferente per la dispnea o per altre cause. E perciò la dilatazione del cuore in seguito all'aumento della pressione sanguigna costituisce un segno di patimento, di stanchezza del cuore.

Dopo il taglio dei vaghi, secondo le mie osservazioni, la compressione dell'aorta non produce mutamenti degni di nota nella forma delle curve cardiovolumetriche; ma compare più presto il segno della stanchezza del cuore, consistente nell'aumento del volume dello stesso per distensione meccanica delle due cavità, e nell'accumulo quindi, in esso, di maggior quantità di sangue residuo (fig. 56). In qualche caso ho potuto osservare che la compressione dell'aorta, a vaghi tagliati, produceva un piccolo aumento dell'altezza delle curve cardiovolumetriche (fig. 57).

(¹) A. Stefani, *Cardiovolume*, etc. 1891.

Per ispiegare le onde secondarie ed il *plateau*, caratteristici della curva pressoria, si potrebbe invocare l'azione stimolante diretta della pressione sul cuore, dimostrata da Luchsinger e Ludwig (¹) nel cuore di rana e confermata dal Martin (²)

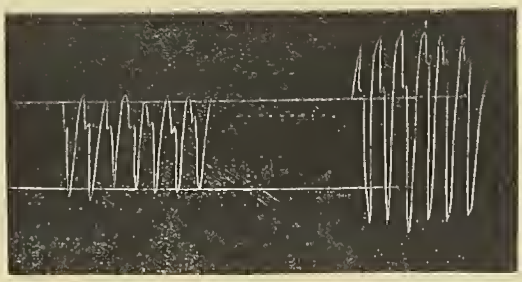


Fig. 57. — La prima parte di questa figura rappresenta curve cardiovolumetriche ottenute dopo il taglio dei vaghi, e la seconda parte curve cardiovolumetriche ottenute dallo stesso cane con vaghi tagliati, in seguito alla compressione dell'aorta toracica.

Fig. 58. — La prima parte, A, rappresenta curve di battito ottenute subito dopo la sospensione della respirazione artificiale, e la seconda parte, B, rappresenta curve di battito ottenute immediatamente dopo le precedenti, durante una stimolazione del vago con corrente indotta debole.

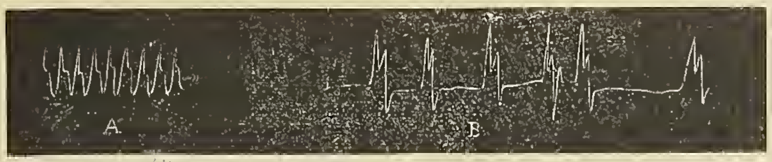


Fig. 59. — Come nella figura precedente.

nel cuore di mammiferi. Ma siccome le onde secondarie ed il *plateau* non compaiono quando i vaghi sono tagliati, così ne viene che l'azione diretta della pressione sul miocardio non può essere la causa unica dei fatti suindicati, e che, per spiegare la loro comparsa, si deve invocare anche l'intervento dei vaghi (³).

(¹) Luchsinger und Ludwig, *Zur Physiologie des Herzens.* Archivio di Pflüger, XXV, 1881.

(²) N. H. Martin, *The influence upon the pulse rate of variations of arterial pressure.* Physiol. papers by N. H. Martin. Baltimore, 1891.

(³) La stimolazione e il taglio dei vaghi determinano dei mutamenti anche nella curva del battito, mutamenti che trovano corrispondenza in quelli della curva cardiovolumetrica. Sotto la stimolazione leggera del vago, nella curva del battito diventano più acuti gli angoli di passaggio; la linea discendente si abbassa più rapidamente, oltrepassando anche la fondamentale, e le onde secondarie diventano più alte ed acute (figg. 58, 59.). Dopo il taglio dei vaghi, si osservano mutamenti in senso inverso; vale a dire, gli angoli di passaggio sono più arrotondati, la linea discendente è più inclinata, e le onde secondarie meno sviluppate (fig. 45). Questi fatti confermano quanto ho già detto intorno ai rapporti fra la curva cardiovolumetrica e la curva del battito, ed hanno interesse dal punto di vista clinico, perchè possono indicare lo stato di eccitazione del vago.

*
* *

4. Azioni farmacologiche sulla pressione diastolica o attività espansoria del cuore. — Per conoscere se per mezzo di farmaci si poteva aumentare o diminuire l'attività espansoria del cuore, ho istituito, nel 1890, delle ricerche, insieme con G. Gallerani, allora mio aiuto, le quali consistevano nel misurare la pressione diastolica o attività espansoria del cuore, prima e dopo la somministrazione di determinati farmaci ([1]). La misura della pressione diastolica è stata fatta col metodo indicato a pag. 40, determinando cioè la pressione pericardica necessaria per arrestare il circolo e la pressione che in questo momento si verifica nelle vene prossime al cuore.

Dopo una prima determinazione, si lasciava uscire dal pericardio la soluzione fisiologica; e, di mano in mano che questa usciva, la circolazione si ripristinava, la pressione arteriosa risaliva e la venosa discendeva ai limiti ordinarii.

Passati 5-10 minuti dal ripristino completo del circolo, si determinava, per una seconda volta, la pressione diastolica, e, dopo di questa, si faceva anche una terza determinazione; e se i risultati erano concordi, si iniettava quindi il farmaco nelle vene, e di 10 in 10 minuti si misurava quindi di nuovo, per due o tre volte, la pressione diastolica.

Allo scopo di semplificare l'esperienza, fu omessa talora la misura della pressione venosa, perchè, siccome ho già notato a pag. 725, la differenza fra le pressioni pericardiche che arrestano il circolo basta per misurare, con molta approssimazione, la differenza fra le rispettive pressioni diastoliche.

Se i risultati di queste ricerche erano tali da dimostrare che il farmaco determinava aumento o diminuzione della pressione diastolica, si tagliavano i vaghi, e si ripetevano le ricerche allo scopo di conoscere se il farmaco spiegava la sua azione per mezzo di questi nervi.

Riferisco alcune esperienze fatte con la digitale, con l'atropina e con la stricnina.

DIGITALE.

11 aprile 1889. — Cane del peso di kgr. 11,900. Curarizzazione, respirazione artificiale, fistola del pericardio, moncone centrale della carotide sinistra in comunicazione con manometro scrivente.

Ore 1,45 pom. — Si lascia entrare nel sacco del pericardio la soluzione fisiologica.

La circolazione si arresta quando la pressione pericardica segna . . . . cm. 36

Si lascia uscire la soluzione dal sacco del pericardio, e la circolazione si ristabilisce.

Ore 1,55 pom. — Si ripete la prova.

La circolazione si ferma quando la pressione pericardica raggiunge i . . . . . . » 37

Coll'uscire del liquido dal sacco del pericardio, la circolazione si ristabilisce come prima.

Ore 2,10 pom. — Si ripete la prova.

La circolazione si ferma quando la pressione pericardica è . . . . » 37

Coll'uscire del liquido dal sacco del pericardio, la circolazione si ristabilisce.

Ore 2,20 pom. — Si iniettano nel moncone centrale della giugulare destra 20 grammi di infuso di digitale (gr. 1) previamente filtrato e portato alla temp. di 40°.

([1]) Stefani e Gallerani, *Contribuzione farmacologica alla dottrina della attività diastolica.* Archivio delle scienze mediche, XIV, 1890.

Ore 2,38 pom. — Si lascia discendere la soluzione fisiologica nel sacco del pericardio, e la circolazione si ferma quando la pressione pericardica raggiunge . . . . . . cm. 44

Si lascia uscire la soluzione dal sacco pericardico e la circolazione si ristabilisce.

Ore 2,45 pom. — Si ripete la prova.

La circolazione si ferma quando la pressione pericardica è . . . . » 47

Il circolo si ristabilisce con l'uscire della soluzione dal sacco del pericardio.

Ore 2,50 pom. — Si ripete la prova.

La circolazione si arresta quando la pressione pericardica è . . . . » 57

In questa esperienza la pressione pericardica necessaria per arrestare il circolo, prima della iniezione della digitale, era di 37 cm. della soluzione 1 % di NaCl, e dopo la iniezione della digitale, salì a 57; e quindi, *per azione della digitale la pressione diastolica aumentò di circa 20 cm.*

22 maggio 1889. — Cane del peso di kgr. 5. Curarizzazione, respirazione artificiale, fistola pericardica, carotide sinistra in congiunzione con manometro scrivente, cava superiore in congiunzione con manometro a soluzione (25 %) di solfato di magnesia, per mezzo di una cannula insinuata nella giugulare sinistra.

Ore 2,45 pom. — Si lascia discendere la soluzione di NaCl nel sacco del pericardio.

La circolazione si ferma quando la pressione pericardica è. . . . . cm. 27

La pressione venosa contemporanea è . . . . » 13

Trascurando la piccola differenza fra il peso specifico della soluzione di NaCl, e quello della soluzione di solfato di magnesia, lo sforzo diastolico sarebbe stato eguale a » 14

La circolazione si ristabilisce coll'uscire del liquido dal sacco del pericardio.

Ore 3 pom. — Si ripete la prova.

La circolazione si ferma quando la pressione pericardica è. . . . . cm. 27,5

La pressione venosa in questo momento è. » 13

Quindi lo sforzo diastolico è . . . . cm. 14,5

La circolazione si ristabilisce coll'uscire del liquido dal sacco pericardico.

Ore 3,10 pom. — Si iniettano nel moncone centrale della vena femorale sinistra 20 gr. di infuso digitale (gr. 1), previamente filtrato e portato alla temp. di 40°.

Ore 3,25 pom. — Si lascia discendere la soluzione di NaCl nel sacco del pericardio.

Quando la circolazione si sospende, la pressione pericardiaca è . . . . cm. 39

e la pressione venosa . . . . » 19

E quindi lo sforzo diastolico è . . . . cm. 20

Si lascia uscire il liquido dal sacco pericardico, e la circolazione si ristabilisce.

Ore 3,30 pom. — Si ripete la prova.

Quando la circolazione si ferma, la pressione pericardiaca è . . . . cm. 45

e la pressione venosa . . . . » 19

Quindi lo sforzo diastolico è . . . . cm. 26

In questa esperienza lo sforzo diastolico prima della iniezione della digitale era di circa 14,5 cc. di acqua, e, in seguito alla iniezione della digitale, si portò a 26, aumentando così quasi del doppio, e perciò questa esperienza conferma i risultati della precedente, dimostrando che *la digitale aumenta l'aspirazione diastolica del cuore.*

6 giugno 1889. — Cane del peso di kgr. 5,700. Curarizzazione profonda, respirazione artificiale, fistola pericardica, moncone centrale della carotide sinistra in congiunzione con manometro scrivente, cava superiore in comunicazione con manometro a soluzione (25 %) di solfato di magnesia, per mezzo di una cannula insinuata nella vena giugulare sinistra.

Ore 10,45 ant. — Si lascia entrare la soluzione di NaCl nella cavità del pericardio.

Quando la circolazione si ferma, la pressione pericardiaca è . . . . cm. 27

e la pressione venosa . . . . » 8

Quindi lo sforzo diastolico è . . . . cm. 19

Coll'uscire del liquido dal sacco pericardico, la circolazione si ristabilisce.

Ore 10,50 ant. — Si ripete la prova.

Quando la circolazione si ferma, la pressione pericardiaca è . . . . cm. 27
e la pressione venosa . . . . » 8

Quindi lo sforzo diastolico è . . . . cm. 19

Coll'uscire del liquido dal sacco del pericardio, la circolazione si ristabilisce.

Ore 10,55. — Si iniettano nel moncone centrale della vena crurale sinistra 20 gr. di infuso di digitale (gr. 1), previamente filtrato e portato alla temp. di 40°.

Ore 11,5 ant. — Si lascia discendere la soluzione di NaCl nella cavità del pericardio.

Quando la circolazione si arresta, la pressione pericardiaca è. . . . . cm. 46
e la pressione venosa è. . . . . » 8

Quindi lo sforzo diastolico è . . . . cm. 38

Lasciando uscire il liquido dal sacco pericardico, il circolo si ripristina regolarmente.

Ore 11,10 ant. — Si ripete la prova.

Quando il circolo si arresta, la pressione nel pericardio è . . . . cm. 46
e la pressione venosa. . . . . » 8

Quindi lo sforzo diastolico è . . . . cm. 38

Coll'uscire del liquido dal sacco pericardico, la circolazione si ristabilisce regolarmente.

Ore 11,15 ant. — Si ripete la prova.

Quando il circolo si ferma, la pressione nel pericardio è . . . . cm. 42
e la pressione venosa . . . . » 6

Quindi lo sforzo diastolico è . . . . cm. 36

Il circolo si ristabilisce regolarmente coll'uscire del liquido dal sacco pericardico.

Ore 11,20 ant. — Si ripete la prova.

Quando il circolo si arresta, la pressione nel pericardio è . . . . cm. 41
e la pressione venosa. . . . . » 6

Quindi lo sforzo diastolico è . . . . cm. 35

Si lascia uscire il liquido dal pericardio, e il circolo si ristabilisce regolarmente.

Ore 11,25 ant. — Si tagliano i vaghi al collo.

Ore 11,40 ant. — Si lascia discendere l'acqua nel sacco pericardiaco, e la circolazione si arresta quando la pressione pericardiaca è . . . . cm. 38
e la pressione venosa . . . . » 8

Quindi lo sforzo diastolico è . . . . cm. 30

Per verificare l'effetto del taglio dei vaghi sullo sforzo diastolico, è necessario di lasciar passare almeno 10-20 minuti dal momento del taglio prima di misurare la pressione pericardica e la pressione venosa quando il circolo si arresta, affinchè possa essere scomparso ogni fenomeno di irritazione dipendente dal taglio.

In questa esperienza lo sforzo diastolico prima della iniezione della digitale era di circa 19 cm. di acqua; dopo questa iniezione, salì a 35 cm.; e in seguito al taglio dei vaghi, discese poi solamente a 30. E perciò devesi concludere che *la digitale aumenta la pressione diastolica, principalmente almeno, per una azione diretta sul miocardio.*

29 aprile 1889. — Cane del peso di kgr. 3,900. Curarizzazione profonda, respirazione artificiale, fistola pericardica, carotide destra in comunicazione con manometro scrivente.

Ore 3,25 pom. — Si lascia discendere la soluzione di NaCl nel sacco pericardico, e, quando la circolazione si arresta, la pressione nel pericardio è . . . . cm. 24

Si lascia uscire la soluzione dal sacco pericardico e la circolazione si ristabilisce.

Ore 3,30 pom. — Si ripete la prova.

La circolazione si ferma quando la pressione pericardica è . . . . » 24

La circolazione si ristabilisce coll'uscire della soluzione dal pericardio.

Ore 3,35 pom. — Si tagliano i vaghi.

Ore 3,45 pom. — Si lascia discendere la soluzione di NaCl nella cavità del pericardio, e il circolo si sospende quando la pressione pericardiaca è . . . . cm. 13

Il circolo si ristabilisce coll'uscire dell'acqua dal sacco pericardico.

Ore 3,50 pom. — Si ripete la prova.

Il circolo si arresta quando la pressione pericardica è . . . . » 14

Il circolo si ristabilisce coll'uscire del liquido dal pericardio.

Ore 3,55 pom. — Si iniettano nel moncone centrale della giugulare sinistra 20 gr. di infuso di digitale (gr. 1), previamente filtrato e portato a 40°.

Ore 4,15 pom. — Si lascia discendere nel pericardio la soluzione di NaCl, e il circolo si sospende quando la pressione pericardica è . . . . » 30

In questa esperienza la pressione pericardica necessaria per fermare il circolo in seguito al taglio dei vaghi discese da 24 a 14 cm. di acqua, e, in seguito alla iniezione della digitale, salì da 14 a 30. E perciò questa esperienza conferma la conclusione precedentemente formulata, che *la digitale spiega la sua azione diastolica direttamente sul miocardio.*

ATROPINA.

9 maggio 1889. — Cane del peso di kgr. 3,200. Curarizzazione, respirazione artificiale, fistola pericardiaca, carotide destra in comunicazione con manometro scrivente.

Ore 9,45 ant. — Si lascia discendere nel sacco pericardico la soluzione 1 % di NaCl, e la circolazione si arresta quando la pressione pericardica è . . . . cm. 18

Il circolo si ristabilisce coll'uscire del liquido dalla cavità del pericardio.

Ore 9,50. — Si ripete la prova, e il circolo si arresta quando la pressione pericardica è . . . . » 18

Si lascia uscire il liquido dal pericardio, e il circolo si ristabilisce.

Ore 9,55 ant. — Si iniettano nel moncone centrale della vena giugulare 2 milligr. di atropina sciolti in 8 cc. di acqua distillata.

Ore 10 ant. — Si lascia discendere nel sacco del pericardio la soluzione di NaCl, e il circolo si arresta quando la pressione pericardica è . . . . » 18

Si lascia uscire il liquido dalla cavità del pericardio, e il circolo si ristabilisce.

Ore 10,10 ant. — Si ripete la prova, e la circolazione si ferma quando la pressione pericardica è . . . . » 10

Il circolo si ristabilisce coll'uscire del liquido dal sacco pericardico.

Ore 10,12 ant. — Si iniettano altri 2 milligr. di atropina sciolti in 8 cc. di acqua, nel moncone centrale della vena giugulare destra.

Ore 10,25 ant. — Si lascia discendere il liquido nel sacco del pericardio, e il circolo si arresta quando la pressione pericardica è . . . . » 8

Uscito il liquido dal pericardio e ristabilito il circolo, si tagliano i vaghi alle ore 10,30.

Ore 10,45 ant. — Si lascia entrare il liquido nel sacco del pericardio, e il circolo si ferma quando la pressione pericardica è . . . . » 7

In questa esperienza la pressione pericardica necessaria per arrestare il circolo prima della iniezione della atropina era di circa 18 cm. di acqua; dopo la iniezione della atropina, discese ad 8 cm. e, in seguito poi al taglio dei vaghi, discese ancora, ma di una quantità trascurabile, portandosi a 7 cm.

L'atropina diminuisce quindi lo sforzo diastolico del cuore, e nessuna, o quasi nessuna, diminuzione di esso si verifica in seguito al taglio dei vaghi quando in precedenza l'atropina sia stata somministrata; e, in conseguenza di ciò, è da ammettersi che *l'atropina diminuisca l'azione diastolica del cuore, perchè paralizza la innervazione dei vaghi.*

14 maggio 1889. — Cane del peso di kgr. 7. Curarizzazione, respirazione artificiale, fistola pericardica, carotide destra in comunicazione con manometro scrivente.

Ore 3,50 pom. — Si lascia discendere la soluzione di NaCl nel sacco del pericardio, e la circolazione si ferma quando la pressione pericardica è . . . . cm. 21

Si lascia uscire il liquido dal sacco del pericardio, e il circolo si ristabilisce.

Ore 3,55. pom. — Si ripete la prova, e il circolo si ferma quando la pressione pericardica è . . . . » 23

Il circolo si ristabilisce coll'uscire del liquido dal pericardio.

Ore 3,58 pom. — Si tagliano i vaghi.

Ore 4,18 pom. — La pressione pericardica necessaria per fermare il circolo è . . . » 13

Si lascia uscire il liquido dal sacco pericardiaco, e il circolo si ristabilisce.

Ore 4,30 pom. — Si ripete la prova, e il circolo si ferma quando la pressione pericardica è . . . . » 13

Si lascia uscire il liquido dal sacco pericardico e il circolo si ristabilisce.

Ore 4,35 pom. — Si inietta nel moncone centrale della giugulare destra 1 centigr. di solfato di atropina sciolto in 5 cc. di acqua.

Ore 4,40 pom. — La pressione pericardica necessaria per fermare il circolo è . . » 14

La circolazione si ristabilisce coll'uscire del liquido dal sacco del pericardio.

Ore 4,45 pom. — Si ripete la prova: il circolo si ferma quando la pressione pericardica è . . . . » 12

Si lascia uscire il liquido dal sacco del pericardio, e la circolazione si ristabilisce.

Ore 4,50 pom — Si inietta nel moncone centrale della giugulare sinistra un altro centigrammo di solfato di atropina sciotto in 5 cc. di acqua.

Ore 5,5 pom. — La pressione pericardica necessaria per fermare il circolo è . . . » 12

Il circolo si ristabilisce coll'uscire del liquido dal sacco del pericardio.

Ore 5,10 pom. — Si ripete la prova, e il circolo si ferma quando la pressione pericardiaca arriva a . . . . » 13

Il circolo si ristabilisce coll'uscire del liquido dal pericardio.

Ore 5,12 pom. — Si iniettano nel moncone centrale della giugulare sinistra 20 gr. di infuso di digitale (gr. 1), previamente filtrato e riscaldato a 40°.

Ore 5,18 pom. — Si lascia discendere la soluzione di NaCl nella cavità del pericardio e il circolo si arresta quando la pressione pericardica è . . . . » 17

Il circolo si ristabilisce coll'uscire del liquido dal sacco del pericardio.

Ore 5,28 pom. — Si ripete la prova, e il circolo si ferma quando la pressione pericardica arriva a . . . . » 29

Coll'uscire del liquido dal pericardio, la circolazione si ristabilisce.

Ore 5,35 pom. — Si ripete la prova, e il circolo si ferma quando la pressione pericardica arriva a . . . . » 28

In questa esperienza la pressione pericardica necessaria per fermare il circolo, in seguito al taglio dei vaghi, da 23 discese a 13 cm. circa di acqua, e dopo il taglio dei vaghi l'atropina, ad alta dose (2 centigrammi), non modificò, o solo in modo affatto trascurabile, la pressione pericardica necessaria per fermare il circolo; e quindi questa esperienza dimostra, come la precedente, che *l'atropina abbassa la pressione diastolica, perchè paralizza la innervazione cardiaca dei vaghi.*

La iniezione della digitale, consecutiva a quella dell'atropina, fece poi aumentare la pressione diastolica di circa 15 cm. di H^2O; e simile risultato conferma che *la digitale spiega la sua azione diastolica direttamente sul miocardio.*

STRICNINA.

3 giugno 1889. — Cane del peso di kgr. 9,800. Curarizzazione, respirazione artificiale, fistola del pericardio, carotide sinistra in comunicazione con manometro scrivente, cava superiore in comunicazione con manometro a soluzione di solfato di magnesia (25 °/₀) per mezzo di una cannula insinuata nella giugulare sinistra.

Ore 10,45 ant. — Si lascia discendore nel sacco del pericardio la soluzione di NaCl, e il circolo si ferma quando la pressione pericardica arriva a . . . . cm. 25
la pressione venosa in questo momento è . . . . » 14

Quindi lo sforzo diastolico è . . . . cm. 11

Si lascia uscire il liquido dal sacco del pericardio, e la circolazione si ristabilisce.

Ore 10,50 ant. — Si ripete la prova. La circolazione si ferma quando la pressione pericardica arriva a . . . . cm. 23
la pressione venosa in questo momento è . . . . » 13

Quindi lo sforzo diastolico è . . . . am. 10

La circolazione si ristabilisce regolarmente coll'uscire del liquido dal pericardio.

Ore 10,52 ant. — Si iniettano 5 milligr. di solfato di stricnina nel moncone centrale della vena crurale sinistra.

Ore 11,5 ant. — La circolazione si ferma quando la pressione pericardica è . . . cm. 49
la pressione venosa in questo momento è . . . . » 14

Quindi lo sforzo diastolico è . . . . cm. 35

Ore 11,10 ant. — Si ripete la prova. La circolazione si ferma quando la pressione pericardica arriva a . . . . » 49
la pressione venosa è in questo momento . . . . » 18

Quindi lo sforzo diastolico è . . . . cm. 31

Il circolo si ristabilisce coll'uscire della soluzione dal sacco del pericardio.

Ore 11,12 ant. — Si tagliano i vaghi.

Ore 11,30 ant. — Si lascia discendere il liquido nel sacco del pericardio, e il circolo si ferma quando la pressione pericardica arriva a . . . . cm. 42,0
la pressione venosa in questo momento è . . . . » 13,5

Quindi lo sforzo diastolico è . . . . cm. 28,5

Ore 11,45 ant. — Si ripete la prova. Il circolo si ferma quando la pressione pericardica arriva a . . . . cm. 42,0
la pressione venosa in questo momento è . . . . » 13,5

Quindi lo sforzo diastolico equivale a . . . . cm. 28,5

In questo esperimento si ebbe un aumento dello sforzo diastolico, per opera della stricnina, da 10 a 31 cm., circa, di acqua; e, dopo il taglio dei vaghi, una diminuzione insignificante da 31 a 28,5. E perciò concludesi che *la stricnina fa aumentare la pressione diastolica per un'azione diretta sul cuore, come la digitale.*

*
* *

Queste esperienze dimostrano che vi sono farmaci i quali fanno aumentare e farmaci i quali fanno diminuire la pressione diastolica o attività espansoria del cuore, e confermano quindi la reale esistenza e la natura fisiologica della stessa.

Fanno aumentare l'attività espansoria del cuore la *digitale* e la *stricnina*, e la fa invece diminuire la *atropina*. La *digitale* e la *stricnina* aumentano questa attività spiegando, specialmente, la loro azione sul miocardio, e la *atropina* la fa diminuire paralizzando i vaghi.

Credo superfluo, allo scopo di questo lavoro, di riportare anche le esperienze fatte con la *caffeina*; mi limito a notare che, secondo le stesse, anche la *caffeina possiede l'attitudine di eccitare l'attività espansoria del cuore.*

*
* *

5. **Conclusione**. — I quattro ordini di ricerche fatte per provare se realmente il cuore possiede la attitudine di caricarsi attivamente, siccome mi avevano indotto

ad ammettere i caratteri delle curve cardiovolumetriche ed i rapporti di esse con le curve del polso venoso, hanno dato risultati pienamente concordi, dimostrando:

1°) che il cuore ha l'attitudine di sviluppare un'azione aspirante sul sangue venoso, misurabile dal manometro;

2°) che l'azione aspirante del cuore è di origine fisiologica, perchè regolata dal vago e modificabile dai farmaci.

CAPITOLO VII.

Eccitazione termica del centro bulbare inibitore dei movimenti del cuore e significato della innervazione cardiaca del vago.

Gli studî soprariferiti intorno all'azione del vago sul cuore mi portarono necessariamente a considerare quale possa essere il significato di questa innervazione; ma, prima di esprimere le mie idee in proposito, credo bene di ricordare le ricerche fatte rispetto alla eccitabilità termica del centro di questo nervo.

***

1. **Eccitabilità termica del centro bulbare inibitore dei movimenti del cuore.** — L'eccitabilità termica del centro bulbare inibitore dei movimenti del cuore è stata dimostrata dal Cyon (1), nel 1873, alternando attraverso il midollo allungato circolazioni artificiali di sangue defibrinato, alla temp. di 47-49°, con circolazioni artificiali di sangue defibrinato, alla temp. di 36°. Operando in tal modo, egli osservò che il passaggio da una circolazione di temp. più bassa ad una circolazione di temp. più elevata era seguìto da rallentamento dei battiti cardiaci, e che questo rallentamento mancava, se i vaghi erano stati in precedenza tagliati.

Nel 1895 (2), l'esistenza della eccitabilità termica del centro del vago è stata da me confermata con un altro ordine di ricerche. Queste ricerche consistevano nel fare delle irrigazioni, direttamente, sul bulbo, messo allo scoperto mediante l'apertura della membrana atlanto-occipitale, con soluzione fisiologica della temp. di 45-47° e con soluzioue fisiologica della temperatura di 25-27°. Dalle stesse ricerche è stato dimostrato che i movimenti del cuore si rarefacevano quando le irrigazioni erano fatte con soluzione della temp. di 45-47°; che essi diventavano più frequenti quando le irrigazioni erano fatte con soluzione della temp. di 25-27°; e che nessun mutamento si verificava nella frequenza dei medesimi in seguito a queste irrigazioni, se i vaghi erano stati prima tagliati. Queste esperienze furono eseguite su cani curarizzati, mantenuti in vita con la respirazione artificiale, registrando la frequenza dei battiti del cuore per mezzo di un manometro a mercurio, innestato nella carotide.

(1) E. Cyon, *Ueber den Einfluss der Temperaturänderungen auf die centralen Enden der Herznerven*. Archivio di Pflüger, Bd. VIII, 1873.

(2) A. Stefani, *Azione della temperatura sui centri bulbari del cuore e dei vasi*. Atti del Reale Istituto veneto, tomo VI, serie VII, anno 1895. — U. Deganello, *Azione della temperatura sul centro bulbare inibitore dei movimenti del cuore*. Gazzetta degli ospedali, 1899.

La rarefazione dei battiti cardiaci incomincia alcuni secondi dopo l'inizio della irrigazione calda, ed aumenta rapidamente così da produrre un arresto quasi completo

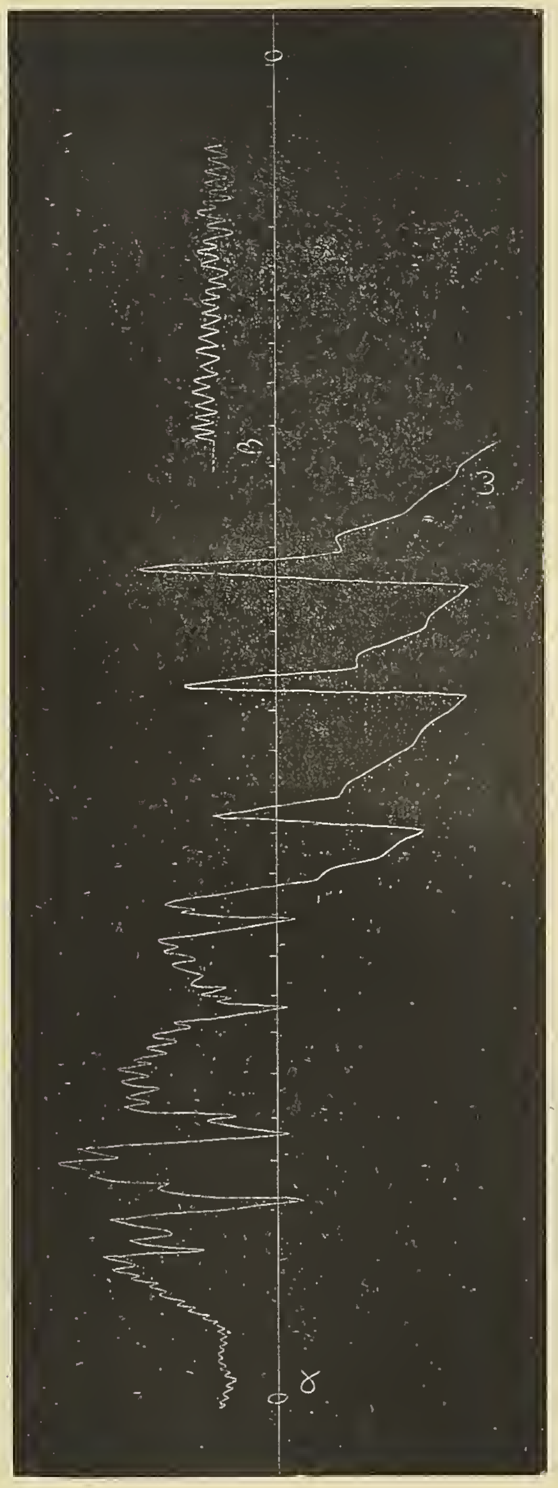


Fig. 60. — Cane curarizzato, respirazione artificiale, tracciato della pressione aortica; in α, incominciano le irrigazioni calde sul midollo allungato, temp. 45°; in ω. vengono sospese; β, rappresenta il tracciato ottenuto tre minuti dopo la sospensione delle irrigazioni; *oo*, orizzontale.

del cuore. Sospesa la irrigazione, la frequenza aumenta subito, ma, prima che essa ritorni al grado primitivo, passano anche 5-6 minuti (fig. 60).

A queste esperienze fu obbiettato che le irrigazioni calde potevano eccitare nervi o centri sensitivi, e che il rallentamento del cuore, consecutivo alle stesse, poteva

quindi essere effetto, non di una eccitazione diretta del centro inibitore del vago, ma bensì di una eccitazione reflessa dello stesso.

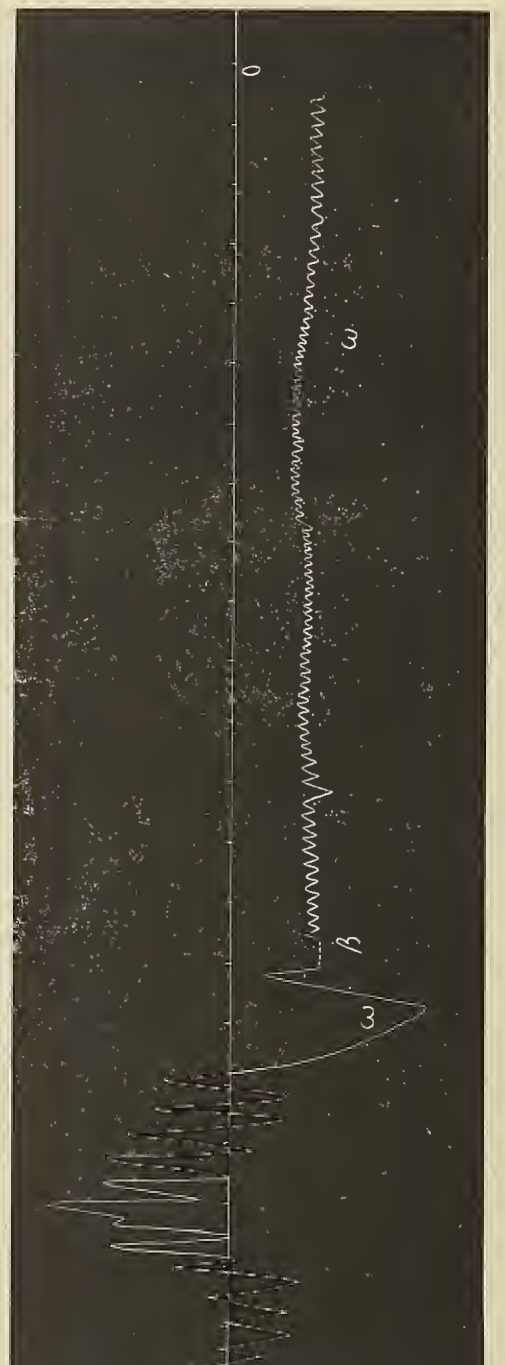


Fig. 61. — Tracciato della pressione aortica ottenuto dallo stesso cane un quarto d'ora dopo il precedente; in α, si rinnovano le irrigazioni calde, temp 45°, sul midollo allungato ed in ω si sospendono; in β, un minuto dopo questa sospensione, si fanno irrigazioni fredde, temp. 20°, ed in ω si sospendono; *oo*, orizzontale.

Per rispondere a questa obbiezione, U. Deganello, allora mio aiuto ([1]), ha diretto le irrigazioni, anzichè sul bulbo, sui cordoni posteriori del midollo spinale; ed avendo osservato che a queste irrigazioni non succedeva alcun mutamento nella

([1]) U. Deganello, *Azione della temperatura sul centro bulbare inibitore dei movimenti del cuore*, ecc. Gazzetta degli Ospedali e delle Cliniche, 1899.

frequenza dei moti del cuore, ha concluso che le irrigazioni calde sul bulbo eccitavano il centro inibitore del cuore, non in via riflessa, ma direttamente.

Si poteva anche supporre che il rallentamento dei battiti cardiaci fosse prodotto, non dalla temperatura, ma dalla pressione del liquido sul bulbo. Benchè avessi avuto cura, nelle mie esperienze, di ridurre al minimo l'azione meccanica delle irrigazioni sul bulbo, per eliminare in via assoluta questa azione ho fatto le irrigazioni, anzichè sul bulbo, sulla membrana atlanto-occipitale senza aprirla, ed ho osservato che, anche così operando, le irrigazioni calde producevano rallentamento, e le fredde acceleramento dei battiti del cuore. In queste esperienze il rallentamento è stato solo più tardo a comparire e di grado minore, particolarità le quali evidentemente dipendevano dal tempo maggiore che il calore impiegava per trasmettersi dalla membrana occipitale al centro del vago.

Oltre a queste esperienze, contro l'azione meccanica della irrigazione depone anche la considerazione che le irrigazioni calde davano effetti opposti a quelli che davano le fredde, benchè l'azione meccanica delle une fosse eguale a quella delle altre.

A titolo d'esempio riporto le esperienze che seguono [1]:

11 dicembre 1894. - Cane curarizzato, respirazione artificiale, membrana atlanto-occipitale aperta, manometro a mercurio nella carotide. Si praticano irrigazioni calde, 45°, nel midollo allungato, e si ottiene il tracciato riprodotto dalla fig. 60, il quale dimostra, che subito dopo l'inizio della irrigazione calda, la pressione arteriosa cominciò ad elevarsi portandosi 40 mm. al di sopra del livello primitivo, e che a questo innalzamento fece sèguito un rallentamento progressivo dei battiti cardiaci con abbassamento così notevole della pressione arteriosa da produrre quasi l'arresto della circolazione. Sospese le irrigazioni calde, la frequenza dei battiti cominciò subito ad aumentare e la pressione si elevò portandosi al livello primitivo. Un rallentamento nei battiti del cuore si poteva però osservare anche tre minuti dopo che le iniezioni erano state sospese, fig. 60. *β*.

Un quarto d'ora dopo, si ripetè l'esperienza ottenendo gli stessi risultati; mancò solo l'aumento iniziale della pressione arteriosa (fig. 61). Ritornata normale la frequenza dei battiti in seguito alla sospensione delle irrigazioni calde, si praticarono delle irrigazioni fredde, 25°, e si ottenne acceleramento dei battiti cardiaci con piccolo aumento della pressione arteriosa, fenomeni che scomparvero appena cessata la irrigazione.

14 dicembre 1894. - Cane di kgr. 6, cloralizzato; manometro a mercurio nel moncone centrale della carotide destra; membrana occipitale scoperta ma intatta. Il tracciato della pressione arte-

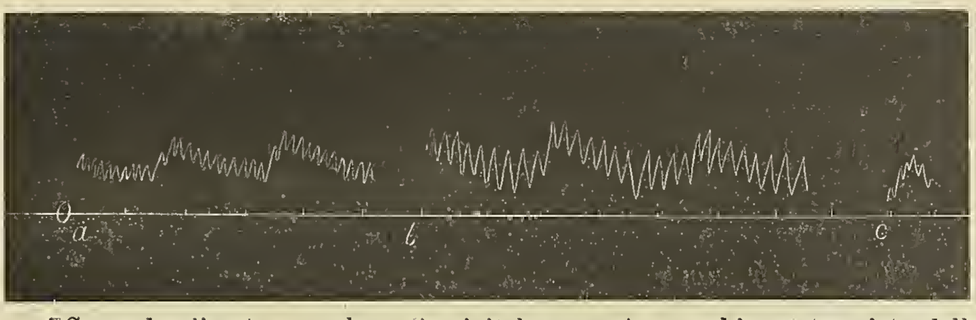


Fig. 62. — Cane cloralizzato; membrana occipitale scoperta ma chiusa; tracciato della pressione aortica; in *a*, si fanno irrigazioni calde, temp. 48°, sulla membrana atlanto-occipitale; *b*, novanta secondi dopo l'inizio delle stesse; *c*, cinque minuti dopo di avere sospese le dette irrigazioni.

riosa, riprodotto dalla fig. 62, dimostra che, in seguito alle irrigazioni calde sulla detta membrana (48°), si verificò un rallentamento progressivo dei battiti cardiaci, con piccolo, contemporaneo, aumento della pressione.

[1] A. Stefani, *Azione della temperatura sui centri bulbari del cuore e dei vasi.* Atti dell'Istituto Veneto, tomo VI. ser. VII, anno 1894-95.

***

2. **Significato della innervazione cardiaca del vago.** — A mio avviso, la innervazione inibitrice del vago costituisce un meccanismo di protezione del cuore contro la dispnea, contro l'innalzamento della pressione e contro l'innalzamento della temperatura del sangue, e ciò mediante la eccitabilità dispnoica, pressoria e termica del centro del vago.

a) Protezione contro la dispnea. — Dalle osservazioni del Traube [1], di Dastre e Morat [2], di Konow e Stenbeck [3], del Richet [4] ecc. risulta che negli animali con vaghi tagliati la morte per asfissia avviene più rapidamente, e quindi che il cuore riesce a sopportare più a lungo gli effetti dell'asfissia, se i vaghi possono spiegare su di esso la loro azione. Ma in qual modo si esplica questa azione protettrice dei vaghi sul cuore?

Il Richet [5] ammise che, per il taglio dei vaghi, sia favorita la formazione di particolari veleni; ma questi veleni non furono dimostrati, e, senza ricorrere ad essi, mi pare che l'azione protettrice dei vaghi sul cuore contro l'asfissia si possa comprendere, quando si considera che l'asfissia, rallentando per mezzo del vago i moti del cuore, ostacola l'innalzamento della pressione arteriosa, prodotto dall'eccitamento contemporaneo del centro vasocostrittore, e diminuisce così il lavoro del cuore ed il bisogno di O^2 da parte di questo; e quando si considera che, secondo la dottrina della espansione attiva delle fibre muscolari, il vago, promovendo la diastole, attiva nel cuore i processi riparatori [6].

b) Protezione contro l'innalzamento della pressione arteriosa. — L'eccitabilità pressoria del centro bulbare inibitore dei movimenti del cuore protegge evidentemente il cuore contro l'esaurimento che potrebbe in esso verificarsi in causa del maggior lavoro a cui il cuore sarebbe costretto, se la pressione del sangue si mantenesse elevata; perchè, in conseguenza di essa, si rarefanno i battiti cardiaci, determinando abbassamento della pressione arteriosa.

Alla eccitabilità pressoria del centro bulbare inibitore dei movimenti del cuore il François-Frank [7] attribuisce il rallentamento del cuore, che si verifica quando

(1) Traube, *Gesamm. Beiträge zur Pathol. u. Physiol.*, I, pag. 382, citato dal Tigerstedt, *Lehrbuch d. Physiol. d. Kreislaufs*, Leipzig, 1893, pag. 258.

(2) Dastre et Morat, *Influence du sang axphyxique sur la circulation*. Arch. d. physiol. norm. et pathol., III, 1884.

(3) Konow e Stenbeck, citato dal Tigerstedt, *Lehrbuch* ecc., pag. 258.

(4) Richet, *La mort du cœur dans l'axphyxie*. Arch. d. physiol. norm. et pathol., 1894.

(5) Ch. Richet, *La mort du cœur dans l'axphyxie*. Arch. d. physiol. norm et pathol., 1894.

(6) A. Stefani, *Intorno all'azione protettrice dei vaghi sul cuore*. Atti del R. Istituto veneto, tom. VI, ser. VII, 1895.

(7) François-Frank, *Recherches sur l'influence que les variations de pression intracardiaque et intracranienne exercent sur le rythme du cœur*. Travaux du laboratoire de Marey. Paris, 1877.

aumenta la pressione intracranica, rallentamento nel quale Roy ed Adami [1] riconobbero un meccanismo di protezione dell'encefalo contro gli aumenti della pressione del sangue; ed alla stessa è subordinato quel mirabile meccanismo, per mezzo del quale, siccome ho già fatto conoscere (pag. 722), si compensano gli ostacoli al carico del cuore.

L'eccitazione pressoria del centro del vago protegge il cuore, anche perchè neutralizza l'azione acceleratrice che la pressione del sangue spiega direttamente sul cuore, aziono dimostrata da Luchsinger e Ludwig [2] nelle rane, e dal Martin [3] nei mammiferi.

c) Protezione contro l'innalzamento della temperatura interna. — L'aumento della temperatura interna, per azione diretta del cuore, determina aumento della frequenza dei battiti cardiaci, che potrebbe essere causa di esaurimento del cuore [4].

Contro questo esaurimento il cuore viene protetto dalla eccitabilità termica del centro inibitore dei suoi movimenti, perchè in conseguenza di questa viene, in parte almeno, neutralizzata l'azione che la temperatura spiega direttamente sul cuore.

Questa protezione è, a mio avviso, di fondamentale importanza nella febbre; i clinici sanno bene, che nelle malattie febbrili vi è sempre motivo per bene sperare, anche se la temperatura è molto elevata, quando moderata si mantiene la frequenza del polso. Il pericolo di morte insorge, quando il centro bulbare inibitore del cuore, con la sua eccitabilità termica, più non riesce a frenare la frequenza dipendente dall'azione diretta della temperatura sul cuore.

In conferma di questa azione protettrice del vago contro l'aumento della temperatura interna, sulla quale ho chiamato l'attenzione fino dal 1895 [5], ricordo le osservazioni fatte dal Pari [6], secondo le quali i conigli con vaghi tagliati resistono meno a lungo ad una temperatura ambiente eguale o di qualche grado superiore alla loro temperatura interna normale; e ricordo anche le numerose ricerche, fatte da me e dai miei allievi, dalle quali fu dimostrato che il vago spiega un'azione inibitoria sugli scambî dell'organismo [7].

[1] Roy and Adami, *Contribution to the physiol. and pathol. of the mammalian heart.* Phylosoph. transact. Roy. Soc., 183, an. 1892.

[2] Luchsinger e Ludwig, *Zur Physiologie des Herzens.* Archivio di Pflüger, XXV, 1881.

[3] H. N. Martin, *The influence upon the pulse rate of variation of arterial pressure.* Physiol. papers by Martin. Baltimore, 1895.

[4] L'azione acceleratrice sui movimenti del cuore, che spiega la temperatura agendo direttamente sul cuore, è stata dimostrata dal Budge e dal Weber nel 1846 (Wagner's Handwörterbuch der Physiologie, Bd. III, Abth., 1, pag. 439; e Bd. III, Abth. 2, pag. 35) nel cuore isolato della rana e nel cuore di embrione di pollo; e fu confermata dal Martin nel cuore isolato di cane. (*The directe influence of gradual variation of temperature* ecc. Proceed. Roy. Soc., XXXIV, 1883).

[5] A. Stefani, *Azione della temperatura sul centro bulbare inibitore dei movimenti del cuore.* Atti del R. Istituto veneto, tom. VI, ser. VII, 1895.

[6] G. A. Pari, *Sull'azione protettrice del vago contro l'aumento della temperatura interna.* Gazzetta degli ospedali, 1907.

[7] A. Stefani, *Azione del vago sugli scambî e sulla temperatura interna.* Archivio di fisiologia, vol. V, 1908.

Prima di chiudere questo capitolo, credo bene di far notare che tanto la temperatura quanto la pressione del sangue, agendo sul centro del vago, producono sulla frequenza dei movimenti del cuore effetti opposti a quelli che producono agendo direttamente sul cuore, dimodochè gli effetti delle stesse nell'organismo vengono ad essere la risultante di azioni opposte. Fatti consimili avremo occazione di osservare anche rispetto ai vasi, e perciò mi riservo di ritornare su questo argomento.

CAPITOLO VIII.

Rivista di alcune pubblicazioni.

Dopo di avere esposto, in modo coordinato, le diverse ricerche da me fatte per mezzo della fistola del pericardio, e di aver fatto conoscere come esse si accordino nel dimostrare che il cuore può caricarsi anche attivamente, *diastole attiva*, e che questa attitudine del cuore è regolata dal vago ed è modificabile dai farmaci, credo bene di prendere in esame alcune Memorie pubblicate dopo i miei lavori (1).

***

E. Ebstein, *Die Diastole des Herzens* - Ergebnisse der Physiologie, III annata, Wiesbaden 1904.

L'Ebstein, in questo lavoro, espose, con molta dottrina ed acume critico, lo stato della scienza intorno alla diastole del cuore.

Ricordata la dottrina della attività della diastole, emessa dal Luciani nel 1871, riferisce, con molti particolari, le mie ricerche con la fistola del pericardio, mettendo in evidenza la importanza dei risultati ottenuti stimolando il vago nel momento in cui la pressione pericardiaca, progressivamente crescendo, aveva raggiunto il grado necessario per impedire il carico del cuore e quindi arrestare il circolo; l'importanza dei risultati ottenuti mediante la misura della pressione pericardica e della pressione venosa nel momento in cui quella aveva raggiunto l'altezza capace di arrestare il circolo, risultati che mi permisero di determinare la forza con cui il cuore si espande a vaghi integri ed a vaghi tagliati; e l'importanza dei risultati ottenuti rispetto all'azione che alcuni farmaci (digitale, atropina, caffeina e stricnina) spiegano sulla forza espansoria del cuore.

(1) Non essendo compresi nell'attuale rivista, credo doveroso di ricordare in questa nota i lavori che seguono: François-Frank, *Changements de volume et debits du coeur*, Travaux du laboratoire de M. Marey, Paris 1878; id., *Nouvelles recherches sur un cas d'ectopie du coeur*, Arch. d. physiol. norm. et pathol., 1889; Roy and Adami, *Remarks on the failure of the heart overstrain*, Brit. med. Journ., 1888. In questo lavoro si descrive uno speciale pletismografo del cuore, a pareti rigide, nel quale il cuore viene collocato per registrarne i mutamenti volumetrici (*cardiometro di Roy*); id., *Contribution to the physiol. and pathol. of the mammalian heart*. Phylosoph. transact. Roy. Soc., vol. 183, an. 1892.

Riconosciuto il valore dimostrativo di questi risultati, l'Ebstein dichiara di accettare *la dottrina della attività diastolica*, facendo rilevare, come aveva già fatto il Krehl ([1]), la grande importanza, anche per la patologia, di una funzione, per opera della quale il cuore può espandersi più e meno, e caricarsi quindi di maggiore e minore quantità di sangue, senza mutamenti nella tensione elastica delle sue pareti.

***

Y. Henderson, *The volume curve of the ventricles of the mammalian heart and the significance of this curve in respect of the mechanics of the heart-beat and the filling of ventricles.* Americ. journ. of physiol., vol. XVI, 1905, pag. 325.

Y. Henderson, nel 1906, in cani narcotizzati e sottoposti alla respirazione artificiale, registrò i mutamenti volumetrici dei soli ventricoli del cuore, con un particolare oncometro, diverso da quello adoperato dal Roy, consistente in una specie di coppa a pareti rigide, intorno all'orlo della quale è attaccata una sottile membranella, che pende nella cavità della coppa a guisa di sacco, senza toccarne le pareti. I ventricoli del cuore venivano immersi in questo sacco sino al confine colle orecchiette, in modo che la loro superficie si trovasse in diretto contatto con la parete del sacco. Disposte così le cose, i mutamenti volumetrici dei ventricoli dovevano produrre mutamenti in senso inverso, ma di grado corrispondente, nella capacità dello spazio compreso fra il sacco e la coppa rigida, mutamenti che potevano essere registrati mediante un tamburino di Marey.

Contemporaneamente alla curva volumetrica dei ventricoli, l'Henderson registrò anche quella degli atrii, introducendo in adatto pletismografo la loro appendice auricolare, e registrò anche la pressione endoventricolare col metodo di Gad e di Hürthle.

Le ricerche dell'Henderson segnano un notevole progresso nella pletismografia del cuore, perchè in precedenza erano stati registrati solo i mutamenti volumetrici del cuore intero, senza distinguere quelli dei ventricoli da quelli delle orecchiette, e perchè, contemporaneamente alla curva volumetrica dei ventricoli, è stata registrata dall'Henderson, per la prima volta, anche la pressione endoventricolare.

Uno dei principali risultati dell'Henderson consiste nella dimostrazione, che il carico del cuore si fa in due tempi, prima rapidamente e poi lentamente, per cui nella diastole si devono distinguere due periodi: *uno di carico rapido* ed *uno di carico lento.*

L'Henderson, nel ricordare i miei lavori, nota che molti dei suoi risultati sono conformi coi miei, ma non ricorda che il fatto del carico rapido e del carico lento era stato da me dimostrato e discusso fino dal 1878; ed anzi in una successiva pubblicazione reclama, contro lo Straub, la priorità di questa osservazione ([2]).

Mentre però il carico rapido fu da me riferito ad aspirazione ventricolare, egli nega invece l'esistenza di una attività diastolica, riservandosi di spiegare in altro

([1]) L. Krehl, *Pathologische Physiologie.* Leipzig, 1910, pag. 5 (sesta edizione).

([2]) Y. Henderson, *Ueber die Quelle einige von H. Straub vertretenen Ansichten über den Mechanismus der Herzthätigkeit.* Archivio di Pflüger, B. 147, an. 1912.

lavoro il meccanismo per cui i ventricoli si dilatano prima rapidamente e poi lentamente.

Ho già fatto conoscere le ragioni (pag. 684) per cui ritengo che il carico rapido sia prodotto da aspirazione ventricolare; e farei cosa superflua se qui le ripetessi. Solo noto che non riesco a comprendere come l'Henderson possa escludere che il carico rapido derivi da aspirazione ventricolare, dopo di avere egli confermata l'esistenza di una pressione negativa nei ventricoli, e dopo di avere dimostrato, come avevano prima dimostrato Chauveau e Marey, che essa coincide con l'inizio della diastole, e quindi col carico rapido; e che se il riempimento dei ventricoli fosse dovuto ad una causa unica (la pressione venosa), non si dovrebbe verificare un passaggio repentino, e non di rado interrotto, dal carico rapido al carico lento (siccome è stato dimostrato da me e confermato poi dall'Henderson e dallo Straub), ma bensì un passaggio graduato.

Concordano con i miei i risultati dell'Henderson relativi alla dipendenza della durata di una rivoluzione dalla durata del periodo del carico lento; ma molto diversi sono i risultati miei da quelli dell'Henderson rispetto al rapporto fra la quantità del carico e la durata di una rivoluzione.

Secondo l'Henderson, il carico dei ventricoli del cuore, per completarsi, ha bisogno di un certo tempo; e perciò, se la frequenza dei battiti è superiore al minimo necessario per dare ai ventricoli questo tempo, il carico diminuisce, e tanto più diminuisce quanto maggiore è la detta frequenza; vale a dire quanto minore è il tempo concesso al cuore per caricarsi. E se invece la frequenza è minore, i ventricoli non si dilatano ulteriormente, e l'ultimo tempo della diastole è seguìto da una linea orizzontale, tanto più lunga quanto minore è la frequenza dei battiti.

Le mie ricerche hanno invece dimostrato, che si possono verificare repentini aumenti del carico senza mutamenti di frequenza nei battiti (fig. 18), e repentini aumenti di frequenza nei battiti senza mutamenti del carico (fig, 4); non solo, ma hanno anche dimostrato che per stimolazione del vago il carico può aumentare assai e con una rapidità simile a quella con la quale si compie lo scarico (fig. 10). Questi fatti dimostrano che il carico non è subordinato a sole cause meccaniche, e che alla produzione di esso intervengono anche cause d'origine fisiologica.

Dalle mie ricerche risulta, che la stimolazione del vago modifica, non solo la frequenza dei battiti, ma anche il modo con cui si compie la rivoluzione cardiaca, e che l'andamento di questa presenta qualche differenza, a seconda che il vago è stimolato dalla elettricità, oppure dalla dispnea, oppure dalla pressione del sangue; e perciò non posso ammettere, come ammette l'Henderson, che l'azione del vago consista solamente nel rallentare la trasmissione dello stimolo motorio alle fibre del miocardio.

Registrando contemporaneamente i mutamenti volumetrici di un atrio e quelli dei ventricoli, l'Henderson potè dimostrare che, durante le lunghe pause prodotte dalla stimolazione del vago, si possono verificare sistoli atriali, senza sistole successiva dei ventricoli, caratterizzate da diminuzione di volume dell'orecchietta e da contemporaneo aumento del volume dei ventricoli; e in base a questo fatto egli conclude che l'azione del vago si esplica più fortemente sui ventricoli in confronto agli atrii.

Rispetto alle onde che in causa di queste sistoli atriali si producono nella curva volumetrica dei ventricoli, noto che, se comprendo benissimo come la sistole atriale debba produrre un aumento del volume dei ventricoli, non comprendo invece come, in conseguenza della diastole atriale, abbia a verificarsi una corrispondente diminuzione del volume dei medesimi. Per spiegare questa diminuzione, bisognerebbe ammettere che nella diastole degli atrii ritornasse in questi tutto il sangue che la loro sistole aveva spinto nei ventricoli.

In esperienze sul cuore isolato di cane, mantenuto in vita mediante la circolazione con liquido di Locke, l' Henderson osservò che i ventricoli non si dilatano, e che i loro movimenti si arrestano se la pressione sulla loro esterna superficie è pressochè eguale alla pressione sulla loro superficie interna; e in conseguenza egli nega l'attività della diastole.

Queste osservazioni dell' Henderson potrebbero solo dimostrare che attività diastolica non si verifica nel cuore isolato, sottoposto ad una circolazione artificiale e sottratto alla innervazione dei vaghi; e non possono quindi essere contrapposte alle esperienze con le quali ho dimostrato che nell'animale vivente, per impedire il carico del cuore, è necessaria nel pericardio una pressione superiore a quella del sangue venoso, di circa 18 centim. di H^2O. E a tale proposito credo anche bene di ricordare che, secondo le mie ricerche, la pressione diastolica diminuisce notevolmente in seguito al taglio dei vaghi.

Dall'esame delle curve ottenute l'Henderson conclude che la curva volumetrica dei ventricoli corrisponde a quella della scossa di un ordinario muscolo striato.

Benchè io non abbia registrato il volume dei soli ventricoli, ma il volume del cuore intero, pure non posso associarmi a questa conclusione, perchè le mie curve dimostrano che variabile è il modo con cui si compie il passaggio dallo scarico al carico rapido e da questo al carico lento, e che variabile è il rapporto tra scarico e carico, e tra carico rapido e carico lento.

Concordano coi miei i risultati dell' Henderson relativi all'andamento dello scarico ed al momento in cui questo si inizia.

Secondo le misure dell' Henderson, la sistole auricolare dei cani scarica nei ventricoli solamente qualche frazione di centim. cubo di sangue; e in base a questo fatto egli nega ad essa ogni importanza sul carico del cuore, attribuendole invece l'ufficio di accelerare la corrente del sangue e di disporre in tal modo alla chiusura le valvole atrioventricolari.

*
* *

G. F. Nicolai, *Physiologie des Herzens*. Nagel's Handbuch der Physiologie, Bd. I, pag. 859. Braunschweig, 1909.

Il Nicolai, trattando della diastole del cuore, dice che le cifre da me ottenute rispetto all'altezza della pressione venosa e della pressione pericardica, nel momento in cui il circolo era da questa arrestato, non valgono a dimostrare l'esistenza di una attività diastolica, perchè non si sa in quali condizioni l'arresto della circolazione si sia verificato.

Non so se io abbia bene afferrato il pensiero del Nicolai; ad ogni modo, rispondo ricordando che. per dimostrare e misurare la forza espansoria del cuore del cane (*attività diastolica*), determinai l'altezza a cui doveva salire la pressione nel pericardio per impedire il carico del cuore e arrestare quindi il circolo, e l'altezza della pressione che in questo momento si verificava nella vena cava; che avendo trovato la pressione pericardica superiore, di circa 18 centim. H^2O, alla pressione venosa, ho concluso che il cuore del cane si espande con una forza corrispondente a circa 18 centim. H_2O; che avendo misurato, con questo metodo, la forza espansoria del cuore, prima e dopo il taglio dei vaghi, ho trovato che in causa del taglio dei vaghi essa diminuisce notevolmente, ed ho quindi concluso che lo sviluppo di questa forza è subordinato all'azione del vago; che a questa conclusione ho potuto dare importante conferma, dimostrando che la stimolazione del vago, nel momento in cui il circolo era arrestato dalla pressione pericardica, determinava il ristabilimento dello stesso; e finalmente che ho dimostrato l'esistenza di farmaci i quali fanno aumentare e di farmaci i quali fanno diminuire la forza diastolica del cuore.

Il Nicolai dice che nessuna delle curve da me ottenute con la fistola del pericardio vale a dimostrare l'esistenza di una attività diastolica.

A questa affermazione generica posso rispondere solamente, notando che nel mio lavoro vi sono curve le quali dimostrano che il carico si fa in due tempi, prima rapidamente e poi lentamente, con passaggio repentino dall'uno all'altro; curve le quali dimostrano che nel periodo del carico rapido il cuore si carica talora solamente in parte, talaltra totalmente, e talaltra si sovraccarica; curve le quali dimostrano che nel periodo del carico rapido il cuore si può caricare completamente con una rapidità eguale a quella con cui si scarica; curve le quali dimostrano che il carico può aumentare e diminuire indipendentemente dalla frequenza dei battiti del cuore, e dalla quantità dello scarico precedente; curve le quali dimostrano che in corrispondenza del carico rapido si verifica una diminuzione della pressione venosa; curve le quali dimostrano che, in seguito allo stimolo del vago, il cuore si dilata prontamente con una rapidità eguale a quella con cui si scarica e in proporzione maggiore di quella con cui si dilatava prima della stimolazione; e finalmente curve le quali dimostrano che lo stimolo del vago dilata il cuore compresso dalla pressione pericardica, ristabilendo il circolo arrestato.

***

O. Schmiedeberg, *Ueber den Mechanismus der Hemmungswirkung am Herzen.* Arch. f. Anat. u. Physiol. 1910.

Lo Schmiedeberg, in base ai risultati di numerose ricerche sull'azione dei farmaci sul cuore isolato di rana, ammette che nel cuore vi siano due specie di fibre muscolari: fibre, cioè, in cui si possono verificare processi che ne ostacolano la contrazione e ne favoriscono il rilasciamento, e fibre in cui si possono verificare processi che ne ostacolano invece il rilasciamento e favoriscono la contrazione. Le prime sono dallo Schmiedeberg dette *diastoliche*, e le seconde *sistoliche*. I processi diastolici sono regolati dal vago, ed i sistolici dagli acceleratori. Due specie di fibre

muscolari, funzionalmente analoghe, si troverebbero anche nei vasi, i nervi dilatatori dei quali corrisponderebbero al vago, ed i costrittori agli acceleratori del cuore.

Ciò premesso, l'arresto del cuore in sistole, prodotto da certi farmaci, sarebbe da riguardarsi, secondo lo Schmiedeberg, come un fenomeno di inibizione, nello stesso modo dell'arresto in diastole: nel primo caso l'arresto avverrebbe perchè è inibito il rilasciamento delle fibre sistoliche; nel secondo, perchè è inibita la contrazione delle diastoliche.

La diastole prodotta dalla eccitazione del vago, secondo lo Schmiedeberg, dipenderebbe da ciò, che questa eccitazione promuove nelle fibre diastoliche processi che ne ostacolano la contrazione, e in conseguenza essa sarebbe *fisiologicamente attiva.* Ma se essa è fisiologicamente attiva, non è però attiva anche *meccanicamente*; e ciò perchè, secondo lo Schmiedeberg, essa consiste in semplice rilasciamento, senza distensione attiva, delle pareti del cuore, e non produce quindi aspirazione sul sangue venoso.

Non è mia intenzione di discutere i concetti dottrinali dello Schmiedeberg; solo noto che, per ammettere che la diastole consista in un semplice rilasciamento, senza dilatazione attiva, del cuore, era necessario di dimostrare che nè la pressione negativa, verificata da Goltz e Gaule, nelle cavità cardiache, nè i risultati da me ottenuti colla pressione nella cavità del pericardio, sono sufficienti per provare l'esistenza di una dilatazione attiva del cuore. Simile dimostrazione fu tentata dallo Schmiedeberg, ma, per quanto mi sembra, senza riuscire allo scopo.

Rispetto alla pressione negativa nel cuore, dimostrata da Goltz e Gaule [1], lo Schmiedeberg nota, giustamente, che non è facile il provare, se essa si verifichi al principio della diastole o alla fine della sistole, essendo troppo breve il tempo che passa tra l'uno e l'altro momento; e riferisce le esperienze del Moens [2], in base alle quali questo autore è stato indotto ad ammettere che la pressione negativa si verifichi alla fine della sistole, anzichè al principio della diastole, nel qual caso essa non avrebbe, certamente, alcun significato rispetto all'attività diastolica.

Lo Schmiedeberg ricorda che le conclusioni del Moens, fondate su ricerche di carattere specialmente fisico, furono impugnate dal de Jäger [3]; ma nel lavoro dello Schmiedeberg non trovo cenno della osservazione del de Jäger, che la pressione negativa nei ventricoli deve verificarsi nella diastole, perchè altrimenti essa non si trasmetterebbe all'atrio destro, siccome in fatto si trasmette secondo le osservazioni di Goltz e Gaule confermate dal de Jäger; e non trovo cenno neppure dei tracciati di Marey e Chauveau, secondo i quali la pressione negativa nei ventricoli (da questi autori, prima di Goltz, con metodo diverso dimostrata) coincide precisamente col principio della diastole [4].

(1) Goltz und Gaule, *Ueber die Druckverhältnisse im Innern des Herzens.* Archivio di Pflüger, B. XVII, an. 1878.

(2) A. Moens, *Der erste Wellengipfel* etc. Archivio di Pflüger, B. XX, an. 1879.

(3) J. de Jäger, *Ueber die Saugkraft des Herzens.* Archivio di Pflüger, B. XXX, an. 1883.

(4) E. Marey, *Physiologie médicale de la circulation du sang.* Paris, an. 1863, pag. 98. Anche l'Henderson, come ho fatto conoscere, ottenne dei tracciati, secondo i quali la pressione negativa nei ventricoli coincide col principio della diastole.

Rispetto alle mie ricerche (secondo le quali, per impedire il carico del cuore e arrestare così il circolo, è necessaria nel pericardio un pressione superiore alla pressione venosa, in media di 18 cent. di H^2O, e secondo le quali il circolo arrestato da questa pressione si può ristabilire stimolando il vago) lo Schmiedeberg osserva che il ristabilimento del circolo in simili condizioni potrebbe dipendere, non da una dilatazione attiva del cuore, ma da un rilasciamento diastolico di grado maggiore, e in questo modo egli crede di poter spiegare anche i risultati delle mie esperienze con la digitale ed altri farmaci.

Il fatto del ripristino, per mezzo dello stimolo del vago, della circolazione arrestata dalla pressione pericardica, non poteva a meno di procurarmi una profonda impressione, obbligandomi a meditare lungamente e ripetutamente su di esso. In queste meditazioni, ho considerato anche la possibilità che il vago stimolato, nelle suindicate condizioni, facesse cessare una specie di stato tetanico del cuore, possibilità in favore della quale deponeva l'aumento progressivo della frequenza dei movimenti del cuore che io avea dimostrato verificarsi di mano in mano che si innalza la pressione nel pericardio (pag. 722).

Ma ho dovuto riconoscere che per la sola cessazione di uno stato, dirò così, tetanico del cuore, senza dilatazione attiva dello stesso, non dovea essere possibile il carico del cuore ed il ripristino quindi della circolazione, essendo troppo esili le pareti delle orecchiette e delle vene per opporre resistenza ad una pressione, nel pericardio, superiore di parecchi centimetri di acqua alla pressione venosa. E avendo poi cercato se nelle suindicate condizioni il cuore, per lo stimolo del vago, realmente si dilatasse, ho potuto dimostrare (pag. 726 e seg.) che in realtà esso si dilatava in opposizione alla pressione pericardica; che questa dilatazione avveniva in modo prima rapido e poi lento, come se il cuore avesse a superare una resistenza progressiva; e che, appena sospesa la stimolazione del vago, il cuore tornava rapidamente al volume primitivo, come se, col cessare della stimolazione, fosse venuta a mancare l'azione che lo teneva espanso in opposizione alla pressione pericardica.

***

H. Straub, *The diastolic filling of the mommalian heart.* Journ. of Physiol, vol. **XI, 1910.**

H. Straub, nel 1910, registrò, nei gatti in narcosi e mantenuti in vita con la respirazione artificiale, i mutamenti volumetrici dei ventricoli del cuore col cardiometro dell'Henderson, modificato in modo da rendere possibile la trasmissione di detti mutamenti ad una membranella di sapone. Contemporaneamente egli registrò anche i movimenti delle orecchiette col metodo della sospensione, e registrò anche la pressione nel sangue della carotide. Tutte queste registrazioni sono state fatte per mezzo della fotografia.

I tracciati dello Straub s'accordano con quelli dell'Henderson nel dimostrare che nella diastole dei ventricoli si devono distinguere due tempi, nel primo dei quali essi si dilatano rapidamente, quasi colla stessa rapidità con cui si scaricano, e nel secondo invece si dilatano lentamente; ed oltre a ciò, i detti tracciati dimostrano

che i due tempi sono separati da una intaccatura tanto più pronunciata quanto minore è la frequenza dei battiti.

In questo lavoro, lo Straub attribuisce il primo tempo a dilatazione dei ventricoli per attività propria, aspirante il sangue venoso, prodotta dalla tensione elastica in cui sono poste dalla sistole le loro pareti; ed il secondo tempo a dilatazione passiva delle cavità ventricolari, per opera della pressione venosa.

Anche lo Straub confermò quindi il fatto, da me dimostrato fino dal 1878, che il carico del cuore si fa in due tempi, prima rapidamente e poi lentamente; non solo, ma lo interpretò anche in modo, se non eguale, analogo a quello con cui era stato interpretato da me, attribuendo cioè il carico rapido ad aspirazione ventricolare ed il carico lento alla pressione venosa.

In accordo coll'Henderson e con quanto molti anni prima era stato osservato da me, lo Straub dimostrò inoltre che la durata di una rivoluzione del cuore dipende, specialmente, dalla durata del carico lento.

Durante il periodo di tensione della sistole ventricolare lo Straub osservò talora delle onde, che furono da lui attribuite ad aumenti e diminuzioni del volume dei ventricoli, dipendenti dall'essere le valvole atrioventricolari spinte verso la cavità delle orecchiette dalla pressione ventricolare, oppure stirate verso la cavità dei ventricoli dai muscoli papillari.

È giusta l'osservazione dello Straub, che in questo periodo della sistole la capacità dei ventricoli si può modificare in causa di spostamenti delle valvole atrioventricolari; e sarà bene di tener presente questa possibilità. Ma una simile origine non potrei ascrivere alle onde che talora ho anch'io registrate immediatamente prima dello scarico (pag. 689); e ciò perchè uno spostamento delle valvole ventricolari, teoricamente, non dovrebbe produrre mutamenti nel volume del cuore intero, che si registra con la fistola del pericardio.

Durante le lunghe pause che si verificano sotto la stimolazione del vago, sono state registrate anche dallo Straub, come prima dall'Henderson, delle onde costituite da rapidi aumenti seguìti da diminuzioni altrettanto rapide del volume dei ventricoli, in coincidenza con sistoli e diastoli auricolari ed a queste perciò attribuiti.

A tale proposito non posso a meno di ripetere quanto ho già notato nella rivista del lavoro dell'Henderson: che cioè, se facilmente si comprende come la sistole auricolare possa fare aumentare il volume dei ventricoli, non riesce altrettanto facile il comprendere come la diastole auricolare possa produrre diminuzione del volume dei medesimi. Per spiegare questa diminuzione bisognerebbe ammettere, che nella diastole auricolare ritornasse nelle orecchiette il sangue che queste aveano scaricato nei ventricoli.

Delle onde molto simili sono state registrate anche da me durante la stimolazione elettrica del vago (figg. 50, 51); e siccome esse non potevano essere attribuite a sistoli auricolari, perchè la sistole auricolare, travasando il sangue dalle orecchiette nei ventricoli, non può modificare il volume del cuore intero, così esse sono state da me riferite invece a dilatazioni attive dei ventricoli (pag. 735).

***

H. Straub, *Der Druckablauf in den Herzhöhlen. Der Mechanismus der Herzthätigkeit.* Archivio di Pflüger, B. 143, an. 1912.

In un successivo lavoro lo Straub registrò, nei gatti narcotizzati e sottoposti alla respirazione artificiale, la pressione nelle cavità dei ventricoli e degli atrii, mettendo queste cavità in diretta comunicazione con un manometro a specchio di Franck, mediante uno speciale trequarti che veniva infisso attraverso le pareti del cuore col metodo del Magini; e in base ai risultati di queste ricerche e delle ricerche pletismografiche, precedentemente indicate, descrive il meccanismo, secondo il quale si dovrebbe svolgere la funzione del cuore.

In questo lavoro lo Straub nega al cuore l'attitudine di espandersi per azione propria, attitudine che ad esso avea riconosciuto nel lavoro precedente; e ciò perchè egli non riuscì a dimostrare pressione negativa nelle cavità cardiache.

Ma la possibilità di una pressione negativa nel cuore, dopo tanti autorevolissimi lavori, parmi che più non possa essere messa in dubbio; e perciò i risultati dello Straub possono solo dimostrare che pressione negativa non si è verificata durante le esperienze di lui. E che l'azione aspirante del cuore possa talora mancare, non lo posso escludere, perchè essa fu da me osservata durante l'eccitazione dispnoica ed elettrica del vago, e perchè, dopo il taglio dei vaghi, ho veduto che essa diminuiva fino quasi a scomparire.

Negando l'azione aspirante dei ventricoli, lo Straub, in questo lavoro, attribuisce il carico rapido alla notevole quantità di sangue che si scarica rapidamente nei ventricoli all'apertura delle valvole atrioventricolari, in causa dell'accumulo di esso nelle orecchiette e nelle vene durante la sistole ventricolare; e attribuisce il carico lento alla minore quantità di sangue che successivamente entra nei ventricoli nella unità di tempo.

Ma, dato questo meccanismo, essendo la dilatazione dei ventricoli prodotta sempre e solamente dalla pressione venosa, non si dovrebbe verificare discontinuità fra carico rapido e carico lento; il passaggio dall'uno all'altro periodo dovrebbe essere graduato. La divisione del carico in due periodi nettamente distinti non si può intendere, a mio avviso, se non ammettendo che la causa del primo carico sia diversa da quella del secondo.

In questo lavoro lo Straub osserva che, se il carico rapido fosse prodotto dalla elasticità dei ventricoli, siccome egli avea precedentemente ammesso, alla fine di esso, per ragione fisica, si dovrebbero verificare delle onde (*onde elastiche*).

A tale proposito noto che la mancanza di queste onde non può costituire una prova sufficiente contro l'origine del carico rapido da elasticità, perchè, dato anche che la sensibilità degli strumenti fosse perfetta, non si può escludere che queste onde possano essere smorzate da speciali condizioni del cuore; e inoltre noto che, in alcuni casi, non solo una, ma parecchie onde furono da me registrate in detto momento.

Se poi la mancanza di dette onde non può costituire una prova contro l'origine del carico rapido da elasticità, tanto meno essa potrebbe costituire una prova contro

l'origine di esso da espansione attiva delle fibre muscolari contratte, siccome io ammetto.

Per quanto si riferisce alle curve registrate dallo Straub, dovrei fare qualche osservazione su quella del polso venoso, la cui forma è molto diversa da quella da me ottenuta; ma mi rimetto in proposito a quanto dirò nella seguente rivista del lavoro del Piper.

***

H. Piper, *Die Blutdruckschwankungen in den Hohlräumen des Herzens und in den grossen Gefässen.* Arch. f. (Anat. u.) Physiol. 1912.

Nello stesso anno, 1912, il Piper pubblicò delle ricerche, eseguite con lo stesso metodo dello Straub, sulla pressione nelle cavità del cuore, nelle grosse vene e nelle grosse arterie, ottenendo delle curve che, come quelle dello Straub, sono meritevoli della maggiore considerazione per la squisita sensibilità degli apparecchi registratori.

Non intendendo di uscire dal campo degli argomenti da me trattati, mi limito a qualche considerazione sulla curva del polso venoso.

Gli apparecchi usati dal Piper e dallo Straub per registrare il polso venoso sono, senza dubbio, di una sensibilità assai maggiore di quella che potesse avere il manometro da me adoperato: e perciò si capisce come nelle curve da me ottenute abbiano a mancare molte delle particolarità che si osservano invece in quelle ottenute dal Piper e dallo Straub.

Ma, oltre che nei particolari, si verifica una differenza nella parte essenziale fra le curve del polso venoso ottenute da me, e quelle ottenute dal Piper, rispetto cioè al momento della rivoluzione cardiaca, che coincide coll'abbassamento della pressione nelle vene; e questa differenza era mio dovere di rilevare.

Mentre, secondo le curve del Piper, l'abbassamento della pressione venosa si inizia in coincidenza con la diastole auricolare e raggiunge il massimo durante la sistole ventricolare, nelle mie curve invece esso corrisponde al periodo del carico rapido o primo tempo della diastole ventricolare, ed ha presso a poco la stessa durata di questo.

Se i risultati del Piper meritano considerazione per la sensibilità ed il rigore fisico del metodo, credo che i miei, alla loro volta, meritino considerazione per essere stati ottenuti mentre i battiti del cuore erano molto rarefatti e si potevano quindi più facilmente determinare le corrispondenze fra le curve della pressione venosa e le curve della rivoluzione cardiaca.

Il cuore dei gatti, su cui il Piper ha sperimentato, batteva in media con la frequenza di 120 per minuto; mentre il cuore dei cani, su cui ho sperimentato io, batteva con la frequenza media di 30-40 per minuto, in causa della eccitazione dispnoica del vago.

Per questa circostanza, se non posso dire quali fossero nelle mie esperienze i momenti precisi della rivoluzione cardiaca in cui si iniziava e in cui finiva l'abbassamento della pressione venosa, ritengo però, in base alle stesse, di potere affermare che l'abbassamento della pressione venosa coincideva col carico rapido del cuore, vale a dire col primo tempo della diastole ventricolare; mentre, come ho già detto, nelle esperienze del Piper esso avrebbe invece coinciso con la sistole ventricolare.

Non ho dati per dire con sicurezza quale abbia ad essere la causa della differenza fra i risultati miei e quelli del Piper; ma considerando che, secondo le mie ricerche, la forma del polso venoso non è costante, che la diversa forma di polso venoso dipende dal modo diverso con cui si svolge la rivoluzione cardiaca, e che il modo con cui la rivoluzione cardiaca si svolge è subordinato all'azione del vago, ritengo che alla produzione della differenza sopraindicata non sia stata estranea la eccitazione dispnoica del centro del vago, sotto la quale furono fatte le mie esperienze.

Siccome ho già rilevato (pag. 702), è un preconcetto errato, che la rivoluzione cardiaca si svolga sempre nel medesimo modo, e che fra le rivoluzioni cardiache di uno stesso cuore non si possano avere che differenze *quantitative*. Tra di esse si possono verificare anche differenze *qualitative*, le quali sono dimostrate: dal modo diverso con cui i ventricoli passano dalla sistole alla diastole, per cui talora questo passaggio è repentino, talaltra rappresentato invece da una linea curva e talaltra da un *plateau*; dal diverso modo con cui avviene il passaggio dal carico rapido al carico lento, che ora è repentino, ora graduato, ora interrotto da onde; dalla diversa quantità di sangue di cui il cuore si carica nel periodo del carico rapido, per cui talora in questo periodo si carica solo parzialmente, talaltra completamente, e talaltra si sovraccarica; dalla mancanza o presenza di onde secondarie nelle curve cardiografiche; dall'aumento o diminuzione del numero e dell'altezza delle stesse; e specialmente dalla regolare migrazione di esse da uno ad altro momento della curva cardiografica (vedi pag. 687).

Queste differenze, siccome ho dimostrato, sono subordinate all'azione del vago; e ad esse, oltre che agli strumenti registratori, devono, a mio avviso, essere anche attribuite le risultanze diverse dei varî sperimentatori, rispetto alla curva cardiografica, e particolarmente alla presenza o mancanza di *plateau*.

La curva della pressione venosa ottenuta dal Piper corrisponde perfettamente a quella della pressione atriale, e perciò egli subordina i caratteri di essa essenzialmente alla sistole e alla diastole degli atrii.

Nessun dubbio che la sistole e la diastole degli atrii possano modificare la pressione venosa; ma nessun dubbio anche, che su di essa abbiano ad influire la sistole e la diastole dei ventricoli.

Logicamente, la pressione venosa e la pressione atriale dovrebbero abbassarsi quando si aprono le valvole atrioventricolari e il sangue dagli atri si scarica nei ventricoli, e dovrebbero elevarsi durante la chiusura delle stesse per l'impedito scarico del sangue dagli atrii nei ventricoli; ma di questi abbassamenti e innalzamenti non trovo indizio nelle curve del Piper.

Quanto al fatto che neppure il Piper riuscì a dimostrare nel cuore pressione negativa, ed al significato di esso rispetto alla attività diastolica, non potrei che ripetere quanto ho già detto nella rivista del lavoro dello Straub.

***

Mi astengo dal riferire di altri lavori, perchè non potrei che ripetere osservazioni già fatte; solo noto che in nessuno sono ripetute le mie esperienze sulla pres-

sione venosa nel momento in cui il circolo è arrestato dalla pressione pericardica; nè le esperienze sulla pressione pericardica necessaria per arrestare il circolo a vaghi integri ed a vaghi tagliati; nè le esperienze sulla stimolazione del vago, quando il circolo è arrestato da una pressione pericardica che impedisce il carico del cuore; nè le esperienze sull'azione che spiega il vago sulla forma delle curve cardiovolumetriche; nè le esperienze sull'azione che spiegano alcuni farmaci sulla forza espansoria del cuore o pressione diastolica; mentre sono i risultati di queste esperienze quelli che costituiscono i capisaldi, su cui mi sono basato per attribuire al cuore l'attitudine di espandersi attivamente ed al vago il potere di regolare questa attitudine del cuore.

PARTE SECONDA

VASI.

CAPITOLO I.

Premesse sugli uffici dei vasi e sulla origine fisica e fisiologica dei movimenti di questi.

Gli uffici circolatorî dei vasi sono: 1°) di contenere il sangue e di servire alla trasmissione di esso dal cuore agli organi e dagli organi al cuore; 2°) di adattare la capacità del sistema vascolare alla massa del sangue, in modo che questo si trovi sotto la pressione necessaria ai bisogni del circolo; 3°) di regolare la distribuzione del sangue a seconda dei bisogni degli organi; 4°) e fors'anche di coadiuvare la circolazione stessa (1).

Al primo di questi uffici i vasi soddisfano per mezzo della loro conformazione, il cui studio è di spettanza della anatomia; ed agli altri, mediante movimenti, per cui il loro lume si allarga e si restringe, movimenti il cui studio è di spettanza della fisiologia.

I movimenti dei vasi riconoscono la loro origine nella elasticità e nella contrattilità delle pareti vasali. I movimenti elastici sono prodotti dai mutamenti della pressione del sangue, e quindi sono di natura fisica e passivi; e i movimenti contrattili sono prodotti dalla contrazione delle fibre muscolari dei vasi, e quindi sono di natura fisiologica e attivi, subordinati cioè ad una forza che riconosce la sua origine nei vasi stessi.

Dato un mutamento nel lume di un vaso, il primo cômpito della fisiologia dovrebbe quindi essere quello di dimostrare se quel mutamento è di natura elastica oppure contrattile, passivo o attivo; ma questa dimostrazione incontra delle difficoltà, per la ragione che nell'animale vivente non è possibile di sopprimere la elasticità dei vasi conservandone la contrattilità.

Quando i vasi di un territorio si restringono, il sangue da essi scacciato deve trovar posto in altri vasi; e per conseguenza la costrizione di alcuni vasi deve essere accompagnata da dilatazione di altri. E infatti fu osservata dilatazione dei vasi muscolo-cutanei, dei vasi della mucosa boccale, dei vasi del cervello, mentre si costringevano i vasi viscerali; e dilatazione dei vasi del cervello, mentre si costringevano

(1) Oltre agli uffici circolatorii, i vasi hanno anche degli uffici in rapporto con la composizione del sangue, con l'assorbimento e con gli scambii.

quelli del braccio (1). Simili dilatazioni potrebbero dipendere da rilasciamento delle fibre muscolari; ma potrebbero anche dipendere da elasticità, perchè la costrizione dei vasi di un territorio fa aumentare la pressione del sangue, e l'aumento della pressione del sangue distende i vasi che sono elastici. E rispettivamente, è possibile che il restringimento di alcuni vasi, quando altri si allargano, derivi, non dalla contrazione, ma bensì dalla elasticità delle pareti dei vasi, vale a dire dalla retrazione di queste, determinata dall'abbassamento della pressione sanguigna, che si verifica quando i vasi si dilatano.

In rapporto con queste premesse, ho fatto delle ricerche:

a) sui mutamenti che si verificano nel lume dei vasi, di animali da poco tempo uccisi, in seguito a regolari aumenti e regolari diminuzioni della pressione di una soluzione fisiologica con la quale veniva praticata attraverso di essi la circolazione artificiale; mutamenti che sono da considerarsi d'origine fisica (2);

b) sui mutamenti che si verificano nel lume dei vasi quando questi sono sottratti alla circolazione del sangue e sottoposti a pressione costante mediante circolazione artificiale attraverso di essi con soluzione fisiologica; mutamenti che non possono avere altra origine che la contrattilità dei vasi, perchè l'elasticità degli stessi non può entrare in azione, finchè rimane costante la pressione sulla loro interna superficie.

CAPITOLO II.

Mutamenti del lume vasale prodotti dalla pressione interna e quindi d'origine fisica.

Ho cercato: 1°) se, a partire da una data pressione interna, per un determinato aumento di questa, i vasi dei diversi territorii si dilatino egualmente o in modo diverso, e rispettivamente se in modo eguale o diverso si restringano quando la detta pressione si abbassa; 2°) se la dilatazione dei vasi per un determinato aumento di pressione sia sempre la stessa, qualunque sia la pressione di partenza, o sia invece

(1) La dilatazione dei vasi cutanei, mentre si costringono i vasi viscerali, fu osservata dallo Heidenhain, *Beiträge zur Kenntniss der Gefässinnervation,* Archivio di Pflüger, XVI, 1877, e dallo Zuntz, *Beiträge zur Kenntniss der Wirkung der Athmung auf den Kreislauf,* Archivio di Pflüger, XVII, an. 1877; quella dei vasi della mucosa boccale da Dastre e Morat, *Recherches expérimentales sur le systéme nerveux vasomoteur,* Paris, Masson, an. 1884; quella dei vasi del cervello da Falkenhein e Naunyn, *Ueber Hirndruck,* Archiv für exper. Pathol. und Pharmac., XXII, an. 1877; da Roy e Sherrington, *On the regulation of the blood-supply of the brain,* Journ. of physiol., XI, an. 1890, e da De Boeck et Vorhoogen, *Contributions á l'étude de la circulation cérébrale,* Jahresb. ü. d. Fortschr. d. anat. u. physiol. Letterat., an. 1890, 2te abth., pag. 71. Il Mosso (*Azione del freddo e del caldo sui vasi dell'avambraccio*), Accad. delle scienze di Torino, an. 1889) osservò costrizione dei vasi del braccio mentre si dilatavano quelli del cervello.

(2) A rigore, non si può escludere che qualche movimento contrattile avvenga, nei vasi, in seguito all'azione diretta della pressione interna sui vasi stessi; ma questo movimento contrattile dovrebbe, in ogni caso, essere d'importanza secondaria rispetto al movimento elastico.

minore, quando la pressione di partenza è più elevata, come è da presupporsi in base a quanto si conosce intorno alla elasticità dei tessuti.

***

1. **Metodo di ricerca.** — Per risolvere i sopraindicati quesiti, ho sottoposto i vasi dell'arteria femorale, della carotide, della renale e della polmonare, a circolazioni artificiali con soluzione fisiologica sotto pressioni misurate da un manometro a mercurio, le quali potevano essere regolarmente aumentate o diminuite; ho determinato l'efflusso di queste circolazioni alle diverse pressioni; e dai mutamenti di questo efflusso ho calcolato il mutamento del lume vasale, prodotto dalla pressione interna, in base alla nota formula del Poiseuille: $E = \frac{h\,r^4}{L} k$.

Gli animali, cani e conigli, attraverso i vasi dei quali si facevano queste circolazioni, erano stati di recente uccisi; la pressione, sotto cui si faceva la circolazione, era prodotta da una bottiglia del Mariotte, che poteva essere alzata ed abbassata; e l'efflusso delle circolazioni veniva misurato facendo cadere il liquido, che usciva dalla vena, in un vaso graduato, ed osservando, per mezzo di un orologio a secondi, quale era il tempo che impiegava ad uscire una data quantità di liquido, o quanto era il liquido che usciva in un determinato tempo.

Se la lunghezza L del tubo ed il coefficiente K rimangono costanti e si possono quindi considerare come eguali ad una unità, l'efflusso, secondo la suindicata formula del Poiseuille, sarà eguale alla pressione h moltiplicata per la quarta potenza del raggio r del tubo: $E = h\,r^4$; e quindi, dividendo l'efflusso per la pressione, si avrà una cifra che deve corrispondere alla quarta potenza del raggio del tubo: $r^4 = \frac{E}{h}$.

Ciò premesso, si suppongono eguali a 100 tanto la pressione quanto l'efflusso di una prima circolazione, e che per conseguenza r^4 sia eguale alla unità: $r^4 = \frac{100}{100} = 1$; e quindi si fa una seconda circolazione sotto una pressione più alta o più bassa, e si calcola quali vengono ad essere, in questo caso, i valori della pressione e dello efflusso, se i valori della pressione e dell'efflusso, nel caso precedente, sono stati considerati come eguali a 100; si divide l'efflusso per la pressione in tal modo calcolati, ed il quoziente, che si ottiene, rappresenterà r^4, vale a dire il raggio medio dei vasi elevato alla quarta potenza, durante la seconda circolazione, supposto che il raggio medio dei vasi, nella circolazione precedente, fosse eguale ad uno.

Se il detto quoziente risulterà eguale alla unità, ciò significherà che il raggio, e quindi il lume dei vasi, è rimasto invariato; e se sarà maggiore o minore della unità, ciò significherà che il detto raggio è aumentato o diminuito di una quantità corrispondente.

Non so se nel caso di tubî elastici, che si ramificano capillarizzandosi, si possa ammettere che l'efflusso sia precisamente proporzionale alla quarta potenza del raggio medio dei tubi. Ma, checchè ne sia di questo particolare, non si potrà dubitare che l'efflusso sia in rapporto col detto raggio in modo da aumentare quando questo aumenta, e rispettivamente.

Ciò considerando, ed anche per semplificare i calcoli, ho creduto opportuno di riguardare r^4 come una quantità rappresentante, in via approssimativa, il lume medio dei vasi.

Dividendo l'aumento del lume dei vasi, in tal modo con approssimazione calcolato, per i mm. Hg. di pressione che l'hanno prodotto, si avrà la dilatazione media, prodotta da ciascun millimetro di Hg., fra le pressioni adoperate per fare la prima e la seconda circolazione.

Nelle ricerche fatte con tubi metallici, non distendibili, ho trovato che l'efflusso prodotto da un dato aumento di pressione è sempre di qualchecosa minore di quello calcolato, e perciò credo che le cifre da me ottenute siano un po' minori del vero. Questa circostanza potrebbe spiegare il fatto che in taluni casi l'aumento della pressione, secondo i miei calcoli, sarebbe stato seguìto da diminuzione, anzichè da aumento, del lume dei vasi. Ma in alcuni casi questa diminuzione è stata troppo notevole per poter essere così spiegata, e perciò ritengo che essa possa essere stata determinata da contrazione vasale provocata dalla pressione stessa. E. rispettivamente, in seguito all'abbassamento della pressione si ottennero talora delle cifre che indicano non essere avvenuta diminuzione del lume vasale.

Certamente, quando i vasi si restringono, esce non solo il liquido spinto dalla pressione, ma anche il liquido che viene espulso dai vasi in causa del loro restringimento; e perciò. calcolando la capacità dei vasi dall'efflusso, si devono ottenere cifre superiori al vero. Ma questa circostanza non può intervenire se non subito dopo l'abbassamento della pressione; e siccome la nessuna diminuzione del lume vasale è risultata anche quando questo lume fu calcolato in base all'efflusso che si otteneva parecchi minuti dopo l'abbassamento della pressione, così è da ritenersi che essa sia dipesa da altre cause, e precisamente da rilasciamento delle fibre muscolari dei vasi.

Allo scopo di avere dati meglio paragonabili, si faceva la circolazione artificiale attraverso i vasi della femorale e poi della carotide e poi della renale e poi della polmonare dello stesso animale. La soluzione fisiologica aveva, in generale, la temperatura dell'ambiente, e la circolazione non veniva mai interrotta; e se per necessità si dovea interrompere, si cominciava una nuova serie di ricerche.

Ho preferito di calcolare lo stato dei vasi sottoposti alle circolazioni artificiali dalla quantità dell'efflusso, anzichè dai dati che si possono avere per mezzo dei pletismografi, perchè negli organi sottoposti alle circolazioni artificiali si manifesta di frequente l'edema, perchè in molti casi il pletismografo non sarebbe stato applicabile, e perchè apposite esperienze con tubi metallici, non dilatabili, e coi vasi del rene, messi in condizione da non potersi dilatare, mi hanno persuaso della molta attendibilità dei risultati che si ottengono con questo metodo.

Per impedire che i vasi del rene estratto dall'organismo si potessero allargare o restringere, in seguito ad innalzamento o abbassamento della pressione sotto la quale era fatta la circolazione artificiale attraverso di essi, ho collocato il rene in un vaso munito di tre aperture: una, per la cannula che era innestata nella arteria; l'altra per la cannula che era innestata nella vena; e la terza per riempire completamente di soluzione fisiologica il vaso. Questa ultima apertura veniva chiusa ermeticamente quando il vaso era stato completamente riempito.

In simili condizioni i vasi del rene non si potevano nè dilatare nè restringere, perchè i liquidi, praticamente, sono incompressibili; e nelle ricerche fatte sui detti vasi l'efflusso ha corrisposto a quello calcolato in base alla pressione sotto la quale era fatta la circolazione.

***

2. **Esperienze.** — Riporto in esteso due esperienze, e riassumo in una tabella le cifre ottenute dalle altre.

26 aprile 1893. — Cane ucciso per dissanguamento da sette ore.

Soluzione fisiologica come nell'esperienza precedente.
Circolazione nella *femorale*.
Pressione 91 mm. Hg.
In 2 minuti primi escono cc. 16-16-16 dalla vena corrispondente.
Pressione 105 mm. Hg.
In 2 minuti escono cc. 25-28-28-28.
Pressione 122 mm. Hg.
In 2 minuti escono cc. 44-48-48-48.
Pressione 141 mm. Hg.
In 2 minuti escono cc. 68-72-74-74.
Pressione 151 mm. Hg.
In 2 minuti escono cc. 85-84-84-84.
Pressione 164.
In 2 minuti escono cc. 90-91-92-92.
Pressione 151.
In 2 minuti escono cc. 82-83-83.
Pressione 122.
In 2 minuti escono cc. 64-68-60-60-60-60.
Si sospende l'esperimento per un quarto d'ora.
Pressione 103.
In 2 minuti escono cc. 50-50-50.
Pressione 85.
In 2 minuti escono cc. 38-38-38.
Pressione 74.
In 2 minuti escono cc. 30-30-30.
Pressione 61.
In 2 minuti escono cc. 20-20-20.

Quindi:

Aumento di pressione da 91 a 105 come da 100 a 115 — aumento di efflusso da 16 a 28 come da 100 a 175 — capacità dei vasi iniettati alla pressione di 105, supposta eguale ad uno la capacità dei medesimi alla pressione di 91, $\frac{175}{115}=1,25$ — aumento, in centesimi, per millimetro di pressione, $\frac{52}{14}=3,71$ — aumento per centesimo di pressione $\frac{52}{15}=3,70$.

Aumento di pressione da 105 a 122 come da 100 a 116 — aumento di efflusso da 28 a 48 come da 100 a 171 — capacità dei vasi del territorio iniettato alla pressione di 122, supposta ecc., $\frac{171}{116}=1,47$ — aumento per millimetro $\frac{47}{17}=2,80$ — aumento per centesimo $\frac{47}{16}=2,81$.

Aumento di pressione da 122 a 141 come da 100 a 116 — aumento di efflusso da 48 a 74 come da 100 a 154 — capacità dei vasi iniettati alla pressione di 141, supposta ecc., $\frac{154}{116}=1,33$ — aumento, in centesimi, per millimetro di pressione, $\frac{33}{16}=1,74$ — aumento per centesimo di pressione $\frac{33}{16}=2,06$.

Aumento di pressione da 141 a 151 come da 100 a 107 — aumento di efflusso da 74 a 84 come da 100 a 113 — capacità dei vasi iniettati alla pressione di 151, supposta ecc., $\frac{113}{107}=1,06$ — aumento in centesimi, per millimetro di pressione $\frac{6}{10}=0,60$ — aumento per centesimo di pressione $\frac{6}{7}=0,86$.

Aumento di pressione da 151 a 164 come da 100 a 108 — aumento di efflusso da 84 a 92 come da 100 a 109 — capacità dei vasi iniettati alla pressione di 164, supposta ecc., $\frac{109}{108} = 1,009$ — aumento in centesimi, per millimetro, $\frac{9}{130} = 0,07$ — aumento per centesimo $\frac{9}{80} = 0,13$.

Diminuzione di pressione da 164 a 151 come da 100 a 92 — diminuzione di efflusso da 92 a 83 come da 100 a 92 — capacità dei vasi iniettati alla pressione di 151, supposta eguale ad uno la capacità a 164, $\frac{92}{92} = 1$. Questa veruna diminuzione si può spiegare, siccome altrove ho indicato, coll'uscita del liquido scacciato dall'organo per restringimento dei vasi.

Diminuzione di pressione da 151 a 141 come da 100 a 93 — diminuzione di efflusso da 83 a 76 come da 100 a 91 — capacità dei vasi iniettati alla pressione di 141, supposta eguale ad uno la capacità dei medesimi alla pressione di 151, $\frac{91}{93} = 0,98$ — diminuzione, in centesimi, per millimetro, $\frac{2}{10} = 0,20$ — diminuzione per centesimo $\frac{2}{7} = 0,30$.

Diminuzione di pressione da 141 a 122 come da 100 a 84 — diminuzione di efflusso da 76 a 60 come da 100 a 79 — capacità dei vasi iniettati alla pressione di 122, supposta ecc., $\frac{79}{84} = 0,94$ — diminuzione per millimetro $\frac{6}{19} = 0,31$ — diminuzione per centesimo di pressione $\frac{6}{16} = 0,38$.

Diminuzione di pressione da 103 a 85 come da 100 a 82 — diminuzione di efflusso da 50 a 38 come da 100 a 76 — capacità dei vasi iniettati alla pressione di 85, supposta ecc., $\frac{76}{82} = 0,93$ — diminuzione per millimetro $\frac{7}{18} = 0,40$ — diminuzione per centesimo $\frac{7}{18} = 0.40$.

Diminuzione di pressione da 85 a 74 come da 100 a 87 — diminuzione di efflusso da 38 a 30 come da 100 a 79 — capacità dei vasi iniettati alla pressione di 74, supposta ecc., $\frac{79}{87} = 0,91$ — diminuzione, in centesimi, per millimetro. $\frac{9}{11} = 0,82$ — diminuzione per centesimo $\frac{9}{13} = 0,70$.

Diminuzione di pressione da 74 a 61 come da 100 a 82 — diminuzione di efflusso da 30 a 20 come da 100 a 66 — capacità dei vasi iniettati alla pressione di 61, supposta ecc., $\frac{66}{82} = 0,80$ — diminuzione per millimetro $\frac{20}{13} = 1,54$ — diminuzione per centesimo $\frac{20}{18} = 1,11$.

Circolazione nella *carotide*.

Pressione 55 mm. Hg. Escono dalla giugulare, in 10 secondi, cc. 16-17-16-17-17.

Pressione 70. Escono, in 10 secondi, cc. 19-23-23-24-25-25.

Pressione 80. Escono, in 10 secondi, cc. 30-30-30.

Pressione 91. Escono in 10 secondi, cc. 37-37-37.

Si interrompe l'esperimento per un quarto d'ora perchè escono dei coaguli.

Pressione 91. Escono, in 10 secondi, cc. 25-26-30-30-32 30-30.

Pressione 106. Escono, in 10 secondi, cc. 37-37-37.

Interruzione di 20 minuti.

Pressione 108. Escono, in 10 secondi, cc. 32-33-32-30.

Altra interruzione di 20 minuti.

Pressione 106. Escono, in 10 secondi, cc. 15-17-17-17.

Pressione 122. Escono. in 10 secondi, cc. 22-22-22.

Pressione 133. Escono, in 10 secondi, cc. 21-22-22.

Quindi:

Aumento di pressione da 55 a 70 come da 100 a 127 — aumento di efflusso da 17 a 25 come da 100 a 147 — capacità dei vasi a 70, supposta eguale ad uno la capacità dei medesimi a 55, $\frac{147}{127} = 1,16$ — aumento, in centesimi, per millimetro di pressione, $\frac{16}{15} = 1,06$ — aumento per centesimo di pressione $\frac{16}{27} = 0,60$.

Aumento di pressione da 70 a 80 come da 100 a 114 — aumento di efflusso da 25 a 30 come da 100 a 120 — capacità dei vasi alla pressione di 80, supposta ecc., $\frac{120}{114} = 1,05$ — aumento per millimetro $\frac{5}{10} = 0,50$ — aumento per centesimo $\frac{5}{14} = 0,36$.

Di tutto il resto dell'esperienza non si può tener conto.

Circolazione nell'arteria *renale*.

Pressione 85. Dalla vena corrispondente escono, in due minuti primi, cc. 15,5-15-15.
Pressione 99. Escono, in 2 minuti, cc. 20-20-20.
Pressione 116. Escono, in 2 minuti, cc. 28-28-28.
Pressione 135. Escono, in 2 minuti, cc. 36-36-36.
Pressione 149. Escono, in 2 minuti, cc. 41-41-41.
Pressione 163. Escono, in 2 minuti, cc. 48-48-48.
Pressione 149. Escono, in 2 minuti, cc. 42-42-42.
Pressione 135. Escono, in 2 minuti, cc. 38-38-38.
Pressione 118. Escono, in 2 minuti, cc. 32-32-32.
Pressione 99. Escono, in 2 minuti, cc. 26-26-26.
Pressione 85. Escono, in 2 minuti, cc. 22-22-22.

Quindi:

Aumento di pressione da 85 a 99 come da 100 a 116 — aumento di efflusso da 15 a 20 come da 100 a 133 — capacità dei vasi iniettati alla pressione di 90, supposta eguale ad uno la capacità dei medesimi a 85, $\frac{133}{116} = 1,15$ — aumento, in centesimi, per millimetro di pressione, $\frac{15}{14} = 1,07$ — aumento per centesimo di pressione $\frac{15}{16} = 0,94$.

Aumento di pressione da 99 a 116 come da 100 a 117 — aumento di efflusso da 20 a 28 come da 100 a 140 — capacità dei vasi alla pressione di 116, supposta ecc., $\frac{140}{117} = 1,19$ — aumento per millimetro $\frac{19}{17} = 1,11$ — aumento per centesimo $\frac{19}{17} = 1,11$.

Aumento di pressione da 116 a 135 come da 100 a 116 — aumento di efflusso da 28 a 26 come da 100 a 128 — capacità dei vasi alla pressione di 135, supposta eguale ad uno la capacità dei medesimi a 116, $\frac{128}{116} = 1,10$ — aumento per millimetro, in centesimi, $\frac{10}{19} = 0,52$ aumento per centesimo $\frac{19}{16} = 0,62$.

Aumento di pressione da 135 a 149 come da 100 a 110 — aumento di efflusso da 36 a 41 come da 100 a 114 — capacità dei vasi alla pressione di 149, supposta ecc., $\frac{114}{110} = 1,04$ — aumento per millimetro $\frac{4}{14} = 0,28$ — aumento per centesimo $\frac{4}{10} = 0,4$.

Diminuzione di pressione da 149 a 135 come da 100 a 90 — diminuzione di efflusso da 42 a 38 come da 100 a 90 — capacità dei vasi alla pressione di 135, supposta eguale ad uno la pressione a 149, $\frac{90}{90} = 1$ — diminuzione per millimetro 0 — diminuzione per centesimo 0.

Diminuzione di pressione da 135 a 118 come da 100 a 88 — diminuzione di efflusso da 38 a 22 come da 100 a 84 — capacità dei vasi alla pressione di 118, supposta eguale ad uno ecc., $\frac{84}{88} = 0,94$ — diminuzione, in centesimi per millimetro, $\frac{6}{17} = 0,35$ — diminuzione per centesimo $\frac{6}{16} = 0,50$.

Diminuzione di pressione da 118 a 99 come da 100 a 84 — diminuzione di efflusso da 32 a 26 come da 100 a 81 — capacità dei vasi alla pressione di 99, supposta eguale ad uno ecc., $\frac{81}{84}=0{,}96$ diminuzione per millimetro $\frac{4}{19}=0{,}21$ — diminuzione per centesimo $\frac{4}{16}=0{,}25$.

Diminuzione di pressione da 99 a 85 come da 100 a 84 — diminuzione di efflusso da 26 a 22 come da 100 a 76 — capacità dei vasi alla pressione di 85, supposta eguale ad uno ecc., $\frac{76}{84}=0{,}90$ — diminuzione per millimetro $\frac{10}{14}=0{,}71$ — diminuzione per centesimo $\frac{10}{16}=0{,}62$.

Dalle cifre ottenute in questa esperienza risulta quindi che:

1°) a partire dalla stessa pressione, per eguale aumento, si dilatarono più di tutti i vasi degli arti, poi quelli dei reni e poi quelli del cervello.

2°) la dilatazione, in tutti, fu tanto minore quanto più elevata era la pressione interna;

3°) i vasi dei reni ritornarono al lume primitivo, coll'abbassarsi della pressione, più prontamente dei vasi degli arti. Non si poterono in questa esperienza ottenere, sotto questo riguardo, dei dati attendibili in relazione ai vasi del cervello.

*
* *

23 maggio 1893. — Cane ucciso per dissanguamento.

Si fa la iniezione della soluzione fisiologica, temperatura dell'ambiente, nell'*arteria polmonare*. e si raccoglie il liquido che esce dall'aorta.

L'esperimento incomincia un'ora dopo la morte.

Pressione 42 mm. Hg. In 10 secondi escono cc. 16-17-18-18-18-18.

Pressione 54 mm. Hg. In 10 secondi escono cc. 24-26-26-27-27-27.

Pressione 61 mm. Hg. In 10 secondi escono cc. 30-30-31-32-32-33-33.

Pressione 73 mm. Hg. In 10 secondi escono cc. 34-36-37-37-38-39-39.

Pressione 88 mm. Hg. In 10 secondi escono cc. 42-48-48-48-48.

Pressione 101 mm. Hg. In 10 secondi escono cc. 52-52-52-56-54-54-54.

Pressione 88 mm. Hg. In 10 secondi escono cc. 49-47-47-47-47.

Pressione 73 mm. Hg. In 10 secondi escono cc. 41-41-40-40-40-40.

Pressione 61 mm. Hg. In 10 secondi escono cc. 37-36-35-35-35.

Pressione 54 mm. Hg. 54. In 10 secondi escono cc. 32-31-30-30-30-30.

Pressione 42 mm. Hg. In 10 secondi escono cc. 26-26-25-24-24-24-24.

Quindi:

Aumento di pressione da 42 a 54 come da 100 a 128 — aumento di efflusso da 18 a 27 come da 100 a 150 — capacità dei vasi alla pressione di 54, supposta eguale ad uno la capacità dei medesimi alla pressione di 42, $\frac{150}{128}=1{,}17$ — aumento di capacità, in centesimi, per millimetro di pressione, $\frac{17}{12}=1{,}41$.

Aumento di pressione da 54 a 61 come da 100 a 113 — aumento di efflusso da 27 a 33 come da 100 a 122 — capacità dei vasi alla pressione di 61, supposta eguale ad uno la capacità dei medesimi alla pressione di 54, $\frac{122}{113}=1{,}08$ — aumento di capacità, in centesimi, per millimetro di pressione, $\frac{8}{7}=1{,}14$.

Aumento di pressione da 61 a 73 come da 100 a 119 — aumento di efflusso da 32 a 39 come da 100 a 122 — capacità dei vasi alla pressione di 73, supposta eguale ad uno la capacità dei medesimi alla pressione di 61, $\frac{122}{119}=1{,}03$ — aumento di capacità, in centesimi, per millimetro di pressione, $\frac{3}{12}=0{,}25$.

Aumento di pressione da 73 a 88 come da 100 a 120 — aumento di efflusso da 39 a 48 come da 100 a 123 — capacità dei vasi alla pressione di 88, supposta eguale ad uno la capacità dei medesimi alla pressione di 73, $\frac{123}{120} = 1{,}02$ — aumento di capacità, in centesimi, per millimetro di pressione, $\frac{2}{15} = 0{,}13$.

Aumento di pressione da 88 a 101 come da 100 a 114 — aumento di efflusso da 48 a 54 come da 100 a 113 — capacità dei vasi alla pressione di 101, supposta eguale ad uno la capacità dei medesimi alla pressione di 88, $\frac{113}{114} = 1$ — aumento per millimetro di pressione, nessuno.

Diminuzione di pressione da 101 a 88 come da 100 a 87 — diminuzione di efflusso da 54 a 47 come da 100 a 87 — capacità dei vasi alla pressione di 88, supposta eguale ad uno la capacità dei medesimi alla pressione di 101, $\frac{87}{87} = 1$ — diminuzione in centesimi, per millimetro di di pressione, nessuna.

Diminuzione di pressione da 88 a 73 come da 100 a 83 — diminuzione di efflusso da 47 a a 40 come da 100 a 85 — capacità dei vasi alla pressione di 73, supposta eguale ad uno la capacità dei medesimi alla pressione di 88, $\frac{85}{83} = 1$ (circa) — diminuzione di capacità, nessuna.

Diminuzione di pressione da 73 a 61 come da 100 a 96 — diminuzione di efflusso da 40 a 35 come da 100 a 87 — capacità dei vasi alla pressione di 61, supposta eguale ad uno la capacità dei medesimi alla pressione di 73, $\frac{87}{86} = 1$ — diminuzione di capacità, nessuna.

Diminuzione di pressione da 61 a 64 come da 100 a 88 — diminuzione di efflusso da 35 a 30 come da 100 a 86 — capacità dei vasi alla pressione di 54, supposta eguale uno la capacità dei medesimi alla pressione di 61, $\frac{86}{88} = 1$ (circa) — diminuzione di capacità, nessuna.

Diminuzione di pressione da 54 a 42 come da 100 a 78 — diminuzione di efflusso da 30 a 24 come da 100 a 80 — capacità dei vasi alla pressione di 42, supposta eguale ad uno la capacità dei medesimi alla pressione di 54, $\frac{80}{78} = 1$ — diminuzione di capacità, nessuna.

Diminuzione di pressione da 101 a 42 come da 100 a 41 — diminuzione di efflusso da 54 a 24 come da 100 a 43 — capacità dei vasi alla pressione di 42, supposta eguale ad uno la capacità dei medesimi alla pressione di 101, $\frac{43}{41} = 1$ — diminuzione di capacità, nessuna.

E perciò, dalle cifre ottenute in questa esperienza deriva che:

1°) la dilatazione dei vasi polmonari, per un dato aumento di pressione, fu tanto minore quanto più elevata era la pressione interna;

2°) i vasi polmonari, dopo di essere stati distesi, non ripresero il lume primitivo, nel tempo almeno, che durò l'esperimento.

TABELLA RIASSUNTIVA DELLE ESPERIENZE FINORA ESEGUITE

Numero dell'esperienza	Dilatazione (in centesimi) prodotta da un mm. in più di pressione Hg. a pressione interna progressivamente più alta.										Restringimento (in centesimi) prodotto da un mm. in meno di press. Hg. a press. interna progress. più bassa.							
	Femorale		Renale		Carotide		Aorta add.		Polmonare		Femorale		Renale		Carotide		Polmonare	
	Aumento della press. da.... a....	Dilatazione prodotta da 1 mm. Hg.	Aumento della press. da.... a....	Dilatazione prodotta da 1 mm. Hg.	Aumento della press. da.... a....	Dilatazione prodotta da 1 mm. Hg.	Aumento della press. da.... a....	Dilatazione prodotta da 1 mm. Hg.	Aumento della press. da.... a....	Dilatazione prodotta da 1 mm. Hg.	Diminuzione della press. da.... a....	Restringim. prodotto da 1 mm. Hg.	Diminuzione della press. da.... a....	Restringim. prodotto da 1 mm. Hg.	Diminuzione della press. da.... a....	Restringim. prodotto da 1 mm. Hg.	Diminuzione della press. da.... a....	Restringim. prodotto da 1 mm. Hg.
I	93-132	1.64	93-132	1.20	93-132	0.25					164-132	0.0	164-132	0.34	164-132	0		
	132-164	1.18	132-164	1.16	132-164	0.18					132-92	0.23	132-92	0.66	132-92	0.30		
II	90-102	1.50					84-94	0.20										
III	56-96	2.25	86-106	2.50	86-106	0.45												
			106-136	1.23	106-126	0.05												
			136-146	0.60														
IV	56-86	1.36			56-86	0.50					120-105	0.0			96-86	0.0		
	86-106	0.70			86-96	0.50					106-86	0.15			86-56	0 27		
	106-120	0.43									86-56	0.40						
V	82-102	1.50	85-99	0.36	82-102	0.90					112-102	0.0	162-132	0.0	92-83	0.0		
	102-122	0.60	92-112	0.15							82-52	0.27	132-112	0.20				
			112-132	0.0									112-92	0.35				
													92-72	0.40				
VI	62-82	5.40			64-83	2.52					114-95	0.60						
	82-93	4.09			83-95	1.25					89-78	1.73						
	93 104	3.09			95-116	0.63					78-65	2.16						
VII	91-105	3.71	85-99	1.07	55-70	1.06					151-141	0.20	135-116	0.35				
	195-122	2.80	99-116	1.11	70-80	0.50					141-122	0.31	118-99	0.21				
	122-141	1 74	116-135	0.52							103-85	0.40	99-95	0.71				
	141-151	0.60	135-149	0.28							85-74	0.82						
	151-164	0.07									74-61	1.54					101-88	0.0
VIII									42-54	1.41							88-73	0.0
									54-61	1.14							73-61	0.0
									61-73	0.25							73-61	0.0
									73-88	0.13							61-54	0.0
									88-101	0.0							54-42	0.0
																	101-42	0.0
																	129-110	0.0
IX									48-58	1.20							110-96	0.0
									58-77	0.60							96-77	0.0
									77-96	0.20							77-48	0.0
									96-110	0.15							129-48	0.09
									110-129	0.0								

***

3. **Risultati e conclusioni.** — Dalla surriferita tabella risulta che:

1°) un dato aumento di pressione provoca in tutti i territorî vascolari una dilatazione tanto minore, quanto più elevata è la pressione di partenza; e questo fatto è in perfetto accordo con quanto aveano dimostrato il Wertheim (1) sulla elasticità lineare ed il Marey (2) sulla elasticità cubica dei vasi;

2°) un dato aumento di pressione, a pressione di partenza eguale, dilata, in generale, i vasi muscolo-cutanei in proporzione maggiore dei vasi viscerali;

3°) in seguito all'abbassamento della pressione i vasi renali, e probabilmente anche i cerebrali, si restringono più prontamente dei vasi muscolo-cutanei;

4°) i vasi polmonari si dilatano come gli altri vasi viscerali, meno cioè dei vasi muscolo-cutanei; ma quando la pressione si abbassa, non riprendono subito il lume primitivo: rimangono, dirò così, sfiancati.

Questi fatti dimostrano che, per ragione fisica, un aumento della pressione del sangue deve modificare la distribuzione del sangue in modo da aumentare la quantità di esso contenuta nei vasi muscolo-cutanei; e che per conseguenza un aumento della massa del sangue farà aumentare, per ragione fisica, a preferenza, la quantità di sangue contenuta nei vasi muscolo-cutanei; ed oltre a ciò dimostrano che il sangue scacciato da un viscere per contrazione dei vasi relativi, per ragione fisica, si dovrà trasferire, a preferenza, non nei vasi di altro viscere, ma nei vasi muscolo-cutanei. E tutto ciò considerando, parmi che si possa ammettere che i *vasi muscolo-cutanei costituiscono una specie di magazzino di riserva per l'eccesso di sangue contenuto nel sistema vascolare e per il sangue scacciato dai visceri.*

CAPITOLO III.

Mutamenti del lume vasale in vasi sottoposti a pressione costante e quindi d'origine fisiologica. Metodi di ricerca.

Ho sottoposto i vasi di un distretto vascolare a pressione interna costante, sottraendoli alla circolazione del sangue e praticando poi attraverso di essi la circolazione artificiale con soluzione fisiologica, sotto determinata pressione. Siccome ho già detto, i mutamenti che si verificano nel lume di questi vasi non possono derivare

(1) Wertheim, *Mémoire sur l'élasticité et sur la cohésion des principaux tissus du corps humaine.* Ann. d. chim. et d. phys., XXI, pag. 385, an. 1847.

(2) Marey, *Recherches sur la tension artérielle.* Travaux du Laborat., 1878-79. Paris, Masson, 1880.

La piccola sconcordanza con la conclusione sopraindicata, che presenta la esperienza VII, la quale fu anche riportata in esteso, rispetto ai vasi renali, devesi senza dubbio attribuire a qualche errore sperimentale.

che da movimenti contrattili, essendo esclusa l'azione della pressione. Questi mutamenti si distinguono in *locali, centrali* e *reflessi*, a seconda che derivano da azione diretta dello stimolo sui vasi, oppure da azione dello stimolo sui centri nervosi, oppure da azione dello stimolo su organi di senso.

*
* *

1. **Mutamenti d'origine locale.** — Per dimostrare i mutamenti fisiologici d'origine locale, si pratica la circolazione artificiale con soluzione fisiologica attraverso i vasi di un determinato territorio vascolare, in animale di recente ucciso, e si alterna questa circolazione con circolazione di soluzione fisiologica contenente l'agente stimolante, sotto la stessa temperatura e pressione. Nelle condizioni sopraindicate rimane esclusa l'azione dei centri nervosi; e perciò, se il passaggio dalla circolazione con soluzione fisiologica pura alla circolazione con soluzione fisiologica contenente lo stimolo determinerà diminuzione di efflusso, si dovrà concludere che lo stimolo ha prodotto costrizione vasale agendo direttamente sui vasi; e questa conclusione sarà confermata, se il ritorno alla circolazione con soluzione fisiologica pura farà ritornare l'efflusso alla quantità primitiva. E rispettivamente si dica se l'efflusso aumenterà, invece di diminuire.

Con questo metodo, oltre all'azione locale vasomotoria di determinati stimoli, si può anche dimostrare se un determinato nervo contiene fibre vasomotorie per determinati vasi (vedi cap. V).

Per lunga esperienza, posso affermare che il metodo delle circolazioni artificiali, per dimostrare se i vasi si restringono e si dilatano, quando sia usato con le debite cautele, e quando si abbia cura di incominciare le ricerche solamente dopo che l'efflusso della circolazione con soluzione fisiologica pura sia divenuto costante, merita la maggior fiducia.

Nelle mie prime ricerche, invece della soluzione fisiologica, ho fatto uso di sangue defibrinato, diluito con soluzione fisiologica nella proporzione, in genere, di uno di sangue per tre di soluzione; ma poi ho trovato che la soluzione fisiologica pura è di gran lunga preferibile.

La reazione locale, oltre che per mezzo delle circolazioni artificiali, si può anche studiare graficamente, registrando cioè le contrazioni dei vasi isolati, conservati in liquido del Ringer, che si producono quando al liquido del Ringer si aggiunge qualche agente stimolante. Con questo metodo sono state fatte di recente molte ricerche dai miei allievi Siccardi e Loredan [1].

*
* *

2. **Mutamenti d'origine centrale.** — Per dimostrare i mutamenti fisiologici d'origine centrale, si pratica la circolazione artificiale, con soluzione fisiologica, in

[1] Siccardi e Loredan, *Sulla contrazione delle fibre liscie dei vasi, con particolare riguardo all'azione degli estratti di organi* (Zeitschr. f. allg. Physiologie, B. XV, 1913); id. id., *Azione locale di alcuni alcaloidi sui vasi sanguigni: contributo alla dottrina della espansione attiva delle fibre muscolari* (Archivio di fisiologia, XII, 1914). Le prime registrazioni grafiche delle contrazioni vasali furono ottenute nel 1905 da von Frey, *Beiträge zur Kenntniss der Adrenalinwirkung* (Centralblatt für Physiologie, B. XIX).

animale vivente, sotto pressione e temperatura costanti, attraverso un territorio vasale sottratto alla circolazione generale, ma in normale connessione coi centri nervosi mediante i nervi. In simili ricerche l'animale deve essere profondamente curarizzato, allo scopo di evitare l'azione dei movimenti volontarî sulla circolazione artificiale. La fig. 63 rappresenta schematicamente le condizioni di simile esperienza.

L'agente stimolante, per mezzo della circolazione generale A, viene portato ai centri nervosi C, e la reazione di questi si trasmette ai vasi B, sottratti alla circolazione generale e sottoposti alla circolazione artificiale, per mezzo dei nervi N. In

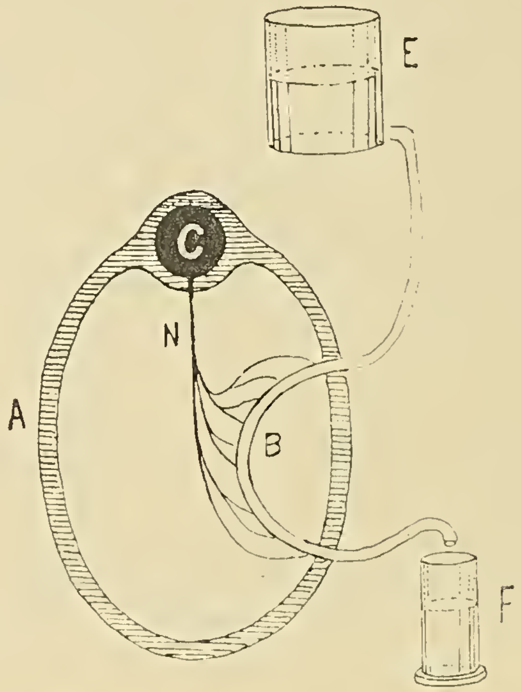


Fig. 63. — Schema dell'esperienza. *C*, centri nervosi; *N* nervi che dai centri nervosi vanno ai vasi *B* isolati dalla circolazione generale *A*; *E* vaso di pressione da cui scende la soluzione fisiologica che circola nei vasi isolati *B*; *F* vaso graduato in cui si versa la soluzione fisiologica dopo essere passata attraverso i vasi *B*. Lo stimolo, che si trova nella circolazione generale *A*, spiega la sua azione sui centri nervosi *C*, e l'eccitazione di questi centri si trasmette, per mezzo dei nervi *N*, ai vasi *B* isolati dalla circolazione generale.

tal modo i centri nervosi possono, evidentemente, fare costringere o allargare i vasi B, senza che la loro azione venga turbata nè dalla pressione del sangue nè dall'azione che l'agente stimolante potrebbe eventualmente spiegare sui vasi, in via diretta.

Con questo metodo si può anche dimostrare, se l'azione centrale di uno stimolo è uguale o diversa per i vasi dei diversi territorî.

La costrizione e l'allargamento dei vasi si desumono dai mutamenti dell'efflusso della circolazione artificiale, come nelle ricerche per dimostrare i movimenti locali.

Nelle ordinarie ricerche vasomotorie, l'azione costrittrice dei centri nervosi è in generale argomentata dall'innalzalmento della pressione del sangue; ma questo innalzamento della pressione del sangue, anzichè di una costrizione vasale, potrebbe essere effetto di una maggiore attività del cuore, per cui il sistema arterioso si so-

vraccarica a spese del sistema venoso. Per dimostrare se esso innalzamento deriva dall'una oppure dall'altra causa, se deriva cioè da maggiore attività del cuore oppure da contrazione vasale, può servire il metodo sopraindicato della circolazione artificiale; perchè, quando l'aumento della pressione del sangue dipende da maggior attività del cuore, non si dovranno verificare mutamenti nell'efflusso della circolazione artificiale, essendo questa sottratta alla circolazione generale; e perchè, quando esso dipende invece da eccitazione dei centri vasocostrittori, si dovrà verificare, nella stessa, diminuzione di efflusso, non essendo impedita la trasmissione delle eccitazioni nervose centrali alla periferia.

* * *

3. **Mutamenti d'origine riflessa.** — Per dimostrare i mutamenti del lume vasale d'origine riflessa, in vasi sottoposti a pressione interna costante, si pratica, come nel caso precedente, la circolazione artificiale con soluzione fisiologica attraverso un territorio vascolare di animale vivente, sottratto alla circolazione del sangue e in normale connessione coi centri nervosi mediante i nervi, e si fa agire lo stimolo sull'organo di senso o sul nervo centripeto da cui si presume che un'azione vasomotoria riflessa possa prendere origine.

Particolare considerazione merita la ricerca dell'azione riflessa che potrebbe prendere origine dai vasi stessi, essendo essa stata invocata per spiegare alcuni fatti vasomotorii, e particolarmente la regolazione della pressione del sangue.

Per dimostrare questa azione, si dovrebbero praticare, nell'animale vivente e curarizzato, due circolazioni artificiali: l'una per portare lo stimolo sulla parete interna di determinati vasi, e la seconda per conoscere se in conseguenza si restringe od allarga il lume di altri. Ma per non complicare troppo l'esperienza, in generale, mi sono limitato, in simili ricerche, a fare una sola circolazione artificiale, quella per mezzo della quale si porta lo stimolo sulla parete interna dei vasi, ed ho dedotto l'azione vasomotrice riflessa di detto stimolo, col metodo classico, dai mutamenti della pressione aortica.

CAPITOLO IV.

Azioni vasomotorie di stimoli fisiologici circolanti nel sangue.

Seguendo i criterî sopraindicati, ho istituito metodiche ricerche per dimostrare l'azione vasomotoria *locale*, *centrale* e *riflessa* di stimoli fisiologici circolanti nel sangue, e precisamente dell'urea, del sangue dispnoico (e carbossidato), dei sali biliari, della temperatura e della pressione del sangue.

Riferisco brevemente i risultati delle ricerche fatte.

* * *

1. **Urea.** — Le ricerche sull'azione vasomotoria locale, centrale e reflessa dell'urea sui vasi sottratti alla circolazione generale furono eseguite nel 1891 e nel 1892

da A. Cavazzani, allora mio assistente, con la collaborazione di G. Rebustello ed E. Chiaruttini [1].

Da queste ricerche fu dimostrato che:

1°) l'urea spiega un'azione locale dilatatrice, non solo sui vasi dei reni, come aveano già dimostrato Abeles e Munk [2], ma su tutti i vasi.

Le circolazioni artificiali, per mezzo delle quali fu dimostrato questo fatto, sono state eseguite alternando la soluzione fisiologica pura con soluzione fisiologica addizionata di urea nella proporzione di 0,6-1-2-3-4-5-8 ‰. Invece di soluzione fisiologica, fu usato in parecchie esperienze sangue defibrinato, estratto di recente, diluito con soluzione fisiologica nella proporzione di uno di sangue e tre di soluzione. A simili circolazioni furono sottoposti i vasi renali, femorali, carotidei, polmonari e portali.

2°) l'azione dilatatrice dell'urea sui vasi renali è molto maggiore dell'azione dilatatrice della stessa sugli altri vasi. Questo fatto è di notevole importanza, non solo per i suoi evidenti rapporti con la secrezione urinaria, ma perchè dimostra che fra vasi e vasi vi sono differenze specifiche, come fra i diversi muscoli. I vasi di un organo possono reagire allo stesso stimolo in modo diverso dai vasi di altro organo.

Sciolta nella proporzione del 2 ‰, l'urea ha prodotto, in media, una dilatazione dei vasi renali come da 100 a 178, dei vasi della carotide come da 100 a 137, dei vasi della porta come da 100 a 132, dei vasi femorali come da 100 a 120. Queste dilatazioni furono calcolate col metodo indicato nel capitolo secondo.

3°) la quantità minimale di urea, capace di produrre la dilatazione dei vasi renali, è inferiore alla quantità minimale di urea capace di produrre la dilatazione degli altri vasi. Per i vasi renali fu trovata di 0,5 ‰; per gli altri vasi, di 1 ‰.

La dilatazione dei vasi aumentò con l'aumentare della dose dell'urea fino al 5 ‰. Aumentando la dose dal 5 all'8 ‰, lo stato dei vasi non ha subìto mutamenti.

4°) l'urea spiega un'azione centrale vaso-costrittrice. Questa azione fu dimostrata iniettando urea nella circolazione generale, e misurando quindi l'efflusso di circolazioni artificiali praticate attraverso i vasi renali ed i vasi femorali. La diminuzione dell'efflusso della circolazione renale è stata come da 100 a 77, e della circolazione femorale come da 100 a 44.

L'Ustimowitsch e il Grützner [3] aveano dimostrato che l'urea iniettata in circolo determina un'elevazione della pressione arteriosa; ma questa elevazione non si era

[1] Cavazzani e Rebustello, *Azione dell'urea sulle pareti dei vasi.* Archivio di scienze mediche XV, 1891.

A. Cavazzani, *Dell'azione dell'urea sui vasi e sui centri vasomotori.* Archivio di scienze mediche, XV, 1891.

Cavazzani e Chiaruttini, *Ulteriore contributo all'azione dell'urea sull'apparecchio circolatorio.* Archivio di scienze mediche, XVI, 1892.

Cavazzani e Rebustello, *Azione dell'urea sui centri vasomotori dei reni.* Archivio di scienze mediche, XVI, 1892.

[2] J. Munk, Archivio di Virkow, CVII-CXI-CXIV, 1887 e 1888.

[3] Grützner, *Beiträge zur Physiologie der Harnsecretion.* Archivio di Pflüger, XI, 1875.

verificata in modo costante, e, quando erasi manifestata, era sempre stata di piccolo grado e di breve durata, per cui non poteva a meno di rimanere qualche dubbio sul significato di essa.

Le suindicate ricerche del Cavazzani dimostrarono che realmente l'urea eccita il centro vasocostrittore; e perciò, se l'urea iniettata in circolo non produce innalzamento della pressione arteriosa, nè costante nè notevole, ciò evidentemente dipende dall'azione locale vasodilatatrice che l'urea spiega contemporaneamente;

5°) l'urea, circolando nei vasi, non produce azioni vasomotorie riflesse. Questo fatto fu dimostrato alternando, attraverso i vasi degli arti posteriori e dei reni, circolazioni artificiali con soluzione fisiologia pura e soluzione fisiologica addizionata d'urea, e registrando nello stesso tempo la pressione arteriosa. Il passaggio dall'una all'altra circolazione non ha mai prodotto mutamenti nella pressione arteriosa.

La presenza di urea nel sangue è causa dunque di due azioni vasomotorie opposte: una *locale dilatatrice* che si esplica specialmente sui vasi renali, ed una *centrale costrittrice*. Queste due azioni si sommano, e la risultante delle stesse è una leggera costrizione che determina un piccolo e non costante innalzamento della pressione arteriosa.

Ma se per l'azione dell'urea, contenuta nel sangue, sul centro vasocostrittore, i vasi del corpo complessivamente si restringono, non è da ritenersi che si restringano anche i vasi del rene. Essendo l'azione dilatatrice dell'urea su questi vasi molto maggiore che sugli altri, è anzi logico l'ammettere che per la presenza di urea nel sangue i vasi renali si trovino in istato di dilatazione, mentre gli altri sono un pò costretti. E ciò posto, *l'urea, accumulandosi nel sangue, in forza delle sue azioni vasomotorie, determinerebbe le condizioni circolatorie più favorevoli alla sua eliminazione, vale a dire: dilatazione dei vasi renali senza abbassamento, ed anzi con qualche innalzamento, della pressione generale del sangue.*

Riporto alcune esperienze del Cavazzani che dimostrano l'azione locale vasodilatatrice e l'azione centrale vasocostrittrice dell'urea.

* * *

Cane di recente ucciso per dissanguamento. Circolazione artificiale attraverso i vasi renali con sangue defibrinato dello stesso cane diluito con tre volumi di soluzione fisiologica, e con lo stesso sangue a cui era stata aggiunta urea nella proporzione del 2 ‰. Le circolazioni artificiali sono fatte sotto la pressione di 70 mm. Hg. (1).

Cent. cub. di sangue usciti dalla vena renale in un minuto

durante la circolazione con sangue puro	durante la circolazione con sangue contenente urea.
8-7,5-8,5-9,5-10,5-11,5-11,5-11,5-11,5	
	14,5-17,5-20-20,5-20,5-20,5
17,5-13-11,5-11-10-9,5-9	

$$\text{Coefficente di dilatazione} = \frac{20.5}{11.5} = 1.78.$$

Questa esperienza dimostra l'azione locale dilatatrice dell'urea sui vasi renali.

(1) Cavazzani e Rebustello, *Azione dell'urea sulle pareti dei vasi*. Archivio di scienze mediche, XV, 1891.

*
* *

Cane ucciso per dissanguamento da un'ora e mezza — circolazione attraverso i vasi renali con sangue defibrinato diluito con tre vol. di soluzione fisiologica, e con lo stesso sangue addizionato di urea nella proporzione dell'8 $^0/_{00}$. Le circolazioni artificiali si fanno sotto la pressione di 80 mm. Hg. (1).

Cent. cub. di sangue usciti dalla vena renale in un minuto

durante la circolazione con sangue puro	durante la circolazione con sangue addizionato d'urea
3,5-3,5-3,5	
	3,5-5,5-7-7,5-7,5
6-4-3,5	

$$\text{Coefficente di dilatazione} = \frac{7.5}{3.5} = 2.14.$$

Questa esperienza dimostra che l'azione locale dilatatrice dell'urea sui vasi renali cresce col crescere della dose dell'urea.

*
* *

Cane di recente ucciso per dissanguamento. Circolazione artificiale attraverso i vasi femorali con sangue defibrinato diluito con tre volumi di soluzione fisiologica e con lo stesso sangue addizionato d'urea nella proporzione del 2 $^0/_{00}$ (2).

Cc. di sangue usciti dalla vena femorale nella stessa unità di tempo:

durante la circolazione con sangue puro	durante la circolazione con sangue addizionato d'urea
6-7,5-7,5-7,5-7,5	
	7,5-8-8-9-9-9-9
8,5-7,5-7,5-7-6,5-6,5	
	6,5-7-7

$$\text{coefficente di dilatazione } \frac{9}{7,5} = 1,20\ .$$

Questa esperienza dimostra che l'urea spiega sui vasi femorali un'azione locale dilatatrice minore di quella che spiega sui vasi renali.

*
* *

Cane di recente ucciso per dissanguamento. Circolazione artificiale attraverso i vasi femorali con sangue defibrinato diluito con tre volumi di soluzione fisiologica e con lo stesso sangue addizionato d'urea nella proporzione dell'8 $^0/_{00}$. Pressione sotto la quale si fanno le circolazioni artificiali eguale a 70 mm. Hg. (3).

Cc. di sangue usciti dalla vena femorale nella stessa unità di tempo:

durante la circolazione con sangue puro	durante la circolazione con sangue addizionato d'urea
16-20-22-22-22	
	22-36-41-41-41
33-25-22,5-18-16	

$$\text{coefficente di dilatazione } \frac{41}{22} = 1,86\ .$$

Questa esperienza dimostra che anche l'azione locale dilatatrice dell'urea sui vasi femorali cresce col crescere della dose dell'urea, rimanendo però inferiore a quella che l'urea spiega sui vasi renali.

(1) Cavazzani e Rebustello, loc. cit.
(2) Cavazzani e Rebustello, loc. cit.
(3) Cavazzani e Rebustello, loc. cit.

* * *

Cane del peso di kgr. 16, curarizzato: circolazione artificiale con sangue defibrinato, diluito con tre volumi di soluzione fisiologica, attraverso i vasi femorali, sotto la pressione di 70 mm. Hg. (1).

Cc. di sangue defibrinato usciti dalla vena femorale in un minuto:

prima della iniezione di urea nella grande circolazione	dopo la iniezione di 1 gr. di urea nella grande circolazione
95-91-91-91	54-54-44-40-40-40-52-69-75-76
	L'ultima misura è stata fatta 20 minuti dopo la iniezione dell'urea.

$$\text{coefficente di costrizione } \frac{91}{40} = 2,2 \,.$$

Questo esperimento dimostra che l'urea eccita il centro vaso-costrittore.

* * *

2. **Sangue dispnoico (e carbossidato).** — Dalle ricerche fatte col sangue dispnoico fu dimostrato che (2):

1°) il sangue dispnoico spiega un'*azione locale vasodilatatrice.*

Questo fatto fu dimostrato alternando, attraverso i vasi di cani appena uccisi, circolazioni artificiali con sangue defibrinato di bue normalmente ossigenato, e circolazioni artificiali con sangue defibrinato di bue, ridotto. La riduzione del sangue fu ottenuta spontaneamente, lasciando il sangue a sè per 24 ore alla temp. di 15°, oppure per mezzo del solfuro d'ammonio. Il sangue, prima di fare le circolazioni, veniva diluito con 3-4 volumi di soluzione fisiologica.

La sostituzione di sangue nero al sangue rutilante ha fatto aumentare l'efflusso attraverso i vasi degli arti posteriori e del capo, in media, come da 100 a 200 (3);

2°) il sangue dispnoico spiega un'azione centrale vasocostrittrice, non solo sui vasi dei visceri, ma anche su quelli della cute e dei muscoli.

Questo fatto fu dimostrato praticando la circolazione artificiale con soluzione fisiologica, sempre sotto la stessa pressione, attraverso i vasi femorali di cani viventi, profondamente curarizzati, e misurando l'efflusso della stessa mentre era fatta la respirazione artificiale e mentre questa era sospesa. In seguito alla sospensione della respirazione artificiale, l'efflusso dalla vena femorale diminuì, in media, come da 100 a 80.

(1) A. Cavazzani, *Dell'azione dell'urea sulle pareti dei vasi e sui centri vasomotori*, Archivio di scienze mediche, XV, an. 1891.

(2) A. Cavazzani, *Dell'azione dell'asfissia sui vasi cerebrali* (Archivio per le scienze mediche, XVI, an. 1892); G. Rebustello, *Dell'azione dell'asfissia sui vasi muscolo-cutanei*, ibid., XVI, 1892; A. Stefani, *Azione locale sui vasi muscolo-cutanei del sangue dispnoico e del sangue carbossidato*, Atti dell'Istituto veneto, LX, 1900; A. Stefani, *Azione locale della stricnina* etc. Atti dell' Istituto Veneto LXI, 1902.

(3) Questo aumento di efflusso non si può attribuire che a dilatazione vasale, perchè il sangue dispnoico ha un coefficente di traspirazione minore del sangue normalmente ossigenato.

Era cosa notoria che la dispnea eccitava il centro vasocostrittore producendo innalzamento della pressione del sangue, quando Heidenhain e Grützner [1] osservarono che durante la stessa, mentre si restringono i vasi viscerali, si dilatano i vasi cutanei. Questa osservazione fu confermata dallo Zuntz [2], e da Dastre e Morat [3]; e in base ad essa fu ammesso che il sangue dispnoico eccitasse contemporaneamente il centro costrittore dei vasi viscerali ed il centro dilatatore dei vasi muscolo-cutanei.

Essendo stato dimostrato che il sangue dispnoico, per mezzo della sua azione sui centri, produce la costrizione anche dei vasi muscolo-cutanei, le dilatazioni vasali, dimostrate dall' Heidenhain e da altri, durante la dispnea, non si possono evidentemente attribuire ad un antagonismo fra la innervazione dei vasi viscerali e la innervazione dei vasi muscolo-cutanei; e in base a quanto ho dimostrato sulla elasticità dei vasi, si dovrà invece ammettere che esse avvengono perchè i vasi muscolo-cutanei sono meccanicamente dilatati dalla aumentata pressione, e accolgono così il sangue scacciato dai vasi viscerali contratti. Simile dilatazione dei vasi muscolo-cutanei viene favorita dall'azione locale dilatatrice del sangue dispnoico.

Rispetto al significato fisiologico delle azioni opposte che spiega sui vasi lo stato dispnoico del sangue, a seconda che agisce sui vasi direttamente oppure per mezzo dei centri nervosi, posso dire solamente che l'azione locale vasodilatatrice della dispnea non può a meno di favorire la formazione del circolo collaterale (vedi Cap. VI).

Riporto alcune esperienze che dimostrano l'azione locale vasodilatatrice del sangue dispnoico e l'azione centrale vasocostrittrice dello stesso anche sui vasi muscolo-cutanei.

*
* *

2 maggio 1908; ore 15,30 [4]. — Cane del peso di kgr. 5, ucciso per dissanguamento. Sangue di bue defibrinato allungato con tre volumi di soluzione fisiologica, ridotto spontaneamente. Questo sangue, che era stato portato nel laboratorio il giorno precedente e collocato quindi in un sotterraneo, dove la temperatura non era salita al di sopra di 15°, non dava odore di putrefazione. Una parte di questo sangue fu sbattuta all'aria, finchè acquistò un bel colore rosso vivo; e l'altra, nera, fu lasciata in riposo. L'unica differenza, fra l'una e l'altra parte, consisteva quindi in ciò: che l'una era stata sbattuta all'aria e l'altra no. La circolazione artificiale attraverso l'arto posteriore destro cominciò alle ore 16, alternando il sangue rutilante col sangue nero, e misurando il deflusso dalla vena con intervalli di un minuto. Il passaggio dalla circolazione coll'uno alla circolazione coll'altro sangue, essendo abbondante l'efflusso, era fatto senza svuotare prima il tubo in comunicazione con l'arteria e riempirlo dell'altro sangue, e perciò senza interrompere la circolazione. Le circolazioni artificiali erano fatte sotto la pressione di 84 mm. Hg. e alla temperatura ambiente.

(1) Heidenhain und Grützner, *Beiträge zur Kenntniss der Gefässinervation.* Archivio di Pflüger, XVI, 1877.

(2) Zuntz, *Beiträge zur Kenntniss der Einwirkung der Athmung auf den Kreislauf.* Archivio di Pflüger, XVII, 1878.

(3) Dastre et Morat, *Influence du sang asphyxique sur l'appareil nerveux de la circulation* Archiv. d. physiol. norm. et pathol., an. 1884.

(4) A. Stefani, *Azione locale* etc.

In 30 secondi escono:

Circolazione con sangue ossigenato	Circolazione con sangue ridotto
cc. 22-20-17-14,5-14	
	cc. 14-20-22,5-22-19
15,5-8-5,5-5	
	6,5-11-11,5-10-12-12
9,5-5,5-5-3,5-3	

In questa esperienza la sostituzione del sangue dispnoico al sangue ossigenato nella circolazione artificiale aumentò l'efflusso, in media, come da 1 a 2.

* * *

16 aprile 1898; ore 15,30 [1]. — Cane del peso di kgr. 7, ucciso per dissanguamento. Sangue di bue defibrinato, diluito con 3 volumi di soluzione fisiologica, estratto dall'animale da circa 3 ore. Si mettono 5 litri di questo sangue in un vaso ed altrettanti in un'altro. Si riducono i primi trattandoli con alcuni centimetri cubi di soluzione di solfuro d'ammonio di recente preparato, e si sbattono gli altri all'aria finchè acquistano un bel colore rosso vivo. La circolazione artificiale attraverso l'arto posteriore destro incomincia alle 16,30, ma deve essere subito sospesa per guasti all'apparecchio. Si riprende alle 17,20. Pressione sotto la quale sono fatte le circolazioni artificiali: 80 mm. Hg.; temperatura ambiente.

Le misurazioni si fanno con l'intervallo di un minuto, e, prima di passare dalla circolazione con un sangue a quella coll'altro sangue, si vuota il tubo in congiunzione con l'arteria femorale, e lo si riempie col sangue con cui si fa la nuova circolazione.

In un minuto escono:

Circolazione con sangue ossigenato	Circolazione con sangue ridotto
goccie 45-35-30-25	
	goccie 29-33-45-50-55
56-48-36-25	

L'esperimento si sospende perchè l'arto è divenuto rigido ed edematoso.

La sostituzione del sangue dispnoico al sangue ossigenato è stata seguìta, anche in questa esperienza, da un aumento di efflusso, approssimativamente come da 1 a 2.

* * *

Cane curarizzato; respirazione artificiale; circolazione artificiale attraverso l'arto posteriore con soluzione fisiologica. Pressione sotto cui è fatta la circolazione artificiale: mm. Hg. 150; temperatura ambiente [2].

In un minuto escono dalla vena femorale:

Durante la respirazione artificiale	Mentre è sospesa la respirazione artificiale
cc. 111-120-125-124-125 il liquido è commisto a sangue	
	cc. 120-125-111-115 il liquido diventa incoloro
cc. 136-136-150-166 il liquido è di nuovo commisto a sangue	
	cc. 150-150-157-157 il liquido è ritornato incoloro

(1) A. Stefani, *Azione locale* etc.

(2) G. Rebustello, *Dell'azione dell'asfissia* etc.

Durante la sospensione della respirazione, in questa esperienza, l'efflusso della circolazione artificiale attraverso i vasi femorali diminuì come da 100 a 92 circa, e si arrestò il passaggio del sangue dalla circolazione generale nella circolazione artificiale.

*
* *

Cane curarizzato; respirazione artificiale; circolazione artificiale con soluzione fisiologica attraverso un arto posteriore; pressione sotto la quale viene fatta la circolazione artificiale, mm. Hg. 150; temperatura ambiente [1].

In un minuto escono dalla vena femorale:

Durante la respirazione artificiale	Mentre la respirazione artificiale è sospesa
cc. 70-75-79 il liquido è commisto a sangue	
	cc. 62-65-65 il liquido diventa incoloro
cc. 88-76-76 nel liquido ricompare il sangue	
	cc. 68-63,5-68 il liquido ritorna incolòro

In questa esperienza, durante la sospensione della respirazione, l'efflusso della circolazione artificiale diminuì, approssimativamente, come da 100 a 82, e si arrestò il passaggio del sangue dalla circolazione generale nella circolazione artificiale, come nell'esperienza precedente.

È da deplorarsi che esperienze così semplici e dimostrative non siano possibili rispetto ai vasi cerebrali, perchè con esse si risolverebbe il problema relativo alla innervazione di questi vasi, negata da parecchi autori.

*
* *

Il sangue carbossidato, carico cioè di CO, non costituisce uno stimolo fisiologico; ma credo bene di riferire anche i risultati delle ricerche fatte sull'azione vosomotoria locale di questo sangue, dopo di aver riferito quelli delle ricerche fatte sull'azione vasomotoria locale del sangue dispnoico, perchè da qualche sperimentatore [2] fu attribuita al sangue carbossidato una azione vasomotoria locale diversa da quella che risulterebbe dalle mie esperienze.

Il metodo seguìto in queste ricerche fu quello stesso che ho seguìto nelle precedenti: ho sottoposto cioè i vasi femorali, di cani da poco uccisi, a circolazioni artificiali alternate, con sangue defibrinato di bue sbattuto all'aria e quindi bene ossigenato e con sangue di bue, egualmente defibrinato, attraverso il quale avevo fatto passare, per $^1/_2$ ora circa, una corrente di CO; ed ho misurato l'efflusso delle une e delle altre nella unità di tempo. Simili circolazioni erano fatte sotto la stessa pressione e alla stessa temperatura.

Da queste ricerche è risultato che *il sangue carbossidato spiega sui vasi una azione locale costrittrice, opposta quindi a quella del sangue dispnoico.* La diminuzione dell'efflusso del sangue carbossidato è stata, in media, come da 100 a 40.

Riportasi la esperienza che segue.

(1) G. Rebustello, loc. cit.

(2) Mosso, *La respirazione nelle gallerie e l'azione dell'ossido di carbonio.* Milano, 1900, pp. 297 e seg.

*
* *

28 giugno 1898; ore 15,30 (¹). — Cane del peso di kgr. 8, ucciso per dissanguamento. Sangue di bue defibrinato, diluito con quattro volumi di soluzione fisiologica e ridotto spontaneamente come nell'esperienza precedente. La circolazione artificiale incomincia alle ore 16. Anche in questa esperienza il passaggio dall'una all'altra circolazione avviene senza interruzione, e le misurazioni dell'efflusso si fanno coll'intervallo di un minuto.

Pressione 50 mm. Hg. Temperatura ambiente. In 30 secondi escono dalla vena:

Circolazione con sangue ossigenato	Circolazione con sangue ridotto
cc. 23-15-14-12-10-9-9 il sangue esce nero	
	la prima misurazione è fatta tre minuti dopo che la circolazione con questo sangue era cominciata cc. 18-22-20-19-20-19
la prima misurazione è fatta due minuti dopo ecc. cc. 11,5-7,5-6-5-4-5 il sangue esce nero	
	la prima misurazione è fatta un minuto dopo ecc. cc. 5,5-6-8,5-9-9-8-9
la prima misurazione è fatta tre minuti dopo ecc. cc. 6-4-3-3	
	la prima misurazione è fatta due minuti dopo ecc. cc. 2,5-2,5-3-4-4,5-5-6.
la prima misurazione è fatta due minuti dopo ecc. cc. 6-5,5-4-3,5-3 il sangue esce nero	

Alle 16,45 si sospende la circolazione. Il sangue ossigenato viene di nuovo sbattuto all'aria, finchè riacquista il colore rosso vivo che aveva in parte perduto, e attraverso il sangue ridotto (5 litri circa) si fanno passare lentamente 15 litri di CO di recente preparato.

Alle 17,15 si ricominciano le circolazioni artificiali.

Pressione 70 mm. Hg. Temperatura ambiente. In 30 secondi escono dalla vena:

Circolazione con sangue ossigenato	Circolazione con sangue carbossidato
la prima misurazione è fatta cinque minuti dopo che la circolazione era cominciata cc. 8,5-8,2-8-7,5-7	
	la prima misurazione è fatta un minuto dopo ecc. cc. 6-2,5-2-2
la prima misurazione è fatta cinque minuti dopo ecc. cc. 4,5-5,2-5	
	la prima misurazione è fatta subito. cc. 4,5-2,5-2-2
la prima misurazione è fatta un minuto dopo ecc. cc. 1,5-2,5-3-3,5.	

L'esperienza cessa alle 17,45.

In questa esperienza, nel passaggio dalla circolazione con sangue ossigenato alla circolazione con sangue spontaneamente ridotto, si ebbe un aumento dell'efflusso da 1 a 2 all'incirca, come nelle esperienze precedenti; e nel passaggio dalla circolazione con sangue ossigenato a quella con sangue carbossidato, si ebbe invece una diminuzione dell'efflusso come da 1 a $^1/_3$ circa.

(¹) A. Stefani, *Azione locale sui vasi muscolo-cutanei del sangue dispnoico e del sangue carbossidato.* Atti dell'Istituto veneto, LX, 1900.

***

3. **Sali biliari e bile.** — Nel 1909, il mio aiuto A. Berti studiò metodicamente l'azione vasomotoria locale, centrale e reflessa dei sali biliari e della bile, che, se normalmente non circolano nel sangue, circolano però in esso in certe condizioni patologiche ([1]).

I risultati ottenuti dal Berti sono i seguenti:

A) Rispetto all'azione locale:

il glicocolato di soda, a dose inferiore a 0,75 ‰, fa aumentare l'efflusso delle circolazioni artificiali con soluzione fisiologica, praticate attraverso i vasi di animali di recente uccisi; ed a parità di condizioni, l'aumento dell'efflusso è maggiore quando la circolazione artificiale è fatta attraverso i vasi epatici;

il glicocolato di soda, a dose superiore a 0,75 ‰, anzichè un'aumento, produce una diminuzione dell'efflusso delle circolazioni artificiali, la quale aumenta coll'aumentare della dose.

B) Rispetto all'azione centrale:

il glicocolato di soda, in qualunque dose, iniettato in circolo, produce pronto e notevole abbassamento della pressione arteriosa ed aumento nell'efflusso delle circolazioni artificiali praticate attraverso i vasi femorali.

C) Rispetto all'azione reflessa:

il glicocolato di soda, fatto circolare attraverso i vasi femorali mediante circolazioni artificiali, non produce mutamenti della pressione arteriosa.

Risultati analoghi a quelli del glicocolato furono ottenuti dalla bile; solamente, in questo caso la dose doveva essere più elevata.

In base a questi risultati il Berti ha concluso: che il glicocolato di soda e la bile, a piccola dose, spiegano sui vasi un'azione locale diretta dilatatrice, la quale nei vasi epatici è maggiore in confronto agli altri vasi; che il glicocolato di soda e la bile, a dose più elevata, spiegano sui vasi un'azione diretta costrittrice; che il glicocolato di soda e la bile abbassano il tono dei vasi, paralizzando il centro vasocostrittore; che il glicocolato di soda e la bile non spiegano azioni vasomotorie reflesse.

L'azione locale dilatatrice del glicocolato e della bile sui vasi epatici è, secondo il Berti, in relazione colla secrezione biliare, come l'azione locale dilatatrice dell'urea sui vasi renali è in relazione con la secrezione urinaria.

L'abbassamento della pressione del sangue, prodotto dalla bile e dal glicocolato, fu dal Berti attribuito a paralisi del centro vasocostrittore, e tale conclusione egli potè confermare per mezzo di circolazioni artificiali. Però non si può escludere che, a produrre il detto abbassamento, concorra anche una diminuzione dell'attività del cuore.

([1]) A, Berti, *Azione della bile iniettata nella circolazione sanguigna sul lume dei vasi e sulla pressione arteriosa.* Atti dell'Istituto veneto, LXVIII, 1909.

***

4. **Temperatura.** — Interessava di sottoporre a metodiche ricerche l'azione vasomotoria della temperatura, perchè, mentre fisiologi e clinici si accordano nel riconoscere nella temperatura uno dei principali stimoli vasomotorî, molte incertezze regnano ancora rispetto al modo di agire di essa, in causa di osservazioni apparentemente contradittorie.

Mentre, p. es., è notorio che le applicazioni calde sulla cute fanno dilatare i vasi rispettivi, i chirurghi riconoscono nelle irrigazioni calde il migliore emostatico; e mentre è notorio che le applicazioni fredde producono costrizione dei vasi cutanei, è pure notorio che sotto l'azione del freddo questi vasi si dilatano, e la cute si arrossa.

Azione vasomotoria locale. — Per dimostrare l'azione vasomotoria locale della temperatura, nel 1892, il mio assistente, A. Lui [1], fece delle circolazioni artificiali con soluzione fisiologica di temperatura più alta e di temperatura più bassa, sotto la stessa pressione, attraverso vasi di animali appena uccisi.

Da queste ricerche fu dimostrato che il passaggio dalla circolazione artificiale con soluzione fisiologica della temp. di 35° alla circolazione artificiale con soluzione fisiologica della temp. di 45° era seguìto da diminuzione dell'efflusso, e quindi da costrizione vasale; e rispettivamente che il passaggio dalla circolazione artificiale con soluzione della temp. di 45° alla circolazione con soluzione della temp. di 35° era seguito da aumento dell'efflusso e quindi da dilatazione vasale. E in base a questi risultati il Lui concluse che l'innalzamento della temperatura spiega sui vasi una azione diretta costrittrice, e che l'abbassamento della stessa spiega invece su di essi un'azione locale dilatatrice.

I fatti osservati dal Lui sono perfettamente conformi al vero; ma essi non autorizzavano la conclusione che egli ne trasse, perchè non era dimostrato se i gradi intermedii fra 35° e 45° agissero tutti nello stesso modo.

Ciò considerando, A. Berti [2], nel 1910, sottopose i vasi femorali di cani, appena uccisi, a circolazioni artificiali con soluzione fisiologica di temperatura progressivamente crescente e decrescente, e misurò l'efflusso delle stesse a brevi e regolari intervalli di tempo, e con esso misurò anche la temperatura del liquido che usciva dalla vena. Mediante la misura della temp. del liquido che usciva dalla vena, il Berti superò felicemente, e nel modo più semplice, le difficoltà che si incontravano per determinare, con sufficiente esattezza, la temperatura del liquido circolante nei vasi.

Da queste ricerche del Berti è risultato che:

1°) esiste un *optimum* di temperatura per la dilatazione vasale, e questo *optimum* è dato dalla temperatura interna dell'animale, e più precisamente da una temperatura di 1-2 gradi ad essa superiore;

[1] A. Lui, *Dell'azione locale della temperatura sui vasi sanguigni*. Rivista veneta di scienze mediche, 1893.

[2] A. Berti, *Dell'azione locale della temperatura sui vasi sanguigni* (Atti della Accademia dei Lincei, XIX, 1910); *Temperatura e calibro vasale* (La clinica medica italiana. Milano, Vallardi, 1911).

2°) a partire da questo *optimum*, i vasi si restringono, sia che la temperatura si elevi e sia che si abbassi;

3°) quando la temperatura si eleva sopra l'*optimum*, si verifica una costrizione rapida e notevole, mentre quando si abbassa al di sotto dell'*optimum*, la costrizione è lenta e di grado molto minore;

4°) i vasi si allargano quando la temperatura discende verso l'*optimum* da un grado superiore, e quando sale verso l'*optimum* da un grado inferiore;

5°) la massima costrizione dei vasi si verifica alla temperatura di circa 45°;

6°) la costrizione prodotta da una temperatura a questa superiore non scompare, quando si abbassa la temperatura del liquido circolante.

Secondo questi risultati, in forza dell'azione locale diretta della temperatura sui vasi, ad ogni determinata temperatura del sangue dovrebbe corrispondere un determinato lume vasale. Il lume dei vasi sarebbe massimo alla temperatura di 1°-2° al di sopra della temp. interna, e, partendo da essa, si restringerebbe rapidamente quando la temperatura aumenta, e si restringerebbe gradatamente quando la temperatura diminuisce.

L'importanza di questi risultati non ha bisogno di essere dimostrata; e, in base ad essi, i precedenti risultati del Lui si devono spiegare ammettendo che la dilatazione vasale, nel passaggio dalla temp. di 45° a quella di 35°, dipendesse dalla scomparsa della costrizione prodotta dalla temp. di 45°; e, rispettivamente, che la costrizione, nel passaggio dalla temp. di 35° a quella di 45°, dipendesse dall'azione costrittrice propria di questa temperatura, e non da un'azione costrittrice dovuta all'innalzamento, in genere, della temperatura.

I risultati del Berti confermano le osservazioni antiche, che i vasi cutanei si dilatano in seguito alle applicazioni calde e si restringono in seguito alle fredde; e in base ad essi si deve ammettere che le costrizioni vasali, mediante le irrigazioni calde, si ottengano solo quando la temperatura di queste raggiunge i 45°. E di fatto, per ottenere queste costrizioni, il liquido con cui la irrigazione vien fatta deve produrre sulla pelle una sensazione dolorosa di caldo. Le dilatazioni vasali che si verificano sotto l'azione del freddo, secondo questi risultati del Berti, sono da considerarsi come effetto di paralisi vasali, e, di fatto, esse si verificano solo in seguito ad azione prolungata del freddo e si accompagnano con stasi circolatoria; mentre le dilatazioni vasali prodotte dal caldo, che si accompagnano a maggiore rapidità di circolo, sono da considerarsi come dilatazioni attive.

Il fatto che, secondo le osservazioni del Berti, la costrizione vasale si produce per azione diretta sui vasi tanto delle alte quanto delle basse temperature, induce naturalmente a pensare che l'elemento su cui agisce l'alta temperatura sia diverso da quello su cui agisce la bassa; ed appoggia per conseguenza la dottrina di Biedermann e Bottazzi, secondo la quale, oltre alle fibrille, si contrae anche il sarcoplasma delle fibre muscolari. Questa dottrina trova appoggio anche nel fatto che la contrazione vasale prodotta dal caldo è rapida, mentre quella prodotta dal freddo è lenta, perchè, secondo la stessa, rapida è la contrazione delle fibrille e lenta quella del sarcoplasma.

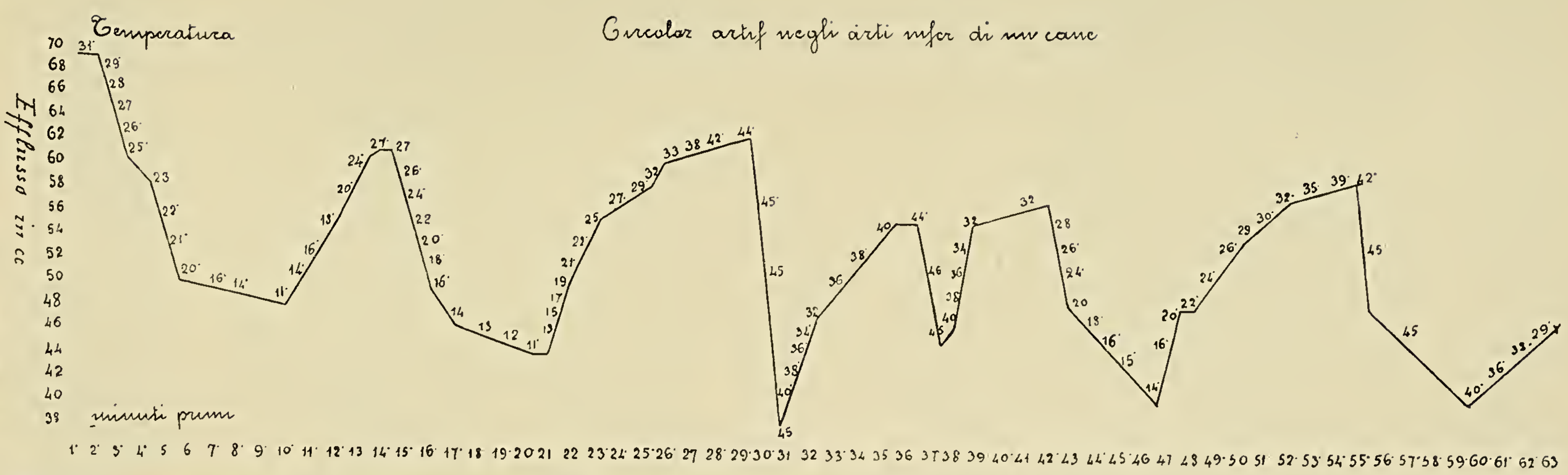


Fig. 64. — Grafica costruita mediante le quantità di efflusso di circolazioni artificiali attraverso gli arti posteriori di un grosso cane nella unità di tempo a temperature diverse, alternativamente crescenti e decrescenti. I numeri disposti lungo la linea verticale, a sinistra, indicano l'efflusso in cc. durante un periodo di 20″; i numeri disposti lungo la linea orizzontale, in basso, indicano i minuti primi trascorsi dal principio dell'esperienza; i numeri disposti lungo la curva indicano la temperatura del liquido circolante.

Le costrizioni vasali, permanenti ad onta dell'abbassamento successivo della temperatura, che si verificano quando la temp. oltrepassa i 46°-47°, sono da attribuirsi, secondo il Berti, a rigidità, e quindi a morte della tonaca muscolare dei vasi.

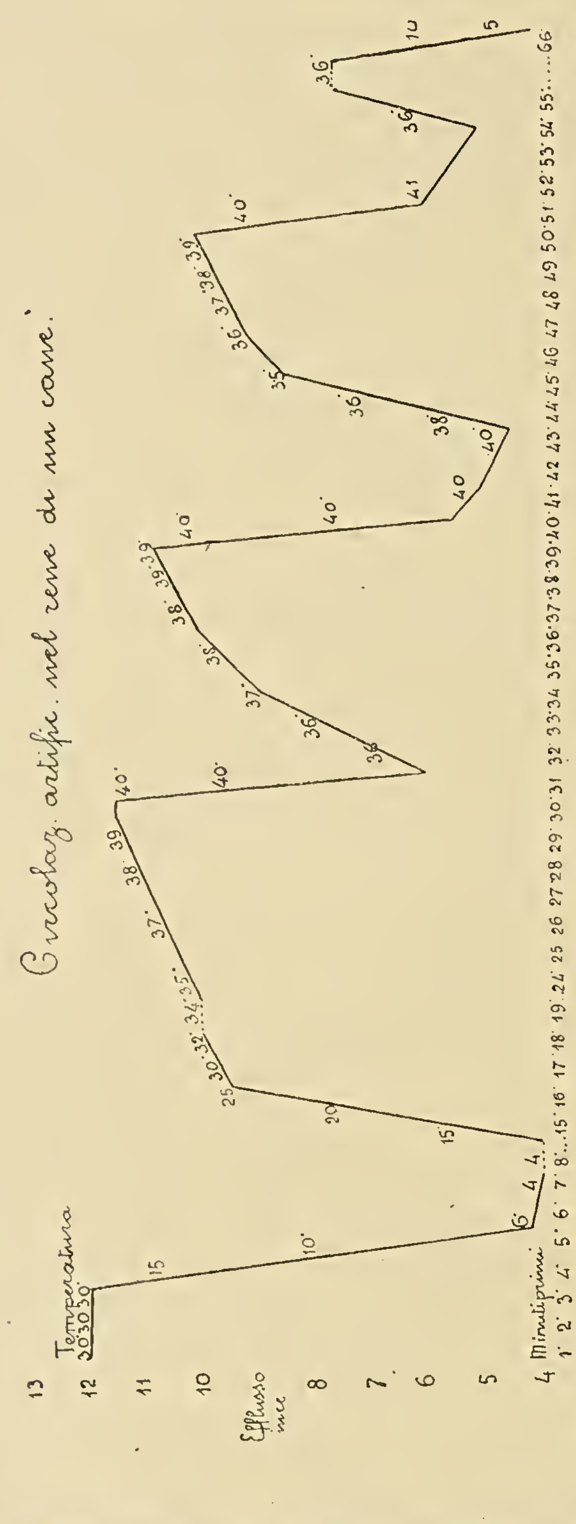


Fig. 65. — **Grafica costruita come la precedente mediante l'efflusso, nell'unità di tempo, di circolazioni artificiali di temper. alternativamente crescente e decrescente. In questo esperimento le circolazioni erano fatte attraverso il rene di grosso cane. I numeri lungo le linee verticale ed orizzontale e lungo la curva hanno lo stesso significato come nella figura precedente.**

Riporto dai lavori del Berti due grafiche rappresentanti l'andamento di due esperienze nelle quali la circolazione artificiale, a temperatura progressivamente crescente e decrescente, era fatta, nell'una, attraverso gli arti posteriori e nell'altra attraverso il rene di grossi cani (figg. 64, 65).

A z i o n e v a s o m o t o r i a r i f l e s s a. — L'azione vasomotoria riflessa della temperatura [1] fu ricercata alternando rapidamente circolazioni artificiali attraverso i vasi degli arti posteriori di animale vivente, sotto la stessa pressione, di soluzione fisiologica a temperatura più elevata e di soluzione fisiologica a temperatura più bassa, ed osservando se il passaggio dall'una all'altra era seguìto da mutamenti nell'altezza del manometro innestato nella carotide. I cani adoperati per queste esperienze erano curarizzati, e quindi mantenuti in vita con la respirazione artificiale.

Le esperienze sono state numerose e tutte concordi nel dimostrare che nè il passaggio dalle circolazioni a bassa temperatura alle circolazioni di temperatura più elevata, nè il passaggio da queste a quelle, quando le dette temperature non eccedevano soverchiamente i limiti fisiologici, erano seguìti da mutamenti nell'altezza della pressione arteriosa, e che l'altezza di questa pressione si elevava quando la temperatura dei liquidi circolanti eccedeva notevolmente i detti limiti, sia in più e sia in meno. Tanto le irrigazioni troppo calde quanto le irrigazioni troppo fredde hanno prodotto, in questi casi, egualmente, innalzamento della pressione arteriosa.

In base a questi risultati, credo di poter concludere che i mutamenti di temperatura, non troppo lontani della temperatura interna, quali si possono verificare nel sangue circolante, non agiscono sui vasi provocando azioni riflesse vasomotorie.

La vasocostrizione prodotta dalle temperature del liquido circolante, che oltrepassano notevolmente i limiti fisiologici, è da considerarsi, a mio avviso, come un riflesso da dolore, prodotto dai nervi sensitivi degli organi circostanti, sulle cui terminazioni non può a meno di trasmettersi l'azione della temperatura del liquido circolante nei vasi, e non come un reflesso specifico da caldo o da freddo.

Durante le esperienze in cui la sostituzione del liquido circolante a temperatura bassa con liquido a temperatura più elevata, e rispettivamente, non produceva mutamenti della pressione sanguigna, ho sempre osservato che le irritazioni cutanee, dell'arto sottoposto alla circolazione, mediante la compressione, l'acqua calda, 55°-60°, ed il ghiaccio, producevano riflessi vasomotorî; e perciò non può essere messa in dubbio la attitudine dell'arto, attraverso il quale era fatta la circolazione artificiale, di produrre riflessi vasomotori.

Siccome poi anche le oscillazioni di temperatura, del liquido circolante nei vasi, non molto lontane dai limiti fisiologici non possono a meno di agire anche sulle terminazioni dei nervi sensitivi di tutto l'arto, così, in base a queste esperienze, non solo si deve escludere che la temperatura produca riflessi vasomotori specifici agendo sulla parete interna dei vasi, ma è anche da dubitare se la temperatura possa produrre riflessi vasomotorî specifici per mezzo dei nervi sensitivi della cute e dei muscoli.

A titolo d'esempio riporto la seguente esperienza [2]:

[1] A. Stefani, *Dell'azione vasomotoria reflessa della temperatura*. Atti dell'Istituto Veneto, tomo VI, 1895.

[2] A. Stefani, *Dell'azione vasomotoria riflessa della temperatura*. Atti dell'Istituto veneto, tom. VI, an. 1895.

*
* *

22 dicembre 1894. — Cane del peso di kgr. 15, curarizzato e mantenuto in vita con la respirazione artificiale. Circolazione artificiale nell'arto posteriore destro con soluzione fisiologica sotto la pressione di 100 mm. Hg. alternativamente della temperatura di 35° e di 45°. Ogni circolazione

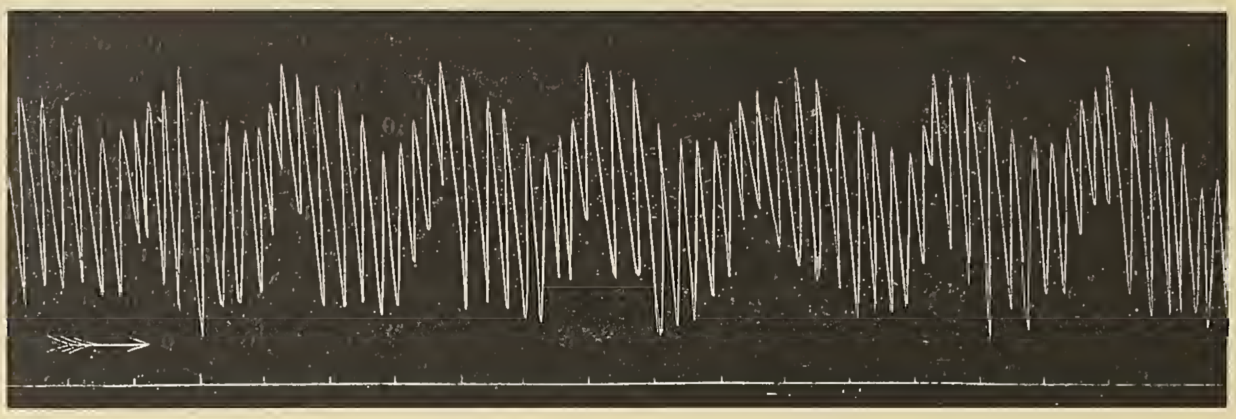


Fig. 66. — Pressione del sangue nella carotide segnata da manometro a mercurio. Il tracciato incomincia subito dopo che alla circolazione artificiale, nell'arto posteriore destro, con soluzione fisiologica della temp. di 35°, si era sostituita circolazione con soluzione fisiologica della temp. di 45°.

dura 2-4 minuti. Manometro nel moncone centrale della carotide sinistra. Il tracciato, riprodotto dalla fig. 66, dimostra che la sostituzione, nella circolazione artificiale, della soluzione fisiologica

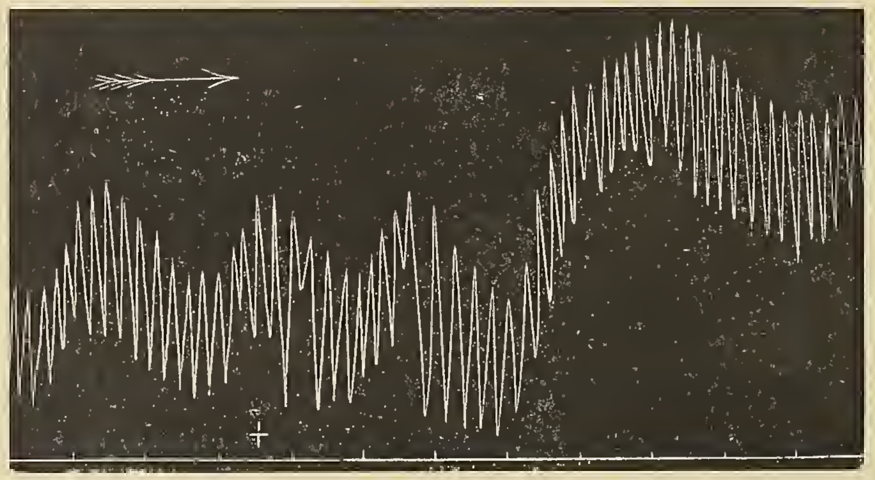


Fig. 67. — Continuazione del tracciato precedente. In + si applica sulla cute dell'arto sottoposto alla circolazione artificiale una spugna bagnata con acqua della temp. di 55°.

avente la temp. di 35°, con soluzione fisiologica avente la temp. di 45°, non ha modificato affatto la pressione arteriosa.

Dopo di avere ottenuto il detto tracciato, l'applicazione, sull'arto stesso, di una spugna, bagnata con acqua della temp. di 55°, produsse un notevole e pronto aumento della pressione arteriosa. (fig. 67).

Azione vasomotoria centrale. — Per dimostrare l'azione della temperatura sul centro bulbare vasocostrittore, ho praticato delle irrigazioni sul bulbo, messo allo scoperto mediante l'apertura della membrana atlanto occipitale, con soluzione fisiologica della temp. di 45-50°; ed ho osservato se e come, in seguito ad esse, si modificasse la pressione arteriosa registrata da un manometro a mercurio, innestato nella carotide.

Da queste ricerche, pubblicate nel 1895 (1), fu dimostrato che le dette irrigazioni producevano pronto e notevole innalzamento della pressione arteriosa, il quale si manifestava specialmente se i vaghi erano stati in precedenza tagliati e si impediva così il rallentamento dei battiti cardiaci, dipendente dalla eccitazione termica, contemporanea, del centro bulbare inibitore dei movimenti del cuore Allorquando incomincia questo rallentamento, la pressione si abbassa e può discendere anche al di sotto del grado iniziale (fig. 60-61) (2).

Queste esperienze dimostrano evidentemente che l'innalzamento della temperatura eccita il centro vaso-costrittore del midollo allungato.

Riassumendo, dalle ricerche sopraindicate sull'azione vasomotoria della temperatura risulta:

1°) Rispetto all'azione locale:

che i vasi si trovano in istato di massima dilatazione, quando il liquido in essi circolante ha una temperatura eguale o poco superiore alla temperatura interna dell'animale;

che a partire da questo grado di temperatura, che rappresenta l'*optimum* per la dilatazione, producono costrizione tanto le temperature più elevate quanto le temperature più basse. Le temperature più elevate producono costrizioni rapide e notevoli; le temperature più basse producono invece costrizioni lente e progressive. Le temperature di 47-48° producono costrizione massima, che non cessa quando la temperatura si abbassa, e deve quindi considerarsi come effetto di rigidità.

2°) Rispetto all'azione riflessa:

che le variazioni di temperatura, entro limiti, dirò così, fisiologici, del liquido circolante nei vasi, non producono riflessi vasomotorî, e che le variazioni di temperatura al di là di questi limiti, sia in più e sia in meno, producono solamente costrizione vasale, la quale deve essere considerata come un riflesso doloroso, promosso dai nervi sensitivi degli organi circostanti.

3°) Rispetto all'azione centrale:

che l'aumento della temperatura eccita direttamente il centro bulbare vasocostrittore, nello stesso tempo che eccita il centro bulbare inibitore dei movimenti del cuore.

* * *

5. Pressione del sangue. — In rapporto all'azione vasomotoria della pressione del sangue, interessava specialmente di conoscere se l'aumento e la diminuzione della

(1) A. Stefani, *Azione della temperatura sui centri bulbari del cuore e dei vasi.* Atti del Reale Istituto veneto, tom. VI, an. 1895.

(2) Vedi parte prima, Cuore, cap. VII: *Eccitazione termica del centro bulbare inibitore dei movimcnti del cuore.*

stessa spiegavano azioni vasomotorie in via riflessa, perchè Latschenberg e Dehana [1] aveano ammesso che i vasi fossero eccitati dall'abbassamento della pressione, e che simile eccitazione producesse in via reflessa costrizione vasale, in forza della quale la pressione si rialzava regolandosi così da sè stessa (*dottrina dell'autogoverno della pressione del sangue*).

Per dimostrare se i mutamenti della pressione del sangue potevano spiegare azioni vasomotorie reflesse, ho sottoposto i vasi femorali di cani viventi e curarizzati a circolazioni artificiali con soluzione fisiologica, come nelle ricerche precedenti; ed ho osservato se i mutamenti della pressione, sotto la quale la circolazione artificiale veniva praticata, determinavano mutamenti della pressione del sangue, registrata da un manometro innestato nella carotide [2].

Queste ricerche hanno concordemente dimostrato che nessun mutamento si verifica nella pressione del sangue, neppure se la pressione, sotto cui è fatta la circolazione artificiale, discende repentinamente da 100 mm. Hg. a zero. E perciò, in base alle stesse, credo di poter concludere che i mutamenti della pressione del sangue non producono fenomeni vasomotorî riflessi.

Non ho fatto ricerche sulla azione vasomotoria centrale della pressione del sangue, e rispetto all'azione vasomotoria locale non posso dire più di quanto ho detto nel trattare dell'azione fisica della pressione sui vasi.

Riporto in esteso un'esperienza che dimostra la mancanza di azione vasomotoria riflessa da parte della pressione del sangue.

16 giugno 1894. Cane curarizzato, del peso di kgr. 8; respirazione artificiale; vaghi integri; arteria iliaca primitiva destra legata; circolazione artificiale, con soluzione fisiologica della temperatura dell'ambiente, sotto la pressione di 140 mm. Hg., nel campo dell'arteria femorale destra.

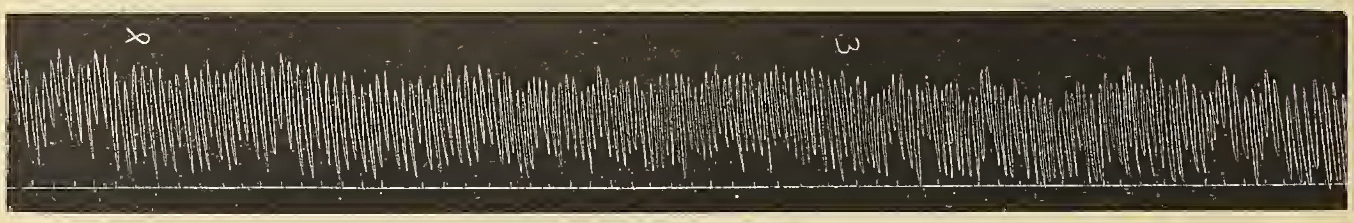


Fig. 68. — Cane curarizzato; respirazione artificiale; tracciato della pressione aortica ottenuto per mezzo del manometro a mercurio, innestato nella carotide sinistra; circolazione artificiale nell'arto posteriore destro sotto la pressione di 140 mm. Hg.; in α si sospende la circolazione artificiale ed in ω si riprende.

Si ottiene il tracciato (fig. 68) della pressione aortica, mentre la circolazione artificiale procede regolarmente sotto la pressione di 140 mm. Hg. In α la circolazione artificiale viene improvvisamente sospesa per chiusura del rubinetto, e in ω viene riattivata per riapertura del medesimo; ed il tracciato dimostra che l'altezza della pressione sanguigna e la frequenza dei battiti cardiaci si mantennero inalterate per la sospensione e per il riattivamento della circolazione artifi-

[1] Latschenberg und Dehana, *Beiträge zur Lehre von den reflectorischen Erregungen der Gefässmuskeln*. Archivio di Pflüger, XII, an. 1876.

[2] A. Stefani, *Azione della pressione arteriosa sui vasi e sul cuore*. Atti del Reale Istituto veneto, tom. VII, an. 1896.

ciale, e quindi per il passaggio repentino da una pressione, nell'arteria femorale, da 140 mm. Hg. a 0, e rispettivamente.

Si ottiene un secondo tracciato (fig. 69) della pressione aortica, mentre la circolazione artificiale procede regolarmente sotto la pressione di 140 mm. Hg. Nel momento α si chiude il tubo di efflusso della vena femorale, e nel momento ω si riapre. Il tracciato ottenuto dimostra che

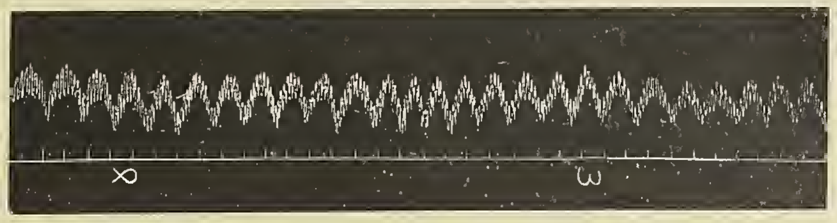


Fig. 69. — Continuazione della esperienza precedente. In α si chiude il tubo di efflusso della vena femorale, ed in ω si riapre.

nessun mutamento, nè della pressione aortica nè della frequenza cardiaca, si verificò in seguito alla chiusura e riapertura del tubo di efflusso della circolazione artificiale.

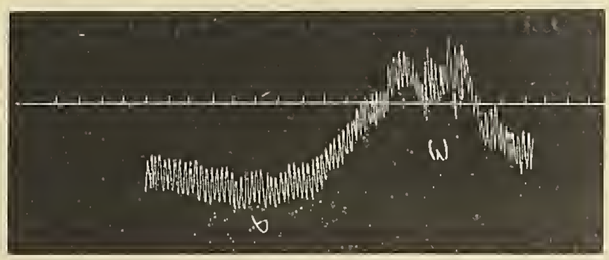


Fig. 70. — Continuazione della stessa esperienza. In α si applica, sull'arto sottoposto alla circolazione artificiale, una spugna bagnata d'acqua della temp. di 55°, e in ω la detta spugna viene levata.

Si ottiene un terzo tracciato (fig. 70) della pressione aortica, mentre la circolazione artificiale continua a compiersi regolarmente sotto la pressione di 140 mm. Hg. Nel momento α si applica sulla cute dell'arto relativo una spugna bagnata con acqua della temp. 55° circa; e nel momento ω si leva la spugna. Il tracciato ottenuto dimostra che, subito dopo l'applicazione della spugna la pressione aortica si elevò bruscamente di circa 30 mm. Hg.

CAPITOLO V.

Dimostrazione di nervi vasomotorii per mezzo delle circolazioni artificiali.

Ho già detto che per mezzo delle circolazioni artificiali, attraverso organi di animali di recente uccisi, si possono dimostrare i nervi vasomotorî degli organi stessi. Se l'efflusso della circolazione artificiale, praticata sempre sotto la stessa pressione e temperatura, diminuisce in seguito alla stimolazione di un dato nervo, si può concludere che questo nervo contiene fibre costrittrici per i vasi rispettivi; e se aumenta, si concluderà invece che esso contiene fibre dilatatrici.

Questo metodo è molto opportuno per la ricerca dei nervi vasomotorî dei visceri, potendo essere usato sopra animali di recente uccisi; e a tale scopo fu usato con profitto dai miei allievi, i fratelli Cavazzani e G. Manca.

A. Cavazzani ([1]) dimostrò, con esso, che nel coniglio il vago cervicale contiene fibre costrittrici e dilatatrici per i vasi dell'arteria polmonare, e che nel cane la stimolazione del vago-simpatico produce dilatazione dei detti vasi.

E. Cavazzani e G. Manca ([2]) dimostrarono che lo splancnico contiene fibre costrittrici per la vena porta, e che il vago contiene fibre costrittrici per l'arteria epatica e fibre dilatatrici per la vena porta, e che il plesso celiaco contiene fibre dilatatrici per l'arteria epatica. Secondo questi risultati, la innervazione della porta sarebbe distinta da quella dell'arteria epatica.

Il François-Frank ([3]), cercando, con altro metodo, la innervazione vasomotoria del fegato, riuscì a risultati conformi a quelli dei miei allievi.

CAPITOLO VI.

Della circolaziore collaterale.

Una delle più mirabili manifestazioni del potere regolatore degli esseri organizzati è, senza dubbio, la formazione del circolo collaterale; per cui, in seguito alla chiusura di un'arteria, il sangue continua ad affluire agli organi rispettivi nella quantità primitiva, benchè le vie, attraverso le quali esso deve passare, siano notevolmente più strette e più lunghe.

La circolazione collaterale si deve distinguere in quella che si verifica poco dopo la chiusura dell'arteria e che il Bier ([4]) indica col nome di *circolazione collaterale preliminare*, e in quella che si verifica parecchio tempo dopo la detta chiusura, quando si sono ipertrofizzati i vasi anastomotici, e che il Bier indica col nome di *circolazione collaterale definitiva.*

Si capisce come, avvenuta la ipertrofia dei vasi anastomotici e l'allargamento quindi delle vie di comunicazione, il sangue possa affluire agli organi nella quantità normale per opera degli ordinarii fattori della circolazione, senza bisogno dell' intervento di altri; e si capisce pure come nuovi fattori, oltre a quelli che determinano l'ordinaria circolazione, siano invece necessarî perchè il sangue possa arrivare agli organi in normale quantità per vie più lunghe e più strette. La ricerca di questi nuovi fattori, che intervengono per formare la circolazione collaterale preliminare, è evidentemente còmpito della fisiologia ([5]).

([1]) A Cavazzani, *Della innervazione vasomotrice dei polmoni.* Rivista veneta di scienze mediche an. 1891.

([2]) Cavazzani e Manca, *Contributo allo studio della innervazione del fegato: i nervi vasomotorî delle diramazioni portali epatiche* (Archivio per le scienze mediche, XVIII, an. 1894); idem, *Ulteriore contributo allo studio della innervazione del fegato: i nervi vasomotorî dell'arteria epatica* (Archivio per le scienze medediche XIX, an. 1895).

([3]) François-Frank, *Recherches expérimentales sur l'innervation vasomotrice du foie.* Archiv. de physiol. norm. et pathol., an. 1896.

([4]) A. Bier, *Die Entstehung der Collateralkreislauf.* Archivio di Virchow, Bd. 147, an. 1897.

([5]) Come lo studio del circolo collaterale preliminare è di spettanza della fisiologia, così lo

Per ispiegare la formazione del circolo collaterale preliminare, si invocarono cause meccaniche, e precisamente l'innalzamento della pressione del sangue nei rami che partono dall'arteria prima della chiusura, e l'abbassamento della pressione nei rami al di là della chiusura. [1]. Ma queste non possono essere le cause del circolo collaterale preliminare, perchè l'aumento della pressione, in seguito alla chiusura di un'arteria, in conformità alle leggi generali dell'idrodinamica, si verifica uniformemente in tutto l'albero circolatorio, e non solamente, o a preferenza, nei rami che partono dall'arteria chiusa prima del punto di chiusura [2], e dura, al massimo, un minuto circa, quando si tratta di arterie grosse, come la carotide e la femorale [3]: e perchè l'abbassamento della pressione, nei rami al di là della chiusura, se costituisce una diminuzione di ostacoli, non può costituire una forza capace di far passare per i rami anastomotici, tutto il sangue che prima arrivava agli organi per le vie ordinarie.

Vista la insufficienza delle spiegazioni meccaniche, si è pensato all'intervento di azioni nervose.

Latschenberg e Dehana [4] ammisero che la diminuzione della pressione, nel territorio vascolare dipendente dall'arteria chiusa, producesse delle eccitazioni le quali, in via reflessa, determinassero la dilatazione dei vasi anemizzati; e questo concetto, nelle sue linee fondamentali, fu accolto dallo Zuntz [5], il quale, a differenza di Latschenberg e Dehana, ammise che le eccitazioni nel territorio anemizzato fossero prodotte dalla mancanza di O^2, anzichè dalla diminuzione della pressione.

Me se le esperienze di questi autori autorizzavano le loro conclusioni, esse non erano però pienamente dimostrative; e il Talma [6] istituì perciò nuove ricerche, in base ai risultati delle quali egli concluse escludendo l'intervento di azioni nervose nella formazione del circolo collaterale.

---

studio del circolo collaterale definitivo è di spettanza della anatomia, ed è doveroso di ricordare in proposito il lavoro magistrale dei Porta: *Esame anatomico del sistema arterioso dell'arto inferiore, ventidue anni dopo la legatura dell'arteria femorale per aneurisma* (Milano, 1847).

(1) L'aumento della pressione nei rami collaterali dell'arteria prima della sua chiusura è stato invocato come causa della circolazione collaterale dal Volkmann, *Die Hämodynamik*, Leipzig, 1850, cap. XV; e tale concetto è stato sostenuto dal Weber (vedi Pitha e Billroth, *Handbuch der Chirurgie*, 1, *Erlangen*, 1865) e da altri. La diminuzione della pressione nei rami dell'arteria al di là della chiusura fu invocata come causa del circolo collaterale dal Recklinghausen (*Handbuch der allg. Pathologie des Kreislaufs*; *Deutsche Chirurgie*, Stuttgart, 1883) e dal Nothnagel (*Ueber Anpassungen und Ausgleichungen bei pathologischen Zustände* Zeitschr. f. klin. Medizin., Bd. XV, 1889).

(2) Cohnhein, *Vorlesungen v. Allg. Pathologie*, 2. *Aufl.* Berlin, 1882, pag. 108.

(3) La chiusura della carotide o della femorale nei cani è seguìta da innalzamenti della pressione generale di 10-20 mm. Hg.; ma questi innalzamenti durano, tutto al più, un minuto, e la pressione ritorna poi al grado primitivo. Anche l'innalzamento della pressione consecutivo alla chiusura dell'aorta sotto le renali, dopo un minuto circa scompare (Vedi fig. 55, pag. 637).

(4) Latschenberg e Dehana, *Beiträge zur Lehre von den reflectorischen Erregungen der Gefässmuskeln.* Archivio di Pflüger, Bd. XII, 1876.

(5) Zuntz, *Beiträge zur Kenntniss der Einwirkungen der Athmung auf den Kreislauf.* Archivio di Pflüger, Bd. XVII, 1878.

(6) Talma, *Ueber die collaterale Circulation.* Archivio di Pflüger, Bd. XXIII 1880.

Così stavano le cose, quando, nel 1887, iniziai le mie prime ricerche (¹).

In una *prima serie* mi proposi, anzitutto, di dimostrare se la circolazione collaterale si stabiliva egualmente negli arti normalmente innervati e negli arti privati della loro innervazione.

A tale scopo praticai la legatura dell'arteria ascellare in salamandre, rane, colombi e conigli, dopo di avere tagliato i nervi dell'ascella e senza avere tagliato questi nervi.

Perchè i risultati di queste esperienze possano avere valore dimostrativo, è necessario che i vasi, i di cui nervi sono stati tagliati, si trovino nelle stesse condizioni, nello stesso stato di tono, come i vasi i di cui nervi non sono stati tagliati, e che l'arto, divenuto insensibile per il taglio dei suoi nervi, sia protetto dalle azioni traumatiche.

Simili condizioni si verificavano nei colombi, perchè, secondo le esperienze dello Schiff (²) e del Bernard (³), il taglio dei nervi dell'ascella, nei colombi, non produce mutamenti di temperatura, e quindi del tono vasale, nell'ala corrispondente, e perchè, secondo le esperienze del Flourens (⁴), nell'ala dei colombi, divenuta insensibile per il taglio dei nervi dell'ascella, non succedono alterazioni trofiche, essendo essa protetta dalle penne e non venendo trascinata sul suolo dopo il taglio dei suoi nervi motori.

Il non verificarsi aumento di temperatura nell'ala del colombo, dopo il taglio dei nervi dell'ascella, depone certamente nel senso che, in causa del detto taglio, i vasi dell'ala non si allargano; ma, dato anche che essi si trovassero in uno stato di maggiore dilatazione in confronto ai vasi normalmente innervati, ciò non potrebbe che favorire, e mai ostacolare, la formazione del circolo collaterale. E ciò è bene di notare.

Dalle suindicate esperienze nei colombi è risultato che:

di *otto* colombi in cui fu legata l'arteria ascellare e tagliati i nervi dell'ascella, superiore ed inferiore, in *cinque* la circolazione collaterale non si stabilì, e l'estremità dell'ala, fino all'articolazione del carpo, cadde in cancrena secca; e negli altri *tre* il circolo collaterale finì con lo stabilirsi, benchè fosse insorta qualche minaccia di cancrena.

(¹) A. Stefani, *Della influenza del sistema nervoso nella formazione del circolo collaterale* (Comunicazione fatta all'Accademia di Ferrara il 7 luglio 1887); *Sulla genesi del circolo collaterale.* (Atti dell'Istituto veneto, tom. IX, ser. VII, 1898).

(²) Schiff, *Untersuchungen zur Physiologie des Nervensystems*, pag. 177, an. 1855 (secondo la citazione fatta dall'Aubert, *Innervation der Blutgefässe.* Handbuch der Physiologie von Hermann, Bd. IV, Th. I, pag. 419).

(³) Bernard, Compt. rend., II, pag. 305, an. 1862 (secondo la citazione fatta dall'Aubert nel luogo sopraindicato).

(⁴) Flourens dimostrò, fin dal 1842, che, in seguito al taglio dei nervi dell'ascella, l'ala dei colombi non viene trascinata sul suolo, e non presenta alterazioni trofiche (*Recherches expérimentales sur les propriétés et les fonctions du système nerveux* etc. Paris, 1842, pag. 266); e queste osservazioni furono pienamente confermate da me nel 1885 (*L'incrocio dei nervi utilizzato per lo studio delle funzioni dei centri nervosi.* Atti Accademia di Ferrara, 1885; prima comunicazione).

di *quattro* colombi in cui fu legata l'arteria ascellare senza tagliare i nervi, in *tutti* la circolazione collaterale si stabilì regolarmente, senza minacce di cancrena.

di *quattro* colombi nei quali fu legata l'arteria ascellare, previo, in *due*, il taglio del solo nervo ascellare superiore, e in *due* il taglio del solo nervo ascellare inferiore, la circolazione collaterale si stabilì in *tutti* regolarmente, come in quelli in cui l'arteria ascellare era stata legata senza tagliare alcun nervo.

Da queste esperienze risulta, quindi, che *anche senza l'intervento di azioni nervose si può formare il circolo collaterale preliminare*: ma risulta, anche, che *la formazione di questo circolo viene coadiuvata dalla innervazione.*

Le esperienze sui conigli sono da scartarsi, non tanto perchè il tono nei vasi degli arti scompare quando i nervi rispettivi vengono tagliati, quanto perchè, nei detti animali, in seguito al taglio dei nervi di un arto, si formano escare ed esulcerazioni sul dorso della zampa che viene trascinata sul suolo.

Contro le esperienze nelle salamandre e nelle rane non mi pare che possa essere fatta l'obbiezione che i vasi dell'arto i cui nervi erano stati tagliati mancavano forse di tono, perchè, siccome ho già rilevato, questa mancanza non avrebbe potuto che favorire la formazione del circolo collaterale (1); ma contro di esse si può osservare che l'arto, divenuto insensibile in causa del taglio dei suoi nervi, era esposto ad azioni traumatiche. Però, nullostante questa osservazione, a me pare che esse non manchino di valore dimostrativo, poichè l'ambiente umido, molle, in cui questi animali erano collocati dopo l'operazione, non poteva a meno di attenuare le azioni traumatiche, e perchè al taglio dei nervi dell'ascella, senza legatura dell'arteria, non ho visto succedere nella zampa alterazioni trofiche.

Riassumo brevemente i risultati di queste esperienze:

in *nessuna* delle *venti* salamandre, a cui fu legata l'arteria ascellare e tagliati i nervi dell'ascella corrispondente, si stabilì il circolo collaterale; in *tutte* l'arto cadde in cancrena e si staccò dal corpo a livello del torace; e solo dopo questa eliminazione la ferita si chiuse.

in *nessuna* delle *sei* salamandre a cui furono tagliati i nervi dell'ascella senza legare l'arteria si manifestarono nell'arto alterazioni trofiche; in *tutte* la ferita si chiuse regolarmente.

in *quattro* salamandre, a cui fu lacerata l'arteria ascellare in modo da dividerla completamente, e nelle quali dopo l'atto operativo i movimenti della zampa erano normali e quindi i nervi non erano rimasti offesi, la circolazione collaterale si stabilì perfettamente, e la ferita si chiuse regolarmente. In altre salamandre invece, in cui, dopo la lacerazione dell'arteria, l'arto si mostrava paralizzato, la circolazione

(1) Non è noto se i vasi delle zampe delle rane e delle salamandre si dilatino in seguito al taglio dei nervi. Secondo l'Aubert (*Innervation der Blutgefässe*; Manuale di fisiologia dell'Hermann, Leipzig, 1879, Bd. IV, Th. I, pag. 419), nelle rane il taglio dello sciatico produce prima costrizione e poi dilatazione dei vasi della membrana interdigitale; ma, dopo qualche ora, il lume di questi vasi ritorna normale.

Le ricerche sui cani, come dirò più innanzi, hanno dimostrato che, quando non si ristabilisce il tono dei vasi della zampa, scomparso per il taglio dello sciatico, la circolazione collaterale in seguito alla legatura dell'arteria femorale si forma più rapidamente.

collaterale non si stabilì, e l'arto cadde in cancrena come in quelle in cui fu legata l'arteria e tagliati i nervi. Non sono riuscito, nelle salamandre, a legare l'arteria ascellare senza produrre qualche maltrattamento nei nervi dell'ascella, e difficile riesce in questi animali anche la semplice lacerazione dell'arteria ascellare senza recare qualche offesa ai nervi.

di *cinque* rane in cui fu legata l'arteria ascellare e tagliati i nervi dell'ascella corrispondente, in *quattro* la circolazione collaterale non si stabilì, e l'arto cadde quindi in cancrena e fu eliminato a livello del tronco, come nelle salamandre, e dopo di ciò la ferita si chiuse.

di *tre* rane in cui furono tagliati i nervi dell'ascella senza legare l'arteria, in *nessuna* si osservarono nell'arto alterazioni trofiche.

di *sette* rane in cui fu legata l'arteria ascellare senza tagliare i nervi dell'ascella, in *cinque* la circolazione collaterale si stabilì regolarmente, e nelle altre *due* non si stabilì. Nelle cinque rane in cui la circolazione si stabilì, i movimenti dell'arto, dopo l'operazione, erano normali; e nelle due rane in cui non si stabilì, l'arto pareva invece paralizzato, per cui è da ritenersi che nell'atto operativo i nervi siano stati maltrattati.

Anche i risultati delle esperienze nelle salamandre e nelle rane *depongono quindi evidentemente in favore di un'azione coadiuvante del sistema nervoso nella formazione del circolo collaterale preliminare, confermando quelli ottenuti nei colombi.*

In una *seconda serie* di esperienze tagliai, in cani, lo sciatico di un lato; e 10-12 giorni dopo, quando il tono dei vasi si era ristabilito (lo che veniva dimostrato dalla discesa della temperatura della zampa rispettiva allo stesso grado della temperatura dell'altra zampa), legai, al mattino, l'arteria femorale dell'uno e dell'altro lato, e quindi di ora in ora, fino alla sera, misurai la temperatura delle due zampe.

Solamente due di queste esperienze poterono essere condotte a termine regolarmente, e ciò perchè in molti cani, dopo il taglio dello sciatico, il tono dei vasi non si è ristabilito (1); e dalle stesse è stato dimostrato che nell'arto privo della innervazione dello sciatico, in seguito alla legatura dell'arteria, la temperatura della zampa si è abbassata assai più che non nell'arto normalmente innervato, e che essa ha impiegato un tempo più lungo a ritornare allo stato normale. In via approssimativa, nell'arto normalmente innervato, la circolazione collaterale, per stabilirsi, ha impiegato un'ora, e nell'arto privo della innervazione dello sciatico ha impiegato invece 4-5 ore.

Anche queste esperienze, in perfetto accordo con le precedenti, *dimostrano che, se la innervazione non è necessaria, essa coadiuva però la formazione del circolo collaterale preliminare.*

(1) Dalla lettura dei lavori di Goltz, di Ostroumoff, di Bernstein, di Luchsinger e Kendall, di Gergens e Weber, e di Heidenhain e Grützner, parrebbe che il ristabilimento del tono vasale, dopo il taglio dello sciatico, fosse un fatto, dirò così, normale; mentre, secondo le mie osservazioni, la mancanza di ristabilimento di detto tòno è invece molto frequente.

Negli arti in cui dopo il taglio dello sciatico il tono dei vasi non si ripristina, siccome era facilmente prevedibile, la circolazione collaterale si stabilisce più rapidamente. Simili osservazioni furono fatte su cani in cui al taglio dello sciatico non erano succedute alterazioni trofiche.

In una *terza serie* di esperienze ho cercato, in cani a cui avevo tagliato lo sciatico di un lato e nei quali il tono vasale erasi poi ristabilito, se in seguito alla legatura dell'aorta, al di sotto delle renali, i vasi dell'arto normalmente innervato venissero a trovarsi in uno stato di dilatazione maggiore o minore dei vasi dell'altro arto. Queste ricerche furono fatte per mezzo di circolazioni artificiali; ma riconosco che i risultati di esse non possono avere valore dimostrativo, e perciò ometto di riferirle.

Ma in qual modo la innervazione contribuisce a formare il circolo collaterale preliminare?

Seguendo il concetto di Latschenberg e Dehana e dello Zuntz, che dal territorio anemizzato partano delle eccitazioni che producono in via reflessa la dilatazione dei vasi rispettivi, ho cercato di dare la dimostrazione di queste azioni reflesse; ma i risultati delle ricerche, a tale scopo istituite, mi obbligarono invece ad abbandonare il detto concetto.

Infatti da queste ricerche è stato dimostrato che i mutamenti della pressione del liquido circolante nei vasi non producono alcuna azione vasomotoria reflessa (pag. 794), e che azioni vasomotorie reflesse non si producono in seguito a mutamenti di temperatura nel liquido circolante nei vasi, che non eccedano soverchiamente i limiti fisiologici (pag. 791); e ricerche, fatte di recente, per completare l'argomento, dal mio aiuto, dott. A. Roncato, hanno inoltre dimostrato che azioni reflesse non si producono, neppure quando, nelle circolazioni artificiali, al sangue bene ossigenato si sostituisce soluzione fisiologica.

In base a questi risultati ritengo che *la innervazione coadiuvi la formazione del circolo collaterale preliminare solamente in modo indiretto*: *stimolando, cioè, l'attività funzionale degli organi anemizzati.*

Ma dalle ricerche da me fatte con le circolazioni artificiali, è stato dimostrato un fatto che, a mio avviso, è da considerarsi di fondamentale importanza nella formazione della circolazione collaterale, vale a dire, che il sangue dispnoico spiega sui vasi un'azione diretta dilatatrice (pag. 781).

Siccome all'anemia succede necessariamente la dispnea, così alla legatura di un'arteria, in causa della dispnea, deve succedere dilatazione dei vasi rispettivi e aspirazione quindi del sangue attraverso le vie anastomotiche [1].

Il concetto che le azioni determinanti la formazione del circolo collaterale abbiano la loro origine nei tessuti anemizzati, concetto che ha ispirato le ricerche di Latschenberg e Dehana, dello Zuntz e del Bier, è perfettamente conforme alle leggi

(1) Per verità, l'azione aspirante della dilatazione vasale non è dimostrata; essa viene da me ammessa per analogia con la diastole attiva del cuore. Ad ogni modo, la dilatazione vasale, anche se non aspira il sangue, dovrà certo favorire l'afflusso di esso ai vasi anemizzati.

generali della biologia; e trova appoggio nel fatto ben noto, che il sangue affluisce agli organi in quantità maggiore o minore, a seconda dei loro bisogni.

Ma l'aspirazione del sangue da parte dei tessuti anemizzati non si produce per azioni nervose reflesse; essa si produce invece per mezzo dell'azione diretta vasodilatatrice della dispnea, azione che spiega l'iperemia compensatoria che si verifica quando si apre un'arteria dopo di averla tenuta chiusa per qualche tempo, e intorno alla quale il Bier ha fatto molte e interessanti osservazioni.

Riassumendo, parmi, allo stato attuale delle cognizioni, di poter concludere che:

i tessuti anemizzati devono costituire il punto di partenza delle azioni determinanti la formazione del circolo collaterale preliminare;

l'azione dilatatrice diretta della dispnea sui vasi anemizzati è il fattore fondamentale di questo circolo;

il sistema nervoso contribuisce alla formazione del circolo collaterale preliminare solamente in via indiretta, stimolando l'attività funzionale degli organi;

l'abbassamento della pressione nei vasi anemizzati costituisce una diminuzione degli ostacoli alla formazione del circolo collaterale preliminare, ma non può considerarsi come fattore di esso;

l'aumento della pressione nei vasi che partono dall'arteria chiusa prima della sua chiusura non può essere un fattore del circolo collaterale preliminare.

CAPITOLO VII.

Inversione della reazione locale dei vasi in seguito ad aumento della dose del farmaco.

Cercando, nel 1902, insieme col mio aiuto, B. Vasoin, per mezzo di circolazioni artificiali in animali di recente uccisi, l'azione locale della stricnina sui vasi [1], ho osservato che questo alcaloide spiega azioni opposte a seconda della dose: e precisamente, che vi ha una dose minima, a partire dalla quale la stricnina incomincia a spiegare sui vasi la sua azione, *soglia di eccitazione*; che la prima azione della stessa consiste nel produrre dilatazione; che, a partire da questa dose minima, col crescere della dose si ottiene una dilatazione progressivamente maggiore, fino ad un grado che rappresenta l'*optimum di dilatazione*; che, crescendo ancora la dose, si ottiene una dilatazione sempre minore, finchè si arriva ad una dose che non produce nè dilatazione, nè restringimento, *punto indifferente* o *zero*; che, crescendo ancora la dose, invece di dilatazione, si ottiene costrizione che cresce col crescere della dose.

Questi fatti si possono figurare graficamente come segue:

A m n o B

La linea AB rappresenta le dosi di stricnina progressivamente crescenti, *m* la dose *soglia* di eccitazione, *n* la dose *optimum* di dilatazione, *o* la dose che non determina nè dilatazione nè costrizione, *punto indifferente* o *zero*. Le dosi al di sopra di *o* producono costrizione tanto maggiore, quanto più elevata è la dose. Per maggiore intelligenza di questi fatti riporto l'esperienza che segue:

[1] Stefani e Vasoin, *Azione locale della stricnina sui vasi sanguigni. Contributo alla dottrina della espansione attiva delle fibre muscolari.* Atti del Reale Istituto veneto, tom. LXI, 1902.

1 febbraio 1902. — Cane ucciso per dissanguamento alle ore 16,10. Circolazione artificiale attraverso il rene sinistro. Pressione Hg. 90. Temperatura ambiente 15° circa.

In 15 secondi escono dalla vena renale

Circolazione con soluzione fisiologica	Circolazione con soluzione fisiologica e stricnina	Proporzione nella quale si trova la stricnina nella soluzione fisiologica
ore 16,30 cc. 9-9,5-10-10,5		
	ore 16,34 cc. 12-12-12-12	0,25 ‰
ore 16,38 cc. 13-12-12-12-12-12		
	ore 16,42 cc. 23-28-30-30,5-30	0,30 ‰
ore 16,46 cc. 20-20-20-20-20		
	ore 16,50 cc. 37-39-40-40-40-40	»
ore 16,54 cc. 25-25-25-25		
	ore 17 cc. 45-46-49-48-50-50	0,75 ‰
ore 17,4 cc. 31-31-31-31-31		
	ore 18,8 cc. 56-56-56-56-56	»
ore 17,35 cc. 19-19-19-19-19		
	ore 17,40 cc. 29-30-31-30-30	1 ‰
ore 17,45 cc. 21-21-21-21		
	ore 17,50 cc. 30-31-31-32-32-32	»
ore 17,54 cc. 23-23-23-23-23		
	ore 17,58 cc. 31-30-30-30-30	1,25 ‰
ore 18,3 cc. 20-20-20-20-19-19		
	ore 18,8 cc. 25-27-27-27-27	»
ore 18,20 cc. 19-20-20-19-20		
	ore 18,25 cc. 16-17-17-17-17-17	2 ‰
ore 18,30 cc. 21-21-21-21-21		
	ore 18,34 cc. 17-17-17-17-17-16-15	»
ore 18,40 cc. 23-23-23-23-23		
	ore 18,45 cc. 23-23-23-23-25	1,75 ‰
ore 18,50 cc. 22-22-22-22-22		
	ore 18,55 cc. 22-23-22-22-22-22	»
ore 18,58 cc. 19-19-19-19-19		
	ore 19,2 cc. 17-17-16-16-15	2,50 ‰
ore 19,6 cc. 18-17-17-17-17-17		
	ore 19,10 cc. 16-14-13-12,5-13	»

In questa esperienza, alla dose di 0,25 ‰, la stricnina ha cominciato a produrre dilatazione vasale (*soglia di eccitazione*); questa dilatazione andò progressivamente crescendo fino alla dose di 0,75 ‰ (*optimum* di dilatazione), e poi diminuì progressivamente fino alla dose di 1,75 ‰, che non produsse nè dilatazione nè costrizione (*punto indifferente* o *zero*); le dosi di 2 e di 2,5 ‰ hanno prodotto costrizione.

Dopo queste mie ricerche sulla stricnina, l'attitudine di produrre, agendo direttamente sui vasi, espansione a piccola dose e costrizione a dose maggiore, fu dimostrata in molte altre sostanze, alcaloidi e non alcaloidi, e negli estratti di organi, e non solo per mezzo delle circolazioni artificiali, ma anche per mezzo della registrazione grafica dei movimenti dei vasi isolati (fig. 71, pag. 809) (1); ed essa ha troppa importanza, non solo dal punto di vista pratico, ma dal punto di vista dottrinale, perchè io non senta il bisogno di fare, intorno alla stessa, delle considerazioni le quali, si collegano con la dottrina della attività diastolica.

Anzitutto, mi sembra di poter escludere che le azioni locali della stricnina sui vasi, opposte secondo la dose, dipendano da perdita o aumento di acqua da parte dei vasi, per ipertonia o ipotonia del liquido in essi circolante, perchè, anche lasciando da parte altre considerazioni, per aggiunta di stricnina alla soluzione fisiologica non potrebbe che aumentare la pressione osmotica della stessa. E così è da escludersi che la dilatazione dei vasi possa dipendere da esaurimento prodotto da eccessiva intensità di stimolo, perchè la dilatazione si ottiene con le piccole dosi, e crescendo la dose si ottiene costrizione, e perchè dalle mie esperienze risulta anche che, prolungando la circolazione con piccole dosi, alla dilatazione succede la costrizione.

Se esistessero distinti muscoli dilatatori e costrittori, la dilatazione prima e la costrizione poi dei vasi si potrebbero spiegare nello stesso modo con cui il Rollett (2)

(1) Siccardi e Loredan, *Sulla contrazione delle fibre liscie dei vasi, con particolare riguardo all'azione degli estratti di organi.* Zeitschr. f. allg. Physiol., XV, 1913. — Siccardi e Loredan, *Azione locale di alcuni alcaloidi sui vasi sanguigni. Contributo alla dottrina della espansione attiva delle fibre muscolari.* Archivio di fisiologia, XII, 1914. — In questi lavori è stato dimostrato, per mezzo della grafica oltre che per mezzo delle circolazioni artificiali, che agiscono direttamente sui vasi come la stricnina (dilatandoli cioè a piccola dose e costringendoli a dose maggiore): l'estratto di timo, la bile, l'atropina, la pilocarpina, l'eserina, la veratrina e la nicotina.

(2) Rollett, *Ueber die verschiedene Erregbarkeit functionell verschiedener Nervenmuskelapparate* (Atti dell'Accademia di Vienna, B. 70-71-72, anni 1874-75-76); id., *Beiträge zur Physiologie d. Geruchs, d. Geschmacks, d. Hautsinne und d. Sinnen in Allgemeinen* (Archivio di Pflüger, B. 74, an. 1899).

Il fenomeno del Ritter, siccome è noto, consiste in ciò: che, stimolando lo sciatico della rana con correnti indotte deboli, si ottiene flessione delle dita, e stimolandolo con correnti forti si ottiene invece estensione. Questo fatto acquistò importanza fisiologica quando il Rollett, togliendolo dall'oblio in cui era caduto, dimostrò che esso dipendeva da maggiore eccitabilità delle fibre nervose che vanno ai muscoli flessori, perchè con questa dimostrazione fu scossa la cieca fiducia nella *dottrina della eguaglianza funzionale delle fibre nervose* professata dall'Helmholtz, dal Du Bois Reymond, dal Donders etc., la quale è stata combattuta dall'Engelmann, dall'Hering e dal Rollett.

Dopo le ricerche del Rollett, furono dimostrati altri fenomeni analoghi a quello del Ritter, e fra questi merita di essere particolarmente ricordato quello dimostrato dal Richet e dal Luchsinger

spiegò il fenomeno del Ritter, ammettendo cioè che i muscoli dilatatori fossero più eccitabili ed i costrittori più potenti; ma nessun ordine di fibre muscolari si conosce, capace di dilatare i vasi contraendosi.

Per spiegare le azioni opposte della stricnina a seconda della dose, non si può neppure invocare, a mio avviso, l' intervento di gangli vasali; perchè, dato anche che questi gangli esistano (lo che non è dimostrato), essi dovrebbero essere inattivi, in analogia a quanto si verifica, non solo rispetto ai centri cerebro-spinali, ma anche rispetto al ganglio ciliare. È notorio, che i centri cerebro-spinali muoiono, se rimane sospesa per qualche minuto la circolazione del sangue attraverso di essi; ed è dimostrato che per la soppressione del circolo, dopo alcuni minuti, muore anche il ganglio ciliare (1).

Date queste esclusioni, il modo di agire della stricnina sui vasi isolati non si può spiegare, a mio avviso, se non ammettendo in essa due azioni eccitanti distinte, *espansoria* l'una e *costrittrice* l'altra, le quali alla dose del punto indifferente si neutralizzano, perchè di eguale intensità; mentre a dose più elevata prevale l'azione costrittrice, e a dose più bassa l'azione espansoria.

Alla *soglia* di eccitazione, *a*, comincia ad agire, da sola, l'azione espansoria; questa azione cresce col crescere della dose, fino a produrre la massima dilatazione in *b*; in questo momento entra in campo anche l'azione costrittrice, la quale, crescendo col crescere della dose, prima fa diminuire la dilatazione vasale, poi la neutralizza (*punto indifferente*), e poi produce costrizione sempre maggiore.

Secondo questa interpretazione, la stricnina, a piccola dose, sarebbe uno *stimolo espansorio* delle fibre muscolari dei vasi; e l'esistenza di questi stimoli non può, a mio avviso, essere messa in dubbio, dopo che il Biedermann ha dimostrato che l'applicazione dell'anode di una corrente continua fa fermare il cuore di rana in diastole, e fa allungare gli ordinarî muscoli striati, contratti per opera della veratrina (2), e dopochè lo stesso Biedermann (3) ha dimostrato l'esistenza di fibre espansorie nel nervo motore della zampa del gambero, e dopo che il Gaskell (4) dimostrò che sotto lo stimolo del vago la corrente propria delle fibre muscolari del cuore, anzichè una oscillazione negativa, subisce una oscillazione positiva.

---

rispetto alla pinza del gambero, fenomeno il quale consiste in ciò: che stimolando il nervo, che va ai muscoli di detta pinza, con corrente debole, la pinza si apre; e stimolando lo stesso nervo con corrente forte, la pinza invece si chiude. Questo fenomeno ha dato origine alle ricerche del Biedermann, con le quali fu dimostrata l'esistenza, in detto nervo, di fibre espansorie accanto alle motorie.

(1) Stefani e Vasoin, *Azione locale della stricnina* etc.

(2) Biedermann, *Beiträge zur allg. Nerven und Muskelphysiologie*: *Ueber das Herz von Helix pomatia* (Atti dell'Accademia di Vienna, B. 89, an. 1884); id., *Beiträge* etc. *Hemmungserscheinungen bei elektrischer Reizung quergestreifter Muskeln, und über positivekatodische Polarisation* (Atti dell'Accademia di Vienna, B. 92, an. 1885).

(3) Biedermann, *Beiträge* etc. *Ueber die Innervation der Krebsscheere* (Atti dell'Accademia di Vienna, B. 95, an. 1887); vedi anche *Elektrophysiologie*, Jena, an. 1895, pag. 524.

(4) Gaskell, *Ueber die elektrische Veränderungen welke in den ruhenden Herzmuskel die Reizung des N. Vagus begleiten*. Ludwig's 70 Geburtstage, Leipzig, an. 1886.

In conformità alla *dottrina sulla irritabilità* (Parte 1ª, Cap. V), io interpreto l'attitudine della stricnina, di produrre dilatazione dei vasi a piccola dose e costrizione a dose maggiore, ammettendo che essa provochi nelle fibre muscolari dei vasi un aumento di tutti i processi che costituiscono il loro ricambio, con prevalenza dei processi assimilativi a piccola dose e dei disassimilativi a dose elevata.

Questa interpretazione è in accordo coi fatti dell'elettrotono. La corrente continua, percorrendo il nervo, produce in corrispondenza all'anode l'anaelettrotono, e in corrispondenza al catode il cataelettrotono, con prevalenza dell'anaelettrotono se la corrente è debole, e del cataelettrotono se la corrente è forte; e in considerazione appunto dell'elettrotono, denominai *punto indifferente* la dose di stricnina che non produce nè dilatazione nè costrizione vasale (1).

Il modo di comportarsi dei vasi rispetto alla stricnina ha delle analogie con i *tropismi* dei protoplasmi, positivi o negativi secondo la intensità dello stimolo; e tutti questi fatti richiamano alla mente la *reversibilità* dei processi catalitici, per cui lo stesso catalizzatore può produrre fenomeni opposti, a seconda della sua concentrazione.

Il fatto che la stricnina, a piccole dosi, costituisce uno stimolo espansorio delle fibrocellule vasali, viene evidentemente a confermare la dottrina della espansione attiva delle fibre muscolari, e quindi la dottrina della attività diastolica.

CAPITOLO VIII.

Considerazioni generali.

1. **Tono e movimenti ritmici.** — Fino a pochi anni or sono, i movimenti contrattili dei vasi erano stati studiati osservando i mutamenti che si verificano nel diametro di questi, nel colore e nella temperatura degli organi, nella pressione arteriosa e nell'efflusso di circolazioni artificiali opportunamente praticate; e, in base alle osservazioni fatte con questi metodi, si riteneva che essi consistessero essenzialmente in costrizioni e in dilatazioni del lume vasale, di durata sempre abbastanza lunga, *mutamenti di tono*. Nell'arteria auricolare (2) e nell'arteria safena del coniglio (3), nella vena dell'ala del pipistrello (4), e nelle vena cava delle rane (5), erano stati osservati anche dei movimenti ritmici; ma essi venivano considerati come fatti, quasi direi, eccezionali.

(1) Pflüger, *Untersuchungen ü. d. Physiologie d. Elektrotonus*, Berlin, an. 1859, pag. 407. — Il Pflüger denominò *punto indifferente* il punto del tratto interpolare del nervo in cui non si verifica nè aumento nè diminuzione di eccitabilità durante il passaggio della corrente continua.

(2) Schiff, *Ein accessorisches Arterienherz bei Kaninchen*. Arch. f. Heilkunde XIII, an. 1854.

(3) Gunning (citato dall'Aubert), *Hermann's Handbuch d. Physiol.*, B. IV, pag. 454, Leipzig, an. 1888.

(4) Warton Jones (cit. dal Vulpian): *Leçons sur l'appareil vasomoteur*, pag. 74. Paris, an. 1875.

(5) Engelmann, *Ueber die Ursprung der Herzbewegungen* etc., Onderzoekung Physiol. Laborat., Utrecht. IV, an. 1896.

L'applicazione della grafica allo studio dei movimenti contrattili dei vasi, fatta dal von Frey [1] nel 1905, ha confermato l'attitudine dei vasi isolati di reagire agli stimoli con mutamenti del tono; ma alcuni sperimentatori poterono anche osservare, per mezzo di essa, che i vasi possono reagire a stimoli chimici continui (estratto di ipofisi, ioimbina) con movimenti ritmici.

Meritevoli di menzione, oltre a quello del von Frey, sono in proposito i lavori del Meyer, del Müller, del Langendorff, di De Bonis e Susanna e del Cow [2].

Per chiarire l'attitudine dei vasi isolati di reagire a stimoli continui con movimenti ritmici (attitudine intorno alla quale i diversi sperimentatori non erano concordi), i miei allievi, Siccardi e Loredan [3], nel 1913, istituirono delle metodiche ricerche su diverse arterie di bue, levate dall'animale appena ucciso e conservate in liquido di Ringer ossigenato, alla temperatura di 37°, ricerche che consistevano nel registrare i movimenti che venivano dalle stesse compiuti in seguito all'aggiunta, al liquido di Ringer, di varî stimoli, e specialmente di estratti di organi a secrezione interna.

Da queste ricerche è stato dimostrato che le grosse arterie reagiscono agli stimoli solamente con mutamenti del tono, mentre le medie e le piccole, oltre che con mutamenti del tono, reagiscono anche con movimenti ritmici. Con questa dimostrazione è stata spiegata la apparente contraddizione fra i risultati dei precedenti sperimentatori, rispetto alla attitudine dei vasi di rispondere agli stimoli con movimenti ritmici.

Oltre di ciò, dalle ricerche di Siccardi e Loredan è stato dimostrato che non solo l'estratto di ipofisi (l'azione del quale era già stata osservata da De Bonis e Susanna e dal Cow), ma anche gli estratti di parecchi altri organi di secrezione interna (tiroide, timo, testicolo, ovaia) producono movimenti ritmici nei vasi isolati.

L'attitudine di tutte le medie e le piccole arterie di compiere movimenti ritmici, e l'attitudine degli estratti di parecchi organi di provocarli, porta naturalmente a ritenere, che questi movimenti si verifichino anche nell'animale vivente, coadiuvando la circolazione, siccome era stato ammesso dallo Schiff [4].

(1) v. Frey, *Beiträge zur Kenntniss der Adrenalinwirkung* (Sitzungsber. d. physik-med. Gesellschaft, Würzburg 1905; Centralbl. f. Physiol. XIX, 1905).

(2) Meyer, *Ueber einige Eigenschaften der Gefässmuskulatur mit besonderer Berücksichtigung der Adrenalinwirkung*, Zeitschr. f. Biologie XLVIII, an. 1906; id., *Versuche mit Kokain, Adrenalin, und Andolin an überlebenden Gefässe*, Zeitschr. f. Biolog., an. 1908; Müller, *Ein Beitrag zur Kenntniss der Gefässmuskulatur*, Arch. f. (Anat. u.) Physiol., physiol. Abtheil., an. 1906; Langendorff, *Ueber die Innervation der Koronargefässe*, Zentralbl. f. Physiol. XXI, an. 1908; De Bonis und Susanna, *Ueber die Wirkung der Hypohysenextraktes auf isolirte Blutgefässe*, Zentralbl. f. Physiol. XXIII, an. 1909; Duglas Cow, *Some reactions of surviving arteries*, Journ. of physiol. XLII, an. 1911.

(3) Siccardi e Loredan, *Sulla contrazione delle fibre liscie dei vasi, con particolare riguardo all'azione di estratti di organi*, Zeitschr. f. allg. Physiologie, XV, an. 1913; id. id., *Azione locale di alcuni alcaloidi sui vasi sanguigni: contributo alla dottrina della espansione attiva delle fibre muscolari*, Archivio di fisiologia, XII, an. 1914.

Rispetto ai particolari di queste ricerche, e più specialmente all'azione che spiegano sul preparato vasale la temperatura e lo stiramento, rimando all'originale.

(4) Schiff, *Ein accessorisches Arterienherz bei Kaninchen*. Arch. f. physiol. Heilkunde, XIII, an. 1854.

I movimenti ritmici dei vasi, oltre alla circolazione, interessano la fisiologia generale dei muscoli.

Dalle ricerche già pubblicate di Siccardi e Loredan, e da quelle di prossima pubblicazione del mio aiuto, A. Roncato, è stato dimostrato che:

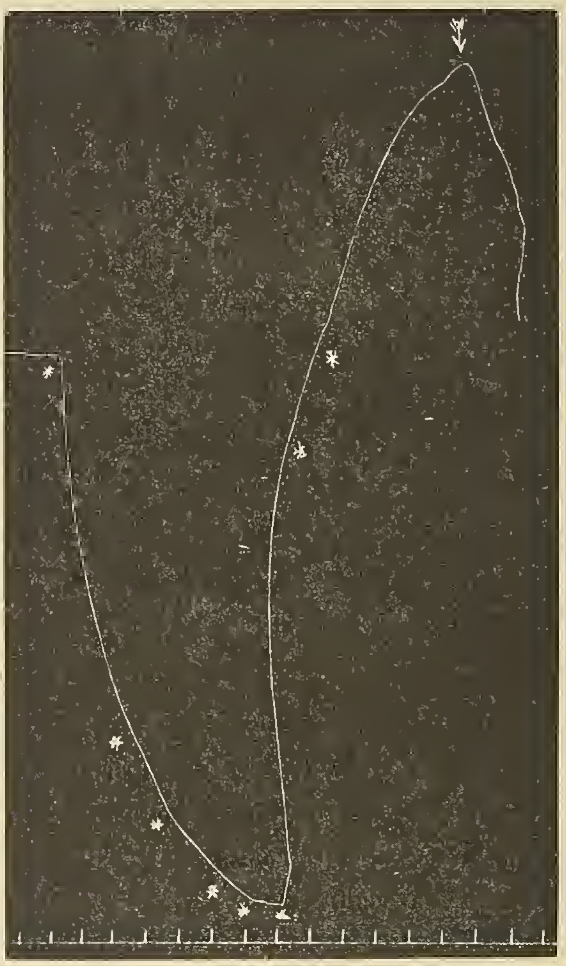


Fig. 71. — Grafica ottenuta per mezzo della leva da un ramo dell'arteria coronaria cardiaca di bue. L'arteria era stata asportata dall'animale subito dopo la morte, conservata in liquido di Ringer e trattata poi con bile. L'esperienza ebbe principio quattro ore dopo la morte. La linea orizzontale rappresenta il tempo, ed i segni verticali sulla stessa si succedono ogni dieci minuti primi. Nel liquido di Ringer ossigenato, a 37°, si contendono al primo segno cmc. di bile 0,1 pari a 0,28 p %, e la dose della bile aumenta ad ogni segno. Fino al quarto segno, in corrispondenza del quale la dose arriva al 7,10 p %, la bile produce allungamento progressivo del vaso. Al quinto segno, in corrispondenza del quale la dose arriva all' 11,40 p %, la bile non produce nè allungamento nè accorciamento. Al sesto segno, in corrispondenza del quale la dose arriva al 17,10 p %, la bile produce rapido e notevole accorciamento il quale aumenta coll'aumentare successivo della dose. La freccia indica il momento in cui si pratica il lavaggio per mezzo del quale scompare l'azione stimolante della bile (Siccardi e Loredan).

i movimenti ritmici dei vasi isolati scompaiono molto tempo prima dei movimenti del tono; mentre i movimenti del tono possono persistere anche qualche giorno, i movimenti ritmici scompaiono definitivamente dopo 6-8 ore;

vi sono stimoli i quali producono solamente mutamenti del tono, senza produrre movimenti ritmici (fig. 71);

col comparire e svolgersi dei movimenti ritmici il tono si eleva (fig. 72).

Questi fatti inducono naturalmente ad ammettere, che la origine dei movimenti ritmici sia diversa da quella dei movimenti tonici; e appoggiano quindi la dottrina di Biedermann e Bottazzi (¹), secondo la quale i primi, che sono più rapidi, si

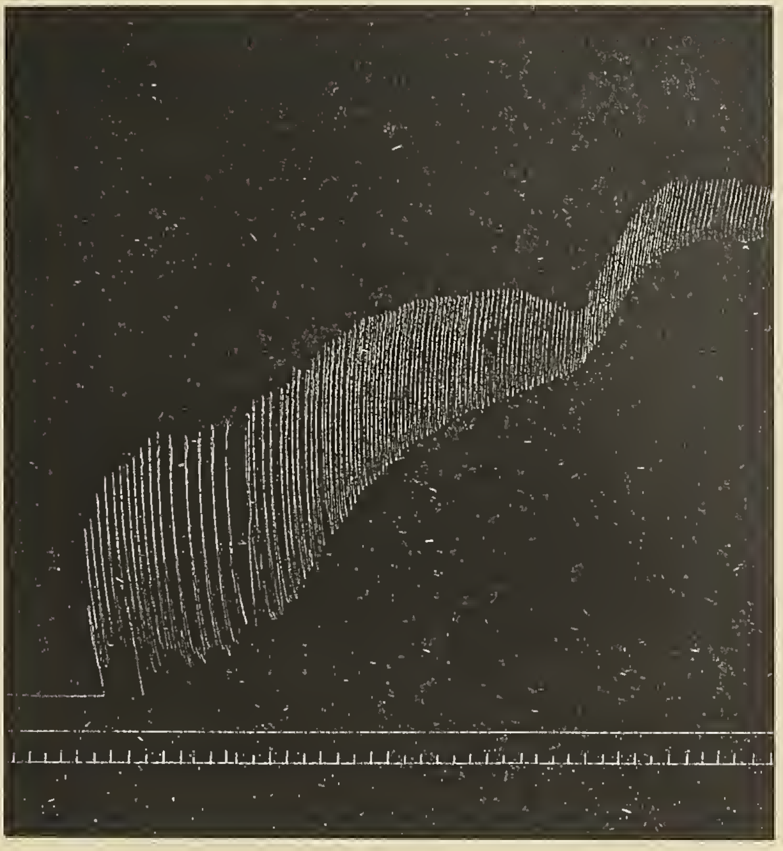


Fig. 72. — Grafica ottenuta, per mezzo della leva, da un pezzo di arteria coronaria stomacica di bue, immerso nel liquido del pericardio pure di bue. — Movimenti ritmici spontanei. — Col succedersi di questi movimenti il tono va progressivamente aumentando Ogni segno sulla linea del tempo corrisponde a due minuti primi. (Da un lavoro di A. Roncato di prossima pubblicazione).

dovrebbero compiere per mezzo delle fibrille, ed i secondi, che sono più lenti, si dovrebbero compiere invece per mezzo del sarcoplasma delle fibre muscolari.

Oltre di ciò, Siccardi e Loredan, siccome ho già accennato a pag. 804, confermarono con la grafica l'attitudine di alcuni stimoli chimici di produrre, a piccola dose, abbassamento del tono e, a dose maggiore, innalzamento: attitudine che io avea, parecchi anni prima, dimostrata nella stricnina, per mezzo delle circolazioni artificiali. Questa attitudine fu da Siccardi e Loredan osservata in molti alcaloidi (nicotina. veratrina, eserina, pilocarpina, atropina), in alcuni estratti di organi (tiroide, testi-

(¹) Biedermann, *Elektrophysiologie*. Jena, 1895, pp. 136 e seg.
Bottazzi, *Le oscillazioni del tono atriale negli anfibii: teoria della funzione del sarcoplasma.* Morgagni, 1897.

colo), nei sali di K e nella bile, portando un prezioso contributo in appoggio alla dottrina della espansione attiva delle fibre muscolari ed ai concetti da me espressi intorno alla irritabilità.

Rispetto all'origine (neurogena o miogena) del tono e del ritmo dei vasi, dirò che, se nell'organismo vivente il tono dei vasi è di solito promosso dai centri nervosi, non si può, a mio avviso, escludere che tono e ritmo si possano verificare nei vasi anche indipendentemente da azioni nervose, dal momento che essi si manifestano in vasi isolati, nei quali non è stata dimostrata la presenza di gangli, e dal momento che essi si compiono anche 6-7 ore dopo che il vaso è stato dall'animale asportato, quando i gangli nervosi, che per avventura esistessero nelle pareti dei vasi, dovrebbero essere morti da parecchio tempo, in analogia a quanto si osserva negli animali a sangue caldo rispetto al ganglio ciliare (pag. 805).

La possibilità di un'origine muscolare del tono e del ritmo, e quindi anche dell'automatismo, parmi che non possa essere messa in dubbio dopo le osservazioni di Foster e Dew Smith (1), del Biedermann (2) e di altri, sui movimenti ritmici dei cuori isolati di molluschi e di artropodi, cuori nei quali non è stato ancora possibile di dimostrare la presenza di cellule nervose; dell'His e di His e Romberg sulla pulsazione del cuore di embrione di vertebrati prima che compaiano in esso cellule nervose, e sull'origine dei gangli cardiaci, non per formazione *in loco*, ma per migrazione dei gangli del simpatico lungo le arterie e le vene; dell'Engelmann (3) sulla pulsazione ritmica delle vene cave isolate della rana, nelle quali non è stato possibile di dimostrare cellule nervose; del Fano (4) sullo sviluppo embrionale della funzione cardiaca; del Goltz (5) sul ristabilimento del tono dello sfintere dell'ano, nei cani, dopo l'asportazione della metà inferiore del midollo spinale; e di U. Stefani (6) sul progressivo ristabilimento del tono dello sfintere dell'iride, nei cani e nei gatti, in seguito a prolungata atropinizzazione dell'occhio, mentre rimangono sempre senza effetto sull'iride le stimolazioni dei nervi ciliari.

Tono e ritmo sono proprietà tanto dei vasi quanto del cuore; il tono ha certo, nei vasi, una importanza funzionale maggiore del ritmo, e il ritmo, nel cuore, ha una importanza funzionale maggiore del tono; ma della esistenza di un tono del cuore parmi che non si possa dubitare dopo i risultati da me ottenuti registrando le curve cardiovolumetriche, i quali hanno dimostrato che il cuore può caricarsi e scaricarsi di quantità di sangue progressivamente maggiori e progressivamente minori, indipendentemente da mutamenti nella frequenza delle sue rivoluzioni (pag. 698); e della

(1) Foster e Dew Smith, *On the behaviour of the heart of mollusks unter the influence of elektric courrents*. Proceed. roy. Soc. London, 1875.

(2) Biedermann, *Beiträge zur allg. Muskel- und Nervenphysiologie: Ueber das Herz von « Helix pomatia »*. Atti dell'Accademia di Vienna » B. 89, 1884.

(3) Engelmann, *Ueber die Ursprung der Herzbewegungen* etc. (Ricerche del laborat. di fisiologia della Università di Utrecht, IV, pag. 189, 1896). Le osservazioni di His e Romberg sono citate in questo lavoro.

(4) Fano, *Sullo sviluppo della funzione cardiaca dell'embrione*. Sperimentale, 1885.

(5) Goltz und Ewald, *Der Hund mit verkürzten Rückenmark*. Archivio di Pflüger, B. 63, 1896.

(6) U. Stefani, *Come si comporti il muscolo sfintere dell'iride in seguito all'atropinizzazione prolungata dell'occhio*. Giubileo del prof. P. Albertoni, Bologna 1901.

attitudine dei vasi, in genere, di produrre movimenti ritmici non si può certo dubitare dopo le grafiche ottenute dai vasi isolati.

Infine parmi anche meritevole di essere rilevato che tanto per le fibre muscolari vasali quanto per quelle del cuore sono stati dimostrati, oltre agli stimoli costrittori, anche stimoli *espansori*, e che, tanto per le une quanto per le altre, esistono due distinte innervazioni: una *espansoria*, inibitrice del cuore e dilatatrice dei vasi; ed una *motoria*, acceleratrice del cuore e costrittrice dei vasi.

***

2. Sensibilità dei vasi. — P. Heger [1], nel 1887, avendo osservato che, sottoponendo i vasi dell'arto posteriore a circolazioni arificiali con sangue defibrinato a cui era stata aggiunta della nicotina, oppure iniettando in essi una soluzione di nitrato d'argento (0,1-1 %) in tale quantità da non oltrepassare i capillari, si producono mutamenti nell'altezza della pressione arteriosa e nella frequenza dei movimenti del cuore, concluse che i vasi sono sensibili, o, per meglio dire, capaci di produrre azioni riflesse, confermando così quanto in precedenza era stato ammesso da Latschenberg e Dehana in rapporto all'azione riflessa della pressione sanguigna (pag. 794).

Siccome ho già avuto occasione di notare, una sensibilità da parte dei vasi avrebbe nella fisiologia una notevole importanza, perchè per mezzo di essa sarebbe possibile una regolazione automatica della pressione sanguigna; la discesa di questa potrebbe determinare in via reflessa una costrizione vasale e quindi ritorno della pressione al grado normale, e rispettivamente (*autogoverno della pressione sanguigna*).

Ma le conclusioni di Latschenberg e Dehana, relative all'azione vasomotoria riflessa della pressione del sangue sulle pareti vasali, non furono confermate dalle ricerche da me fatte sull'azione riflessa di detta pressione (pag. 794); e contro quelle dell'Heger si può osservare che i mutamenti nell'altezza della pressione arteriosa e nella frequenza dei movimenti del cuore potevano dipendere da qualche piccola quantità di nicotina e di nitrato d'argento, passata dai vasi femorali nella circolazione generale per mezzo di qualche ramo anastomotico, o dal passaggio delle stesse sostanze nei tessuti circostanti attraverso i capillari.

L'Heger non ammette la prima possibilità, avendo osservato che i mutamenti della pressione del sangue si verificavano anche quando l'arto rimaneva unito all'organismo solamente per mezzo dello sciatico. Ma questa esperienza non esclude la possibilità di un passaggio delle dette sostanze nei tessuti circostanti attraverso i capillari, e quindi la possibilità di una irritazione, per mezzo delle stesse, dei nervi sensitivi della cute e dei muscoli.

Contro quest'ultima possibilità l'Heger fece notare che i mutamenti della pressione del sangue si verificano, anche quando viene iniettata nei vasi una quantità molto piccola di liquido medicato, una siringa di Pravaz, sotto bassa pressione, e che il nitrato d'argento non può attraversare i vasi perchè fa coagulare la sostanza

[1] P. Heger, *Einige Versuche über die Empfindlichkeit d. Gefässe.* Onoranze a C. Ludwig nel suo 75° anno, Lipsia 1887.

intercellulare. Ma questi particolari non possono, evidentemente, avere valore dimostrativo.

Nel 1896, Spallitta e Consiglio (¹) pubblicarono delle ricerche in conferma delle conclusioni dell' Heger; ma siccome esse furono eseguite con lo stesso metodo, così sono anche passibili della stessa critica.

Concludendo, dalle esperienze di Latschenberg e Dehana, dell' Heger e di Spallitta e Consiglio, non si può ritenere dimostrato che i vasi siano sensibili; mentre dalle mie esperienze è dimostrato che riflessi vasali non si producono in seguito a mutamenti della pressione e neppure in seguito a mutamenti della temperatura del liquido circolante nei vasi, che non oltrepassino notevolmente i limiti fisiologici (pp. 791 e 794), mutamenti che dovrebbero costituire stimoli, dirò così, specifici dei supposti nervi sensitivi dei vasi; e perciò, a mio avviso, fino ad ora almeno, non si può ammettere l'esistenza di una sensibilità vasale (²).

***

3. **Movimenti vasali d'origine locale e d'origine centrale.** — Dopo la scoperta dei nervi e dei centri vasomotori, fino a pochi anni or sono, si riteneva che i movimenti fisiologici dei vasi fossero prodotti (se non in via esclusiva, in via almeno generale) da stimoli che eccitassero i centri vasomotorii in via diretta, oppure reflessa (³).

In seguito alla dimostrazione che i vasi isolati reagiscono a stimoli trasportati ad essi dal sangue, si dovette riconoscere la possibilità anche di una origine locale dei movimenti vasali, e quindi ammettere che nell'organismo si possano compiere movimenti vasali, anche indipendentemente dai centri nervosi e dai nervi vasomotori.

L'importanza dei movimenti vasali d'origine locale andò progressivamente crescendo, non solo per il sempre maggiore numero di stimoli che l'esperienza dimostrava capaci di eccitare direttamente i vasi, ma anche per la natura fisiologica di molti di essi, come dell'urea, del sangue dispnoico, degli estratti di organi, dell'adrenalina ecc.

Nel tempo stesso che i movimenti vasali d'origine locale andavano aumentando di importanza, veniva dall'esperienza ristretto il campo dei movimenti vasali d'origine riflessa. La temperatura, che si credeva agire sui movimenti vasali specialmente in via riflessa, fu invece dimostrato che agisce sui vasi specialmente in via diretta (pag. 791); e la pressione, che pure si credeva agire sui vasi in via riflessa, fu invece dimostrato che in questo modo non spiega sui vasi alcuna azione (pag. 794); e in conseguenza di tutto ciò non poteva a meno di perdere credito la dottrina della sensibilità vasale, che era stata accolta con molto favore.

(¹) Spallitta e Consiglio, *I nervi vasosensitivi*. Palermo, 1896.

(²) A. Stefani, *Azione della pressione arteriosa sui vasi e sul cuore*. Atti dell' Istituto veneto, tomo VII, 1896.

Recenti esperienze, fatte dal dott. Roncato, hanno dimostrato che riflessi vasali non si producono neppure causticando l'epitelio delle arterie, messo allo scoperto per mezzo di un taglio longitudinale delle stesse, nè sostituendo nelle circolazioni artificiali il sangue bene ossigenato con soluzione fisiologica Questo ultimo fatto è già stato notato anche a pag. 801.

(³) I movimenti vasali dipendenti dallo stato dell'animo si producono in modo analogo ai riflessi, vale a dire, in causa di eccitazioni che arrivano ai centri vasomotori partendo dalla corteccia cerebrale, anzichè dalle terminazioni periferiche di nervi centripeti.

È meritevole di considerazione il fatto che i vasi dei diversi organi non reagiscono nello stesso modo ad un determinato stimolo: così l'urea (pag. 778) fa dilatare i vasi dei reni più degli altri vasi; e così l'adrenalina produce dilatazione dei vasi del cuore, mentre produce costrizione degli altri vasi (1). Anche nei vasi si notano quindi delle *differenze specifiche*, come nei muscoli e come nei nervi; differenze che sono, con molta probabilità, in relazione con la funzione dell'organo a cui essi portano il sangue.

Data l'attitudine dei vasi di reagire direttamente a stimoli chimici circolanti nel sangue, e specialmente agli estratti di organi a secrezione interna, e date le differenze specifiche fra i vasi dei diversi organi, è probabile che i mutamenti nella distribuzione del sangue, collegati con le funzioni degli organi, siano regolati, specialmente, da movimenti vasali d'origine locale, e che ai centri nervosi sia riservato invece, specialmente, l'ufficio di regolare quei movimenti vasali che sono coordinati coi bisogni generali, specialmente, della circolazione.

* * *

4. **Sulla attitudine di uno stesso stimolo circolante nel sangue di spiegare contemporaneamente azioni centrali e locali di carattere opposto.** — Da quanto ho detto, a pp. 778 e 781, risulta che l'urea ed il sangue dispnoico stimolano i centri nervosi producendo costrizione vasale, e stimolano anche direttamente i vasi producendo dilatazione vasale; e da quanto ho detto, a pp. 750 e 751, risulta che la temperatura e la pressione stimolano il centro bulbare inibitore dei movimenti del cuore rallentando i battiti cardiaci, e stimolano anche direttamente il cuore, facendo aumentare la frequenza dei medesimi.

Uno stesso stimolo, circolando nel sangue, può dunque stimolare contemporaneamente i centri nervosi e gli organi da questi innervati, producendo, con la stimolazione degli uni, fenomeni opposti a quelli che produce con la stimolazione degli altri, per cui l'effetto di esso nell'organismo viene ad essere la risultante di azioni opposte. E su questa attitudine di uno stesso stimolo di produrre fenomeni opposti credo opportuno di chiamare l'attenzione, perchè essa interessa, in generale, la genesi dei fenomeni che si verificano negli organismi; perchè essa può spiegare come un medesimo stimolo possa produrre effetti diversi, e persino di carattere opposto; e perchè essa non può essere senza significato funzionale, dal momento che si verifica in stimoli di natura fisiologica, come l'urea, la dispnea, la temperatura e la pressione del sangue (2).

Data questa attitudine, si comprende come i fenomeni fisiologici possano riconoscere una genesi più complessa di quanto sembra: possano, cioè, essere la risultante di azioni diverse, anzichè effetto di una azione unica.

E riguardo alla possibilità di spiegare con essa gli effetti diversi e talora opposti, che in certi casi si verificano negli organismi per opera di uno stesso stimolo, basta

(1) Langendorff, *Ueber die Innervation der Koronargefässe.* Zentralbl. f. Physiol. XXI, an. 1908, pag. 551.

(2) A. Stefani, *Attitudine di uno stesso stimolo di agire contemporaneamente sui centri nervosi e sugli organi da questi innervati, producendo fenomeni di carattere opposto.* Atti dell'Istituto veneto, ann. 1914-15.

considerare che ogni risultante varia necessariamente col variare delle sue componenti, e che le componenti, quando sono costituite da fatti fisiologici, variano col variare della eccitabilità degli organi da cui questi derivano. In conseguenza di ciò, se ordinariamente prevale l'azione dello stimolo sui centri nervosi, per un abbassamento della eccitabilità di questi può diventare invece prevalente l'azione opposta dello stesso stimolo sugli organi dai centri innervati; ed uno stimolo, che ordinariamente produce vasocostrizione, può quindi produrre invece vasodilatazione. Oltre di ciò, come ben si capisce, se per qualche causa rimane eliminata una delle due azioni, si avranno effetti opposti a quelli che si hanno quando viene eliminata l'altra.

Il significato fisiologico delle azioni opposte di uno stesso stimolo non è sempre evidente, e su di esso conviene sempre esprimersi con qualche riserva.

In rapporto all'urea, non posso che ripetere quanto ho detto, a pag. 779: che cioè, in conseguenza delle sue azioni opposte sui vasi, essa, accumulandosi nel sangue, viene a produrre nel circolo condizioni che favoriscono la sua eliminazione per opera dei reni, vale a dire, dilatazione dei vasi renali con innalzamento della pressione arteriosa.

Per quanto si riferisce alla dispnea, ricordo egualmente quanto ho detto a pag. 782: che cioè, in conseguenza della sua azione locale dilatatrice dei vasi, essa deve favorire la formazione del circolo collaterale nei vasi anemizzati per l'occlusione dell'arteria rispettiva. In questo caso l'azione locale vasodilatatrice della dispnea non può essere neutralizzata dall'azione centrale vasocostrittrice della stessa, perchè questa manca.

Rispetto alle azioni opposte della temperatura sui movimenti del cuore, a pag. 751, ho già rilevato che l'azione centrale rallentatrice dei battiti del cuore, che la temperatura spiega eccitando il centro bulbare inibitore dei movimenti del cuore, costituisce un meccanismo di protezione del cuore contro l'esaurimento che si potrebbe in esso verificare in conseguenza dell'aumento della frequenza delle rivoluzioni cardiache, prodotto dall'azione che la temperatura spiega direttamente sul cuore; ed ho pure rilevato l'importanza di questo meccanismo di protezione nella febbre. Il pericolo di morte nelle malattie febbrili insorge quando il centro bulbare inibitore del cuore, per diminuzione della sua eccitabilità, più non riesce a frenare la frequenza dei battiti cardiaci, prodotta dall'azione diretta della temperatura sul cuore.

Finalmente, rispetto alle azioni opposte della pressione, a pag. 750, ho dimostrato che l'azione rallentatrice, che spiega la pressione arteriosa stimolando il centro bulbare del cuore, protegge il cuore contro l'esaurimento che si potrebbe in esso verificare per l'aumento della frequenza delle rivoluzioni cardiache, il quale viene prodotto dall'azione diretta che la stessa pressione spiega sul cuore, e dovrebbe avere, altrimenti, per conseguenza un ulteriore innalzamento della pressione arteriosa, costringendo così il cuore ad un lavoro necessariamente esauriente.

Considerando queste cose, parmi di potere ammettere che anche l'attitudine di uno stesso stimolo circolante nel sangue di eccitare contemporaneamente i centri nervosi e gli organi da questi innervati, producendo con la stimolazione degli uni effetti opposti a quelli che produce con la stimolazione degli altri, fa parte dei meccanismi, per mezzo dei quali si esplica nell'organismo l'azione del potere regolatore.

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76) Parte 1ª Transunti.
2ª Memorie *della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali.*
3ª Memorie *della Classe di scienze morali storiche e filologiche.*
Vol. V. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — Transunti. Vol. I-VIII. (1876-84).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — Rendiconti. Vol. I-VII. (1884-91).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali* Vol. I-VII.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche* Vol. I-X.

Serie 5ª — Rendiconti *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali* Vol. I-XXV. (1892-1916). Fasc. 12°. Sem. 2°.
Rendiconti *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche* Vol. I-XXV. (1892-1916). Fasc. 5-6.
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali* Vol. I-XII. Fasc. 2.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XII. Vol. XIV. Vol. XV. Fasc. 1-3.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia è di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

Ermanno Loescher & C.° — *Roma, Torino e Firenze.*
Ulrico Hoepli. — *Milano, Pisa e Napoli.*

MEMORIE DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

(ANNO CCCXIII 1916)

SERIE QUINTA — VOLUME XI — FASCICOLO XIII.

LUIGI LOMBARDI

RICERCHE INTORNO AI SOLENOIDI

COMPOSTI

DI MATERIALE MAGNETICO

Smithsonian Institution
SEP 25 1924
National Museum

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1916

Questo fascicolo contiene il frontespizio, separato, e l'indice dell'intiero volume XI.

RELAZIONE

presentata al Presidente durante le ferie accademiche del 1916, dal Corrispondente G. Grassi, a nome anche del Socio P. Blaserna, sulla Memoria del prof. Luigi Lombardi, intitolata: *Ricerche intorno ai solenoidi composti di materiale magnetico.*

Lo scopo che l'autore si propone è di determinare la resistenza e la reattanza effettiva dei solenoidi, formati con grossi conduttori di ferro percorsi da correnti alternate di frequenza variabile, senza molto scostarsi però dalle frequenze delle ordinarie correnti industriali.

In una prima parte del suo lavoro il Lombardi fa una larga rassegna critica degli studî già pubblicati sullo stesso argomento, e che sono per la maggior parte di carattere teorico. Nella seconda parte descrive le esperienze eseguite e ne discute i risultati, mettendoli a riscontro con quelli che si possono ottenere dal calcolo, servendosi delle formole proposte dai diversi autori.

È una ricerca interessante, perchè i fenomeni che avvengono in un conduttore magnetico, come il ferro, percorso da corrente alternata, all'analisi, fatta coi mezzi che la scienza oggi ci fornisce, presentano complicazioni tali, che la teoria urta contro enormi difficoltà, anche per risolvere i casi apparentemente più semplici. E infatti dalla rassegna che il Lombardi fa nella prima parte della sua Memoria appare evidente che, per giungere a qualche risultato praticamente applicabile, la teoria ha dovuto limitarsi, almeno finora, a considerare pochi casi molto semplici, alcuni dei quali non corrispondono neppure a condizioni realizzabili. E nel caso particolare dei solenoidi le ipotesi semplificative introdotte nella teoria, per riuscire a formole che permettano di calcolare la resistenza e la reattanza effettiva, non sembrano attendibili, perchè i risultati non s'accordano con quelli dell'esperienza. Perciò anche quella parte della discussione che conduce a risultati, per così dire, negativi, non manca di interesse.

Le esperienze poi eseguite dall'autore, e la loro discussione, portano a conclusioni di notevole importanza; poichè, mentre da un lato se ne può giovare la scienza, per ricercarvi un controllo ai risultati delle indagini teoriche, dall'altro permettono al-

l'autore di stabilire alcune norme abbastanza sicure per giungere, con sufficiente approssimazione, alla conoscenza degli elementi elettro-magnetici dei solenoidi, conseguendo così lo scopo che l'autore si era proposto.

La Commissione, per queste considerazioni, è di parere che la Memoria del prof. Lombardi sia meritevole di essere pubblicata negli Atti dell'Accademia.

Ricerche intorno ai Solenoidi composti di materiale magnetico.

Memoria del prof. LUIGI LOMBARDI

PREMESSA

In un mio lavoro precedente *Su la disuniforme distribuzione delle correnti alternate e dei flussi periodici di induzione nelle aste cilindriche di ferro* (¹) ho dimostrato che i fenomeni relativi possono essere rigorosamente analizzati in base alla teoria di Maxwell e di Kelvin, portando debitamente in conto l'energia dissipata per isteresi magnetica nella determinazione della resistenza elettrica equivalente, e attribuendo alla permeabilità il valor medio rilevato mediante i soliti procedimenti statici, entro all'intervallo corrispondente di variazione del campo. Dalla variabilità di quel valore scaturisce a sua volta un'alterazione della induttanza interna apparente, in quanto questa si voglia mettere in relazione con la forza elettromotrice di reattanza, che unicamente è suscettibile di una misura diretta; per la determinazione teorica di questa si rende perciò necessaria la conoscenza di quella legge di variazione, a meno che non si ritenga sufficiente l'approssimazione che si può ottenere, per conduttori magnetici di grande sezione e permeabilità, uguagliando la reattanza alla resistenza ohmica effettiva di uno strato periferico, il cui spessore si calcola con la massima semplicità mediante la formola di Rayleigh. Con artifizî analoghi si può calcolare la riluttanza equivalente delle aste cilindriche, attraversate da flussi periodici di induzione.

La teoria della propagazione delle correnti alternate, attraverso a conduttori di notevoli dimensioni, da cui scaturisce per analogia quella relativa ai flussi periodici, fu sviluppata da Maxwell e da Kelvin unicamente per le aste cilindriche ad asse rettilineo, e generalizzata da Rayleigh per una lamina piana, di superficie indefinita, la quale peraltro non può essere considerata se non come un caso limite, verso cui tende un conduttore limitato da una superficie di piccola curvatura e di dimensioni considerevoli.

Per ragioni di semplicità io ho eseguito le mie precedenti misure sopra conduttori di sezione circolare, incurvati a cerchio di grande diametro, ai quali i risultati

(¹) Rendic. della R Accad. delle Scienze. Napoli, genn.-apr. 1915. *L'Elettrotecnica*, 1915, nn. 17, 18, 19.

della teoria si possono ancora applicare con tutta l'approssimazione, prescindendo dalla curvatura della linea mediana.

La cosa cambia però, quando si tratta di conduttori piegati secondo un profilo diverso, e praticamente assume una grande importanza il caso dei solenoidi a spire circolari di raggio limitato, soprattutto quando è considerevole il numero, e piccola la distanza di queste, in modo che, con le azioni mutue degli elementi che appartengono ad una medesima spira, si compongano quelle delle altre spire contigue, modificando internamente ed esternamente al conduttore la distribuzione del campo. E siccome tale disposizione è sovente impiegata, allo scopo di racchiudere in piccolo spazio una grande reattanza, e in taluni casi si fa concorrere all'aumento di questa la permeabilità del materiale, onde il conduttore è composto, a me non parve inutile, nell'occasione in cui di taluni sistemi così fatti mi dovetti occupare per ragione professionale, istituire sopra di essi misure accurate, le quali servissero di complemento a quelle gia eseguite sopra i conduttori magnetici circolari.

Affrontanndo sperimentalmente lo studio di questa questione, la quale, dal punto di vista teorico, offre una complicazione incomparabilmente maggiore di quella relativa ai conduttori cilindrici, già consacrata in tutti i classici trattati di fisica matematica, ho dovuto per mio conto eseguire una minuziosa ricerca bibliografica dei lavori già pubblicati sopra il medesimo argomento, e di essa non credo fuor di luogo riportare un cenno nella prima parte di questa Memoria, nella seconda parte della quale si contiene la descrizione delle ricerche sperimentali e la discussione dei risultati.

PARTE PRIMA

CENNI BIBLIOGRAFICI

1. — Ricerche intorno alla resistenza e induttanza delle spirali percorse da correnti alternate.

Una differenza considerevole fra la resistenza, offerta alle correnti di alta frequenza da un filo metallico rettilineo e da un conduttore analogo avvolto ad elica, sembra essere stata per la prima volta nel 1902 constatata da Battelli e Magri (¹) in occasione di una loro ricerca su le scariche oscillatorie, e venne un anno dopo confermata da Dolezalek (²), il quale la rilevò in occasione di misure di autoinduzione, eseguite con correnti alternative sopra alcuni rocchetti, e diede per la valutazione di essa una formola empirica.

Wien (³) per il primo, discutendo i risultati di Dolezalek, formulò una teoria analitica del fenomeno, la quale permise di rendere conto quantitativamente delle variazioni di resistenza, rilevate da questi sopra i solenoidi a parecchi strati di filo sottile, laddove per solenoidi a uno strato solo, soprattutto se le spire sono costituite con filo di sezione considerevole, la serie dei termini, che contengono le potenze successive alla frequenza, ha coefficienti che dipendono in modo complicato dallo spessore del filo e dal passo dell'elica, ed è assai poco convergente, per cui l'approssimazione ottenuta con un numero limitato di termini è assai poco soddisfacente.

Wien ha qui introdotto un artificio di grande semplificazione, immaginando ogni gruppo di spire, appartenenti al medesimo strato, scomposto mediante superficie cilindriche coassiali in altrettanti solenoidi di spessore infinitesimo, ognuno dei quali, nell'ipotesi in cui la lunghzza del sistema sia indefinitamente grande, egli considera immerso in un campo uniforme. e attraversato da correnti di uniforme densità, per cui egli ne valuta la resistenza elementare, come se ognuno di essi fosse percorso da corrente continua.

Il prof. Battelli, in un lavoro che sarà citato più avanti (⁴), ha già fatto rilevare la inattendibilità di tale ipotesi, per il fatto che il campo magnetico, e quindi anche la distribuzione della corrente nell'interno di ogni filo, sono notevolmente perturbati dalla azione stessa della corrente che individualmente lo attraversa, per cui l'energia dissipata e la resistenza equivalente devono risultare a loro volta considerevolmente alterate. In verità, sopra un solenoide a uno strato di spire, composte

(¹) Memorie della R. Accad. delle Scienze di Torino, V, 51, pag. 371.
(²) Annalen der Physik., vol. 12, pag. 1142.
(³) Ann. d. Phys., vol. 14, pag. 1.
(⁴) Rendic. dei Lincei, vol. XV, 1906, 1° sem., fasc. 3°.

con filo di 1 mm. di diametro, mediante correnti alternate della frequenza di 4000 a 8000 periodi, Wien misurò una variazione di resistenza inferiore del 40 al 60 % a quella calcolata. Della induttanza interna lo stesso autore chiarì doversi manifestare, per il fenomeno della disuniforme distribuzione delle correnti, una piccola diminuzione, ma non ne eseguì alcuna determinazione quantitativa.

Sommerfeld (¹), prendendo per la prima volta nel 1904 in esame lo stesso problema, ne rese sostanzialmente più semplice la risoluzione in un caso ideale, che praticamente non è facile a realizzare, ma che ha il vantaggio di potersi sottoporre a una trattazione rigorosa.

Egli cioè considerò un solenoide, costituito da spire di sezione quadrata, tutte disposte in un medesimo strato e combacianti fra loro, in modo da formare un tubo cilindrico di metallo di lunghezza indefinita, ove la corrente ed il campo risulterebbero in realtà distribuiti in modo uniforme attraverso ai cilindri elementari coassiali, secondo il concetto di Wien.

La trattazione può farsi in base alle equazioni di Maxwell, con perfetta analogia a quella classica della propagazione longitudinale della corrente in un conduttore cilindrico o tubolare, che ha per effetto un campo magnetico tangenziale, eseguita da Kelvin, e fornisce per la resistenza di ogni spira una espressione abbastanza semplice, che non poteva avere conferma dalle esperienze precedenti di Wien e di Dolezalek, in quanto queste erano state esclusivamente eseguite sopra rocchetti a spire di sezione circolare, separate da strati isolanti, ma che, nel caso limite delle grandissime frequenze, si può opportunamente paragonare con quella di Rayleigh.

In verità, se il solenoide così fatto è percorso da una corrente trasversale di frequenza grandissima, questa si localizza unicamente nello strato periferico interno, la cui resistenza equivalente può essere calcolata con la formola di Rayleigh per le lamine piane, e il cui spessore risulta, in base alle notazioni già da me adoperate nel lavoro precedente:

$$\delta = \sqrt{\frac{\varrho}{2\pi\omega\mu}} \quad (^2).$$

Per una spira di sezione rettangolare, avente per larghezza parallela all'asse del solenoide l'unità, e per raggio interno r_1 ed esterno r_2, la resistenza diventa, in confronto di quella offerta a correnti continue:

$$R = \frac{2\pi r_1 \varrho}{\delta} = R_c \frac{r_2 - r_1}{\delta} = R_c \sqrt{\frac{2\pi\omega\mu}{\varrho}} (r_2 - r_1).$$

Ora questa è la formola limite data da Sommerfeld, introducendovi il fattore di permeabilità, da lui supposto uguale a 1, mentre, per frequenze limitate, ponendo coi nostri simboli:

$$\alpha = 2(r_2 - r_1)\sqrt{\frac{2\pi\omega\mu}{\varrho}}$$

(¹) Ann. d. Phys., V, 15, pag. 673.

(²) ϱ resistività; μ permeabilità; ω pulsazione.

Sommerfeld dà:

$$\frac{R}{R_c} = \frac{1 + \frac{\alpha^4}{5!} + \frac{\alpha^8}{9!} + \frac{\alpha^{12}}{13!}}{1 + 2\frac{\alpha^4}{6!} + 2\frac{\alpha^8}{10!} + 2\frac{\alpha^{12}}{14!}} .$$

Nel caso di frequenze relativàmente piccole, basta portare in conto i primi termini. con che si ha:

$$\frac{R}{R_c} = 1 + \frac{2}{3}\frac{\alpha^4}{5!} ;$$

nel caso di frequenze grandissime :

$$\frac{R}{R_c} = \frac{\alpha}{2} .$$

Volendo paragonare questi coi risultati di Wien, se si sostituisce ad ogni spira di sezione quadrata quella di sezione circolare equivalente, si trova con la prima formola di Sommerfeld una variazione della resistenza di $1/3$ più grande; rispetto ai valori sperimentalmente determinati da Wien, quelli calcolati con la formola di Sommerfeld appaiono di 50 a 100 % più alti, per cui l'autore propose di introdurre nei calcoli, relativi a spire di sezione circolare con moderate frequenze, un fattore di correzione, dell'ordine medio di grandezza 0.58, e, per frequenze più elevate, come quelle impiegate da Battelli e Magri, 0.65.

Anche del calcolo della resistenza di una spirale a parecchi strati, eseguito da Sommerfeld con lo stesso criterio, il risultato per frequenze notevoli eccede quello analogo di Wien di $1/3$, per cui l'autore propone di introdurvi un coefficiente di riduzione 0.75; quello per frequenze moderate si confonde con quello di Rayleigh per i fili rettilinei.

Neanche Sommerfeld, in questa sede, si occupò delle variazioni della induttanza. dovute alla speciale distribuzione della corrente alternata nelle spire del solenoide; però, prendendo le mosse dal suo lavoro, e seguendo lo stesso metodo, due anni dopo Coffin (¹), calcolò con formole analoghe questa variazione, e tracciò la curva della funzione Q, che scaturisce dallo sviluppo delle funzioni iperboliche. e in relazione alla quale la differenza fra la induttanza totale e quella esterna, che unicamente si realizzerebbe per frequenza infinita, tenendo conto della permeabilità della sostanza, che l'autore ha trascurato, risulta espressa da:

$$\frac{L_\omega - L_\infty}{L_\infty} = \frac{2}{3}\,\frac{r_2 - r_1}{r_1}\,Q\mu .$$

Per piccole frequenze, quando $x < 2$, si può ritenere:

$$Q_1 = 1 - \frac{x^4}{630} ,$$

(¹) Bulletin Bureau of Stand, vol II, pag. 275.

e per grandi frequenze, quando $x > 7$:

$$Q_2 = \frac{3}{x}$$

dove:

$$x = 2(r_2 - r_1)\sqrt{\frac{2\pi\omega\mu}{\varrho}}.$$

Per valori intermedî di x conviene calcolare la funzione con l'espressione:

$$Q = \frac{3}{x}\,\frac{\mathrm{sen}_{ip}\,x - \mathrm{sen}\,x}{\cos_{ip}\,x - \cos x}.$$

Sostituendo per L il valore che assume la induttanza del solenoide, composto di N spire sottilissime di raggio r, per ogni unità di lunghezza:

$$L_{\infty} = 4\pi^2 N^2 r_1^2$$

si ha, nel caso delle grandi frequenze, la induttanza interna:

$$L_{\omega} - L_{\infty} = L_i = 4\pi^2 N^2 r_1 \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{2\pi\omega\varrho}}.$$

Per ogni spira, avente secondo l'asse del solenoide una larghezza unitaria, si ricava la reattanza interna ponendo $N = 1$:

$$\omega L_i = 2\pi r_1 \sqrt{\frac{2\pi\omega\mu}{\varrho}},$$

e questa corrisponde esattamente al valore limite della resistenza ohmica effettiva, calcolato con la formola di Rayleigh, con cui si confonde anche quello calcolato con la formola di Sommerfeld.

Per un solenoide a spire di sezione quadrata, esattamente combacianti secondo il concetto di Sommerfeld e di Coffin, la resistenza e la reattanza interna effettive, per correnti di frequenza grandissima, tendono adunque a un valore quattro volte più grande di quello che competerebbe, in base alla formola limite di Rayleigh, al medesimo conduttore coll'asse disteso secondo una linea retta. Le formole di entrambi gli autori però non possono evidentemente applicarsi, senza opportuni fattori di riduzione, ai solenoidi costituiti con spire di sezione circolare, e nemmeno a quelli formati da spire di sezione rettangolare o quadrata le quali non siano fra loro esattamente combacianti; anche la influenza delle estremità, in quanto il solenoide abbia una lunghezza finita, è in esse lasciata completamente fuori considerazione.

Black (¹) ha perciò intrapreso in quello stesso anno una serie sistematica di misure comparative, circa il comportamento dei fili rettilinei di rame e dei solenoidi

(¹) Ann. der Phys., vol. 19 pag. 157.

di diversa configurazione al passaggio di correnti oscillanti, utilizzando per il confronto delle resistenze il metodo calorimetrico. Operando con correnti oscillatorie della frequenza 1 e 5×10^6 sopra conduttori del diametro di 0.15 e 0.3 cm. avvolti ad elica con passo di 0 25, 0.30 e 0.50 nel primo caso, e di 0.50 e 1.0 cm. nel secondo, egli ha constatato, rispetto ai fili rettilinei del medesimo diametro, valori effettivi della resistenza 1.20 a 1.90 volte maggiori; il rapporto però, che l'esperienza dimostrò dipendere marcatamente dal passo, e pochissimo dal diametro delle spire, apparve in ogni caso notevolmente minore di quello calcolato con la formola di Sommerfeld, e il fattore di correzione da introdurre in questa risultò, dai passi più piccoli ai più grandi, variabile da 0.56 a 0.38, e quasi indipendente dalla frequenza: tanto più grande poi, quanto più grosso il filo e lunga la spirale.

Il prof. Battelli dal canto suo, riprendendo in esame il medesimo problema, del quale le prime esperienze eseguite col Magri avevano messo in chiaro la importanza, presentava nell'anno 1906 alla R. Accademia dei Lincei 4 Note (¹), nella 1ª delle quali egli critica i lavori teorici di Wien e Sommerfeld; nella 2ª svolge una teoria propria, intesa a generalizzare alla famiglia delle superficie, per ogni punto delle quali la densità di corrente è costante, la stessa legge del decremento esponenziale dell'ampiezza e lineare della fase, che vale, in base alla teoria di Rayleigh, per le cilindriche cossiali in un filo rettilineo di sezione circolare, e per i piani paralleli a quello di termine in una lastra piana di superficie indefinitamente grande; nella 3ª, valendosi di quella legge, mostra che la corrente di altissima frequenza, nel solenoide a spire di sezione circolare, si deve localizzare unicamente nella regione periferica interna, contigua al piano equatoriale di ognuna, e di esso calcola in valore approssimato la resistenza effettiva, la quale a quella del filo analogo, disteso in linea retta, dovrebbe avere un rapporto crescente come la radice quarta della frequenza, laddove, secondo la formola limite di Sommerfeld, il rapporto risulterebbe indipendente da questa; nell'ultima finalmente riporta i risultati di nuove esperienze, eseguite col metodo calorimetrico sopra solenoidi di rame, della lunghezza di 25 cm. e del diametro di 1.5 e 1.7 cm. circa, costituiti con fili di 0.78 e 0.97 mm., in confronto di fili rettilinei analoghi, attraversati dalla medesima corrente oscillante, e mediante queste il risultato teorico precedente appare verificato con sufficiente approssimazione. Disgraziatamente la teoria è appoggiata alla presupposta conoscenza delle funzioni, che individuano nell'interno del conduttore la f. e. m. indotta in ogni elemento di una spira, in dipendenza della corrente propria e di quella di tutte le spire esterne, e che l'autore lasciò indeterminate; perciò il risultato non si può applicare alla calcolazione della resistenza in valore assoluto.

Risale alla medesima epoca un pregevole lavoro sperimentale, presentato dai professori Battelli e Magri all'Accademia dei Lincei (²) intorno alla scarica oscillatoria nei conduttori di ferro, mediante il quale i due autori, operando sopra fili cilindrici del diametro di mm. 9.18 e 2.44, della lunghezza di alcuni metri, piegati in forma di cerchio o di quadrato, e deducendone il valore della induttanza in base al

(¹) Vol. XV dei Rendiconti; 1° sem., fascicoli 3°, 9° e 10°: 2° sem., fasc. 5°.
(²) Rendiconti, vol. XV, 2° sem., fasc 2°, 1906.

periodo misurato delle scariche oscillatorie di condensatori di nota capacità, lo paragonarono con quello di un circuito analogo di permeabilità unitaria, ricavando in base alla formola di Rayleigh la permeabilità apparente. Nelle prime serie di esperienze la durata del periodo, in presenza del ferro, non eccedette quella competente al circuito di permeabilità unitaria se non di 3 a 5 %, per cui l'aumento di reattanza, dovuto alla permeabilità del materiale apparve insignificante. Nelle ultime esperienze, sopra il conduttore di diametro più piccolo, la variazione del periodo si manifestò naturalmente più grande, e cioè di circa 10 %. e i valori apparenti della permeabilità, dedotti dal confronto delle frequenze, in corrispondenza delle massime intensità di campo calcolate (65 a 340 unità), risultarono dell'ordine di 600 a 70. Come scaturisce dalle considerazioni riportate nel mio lavoro precedente, tale deduzione non può farsi in modo rigoroso dalle misure di reattanza, se non si introduce un termine di correzione, dipendente dalla variazione differenziale della permeabilità in funzione della forza magnetica. Malgrado ciò l'ordine di grandezza della permeabilità, denunciato dai due autori, è perfettamente attendibile, e ci permetterà di trarre più avanti alcune conseguenze interessanti, circa l'efficacia dei materiali magnetici nella costruzione delle spirali di autoinduzione.

Picciati [1] ha affrontato il problema della resistenza del solenoide, da un punto di vista più generale di quello di Wien e di Sommerfeld, senza astrarre dalla configurazione circolare, che nella maggior parte dei casi ha la sezione delle spire, e dalla dissimmetria che nel loro interno assume il campo magnetico. Bensì, per diminuire in qualche modo la complicazione del problema analitico, la quale altrimenti diventa enorme, egli ha ancora supposto che il solenoide si componga di un unico strato di spire, le une alle altre immediatamente contigue, e che il diametro loro rispetto a quello del filo sia così grande, da poter trascurare la loro inclinazione rispetto all'asse del solenoide, e la loro curvatura.

Il solenoide ideale di Picciati si confonde adunque con uno strato di conduttori cilindrici, tangenti fra loro, e compresi fra due piani paralleli, intesi come limite di altrettante spire circolari di raggio indefinitamente grande, così che il campo magnetico, dovuto alla corrente che li attraversa, risulti uniforme ad una certa distanza in tutto lo spazio situato a destra di uno di quei piani (esterno al solenoide), e nullo in quello situato a sinistra dell'altro (interno al solenoide). La distribuzione della forza magnetica nell'interno dei singoli conduttori risulta naturalmente subordinata a quella della corrente e viceversa; essa può essere individuata, se si ammette che la forza magnetica tangenziale rimanga continua nel passaggio dal conduttore al dielettrico circostante, con che si hanno gli elementi per il calcolo della resistenza effettiva; l'espressione di questa è valida per qualunque frequenza, e si semplifica nel caso delle frequenze molto piccole, per cui la resistenza tende al valor limite che compete al conduttore attraversato da correnti continue, e nel caso delle frequenze elevatissime, per cui la resistenza tende a un limite, circa 2.5 volte maggiore di quello che compete ai fili cilindrici isolati, e distesi coll'asse secondo una linea retta.

[1] Nuovo Cimento, Tomo, XI, 1906, pag. 351.

La distribuzione del campo magnetico esternamente ai conduttori è subordinata a una funzione armonica, che deve soddisfare alla condizione solenoidale, e nell'espressione della quale compaiono dei coefficienti indeterminati, che dipendono dalla distribuzione del campo interno nei punti vicinissimi al filo. Il confronto dei risultati teorici con quelli dell'esperienza non si può adunque istituire senza introdurre, su la grandezza di quei coefficienti, ipotesi speciali. Se essi si suppongono nulli, con che il campo interno al solenoide, anche nella immediata vicinanza dei fili, risulta parallelo all'asse, i valori effettivi della resistenza così calcolati risultano inferiori a quelli di Sommerfeld, ma tuttavia superiori a quelli determinati sperimentalmente. La corrispondenza si può considerevolmente migliorare, se si assegnano altri valori a quei coefficienti, ma l'autore stesso giustamente osserva che la deduzione di essi dai risultati dell'esperienza equivale alla introduzione di un coefficiente empirico di correzione nella formola trovata per il caso del campo uniforme; coefficiente la cui grandezza numerica dovrebbe per avventura variare con la frequenza. Perciò lo studio importante del Picciati, che ha dischiuso un nuovo metodo alla ricerca teorica, è rimasto disgraziatamente privo di applicazioni pratiche immediate.

Sull'orma di lui, Sommerfeld [1] ha notevolmente allargata l'indagine, supponendo le spire situate a una distanza finita; portando in conto le componenti del campo esterno, le quali in presenza di un sistema discontinuo di conduttori, attraversati da corrente, non si possono annullare nella immediata contiguità di questi; e finalmente introducendo anche l'ipotesi della continuità della componente radiale della induzione nel passaggio dall'interno all'esterno del conduttore, con che le costanti del problema risultano perfettamente definite. Il problema della determinazione del campo magnetico, in presenza di quello speciale sistema di conduttori attraversati dalla corrente, acquista così una notevole analogia con quello della determinazione del campo elettrostatico in presenza di una rete di protezione, sviluppato da Maxwell [2].

Anche qui i coefficienti, che caratterizzano la distribuzione del campo, non si possono ottenere nel caso più generale, se non mediante le radici di un sistema di infinite equazioni lineari. La risoluzione però si semplifica grandemente nel caso delle correnti alternate di piccola frequenza, per il quale il rapporto della resistenza effettiva a quella offerta alle correnti continue, se h è il passo e $2r$ il diametro del filo, diventa:

$$\frac{R}{R_c} = 1 + \frac{1}{4}\,\frac{\pi^2\omega^2\mu^2}{\varrho^2}\,r^4 \left\{ \frac{1}{3} + \left(\frac{2\pi r}{h}\right)^2 + \frac{1}{216}\left(\frac{2\pi r}{h}\right)^4 + \cdots \right\}.$$

Nella formola trovata in origine da Wien quel rapporto è dato da:

$$\frac{R}{R_c} = 1 + 0.272\,\frac{\pi^2\omega^2\mu^2}{\varrho^2}\,r^4 \left(\frac{2\pi r}{h}\right)^2,$$

ossia compare solo il 2° termine, contenuto in parentesi nella formola di Sommerfeld,

(1) Ann. d. Phys. vol. XXIV, pag. 609, 1907.
(2) *Treatise*, Vol. I, § 203.

con un coefficiente di circa 9 % più alto, ma sono trascurati il 1°, il 3° e quelli contenenti le potenze superiori di $\frac{2\pi r}{h}$. La formola di Wien coincide adunque con sufficiente approssimazione con quella di Sommerfeld, solo per il caso di spire molto vicine e di frequenze molto limitate.

Nelle formole di entrambi gli autori è omesso il fattore di permeabilità, e Sommerfeld dichiara esplicitamente di averlo supposto eguale a 1, per evitare le grandi complicazioni che scaturiscono dalle masse magnetiche distribuite alla superficie.

Se la frequenza è molto alta, e le spire tangenti fra loro, l'equazione del problema può essere risolta ricorrendo alla teoria delle funzioni ellittiche a modulo, laddove nel caso più generale di $h > 2r$ è indispensabile ricorrere a quella più complicata delle funzioni automorfe, che l'autore riconobbe non essere peranco a tale oggetto sufficientemente sviluppata. Per il 1° caso, che coincide con quello discusso da Picciati, l'autore ha potuto in tal modo calcolare la espressione esatta della forza magnetica alla periferia del conduttore, della quale ha anche tracciata la curva; ad essa risulta proporzionale la densità di corrente, che appare quasi interamente localizzata nella regione periferica del conduttore, contigua al piano equatoriale, e rivolta verso il mezzo del solenoide. Il rapporto fra la resistenza effettiva e quella per correnti costanti diventa al limite:

$$\frac{R}{R_c} = 3.73\, r \sqrt{\frac{\pi \omega \mu}{2\varrho}},$$

ossia appare 3.73 volte maggiore di quello che competerebbe a un conduttore cilindrico isolato, laddove nel caso della sezione quadrata esso appariva 4 volte maggiore.

Per i valori moderati della frequenza quel rapporto non può calcolarsi secondo la teoria di Sommerfeld, senza conoscere tutta la serie dei coefficienti relativi alla distribuzione del campo, la quale dipende in modo complicato dal rapporto $\frac{2\pi r}{h}$.

Sommerfeld però, appoggiandosi ai valori limiti di quel primo rapporto, che diventa eguale all' unità per le spire situate una dall'altra a grande distanza $\left(\frac{2\pi r}{h} = 0\right)$, e raggiunge il valore numerico 3.73 nel caso or ora esaminato delle spire combacianti $\left(\frac{2\pi r}{h} = \pi\right)$, e giovandosi, per il calcolo, di alcuni valori intermedî dei risultati sperimentali di Black, ha tracciato per esso una curva di interpolazione, da cui ha dedotto i seguenti valori:

$\frac{2r}{h}$ =	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
φ =	1.0	1.0	1.1	1.27	1.45	1.67	1.92	2.2	2.6	3.1	3.73.

In tal modo la resistenza dei solenoidi a spire di sezione circolare dovrebbe, secondo la nuova teoria di Sommerfeld, che prende le mosse da quella incompleta di Pic-

ciati, calcolarsi per correnti alternate di alta frequenza mediante la formola molto semplice:

$$R = R_c \left[1 + \varphi r \sqrt{\frac{\pi \mu \omega}{2 \varrho}} \right]$$

la quale risulta con ciò sperimentalmente confermata dai risultati di Black. La nuova teoria non contraddice naturalmente alla primitiva, svolta dal medesimo autore per il caso delle spire di sezione rettangolare, le une con le altre combacianti, i cui risultati erano riassunti in formole omogenee alle attuali, e non potevano essere applicati al caso qui contemplato, senza venire affetti da opportune correzioni.

Cohen [1] dopo avere riscontrate le discrepanze che presentavano i risultati delle teorie ed esperienze precedenti, a eccezione di quella or ora citata di Sommerfeld, non peranco giunta a sua conoscenza, pubblicò durante quello stesso anno una teoria propria, ancora appoggiata alle equazioni di Maxwell; egli perciò considerò un solenoide abbastanza lungo, da poter trascurare l'influenza delle estremità, e composto di spire circolari, di sezione quadrata, e così vicine tra loro, da poter ammettere il campo nullo all'esterno, e all'interno uniforme e parallelo all'asse pure nella immediata vicinanza del conduttore, in conformità della ipotesi di Picciati.

L'aumento di resistenza effettiva, occasionato dalle correnti parassite che hanno origine dalla disuniforme distribuzione del campo interno al conduttore, viene nel caso delle correnti di frequenza qualunque determinato mediante una serie, contenente funzioni iperboliche, la quale nel caso di frequenze molto elevate si semplifica grandemente, fornendo per quella resistenza effettiva, in relazione a quella offerta alle correnti continue, il valore seguente, dove non è portata in conto la permeabilità:

$$R = R_c \left\{ 1 + 4 S^2 d^3 \sqrt{f \sigma} \sum_1^\infty \frac{1}{n^2} \right\}.$$

Quì f è la frequenza, σ la conduttività, d lo spessore del conduttore, S il numero di spire per unità di lunghezza, n uno qualunque dei numeri dispari successivi, per cui:

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n^2} = 1{,}234 .$$

Paragonato alla resistenza effettiva del conduttore analogo, disteso con l'asse in linea retta, quel valore diventa:

$$R = R' \frac{8 S^2 d^2}{\pi} \sum_1^\infty \frac{1}{n^2} = 3.14\, R' S^2 d^2 .$$

Il rapporto fra le resistenze effettive del solenoide e del filo rettilineo appare in tal modo indipendente dalla frequenza, e proporzionale al quadrato del rapporto fra la dimensione trasversale delle spire e la loro distanza, laddove Battelli, per i

[1] Bull. Bur. of Stand. vol. IV, pag. 161, 1907.

solenoidi a spire di sezione circolare, lo ritenne direttamente proporzionale alla radice quarta della frequenza, della permeabilità e della conduttività. In verità i rapporti, teoricamente calcolati da Cohen per due solenoidi di rame, aventi il filo del diametro di 2 e 3 mm. e le spire di diametro 5 cm. circa, non corrispondono con molta approssimazione con quelli da lui stesso sperimentalmente determinati alla frequenza di 896 e 1280 periodi, laddove la corrispondenza appare molto soddisfacente coi risultati di Wien, ricavati a frequenza molto più alta.

Nel caso limite, in cui le spire avessero la dimensione trasversale eguale al passo, e la frequenza fosse molto elevata, il rapporto di quelle resistenze tenderebbe al valore 3.14, laddove, secondo la teoria di Rayleigh, esso dovrebbe assumere il valore 4.

Nella stessa occasione, e seguendo un metodo analogo, Cohen ha parimenti calcolato teoricamente la variazione che subisce nel solenoide la induttanza interna, rispetto a quella che essa presenterebbe al passaggio di correnti continue, supponendo eguale ad 1 la permeabilità. Detta l la lunghezza assiale del solenoide, r il raggio interno delle spire, quella induttanza interna diventa:

$$L_i = 64\,S^3\,dr_1\,l \sum_{r}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^2\,n^2}\left(\frac{1}{\alpha_n^2+\beta_n^2}+1\right).$$

Qui α e β sono i termini di una serie, contenente i multipli dispari di $\frac{\pi}{d}$, e nel caso di alte frequenze assumono il valore comune:

$$\alpha = \beta = \sqrt{2\pi\,\omega\,\sigma}$$

per cui, trascurando il termine frazionario in parentesi e riducendo, si ottiene la espressione molto semplice e adatta per i calcoli pratici:

$$L_i = \frac{32 \times 1.234\,S^3\,dr_1\,l}{\pi\,\omega\,\sigma}.$$

Questa, al pari della formola di Coffin, non ebbe finora, per quanto a me risulta, una verifica sperimentale, non essendo state da altri istituite misure sopra solenoidi di materiale magnetico, per i quali d'altronde ne è discutibile la applicabilità, laddove poi nei materiali non magnetici la induttanza interna suol avere una importanza così limitata, rispetto a quella esterna o complessiva, da renderne la determinazione assai delicata.

Nicholson [1] ha trattato analiticamente il caso del solenoide cilindrico, composto di spire di sezione circolare, aventi una permeabilità qualunque, e situate a una distanza notevole le une dalle altre, come caso correlativo di quello delle spire combacianti, esaminato da Cohen, rinunciando però a paragonare i suoi coi risultati di questo autore, per la considerevole difficoltà che offre il caso intermedio delle spire

[1] Philosoph. Mag., 1910, vol. XIX, pag. 77.

situate a una distanza moderata. La trattazione è fatta in relazione a un sistema appropriato di coordinate elicoidali, partendo dalle equazioni fondamentali di Faraday e di Ampère, e giovandosi delle proprietà generali dei sistemi ortogonali, in cui le componenti di ogni vettore risultano indipendenti da una delle coordinate. Essa conduce ad un sistema di equazioni, perfettamente analoghe a quelle della propagazione attraverso ai fili rettilinei, nella risoluzione delle quali intervengono delle nuove funzioni, che si possono ricondurre a una combinazione di quelle introdotte da Kelvin nella discussione del problema precedente, e che a loro volta altro non sono che la parte reale e quella immaginaria della funzione di Bessel di 1ª specie, avente per argomento :

$$x = 2r \sqrt{\frac{\pi\omega\mu}{\varrho}}.$$

Di tali funzioni si hanno notoriamente le tavole calcolate da Russell, da Savidge e da altri autori, e d'altronde è facile trovare la grandezza mediante sviluppi in serie, rapidamente convergenti, dei quali Nicholson si è valso per la determinazione della resistenza effettiva e della induttanza interna dei solenoidi da lui presi in esame. Per i solenoidi in ferro, di cui ci occuperemo in seguito, il valore dell'argomento x, e il rapporto fra il diametro $2a$ delle spire e quello $2r$ del conduttore, sono così grandi, da rendere trascurabile una gran parte dei termini contenenti le potenze superiori di $\frac{1}{x}$; nel caso perciò delle alte frequenze (o permeabilità) si può ritenere con sufficiente approssimazione per un tratto di lunghezza 1:

$$R = \left(\frac{\omega\mu\varrho}{2\pi r^2}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{\varrho}{32\pi a^2}\cos^2\alpha(1 - 5\,\mathrm{sen}^2\alpha);$$

$$L_i = \left(\frac{\varrho\mu}{2\pi\omega r^2}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\varrho\cos^2\alpha(1 - 5\,\mathrm{sen}^2\alpha)}{32\pi\omega r a^2}\left(\frac{\varrho}{2\pi\omega\mu}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{3\varrho}{32\pi\omega\mu r^2}\left(\frac{\varrho\mu}{2\pi\omega r^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Qui ϱ rappresenta la resistività, α la inclinazione delle spire dell'elica, e i simboli μ, ω hanno il solito significato. Secondo il concetto dell'autore, queste formole si possono accettare quando $a > 12r$ e quando $r\sqrt{\mu f} > 70$. Al crescere indefinito di a anche i secondi termini, prescindendo nella 2ª equazione dal 3° termine, che è per grandi frequenze o permeabilità molto piccolo, perdono ogni importanza, e i valori naturalmente si riducono a quelli già trovati per i fili rettilinei, secondo le espressioni limiti di Rayleigh. Sotto questo aspetto le formole di Nicholson sono particolarmente utili per individuare la influenza della curvatura delle spire, laddove quella delle spire contigue è in esse esplicitamente lasciata fuori considerazione, onde scaturisce l'anomalia, che la resistenza dei solenoidi appare minore di quella dei fili rettilinei.

Sotto la guida e l'ispirazione di Wien, Esau [1] ha ancora una volta ripreso in esame, nella sua dissertazione dottorale, il problema della resistenza e induttanza

[1]) Ann. der Phys., vol. XXXIV, pag. 57, 1911.

dei solenoidi a spire circolari, generalizzando la trattazione già fattane dal suo maestro al caso, in cui la sezione delle spire ha una configurazione qualunque, e la distanza loro ne supera comunque la dimensione trasversale, e trascurando al pari di lui il fattore di permeabilità.

La soluzione trovata, la quale si appoggia ancora alla scomposizione del sistema in altrettanti solenoidi elementari, compresi fra coppie di cilindri coassiali, si confonde naturalmente, per il caso delle spire combacianti e di sezione circolare, con quella già data da Wien, e, per il caso delle spire combacianti e di sezione rettangolare, con quella di Sommerfeld; ma, all'infuori di questo caso, essa dà luogo alle medesime riserve già sollevate a proposito di quelle precedenti.

Nello sviluppo approssimato di Esau la distanza g fra gli assi delle spire, in quanto per avventura differisca dalla dimensione trasversale del conduttore $2b$, è portata in conto per le spire di sezione rettangolare, sostituendo alla costante caratteristica α di Sommerfeld quella corretta in corrispondenza:

$$\alpha' = 2(r_2 - r_1)\sqrt{\frac{2b}{g}}\sqrt{\frac{2\pi\omega\mu}{\varrho}},$$

con che le stesse formole di Sommerfeld risulterebbero, secondo l'autore, applicabili con sufficiente approssimazione ai casi della pratica.

In verità le misure da lui istituite per il controllo delle formole teoriche sopra solenoidi a un solo strato, composti di spire di rame di sezione quadrata di 3 mm. di lato, con un passo di 4.2 ed 8 mm. fino alla frequenza di 6000 periodi, hanno fornito dei risultati assai concordanti, laddove col passo di 18.6 mm. le variazioni di resistenza osservate superano considerevolmente quelle calcolate; pei solenoidi di filo a sezione circolare l'accordo è assai meno perfetto, anche nel caso dei piccoli passi. Malgrado ciò Esau ha proposto di applicare lo stesso coefficiento di correzione alle formole sviluppate dagli autori precedenti per il calcolo, sia delle variazioni di resistenza, come di quelle della induttanza interna, ed ha tracciato la curva della funzione Q, da introdurre nella formola di Coffin, in base al valore emendato dell'argomento:

$$x' = 2(r_2 - r_1)\sqrt{\frac{2b}{g}}\sqrt{\frac{2\pi\omega\mu}{\sigma}}.$$

W. Lenz per ultimo (¹), occupandosi in linea principale di calcolare la capacità elettrostatica dei solenoidi, ha dato le espressioni generali del campo elettrico e magnetico da essi prodotto, giungendo contemporaneamente alla determinazione della loro resistenza e induttanza effettive.

Egli ha preso le mosse dal secondo lavoro di Sommerfeld, mostrando come si possano calcolare, con un artificio già suggerito da Maxwell, tutti i coefficienti, e determinando con formole approssimate tutti gli elementi che interessano nel problema

(¹) Ann. der Phys., vol. XXXVII, pag. 923, 1912.

elettromagnetico. Peraltro tali formole non sono applicabili, se non per valori molto piccoli o molto grandi dell'argomento:

$$kr = 2r\sqrt{\frac{\pi\omega\mu}{\varrho}},$$

e l'autore, ritenendo di dover prescindere dal caso delle frequenze molto elevate, perchè aveva trascurato le correnti di spostamento, e da quello delle permeabilità diverse da 1, in quanto si complicherebbe grandemente la trattazione, si limitò in sostanza a considerare il caso delle piccole frequenze e della permeabilità unitaria, che per l'oggetto di queste ricerche è il meno interessante.

Per questo caso d'altronde il valore trovato della resistenza si confonde con quello calcolato da Sommerfeld, e il valore della induttanza interna non si può ricavare senza un calcolo assai laborioso, per cui i nuovi risultati non possono trovare facili applicazioni.

2. — Comportamento dei conduttori frazionati.

In seguito alle sue prime esperienze, che avevano messo in chiaro la ragione dell'aumento di resistenza nei conduttori massicci, disposti a spirale, Dolezalek suggerì di costruire le spirali di induzione per correnti di alta frequenza mediante conduttori composti di un gran numero di fili sottili, bene isolati, e attorcigliati ovvero intrecciati fra loro, in modo che ognuno assuma nel campo una media configurazione poco diversa dagli altri, e si concateni presumibilmente con lo stesso numero di linee di induzione. Il risultato però non corrispose interamente allo scopo; le spirali, in tal modo costituite, rivelarono in molti casi una resistenza superiore a quella delle spirali di eguali dimensioni, costituite di conduttore massiccio.

Lindemann (1), sperimentando sistematicamente sopra conduttori intrecciati e massicci della stessa sezione, ha potuto constatare che la resistenza, offerta dai primi alle correnti di alta frequenza, subisce una variazione proporzionale al quadrato di questa, laddove la variazione subìta dai secondi si manifesta per frequenze moderate notevolmente più alta, ma poi va crescendo sempre più lentamente al crescere della frequenza; per un valore caratteristico di questa uguaglia la variazione dei conduttori intrecciati, e per frequenze maggiori diventa più piccola di essa.

La spiegazione teorica di questo fatto fu data da Möller (2), il quale ha dimostrato doversi esso alla particolare distribuzione del campo, generato internamente ad ogni conduttore dalla corrente propria e da quella di tutti i conduttori esterni, per effetto della quale vengono indotte in ogni elemento forze elettromotrici e correnti parassite, che si compongono con quelle mantenute dall'esterno, e possono nei conduttori frazionati occasionare una dissipazione di energia, maggiore di quella che compete per la stessa ragione ai conduttori massicci. È da ricordare a questo riguardo

(1) Werhandl, d. deutsch. Phys. Ges., XI, n. 22, pag. 682.
(2) Ann. der Phys., vol. XXVI, pag. 738, 1911.

che la corrente, rapidamente variabile, subisce in generale negli strati di ogni conduttore, che si trovano a diversa profondità dalla superficie, non solo una diminuzione di ampiezza, ma anche uno spostamento di fase, per cui si complica grandemente la relazione fra la intensità efficace risultante e la media densità. laddove, nella valutazione dell'energia dissipata e della resistenza effettiva, interviene per ogni elemento il quadrato della densità corrispondente.

Se ora si immagina il solenoide formato da spire di sezione rettangolare, esattamente fra loro combacianti secondo il concetto di Sommerfeld e di Coffin, è facile prevedere la distribuzione del campo interno, la quale si conserva uniforme lungo le superficie cilindriche coassiali, e dedurre in conseguenza la distribuzione delle f. e. m. e delle correnti. Di queste, nel caso in cui sia grandissima la frequenza, si attenua la densità negli strati esterni, e si accresce in quelli contigui alla periferia interna, concentrandosi esclusivamente nei secondi, e annullandosi nei primi pel caso limite di frequenza indefinitamente grande, nel quale le espressioni della resistenza e della induttanza interna assumono, come vedemmo, la massima semplicità. In tali condizioni il solenoide reale funziona come un solenoide ideale di spessore piccolissimo, rimanendo la massima parte del materiale conduttore inutilizzata, ma, per ciò stesso, anche esente da correnti parassite e da perdite di energia.

La cosa cambia però sostanzialmente, ove ti tratti di un solenoide costituito di un fascio o di una treccia di fili elementari, ognuno dei quali, mentre si comporta nei riguardi della corrente propria in modo poco dissimile dal precedente, tendendo questa a localizzarsi negli strati periferici rivolti verso l'asse della spirale, subisce poi da parte di tutti gli altri conduttori, attraversati da una corrente eguale, un'energica azione induttrice, che può di gran lunga soverchiare quella interna, e che perciò può negli strati periferici rivolti all'esterno indurre correnti di opposta direzione, aumentando considerevolmente l'energia perduta e la resistenza effettiva.

La trattazione matematica offre naturalmente non poche difficoltà, che l'autore ha saputo superare introducendo alcune ragionevoli semplificazioni; egli ha supposto perciò ancora i fili elementari di sezione quadrata, esattamente fra loro combacianti, e il campo dovuto alle correnti delle spire esterne degradante linearmente al crescere del raggio, fino ad annullarsi alla periferia esterna del solenoide.

Nel conduttore massiccio la variazione della resistenza effettiva, dovuta alle correnti parassite, è proporzionale al quadrato della frequenza

$$R = R_c + \omega^2 G ,$$

ma il coefficiente che individua tale variazione cambia con la configurazione del conduttore, e per sezione quadrata di lato b diventa:

$$G' = \frac{\gamma^2 \lambda b^4}{12}$$

e, per sezione circolare di raggio r,

$$G'' = \frac{\pi \gamma^2 \lambda r^4}{4}$$

dove con λ è indicata la conduttività del materiale, e con γ il rapporto fra la intensità del campo e quella della corrente. La variazione predetta, per il conduttore di sezione circolare di eguale grossezza, appare adunque, rispetto a quella del conduttore di sezione quadrata, nel rapporto:

$$\frac{12\pi}{64} = 0.59 .$$

Un rapporto consimile Sommerfeld aveva già riscontrato fra le variazioni misurate da Wien per il solenoide a spire circolari, e quelle da lui stesso calcolate in base alla teoria del solenoide a spire quadrate, di che la spiegazione offerta da Sommerfeld era apparsa a Battelli ed a Picciati poco chiara o contraddittoria; per ciò Möller ne accetta l'ordine medio di grandezza anche per il caso di conduttori frazionati, rispettivamente composti di fili a sezione circolare e quadrata.

Per un solenoide formato con un simile conduttore cordato, avente, secondo le nostre precedenti notazioni, per raggi interno ed esterno r_1 ed r_2 (¹), conduttività λ, permeabilità 1, numero di conduttori elementari ν_0, e grossezza di questi $r_a - r_i$, assumendo per argomento:

$$x = (r_a - r_i)\sqrt{2\pi\omega\lambda}$$

la resistenza effettiva nel caso delle alte frequenze diventa:

$$R = R_c\left(\frac{\nu_0 + 1}{2}\,x - M\right) .$$

Per conduttori cordati di sezione quadrata e di sezione circolare si ha rispettivamente:

$$M_{\square} = \sqrt{\nu_0} - 1 \quad ; \quad M_{\bigcirc} = \sqrt{\frac{6}{\pi}\,\nu_0} - 1 .$$

Mediante tali espressioni, o meglio con l'aiuto delle formole complete e più rigorose, sviluppate dall'autore, è facile calcolare la *frequenza critica*, per la quale la resistenza del conduttore cordato risulta eguale a quella del conduttore massiccio di eguale sezione, essendo oramai chiaro che, al di sotto di tale frequenza, la prima risulta minore della seconda, e al di sopra di essa maggiore.

Il calcolo eseguito da Möller sopra gli elementi contenuti nel lavoro di Lindemann ha fornito un valore teorico singolarmente concordante con quello trovato sperimentalmente. Dallo stesso ragionamento scaturisce ancora che, per ogni frequenza, esiste un tipo di frazionamento, ossia una dimensione dei fili elementari per cui, a parità di sezione complessiva, la resistenza effettiva diventa massima; rispetto ad essa qualunque altra dimensione rappresenta un miglioramento del conduttore. E final-

(¹) Secondo le notazioni dell'autore R_i R_a.

mente si conclude, in base allo stesso ragionamento, che le perdite supplementari per correnti parassite si possono in ogni caso, mediante un opportuno frazionamento, contenere fra limiti comunque ristretti, ciò che ha, soprattutto per le applicazioni alla radiotelegrafia, una grande importanza.

Lo stesso autore ha ancora, in epoca più recente (¹), assoggettato il medesimo problema a una trattazione più esauriente, seguendo sempre le orme di Sommerfeld, ma abbandonando una parte delle sue ipotesi restrittive, e discutendo le correzioni da apportare ai risultati dedotti per le spire di sezione quadrata, nella applicazione loro alle spire di sezione circolare. Tale correzione, dedotta dal confronto dei risultati di Sommerfeld con quelli di Wien, dovrebbe consistere nella aggiunta di un fattore di riduzione $f = 0{,}829$ all'argomento α, calcolato con la formola di Sommerfeld, oltre al fattore che tien conto della distanza fra le spire, e che venne già introdotto da Esau.

In questa occasione Möller ha sviluppato, mediante formole abbastanza semplici, il rapporto fra la resistenza del conduttore cordato e quella del conduttore massiccio, in relazione all'argomento che compete a quest'ultimo, e al numero dei conduttori elementari del primo, ed ha tracciato, per molti valori di questo numero, le curve delle variazioni percentuali della resistenza in funzione della 4ª potenza di quell'argomento. Queste, per piccoli valori dell'argomento, si confondono con tutta l'approssimazione con linee rette, e, nel punto d'intersezione con la curva relativa al filo massiccio, individuano la condizione di eguale resistenza, già discussa nel lavoro precedente.

In base a tali curve si trova immediatamente il numero di fili elementari da impiegare, per ottenere a una data frequenza un valore di resistenza prestabilito, eguale, o maggiore o minore di quello del filo massiccio di area corrispondente.

Möller non si è in questa sede occupato delle variazioni di resistenza, che competono alle spirali costituite di conduttori frazionati di permeabilità superiore all'unità, e per essi, sebbene il caso possa interessare per la pratica, non è lecito generalizzare la soluzione, introducendo nell'argomento il valore medio della permeabilità, come per talune altre formole e trattazioni abbiamo fatto, poichè il campo originato dai conduttori contigui subisce internamente ai singoli conduttori elementari una grande diminuzione, dovuta alle masse magnetiche libere, che nel fenomeno della magnetizzazione trasversale si vengono a distribuire alla superficie di essi.

Trattandosi, oltre a ciò, di materiali di permeabilità variabile, la trattazione rigorosa del problema diventerebbe complicatissima; ma qualitativamente è da prevedere che, attenuandosi per questo fatto grandemente le correnti parassite, indotte dal campo esterno in ogni conduttore elementare, l'effetto pellicolare si manifesti in misura poco diversa da quella che ad esso competerebbe, se fosse lontano da tutti gli altri; perciò la variazione della resistenza risulterà, nella maggior parte dei casi, di gran lunga inferiore a quella del conduttore unico di sezione equivalente. Da questa osservazione non potremo nemmeno interamente prescindere, nella applicazione delle formole trovate per i solenoidi ordinarî a quelli costituiti di materiale magnetico.

(¹) Jahrbuch der drahtlos. Telegr., 1914, vol. IX, pag. 32.

3. — Influenza della forma e della condizione in cui si trova il conduttore.

La conclusione particolare tratta da Möller, in conformità di quelle precedenti di Sommerfeld e di Esau, circa il vantaggio di una minore variazione di resistenza, che i conduttori di sezione circolare presentano di fronte a quelli di sezione quadrata, è naturalmente subordinata alla particolare condizione in cui i conduttori medesimi si vengono a trovare nei casi qui contemplati, sotto l'influenza elettromagnetica delle spire contigue, percorse da corrente uguale e della medesima direzione, e in quanto ai conduttori medesimi si attribuisce nell'un caso o nell'altro la medesima dimensione trasversale, con che i perimetri e le aree stanno nel rapporto $\frac{\pi}{4}$. Il vantaggio relativo si modifica se, al conduttore di sezione quadrata, si paragona quello circolare di area o di perimetro eguale; per semplificare il confronto, giova considerare il caso più semplice di un conduttore rettilineo e isolato. A parità di area, diventa eguale la resistenza per correnti continue o alternate di piccolissima frequenza, laddove, per correnti di frequenza molto alta, la resistenza effettiva diventa inversamente proporzionale al perimetro, e quindi pel conduttore circolare circa 13 % più alta, per quanto scaturisce dall'applicazione della formola limite di Rayleigh.

Se si paragonano i conduttori di eguale dimensione trasversale, l'area e il perimetro di quello circolare risultano $\frac{\pi}{4}$ volte più piccoli di quelli del conduttore quadrato, e le resistenze stanno nello inverso rapporto, sia a bassa come ad alta frequenza, per cui la variazione relativa, prescindendo dalle perdite supplementari, apparirebbe eguale.

Se finalmente si paragonano i conduttori dello stesso perimetro, l'area del cerchio diventa $\frac{4}{\pi}$ volte maggiore di quella del quadrato, per cui la resistenza per correnti continue risulta altrettante volte minore, laddove quella per correnti di alta frequenza tende al limite al medesimo valore.

Wheeler Edwards (¹) ha studiato la distribuzione della corrente alternata in un conduttore rettilineo di sezione quadrata o rettangolare, applicando il metodo di Maxwell, e controllando il risultato teorico con misure eseguite mediante correnti oscillanti della frequenza di 3×10^4 a 3×10^5.

Per un filo di sezione quadrata di lato $2a$ la resistenza alla frequenza f, in confronto di quella offerta a correnti continue, risulta:

$$R = R_c \left[1 + \frac{23\,\pi^4\,\mu^2\,f^2\,a^4}{45\,\varrho^2} - \frac{3223\,\pi^8\,\mu^4\,f^4\,a^8}{14175\,\varrho^4} + \cdots \right].$$

Non essendo la serie molto rapidamente convergente, se si vuol eseguire il confronto delle variazioni di resistenza, che subisce il conduttore di sezione quadrata

(¹) Phys. Review, vol. XXXIV, pag. 184, 1911.

rispetto a un filo analogo di sezione circolare, conviene paragonare i valori calcolati dall'autore per taluno dei conduttori di sezione quadrata, da lui esperimentati, con quelli che si calcolerebbero mediante le formole di Kelvin per il conduttore di sezione circolare corrispondente.

Scegliendo ad es. il conduttore di rame di sezione quadrata, di lato 0,07 cm., a cui l'autore attribuisce una resistività 1600, i valori calcolati di quel rapporto, solo in parte verificati con l'esperienza, risultano:

per f	=	100.000	200.000	300.000
$\frac{R}{R_c}$	=	1.23	1.65	1.87

Volendo istituire il confronto col filo cilindrico di eguale sezione, che ha per diametro 0.079 cm., e assumendo per argomento

$$x = 2r\sqrt{\frac{\pi\omega}{\varrho}}$$

e per rapporto fra la resistenza effettiva e quella offerta a correnti continue, quello calcolato da Savidge e da Rosa e Grover, si ha:

per f	=	100.000	200.000	300.000
x	=	2.76	3.92	4.77
$\frac{x}{2}\frac{W}{V}$	=	1.24	1.65	1.96

A eccezione dell'ultimo valore, in corrispondenza del quale la curva tracciata da Edwards presenta una variazione anormale di pendenza, i valori di quel rapporto, calcolati per il conduttore di sezione quadrata e per quello di sezione circolare, risultano pressochè identici, per cui la distinzione non ha praticamente alcuna importanza entro l'intervallo di frequenze qui considerato. Per frequenze indefinitamente crescenti si è già detto che la resistenza del conduttore di sezione circolare dovrebbe effettivamente superare del 12 % circa quella del conduttore di area eguale e di sezione quadrata.

Lo stesso autore ha anche tracciato, in base alle sue formole teoriche, i diagrammi della distribuzione della corrente secondo alcune direzioni caratteristiche, entro alla sezione dei conduttori di sezione quadrata e di permeabilità unitaria, onde appare la tendenza di essa a concentrarsi in prevalenza verso gli spigoli. Il fenomeno risulterebbe prevedibilmente molto più complicato nel ferro, a causa della distribuzione di masse magnetiche libere alla superficie, e l'osservazione non può omettersi in questa sede, in quanto le spirali di ferro, da me sperimentate, hanno appunto la sezione quadrata.

Sebbene non si colleghi direttamente con l'oggetto delle presenti ricerche, merita di essere ricordato in questa sede, per l'affinità che presenta con esse, un importante lavoro di Rogowski (1) sopra le perdite supplementari di energia, che hanno

(1) Archiv für Elektrot, vol. II, 1913, pag. 81.

luogo nel rame degli alternatori in conseguenza della disuniforme distribuzione della corrente, dovuta alla disuniforme distribuzione del campo trasversale nelle scanalature, e sopra il valore critico dell'altezza radiale delle sbarre, contenute in ognuna di queste, oltrepassando il quale l'aggiunta del rame, impiegato a ingrossare la sezione dei conduttori, ha per effetto di accrescerne, anzichè diminuirne, la resistenza effettiva. La distribuzione del campo è in questo caso sopratutto influenzata dalla minima riluttanza, che le linee di induzione incontrano attraversando le nervature laterali e il nucleo sottostante di ferro, e la trattazione del problema, fatta dall'autore con grande chiarezza prendendo le mosse da uno studio analogo, molto più succinto, di Field (1), in parte già volgarizzato da Emde (2), è certamente destinata a portare un razionale rivolgimento nei processi di calcolo e di prova delle grandi macchine moderne. Tale trattazione è poi stata estesa da Fleischmann (3) ai conduttori delle macchine a corrente continua, nei quali intervengono fenomeni analoghi di localizzazione della corrente durante il periodo di commutazione; Rogowski stesso (4) ha con metodo analogo calcolato le variazioni di resistenza effettiva dei conduttori cordati, riattaccandosi alle formole di Sommerfeld per le spirali a varii strati, ed ha richiamato ancora l'attenzione su la esistenza della frequenza critica, già segnalata da Lindemann, e bene chiarita teoricamente da Möller.

Offrono del pari interesse le sistematiche ricerche sperimentali sopra l'effetto pellicolare, che si manifesta nei conduttori rettilinei di rame e di alluminio, recentemente presentate da Kennelly, Laws e Pierce alla Riunione dell'Istituto Americano degli Ingegneri elettricisti a S. Francisco (5), cui sono allegate, oltre ad una Bibliografia esauriente sull'argomento, la teoria generale del fenomeno nei conduttori cilindrici rettilinei, e parecchie tavole e carte d'interpolazione per il calcolo delle funzioni di Bessel, considerando anche il caso delle lamine piane e dei conduttori frazionati di materiale non magnetico.

È degna di nota la grande approssimazione, con la quale i tre autori sono riusciti a verificare sperimentalmente le conclusioni teoriche, in un intervallo di frequenza compreso fra 60 e 5000, per due conduttori massicci di rame di 1 cmq. di sezione, disposti parallelamente fra loro, ed a determinare quantitativamente le variazioni del fenomeno al variare della distanza fra 60 e 0.03 cm. Interessante è la osservazione che striscie sottili di rame, di limitata larghezza, impiegate come conduttori per correnti di alta frequenza, assumono una resistenza effettiva, di gran lunga superiore a quella che competerebbe alla porzione corrispondente di una lamina piana, di estensione indefinita, per il fatto che le linee di induzione, prodotte dalle correnti elementari che attraversano la parte centrale, intersecano le parti laterali, e vi inducono a loro volta correnti parassite. Nei conduttori frazionati, di rame e di alluminio, senza attorcigliamento dei fili elementari, l'effetto pellicolare non si differenzia da quello dei conduttori massicci di area equivalente, e per questi materiali anche l'effetto dell'attorcigliamento è poco sentito.

(1) Proc. Am. Inst. of Electr. Eng., 1905, pag. 659.
(2) Elektrot. u. Maschinenb., 1908, pag. 703.
(3) Archiv für Elektrot., 1914, vol. II, pag. 387.
(4) Archiv für Elektrot., 1915, vol. III, pag. 264.
(5) Transactions, 1915.

In base ad alcune misure, eseguite sopra lamine sottili di ferro con correnti oscillanti della frequenza di 40 a 150 mila periodi, Jouaust (¹) ha ritenuto che le formole di J. J. Thomson per le lamine piane, composte di sostanza magnetica e attraversate da flussi rapidamente variabili, non si possano applicare, e della presunta anomalia ha cercato la spiegazione nella esistenza di correnti di spostamento, non trascurabili di fronte a quelle di conduzione. I risultati di quelle misure però, come io ho cercato di chiarire in altra sede (²), non si possono tutti accettare senza riserve, e l'ipotesi azzardata dall'autore, che attribuisce quelle correnti alla presenza di un gas occluso nel metallo, ha bisogno di conferma.

4. — Criterii per l'applicazione delle teorie precedenti.

Volendo riassumere e paragonare i risultati delle teorie precedenti, per quanto riguarda la loro pratica applicabilità, possiamo concludere che:

1°) La teoria originaria di Wien non può accettarsi senza riserve, per gli stessi materiali non magnetici, essendo appoggiata al concetto della uniforme distribuzione delle correnti attraverso alle porzioni elementari del solenoide, limitate da superficie cilindriche coassiali, la quale in pratica non si realizza, se non con grossolana approssimazione, ed essendo trascurata la distanza fra le spire; tanto meno essa può applicarsi alle spirali di permeabilità elevata, per la complicazione dovuta alle masse superficiali.

2°) La prima teoria di Sommerfeld e quella di Coffin sono analiticamente rigorose, e applicabili a materiali magnetici, ma contemplano il caso di un sistema tubolare omogeneo, percorso da correnti trasversali, che in pratica non trova frequenti applicazioni; il loro risultato, d'altronde, nel caso delle frequenze o permeabilità molto alte, scaturisce immediatamente dalla teoria delle lastre piane di Rayleigh.

3°) La teoria di Battelli non può applicarsi a determinazioni quantitative di resistenza e induttanza, perchè è indeterminata la funzione che caratterizza le superficie di eguale densità di corrente; lo stesso dicasi di quella di Picciati, perchè sono indeterminate le costanti che individuano la distribuzione del campo esterno al conduttore, in mancanza delle quali si rende indispensabile l'impiego di coefficienti empirici, che dovrebbero probabilmente variare con la frequenza.

4°) La seconda teoria di Sommerfeld, che ha preso le mosse da quella di Picciati, è matematicamente definita, ma conduce, nel caso delle spire situate a una distanza qualunque, alla ricerca di funzioni molto complicate. Conoscendosi i valori limiti del coefficiente, che interviene nel calcolo della resistenza effettiva pel caso delle spire combacianti e per quello delle spire molto lontane, è però possibile attribuire ad esso un valore approssimativo nei casi intermedî, giovandosi della curva di interpolazione tracciata dall'autore, e già confermata dalle esperienze di Black.

5°) Anche la teoria di Cohen è appoggiata alla ipotesi di una distribuzione di spire e di campo, che non suol realizzarsi esattamente in pratica; essa non porta

(¹) Bullet. Soc. Intern. des Electr., serie 3ª, vol. I, pag. 49; II, pag. 71: V, n. 47.
(²) L'Elettrotecnica, 1916, pagg. 585.

in conto i fenomeni di magnetizzazione, e manca per ora di una conferma sperimentale, per quanto riguarda le variazioni di induttanza.

6°) La teoria di Nicholson vale bensì per i materiali magnetici, ma non si può applicare che ai solenoidi, aventi le spire relativamente lontane le une dalle altre, e serve solo a caratterizzare la influenza della curvatura prescindendo dal passo.

7°) La teoria di Esau dà luogo alle stesse riserve di quella di Wien, circa la supposta uniformità della corrente nei punti delle superficie cilindriche coassiali, e le complicazioni che possono scaturire dalla presenza delle masse magnetiche libere; tiene però conto del passo, ossia della distanza fra le spire, e la correzione relativa, almeno per i solenoidi non magnetici, può essere con vantaggio applicata alle formole di Sommerfeld e di Coffin.

8°) Le formole di Lenz non si possono applicare, se non ai casi di permebilità unitaria e di frequenza molto limitata, e perdono perciò una parte del loro interesse.

9°) La teoria di Möller dà bene ragione dei fenomeni che si manifestano nei solenoidi, composti di conduttori frazionati non magnetici, e permette di calcolare per essi la variazione di resistenza effettiva ad ogni frequenza; essa peraltro non è applicabile ai materiali di permeabilità elevata, pei quali il fenomeno si complica in causa delle masse magnetiche libere superficiali.

10°) Anche la teoria di Edwards, circa la distribuzione delle correnti alternate nei conduttori di sezione quadrata, vale esclusivamente per i materiali non magnetici, ed al pari di essa in genere tutte le formole teoricamente dedotte per il paragone dei fenomeni, relativi alla distribuzione disuniforme delle correnti periodiche nei conduttori di sezione finita e di diversa configurazione, non possono accettarsi senza riserva per i materiali di permeabilità elevata.

11°) La teoria di Rogowski ha bene chiarita la importanza, che i fenomeni di parziale localizzazione della corrente possono assumere nelle grandi macchine dinamoelettriche e nei trasformatori, occasionandovi perdite supplementari di energia; ne scaturisce una dimensione critica, oltre la quale l'aumento della grossezza dei conduttori contribuisce ad aumentarne la resistenza effettiva; le formole relative possono essere direttamente applicate nella calcolazione delle macchine.

12°) Le ricerche sistematiche di Kennelly, Laws e Pierce hanno fornita la conferma della teoria di Kelvin per i conduttori cilindrici massicci e isolati, di permeabilità unitariâ, in un largo intervallo di frequenze, ed hanno messo in chiaro l'effetto della vicinanza dei conduttori, percorsi da correnti contrarie, e di talune configurazioni che si possono attribuire alla loro sezione trasversale.

13°) I risultati di Jouaust, in quanto contraddicono alla teoria di Thomson per le lamine magnetiche, non possono accettarsi senza riserve, e la ipotesi da lui formulata circa la esistenza delle correnti di spostamento nell'interno dei conduttori metallici, non appare per ora sufficientemente giustificata.

PARTE II.

RICERCHE SPERIMENTALI

1. — Oggetto delle misure.

Attesa la scarsità delle misure, concernenti la resistenza e la reattanza effettiva dei solenoidi di ferro, i quali hanno praticamente già trovato importanti applicazioni in molti impianti elettrici, io ho creduto opportuno istituire sopra alcuni esemplari, posti cortesemente a mia disposizione dalla Società Italiana Oerlikon, ricerche sistematiche, delle quali sono in questa parte riassunti i risultati principali.

I solenoidi in esame erano due, costituiti di ferro dolce del commercio, di sezione quadrata, ognuno suddiviso in due sezioni, fra loro invariabilmente collegate, e muniti al mezzo e dalle due estremità di robuste membrature per gli attacchi. La costruzione è stata eseguita in Italia, sopra le indicazioni fornite dalla Società generale dei condensatori elettrici di Friburgo, la quale adotta queste spirali come tipo normale per la protezione dei circuiti di alta tensione, associandole ai condensatori del sistema Moscicki.

Il solenoide più grande, che indicherò nel seguito brevemente con la lettera A, ha fra le spire estreme una distanza invariabile di m. 1.20; ognuna delle sezioni ha una lunghezza di 0.526, ed è composta di 14 spire, le quali perciò si vengono a trovare una dall'altra alla media distanza di cm. 4.05; la loro sezione media è $1.95 \times 1.95 = 3.89$ cmq.; il raggio esterno è 15.00 cm.; quello interno 13.05; la lunghezza complessiva del conduttore è 2470 cm. La resistenza elettrica, misurata con correnti continue alla temperatura di 25°, è di 0.0090 ohm, a cui corrisponde una resistività di 13.800 unità assolute. Il cilindro di sezione equivalente ha per diametro cm. 2.20.

Il solenoide più piccolo, che indicherò con la lettera B, è composto di 40 spire, suddivise ancora in 2 sezioni di 20 ognuna, aventi una sezione trasversale di $0.78 \times 0.78 = 0.61$ cmq.; un raggio esterno di 12.4, interno di 11.6 cm.; uno sviluppo complessivo di 3016 cm. La resistenza alla temperatura ambiente è di 0.075 ohm; la resistività 15.100 unità assolute. Il cilindro di sezione equivalente ha per diametro cm. 0.88. Essendo questo conduttore relativamente flessibile, la distanza fra le spire, e quindi la lunghezza assiale del solenoide, si può facilmente modificare; nella disposizione originaria ognuna delle due sezioni aveva fra le spire estreme una lunghezza di 39.5 cm. a cui corrisponde una media distanza fra le spire di 2.08 cm.; questa

era mantenuta uniforme mediante opportune legature, eseguite con una fune a due capi, incrociati ad ogni passo. Allentando e stringendo convenientemente la fune però, dopo averla cambiata con altra più sottile, è stato possibile ridurre la lunghezza di una delle sezioni a 78 cm. in un caso ed a 19 in un altro, con che la distanza fra le spire risultò rispettivamente di 4.10 e di 1.00 cm.

Poichè i fenomeni complessi di induzione, che si manifestano entro i conduttori di sezione considerevole al passaggio di correnti alternate, sono eminentemente influenzati dalla permeabilità magnetica della sostanza, e questa varia fra limiti molto estesi al variare della intensità di corrente, ossia del campo magnetico, era indispensabile per le spirali in esame determinare le variazioni della permeabilità entro il massimo intervallo delle misure successive.

Ho proceduto per questo col metodo balistico, disponendo sopra una delle spire, scelta verso il mezzo del solenoide, un avvolgimento magnetizzante uniforme, di filo di rame bene isolato, il quale ne ricopriva tutta la estensione, eccettuato un tratto di alcuni centimetri, lungo il quale le superficie confrontanti del ferro vennero accuratamente levigate, e fra esse si interpose un prisma di ferro dolce, in modo da creare, sotto la pressione di una morsa metallica, un giunto magnetico di minima riluttanza. A compensare le cadute inevitabili di potenziale magnetico attraverso al giunto, vennero ancora disposte nella sua immediata contiguità delle spirali addizionali, in serie con quella principale, scegliendo un numero di spire tale da mantenere, nella media condizione di magnetizzazione, un flusso sensibilmente uniforme lungo la periferia dell'anello (¹).

Come galvanometro balistico ho impiegato il D'Arsonval di grande modello, che servì già per le misure analoghe su gli anelli di ferro, e che ha una durata di oscillazione di una ventina di secondi. La taratura venne eseguita mediante un campione di induzione mutua di 0.01 henry.

Dalle curve di magnetizzazione normale ho dedotto quelle di permeabilità media, entro l'intervallo corrispondente ai diversi valori della forza magnetizzante, con processo identico a quello già seguito per i campioni di ferro e acciaio, sottoposti alle misure precedenti; di esse è riportato l'andamento nella parte inferiore della fig. 1. Nella parte superiore sono riportate le curve del quoziente differenziale $\frac{d\mu}{dH} : \frac{\mu}{H}$, di cui è data ragione nel mio lavoro precedente, ed è dimostrata la funzione nel calcolo delle reattanze equivalenti in presenza di materiali a permeabilità variabile. Questo parametro si annulla in corrispondenza di quella forza magnetizzante, per cui la permeabilità media raggiunge il suo maggior valore, e risulta positivo nell'intervallo inferiore, e negativo in quello superiore, conservandosi pressochè inalterato in un lungo intervallo. Alla spirale B compete la curva che ha le ordinate negative più piccole.

Mediante lo stesso dispositivo ho rilevato sopra entrambi i campioni alcune curve di isteresi, e da esse, mediante la misura delle aree, ho ricavato il coefficiente di Steinmetz.

(¹) Burrows, Bull. Bur. of Stand., vol. VI, pag. 31.

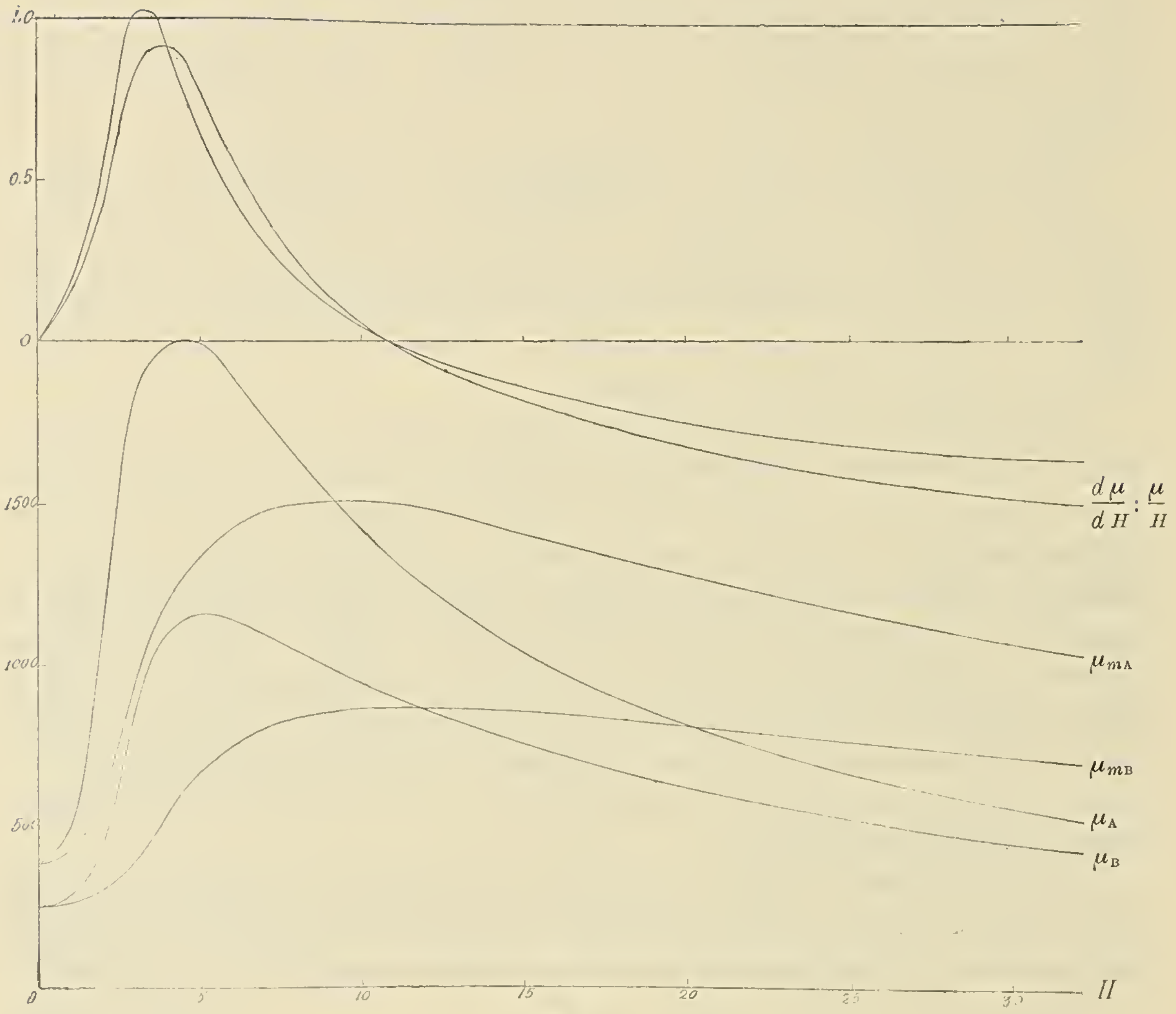


Fig 1.

Nella tabella seguente sono riassunti i principali elementi relativi ai solenoidi esaminati:

Grandezza	Simbolo	Solenoide A	Solenoide B
Numero delle spire	N	2 × 14	2 × 20
Altezza complessiva	H	120	88
Altezza di ogni sezione	H′	52.6	39.5
Distanza media fra le spire	h	4.05	2.08
Sezione delle spire	a^2	3 80	0.61
Raggio del cerchio equivalente	r	1.10	0 44
Lunghezza del conduttore	l	2470	3016
Diametro medio delle spire	d	28.05	24.0
Resistenza per correnti continue	R_c	0.0090	0.075
Resistività	ϱ	13.800	15.100
Permeabilità massima	μ_{max}	1890	1160
Coefficiente di isteresi	ε	0.00233	0.00320

Essendo da prevedere nel solenoide A, per la considerevole sezione e la permeabilità più elevata, una marcata localizzazione delle correnti di grande intensità negli strati superficiali, ed un considerevole riscaldamento, ho per esso determinato la variazione di resistenza e di permeabilità, al variare della temperatura.

Per sopraelevare questa, bastava addurre, durante un tempo adeguato, una corrente di notevole intensità; per la misura di essa si adattava ottimamente lo stesso avvolgimento magnetizzante, disposto sopra una delle spire, di cui la resistenza veniva determinata con grande precisione mediante le contemporanee letture della corrente e del potenziale applicato.

Così operando, la resistenza misurata a 15° e 75° risultò di 0.0085 e 0.0110, il cui rapporto è 1.30, e corrisponde a un coefficiente medio di variazione di 0.005 per 1°. In corrispondenza del valore della induzione 8000. la permeabilità apparve aumentata di 10 e 15 %, elevando la temperatura da 25° a 50° ed a 90°; per la induzione 14000 la variazione era appena di 1 e 4 %. Per le oscillazioni di temperatura, inevitabili durante le misure, ma limitate nella maggior parte dei casi ad alcuni gradi, le variazioni della resistenza specifica e della permeabilità. di cui figura solidariamente nei calcoli la semplice radice quadrata, non assumono dunque tale importanza, da dover essere singolarmente portate in conto. Tuttavia, in considerazione di esse, venne nei calcoli introdotta per questa spirale la resistività misurata a 25° anzichè a 15°.

Per le misure sopra i conduttori frazionati di grande permeabilità, ho utilizzato un fascio di fili di ferro ricotto, da me costruito parecchi anni or sono in occasione delle mie ricerche su la propagazione del magnetismo nelle aste rettilinee di ferro (¹). Il fascio è composto di fili del diametro di 0.4 mm., ha la lunghezza di m. 5.90 fra gli attacchi di estremità; il diametro apparente di cm. 1.30; il peso di Kg. 3 40 e la sezione di cmq. 0.724. La resistenza, misurata con corrente continua, è di 0.0107 ohm alla temperatura ambiente, ciò che corrisponde a una resistività di 13.100 unità assolute.

Il numero dei fili è di circa 580. Nel lavoro citato sono riportati i valori della permeabilità, corrispondenti a parecchi valori della induzione, fra 200 e 10000, e non è da escludere che una piccola modificazione di essi abbia avuto luogo per il fenomeno ben noto dell'invecchiamento; una esatta conoscenza dei parametri magnetici non è però necessaria per la interpretazione di questa parte delle ricerche, ed io perciò non ho avuto mestieri di ripeterne in questa sede la determinazione.

Per confrontare il comportamento dei conduttori magnetici di sezione circolare e quadrata, ho finalmente utilizzato due aste di ferro dolce del commercio, della lunghezza di circa 5 m. e della sezione di 2.69 e 2.52 cmq. che per lo scopo delle misure vennero semplicemente ripiegate in due tratti paralleli, alla distanza di circa 12 cm., e munite alle estremità di robusti morsetti per la adduzione delle correnti, e di morsetti accessorî per la misura della tensione.

Di esse ho determinato le curve di permeabilità ed i coefficienti di isteresi, coi soliti processi statici, ed i risultati relativi verranno riportati senz'altro più avanti, al luogo ove ne sarà fatta la discussione.

(¹) Memorie della R. Accad. dei Lincei, serie 5ª, vol. VII, 1909, pag. 489.

2. — Misure sopra i solenoidi di ferro massiccio.

Dal punto di vista teorico, non meno che ai fini delle pratiche applicazioni, presentano eguale interesse le misure della resistenza e della reattanza effettive, offerte dai solenoidi di ferro massiccio alle correnti alternate di piccola e di grande frequenza. In verità le spirali di ferro, incluse come protezione nei circuiti di forti correnti e di bassa frequenza, dànno luogo a una dissipazione continua di energia tanto più grande, quanto in esse è più accentuata la localizzazione della corrente dovuta all'effetto pellicolare; questo per altra parte attenua la reattanza interna e l'efficacia della protezione, sia nel caso delle formazione eventuale di un corto circuito alla frequenza normale, come e maggiormente in quello delle scariche oscillatorie dovute alle perturbazioni esterne, e affette ordinariamente da altissima frequenza.

L'effetto concomitante della frequenza e della permeabilità elevate fa sì, che alla propagazione delle correnti concorra in questi casi uno strato sottilissimo del conduttore, contiguo alla periferia interna del solenoide, per cui, se il conduttore ha sezione quadrata, la resistenza e la reattanza possono essere calcolate con tutta l'approssimazione mediante le formole di Rayleigh con le quali al limite si confondono quelle di Sommerfeld e di Coffin. Sotto questo riguardo si può dire che la estrema accentuazione dell'effetto pellicolare ha per conseguenza di sopprimere quasi per intero la induttanza interna, e di accrescere enormemente la resistenza per le correnti di frequenza molto elevata; il 1° fenomeno non ha certamente per effetto di migliorare la protezione, per la maggiore efficacia della quale gioverebbe nel maggior numero di casi la reattanza più elevata; il 2° può avere un effetto benefico nel senso, che la maggior resistenza contribuisce a dissipare in forma di calore l'energia delle onde elettromagnetiche, suscitate dalle perturbazioni esterne. Poichè la reattanza complessiva in questi casi si riduce quasi esclusivamente a quella esterna, essa si confonde con tutta l'approssimazione con quella che competerebbe a un solenoide analogo, costituito di materiale non magnetico; la resistenza però, variando nel rapporto di $\sqrt{\mu\varrho}$, se si ammette pel ferro una permeabilità media dell'ordine di 1000, e una resistività 7 a 10 volte maggiore di quella del rame, può diventare un centinaio di volte maggiore di quella che competerebbe a un solenoide di rame delle stesse dimensioni.

Non avendo a disposizione una macchina ad alta frequenza, capace di fornire una corrente di considerevole intensità, io non ho potuto estendere in questo senso le mie ricerche sopra le due spirali. Misure analoghe mediante correnti oscillanti vennero d'altronde già eseguite da Battelli e Magri [1], e confermarono, per ciò che riguarda l'ordine di grandezza della induttanza interna, completamente le previsioni teoriche.

Mi sono pertanto limitato a eseguire le misure con correnti di moderata frequenza, attribuendo ciononpertanto a questa variazioni tali, da coprire ampiamente l'intervallo che interessa negli impianti comunî a corrente alternata. Ricorsi per questo al medesimo gruppo di due alternatori, a quattro e dodici poli, già de-

(1) Rendiconti dei Lincei, vol. XV, fasc. 2°, 1906.

scritto nel mio lavoro precedente, e azionato da un motore a corrente continua in modo da poter realizzare frequenze comprese fra 30 e 200 circa. Utilizzando di ogni alternatore due fasi nel raggruppamento a stella, la forma delle f. e. m. è molto prossima alla sinusoide. e la grandezza efficace può essere modificata fra vasti limiti, variando la eccitazione. La intensità di corrente può essere a sua volta variata mediante opportuni trasformatori, in modo da raggiungere, ove occorra, 500 ampère alla tensione di una quindicina di volt e 1000 alla tensione metà. La frequenza è segnalata con grande esattezza da un frequenziometro a linguette vibranti.

Poichè i due solenoidi avevano uno sviluppo longitudinale, notevolmente maggiore di quello degli anelli sottoposti alle esperienze precedenti, ho potuto eseguire quasi tutte le misure di potenza assorbita mediante due vattometri di precisione. della casa Hartmann e Braun, aventi i circuiti fissi per le intensità massime di 25 e 50, e di 100 e 200 ampère, e il circuito mobile per la tensione di 30 volt. Non essendo il fattore di potenza in alcun caso inferiore a 0.7, non si rese necessaria in tal modo alcuna correzione per lo spostamento di fase della corrente voltometrica.

Per la misura delle tensioni e delle correnti mi servii del voltometro a filo caldo, graduato fra 0.5 e 3 volt. e fra 2.5 e 15, e degli amperometri a filo caldo, graduati fino a 50 e 200 ampère, già adoperati nelle ricerche precedenti, e diligentemente paragonati con istrumenti campione.

Per correnti più intense, fino a 400 ampère, utilizzai un riduttore normale di Siemens, da 500 a 5 ampère, collegando col secondario un amperometro e un wattometro adatti per questa medesima intensità. Le misure con correnti di notevole intensità venivano eseguite così rapidamente, ed a tali intervalli, da evitare qualsiasi notevole soprariscaldamento dei solenoidi.

Il procedimento seguito nelle misure era completamente conforme a quello delle ricerche precedenti; in base ai valori osservati della intensità, della tensione e della potenza, venivano cioè dedotti quelli della resistenza equivalente, del fattore di potenza, e della reattanza apparente; da questa, conoscendo la frequenza, scaturiva il valore apparente della induttanza totale, e, per differenza rispetto a quello esattamente calcolabile della induttanza esterna, si poteva dedurre il valore della induttanza interna, a cui occorre apportare la correzione già da me segnalata in funzione del quoziente differenziale della permeabilità, prima di paragonarlo a quello dedotto dalle formole teoriche, che si riferisce alla energia elettromagnetica di polarizzazione.

Anche il valore teorico della resistenza effettiva dev'essere affetto dalla correzione inerente all'energia dissipata per isteresi, se lo si vuol paragonare con quello della resistenza equivalente fornito dalle misure, e le formole e le modalità per entrambe queste correzioni sono ampiamente enunciate nel mio lavoro precedente, per cui non è mestieri ripeterle in questa sede.

Nella fig. 2 sono riprodotte le curve di variazione della resistenza apparente della spirale A, di grossa sezione, rilevate per diverse frequenze con correnti variabili da 25 a 200 ampère. Si rispecchia in esse la variazione sistematica della permeabilità, alla cui radice quadrata la resistenza ohmica effettiva è direttamente proporzionale, nel caso limite in cui la corrente si localizza in uno strato superficiale molto sottile, e diventa applicabile la formola di Rayleigh. Con tale restrizione la

resistenza ohmica effettiva diventa anche con tutta l'approssimazione, per i medesimi valori della permeabilità e della corrente, proporzionale alla radice quadrata della frequenza. Nelle curve sono riportati i valori della resistenza equivalente, influenzati dalla isteresi, e le relazioni predette non si verificano naturalmente, se non con una certa approssimazione.

Il fattore di potenza al crescere della corrente, oltre il valore per cui si realizza il massimo della permeabilità e quindi della induttanza, non subisce che una lenta

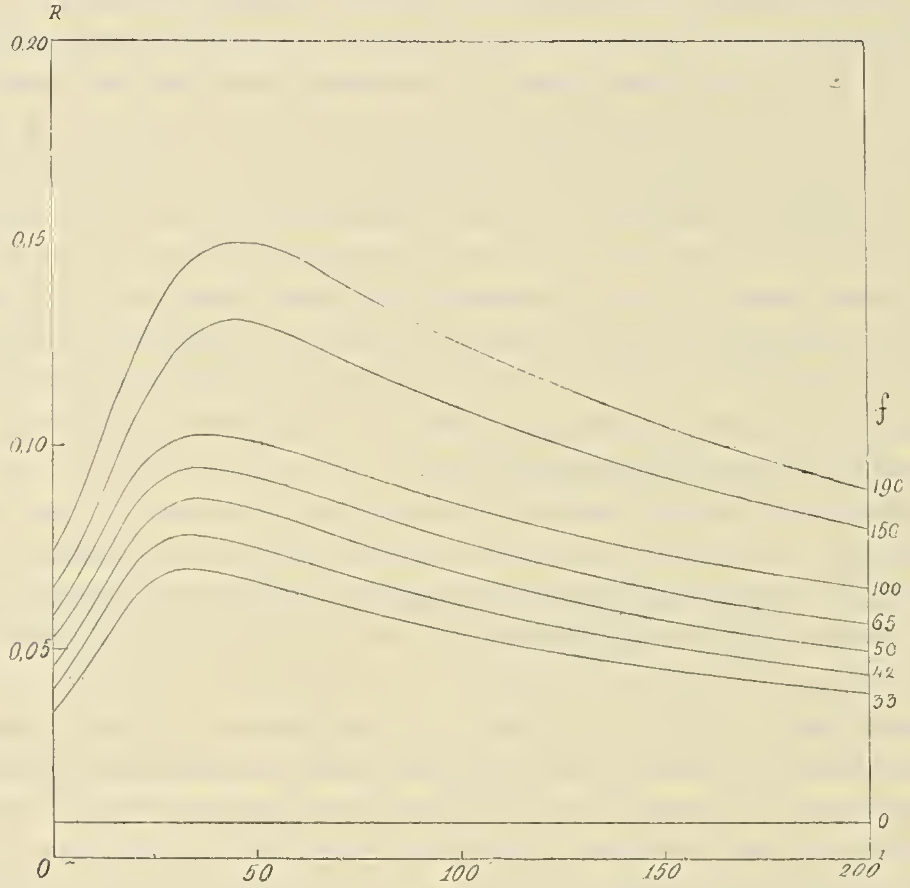


Fig. 2.

diminuzione, approssimativamente lineare, per il fatto che la reattanza interna tende a eguagliare la resistenza effettiva, laddove poi quella esterna si conserva costante. I valori della reattanza equivalente e complessiva, dedotti da quelli della resistenza in base alla tangente dello spostamento di fase, che a sua volta è funzione molto più rapidamente variabile dell'angolo e del fattore di potenza, risultano inevitabilmente affetti da una maggiore incertezza. Questa però non infirma sostanzialmente il valore della ricerca, in quanto essa intende a stabilire un accordo approssimato fra i risultati dell'esperienza e le più semplici previsioni della teoria, una esatta corrispondenza fra queste e quelle non essendo da presumere, attesa la grande complicazione del fenomeno magnetico.

La variazione della resistenza equivalente della spirale B, di più piccola sezione, segue un andamento analogo, come dimostrano le curve della fig. 3, rilevate per una metà delle spire fra 10 e 60 ampère. Di queste le due più basse, corrispondenti alle

frequenze di 50 e 100 periodi, non denunciano alcuna sistematica divergenza al variare della distanza fra le spire, entro i limiti di approssimazione realizzati; laddove quella superiore riporta i risultati ottenuti alla frequenza di 165 periodi con le spire situate alla distanza di 4.1 cm., rispetto ai quali quelli ottenuti alla stessa frequenza, ma con le spire alla distanza di 1 cm., appaiono più elevati di circa 2 %.

Fig. 3.

Il fattore di potenza naturalmente si modifica con la distanza delle spire, la quale ha una influenza diretta sopra la induttanza esterna e totale del solenoide, e subisce poi una lenta modificazione al variare della permeabilità e della corrente, come nel caso precedente.

Nell' intervallo delle correnti molto deboli il comportamento di questi solenoidi di materiale magnetico offre un interesse minore per le pratiche applicazioni, e può essere rilevato senza difficoltà mediante una delle ben note disposizioni potenziometriche. Esso può anche essere facilmente preveduto in base ai valori iniziali della permeabilità, corrispondenti a piccolissime intensità di campo. Nelle mie figure sono riportati su l'asse delle ordinate i punti corrispondenti ai valori iniziali della resistenza effettiva, calcolati in questo modo mediante le formole dei conduttori rettilinei, e con essi sono raccordate le curve rilevate sperimentalmente nell' intervallo ulteriore, a fine di individuare in tutto il suo complesso l'andamento del fenomeno.

Al crescere indefinito della corrente, la permeabilità media va per contro indefinitamente decrescendo, e il valore effettivo della resistenza tende asintoticamente a quello misurato con correnti continue. Per i due solenoidi in esame però le correnti non possono stabilmente eccedere le intensità qui contemplate, senza dare origine a un sovrariscaldamento esagerato, per cui le poche misure ulteriori, eseguite su la spirale più grande con correnti fino a 400 ampère, sono qui lasciate fuori considerazione.

3. — Interpretazione dei risultati.

Il materiale di esperienza da me raccolto è sufficiente per stabilire un confronto quantitativo fra i risultati delle misure e quelli della teoria. Sono infatti prese in considerazione due spirali di sezione e conformazione diversa, affette da diversa per-

meabilità e resistività, in un intervallo di magnetizzazione e di frequenza abbastanza ampio, e, nel caso del solenoide B, con distanza variata fra le spire, in modo da realizzare parecchi doi casi contemplati nelle teorie, di cui è cenno nella prima parte di questo lavoro.

Una circostanza sola, che tutte le teorie hanno presupposto a scopo di semplificazione, non è realizzata in alcuna delle mie misure: la dimensione assiale dei solenoidi a mia disposizione era invero troppo limitata, rispetto al diametro delle spire, per poterla anche approssimatamente ragguagliaro a una lunghezza indefinitamente grande; e d'altronde la confezione di solenoidi a spire molto più numerose avrebbe praticamente imposto una riduzione considerevole del diametro di esse, con che per un altro riguardo le ipotesi messe a base della teoria non sarebbero state verificate.

Anche la breve discontinuità, creata al mezzo dei due solenoidi dall'attacco centrale, produce una anomalia, per eliminare la quale nelle misure definitive su la spirale B, con le spíre situate alla maggiore distanza, io ho preferito di utilizzarne una sola metà. Del solenoide A però entrambe le sezioni vennero sempre mantenute in serie, per non ridurre eccessivamente la lunghezza e il numero dello spire.

Buon partito in casi consimili sarebbe eseguire le prese di potenziale in punti intermedî, escludendo dalle misure relative le spire di estremità, che potrebbero funzionare come semplici spire di guardia. Io tuttavia non ho creduto necessario ricorrere a tale artifizio, in considerazione non tanto della difficoltà di attuare attacchi intermedî di piccola resistenza, quanto del fatto che la reattanza interna ha in questi conduttori magnetici importanza prevalente di fronte a quella esterna, per cui la distribuzione del flusso e della corrente, che soprattutto influisce sopra i valori equivalenti della resistenza e della induttanza, non può subire un'alterazione sensibile se non nell'ultima spira, per la dissimmetrica condizione in cui questa si trova rispetto alle altre percorse dalla medesima corrente.

Attesochè nessuna delle teorie precedenti tiene conto delle perdite supplementari di energia per isteresi magnetica, e della modificazione della reattanza apparente dovuta alla variazione della permeabilità, tutti i risultati dell'esperienza devono essere affetti *a priori* dalle corrispondenti correzioni, prima di essere paragonati con quelli teorici.

Tenendo a mente quest'ultima considerazione, io ho creduto innanzi tutto conveniente eseguire il calcolo della resistenza e induttanza interna effettive, che competerebbero a un conduttore cilindrico e rettilineo della medesima sezione e lunghezza, in base alla teoria di Kelvin, e determinare, mediante le correzioni già ricordate, i valori toorici della resistenza e della induttanza equivalenti.

Il calcolo è stato eseguito in perfetta conformità delle norme contenute nel mio lavoro precedente, per cui basta in questa sede riferirne i risultati. Ricorderò tuttavia che le principali grandezze prese in considerazione hanno il simbolo e il significato seguente:

a) il fattore reale dell'argomento della funzione di Bessel:

$$x_1 = 2\, r_1 \sqrt{\frac{\pi \omega \mu}{\varrho}}\,;$$

b) lo spessore della scorza di resistenza equivalente:

$$\delta = \sqrt{2}\,\frac{r_1}{x_1} = \sqrt{\frac{\varrho}{2\pi\omega\mu}};$$

c) il valore effettivo della resistenza ohmica, calcolato in base alle funzioni di Savidge:

$$R' = \frac{x_1}{2}\,\frac{W(x_1)}{V(x_1)}\,R_c;$$

d) il valore teorico della induttanza interna, calcolato in base alle stesse funzioni:

$$L'_i = \frac{2\mu l}{x_1}\,\frac{Z(x_1)}{V(x_1)};$$

e) Il valore massimo della intensità di campo, realizzata alla periferia del conduttore di sezione circolare equivalente per il passaggio della corrente efficace I:

$$H_{max} = 0.2\sqrt{2}\,\frac{I}{r_1};$$

f) il valore medio della induzione nella scorza di resistenza equivalente, calcolato per semplice approssimazione con la formola:

$$B_{med} = \mu\,\frac{H_{max}}{2}$$

intendendo con μ in questa e in tutte le formole precedenti il valor medio della permeabilità, determinato con le misure statiche entro lo stesso intervallo massimo di magnetizzazione;

g) il lavoro consumato per ogni unità di tempo nella scorza periferica in causa dell'isteresi, calcolato per approssimazione con la formola

$$W_h = 2\pi\, l\,\delta\, r_1\, \varepsilon\, f\, B_{med}^{1.6}\, 10^{-7};$$

h) la resistenza addizionale, che al passaggio della corrente efficace impiegata darebbe luogo alla perdita di energia precedente:

$$\Delta R_h = \frac{W_h}{I^2};$$

l) la resistenza teorica equivalente e complessiva:

$$R = R' + \Delta R_h;$$

m) il quoziente differenziale delle permeabilità, in quanto serve a correggere il coefficiente teorico di selfinduzione:

$$\frac{d\mu}{dH} : \frac{\mu}{H} = \frac{dL_i}{di} : \frac{L_i}{i};$$

n) il valore corretto della induttanza equivalente totale:

$$L = L_e + L_i = L_e + L'_i \left[1 + \frac{1}{2} \frac{i}{L'_i} \frac{dL'_i}{di} \right].$$

In quest'ultima espressione L rappresenta il coefficiente teorico di induzione, che, moltiplicato per la pulsazione e per la intensità efficace di corrente, dovrebbe fornire il valore efficace della tensione di reattanza, e, come tale, si dovrebbe paragonare direttamente con la induttanza effettivamente misurata; L_e rappresenta la induttanza esterna, ossia quella parte del flusso di induzione, che è costituita da linee attraversanti lo spazio esterno al conduttore, e che si concatena con le spire al passaggio della corrente unitaria. Essa non differisce da quella totale per correnti di frequenza infinita, e si può confondere col flusso cui darebbe luogo un solenoide a spire lineari, di raggio eguale a quello medio $d/2$, al passaggio della corrente di intensità unitaria. Essa pertanto può calcolarsi mediante una qualunque delle formole, che valgono per solenoidi di lunghezza limitata, la più semplice delle quali è forse quella dovuta a Nagaoka, ove si determina tale coefficiente come quello di una porzione del solenoide di lunghezza indefinita, che abbia la stessa altezza H, e lo stesso numero di spire per unità di lunghezza N_1, attribuendogli un opportuno coefficiente di correzione per tener conto della influenza delle estremità:

$$L_s = \pi^2 d^2 N_1^2 H K.$$

Il coefficiente K è funzione del mezzo angolo di apertura del solenoide, riferito al punto centrale, ovvero del rapporto fra il diametro e la lunghezza d/H, e l'autore ne ha calcolato molti valori, riportati nella monografia di Rosa e Grover [1]. I valori L_s, così calcolati, competerebbero a un solenoide ideale, costituito da un nastro infinitamente sottile, avvolto a spire di diametro d combacianti fra loro. Per tener conto delle dimensioni trasversali del conduttore, tali valori devono ancora essere affetti da una doppia correzione, dovuta alla modificazione che per esse subiscono i coefficienti di induzione propria di ogni spira e quelli di induzione mutua fra ogni coppia di spire. La correzione è stata introdotta da Rosa [2] sotto la forma:

$$L = L_s - \Delta L = L_s - 2\pi d N (A + B),$$

dove N è il numero delle spire, A e B sono due costanti da lui calcolate, di cui la prima è solo funzione del rapporto fra il diametro del filo e la distanza delle spire $\frac{2r}{h}$, e la seconda del numero totale di spire.

Per i miei due solenoidi gli elementi relativi al coefficiente di selfinduzione esterna sono riportati nella seguente tabella I, nella quale è posto a base del calcolo il diametro medio delle spire, attesochè i calcoli preliminari hanno dimostrato che, alle moderate frequenze da me realizzate, la corrente invade ancora in modo quasi uniforme lo strato superficiale contiguo alla periferia esterna ed alle superficie affacciate delle spire, laddove per frequenze o permeabilità infinite essa si localizzerebbe

(1) Bull. Bur. of Stand, vol. VIII, pag. 119.

(2) Bull. Bur. of Stand, vol. II, pag. 161.

interamente nello strato contiguo alla periferia interna, e il flusso così detto esterno si ridurrebbe in corrispondenza. Per il solenoide B sono prese in considerazione le due configurazioni, nelle quali le spire di una sola sezione si trovavano rispettivamente alla minima ed alla massima distanza. Per il solenoide A è assunto come passo medio quello che si deduce dalla lunghezza complessiva $\frac{120}{27} = 4.44$.

TABELLA I.

Calcolo della induttanza esterna dei due solenoidi

	SOLENOIDE A	SOLENOIDE B	
	$h = 4.44$	$h = 1.00$	$h = 4.10$
N	28	20	20
H	120	19	78
d	28.05	24.0	24.0
$2r$	2 20	0.88	0.88
K	0.907	0.636	9.881
L_s	46.000	76.100	18 500
A	— 0.416	+ 0.429	— 1.000
B	+ 0.306	+ 0.297	+ 0 297
ΔL	+ 800	+ 2.200	— 2.200
L_e	45.200	73.900	20.700

Attesa la incertezza onde risulta affetta la induttanza esterna, in causa della disuniforme distribuzione della corrente attraverso alla sezione dei conduttori, nei calcoli successivi sono portati in conto come valori approssimati di essa per il solenoide A 45000, e per il solenoide B rispettivamente 74000 e 21000 nella condizione in cui le spire si trovavano alla minima ed alla massima distanza.

Nel caso limite delle correnti di frequenza infinita il 1° valore dovrebbe essere diminuito di circa 13 % e gli ultimi due di circa 6 %.

Nella tabella seguente sono riassunti per ognuno dei solenoidi gli elementi caratteristici per la determinazione delle permeabilità e dei loro quozienti differenziali, nonchè della induzione media.

TABELLA II.

Parametri magnetici relativi alle misure sopra i due solenoidi

SOLENOIDE	I	H_{max}	μ_{med}	B_{med}	$\frac{d\mu}{dH} : \frac{\mu}{H}$
A	100	25.6	1160	14800	— 0.48
»	150	38.4	960	18400	— 0.52
»	200	51.2	775	19800	— 0.50
B	30	19.2	820	7900	— 0.24
»	45	28.8	730	10500	— 0.35
»	60	38.4	640	12300	— 0.34

4. — Confronto dei risultati teorici e sperimentali.

Nelle tabelle seguenti sono riassunti i valori misurati della resistenza e della induttanza equivalenti per i due solenoidi, in corrispondenza di tre frequenze diverse, e per ognuna in corrispondenza delle tre correnti considerate nella tabella precedente; e sono in correlazione di essi calcolati, mediante le formole dianzi accennate, i valori teorici delle medesime grandezze, i quali competerebbero a un conduttore cilindrico della medesima sezione, avente la medesima resistività e permeabilità.

Per la spirale B sono riportati i valori misurati con le spire alla massima distanza, che, per quanto riguarda la resistenza, non differiscono apprezzabilmente, almeno per le due frequenze più basse, da quelli misurati con le spire alla minima distanza, laddove alla frequenza più elevata i due gruppi di valori presentano fra loro, come già si disse, una divergenza sistematica di circa 2 %.

TABELLA III.

Confronto dei valori teorici e sperimentali pel solenoide A.

$H = 120$; $N = 28$; $l = 2470$; $R_c = 0.0090$; $\varrho = 13.800$; $\varepsilon = 0.00233$; $r_1 = 1.10$; $L_e = 45\,000$.

	Frequenza 50			Frequenza 100			Frequenza 150		
I	100	150	200	100	150	200	100	150	200
R_{mis}	0.070	0.058	0.051	0.087	0.075	0.066	0.109	0.093	0.080
$\cos\varphi$	0.795	0.780	0.765	0.755	0.740	0.725	0.720	0.704	0.688
ωL_{mis}	0.053	0.047	0.043	0.076	0.068	0.063	0.105	0.094	0.084
L_{mis}	170000	150000	137000	121000	109000	100000	111000	99000	89000
$L_{mis} - L_e$	125000	105000	92000	76000	61000	55000	66000	54000	44000
x_1	20.0	18.3	16.4	28.4	25.7	23.1	34.8	31.6	28.3
δ	0.078	0.085	0.095	0.055	0.061	0.067	0.045	0.050	0.055
R'	0.066	0.060	0.054	0.093	0.084	0.076	0.113	0.103	0.092
ΔR	0.007	0.005	0.004	0.008	0.006	0.004	0.013	0.009	0.006
R	0.073	0.065	0.058	0.101	0.090	0.080	0.126	0.112	0.098
L_i'	200000	180000	165000	143000	130000	117000	116000	107000	96000
L_i	152000	133000	124000	109000	96000	88000	88000	79000	72000
$R : R_{mis}$	1.04	1.12	1.14	1.16	1.20	1.21	1.15	1.19	1.22
$L_i : L_{i\,mis}$	1.22	1.27	1.35	1.44	1.50	1.60	1.33	1.46	1.64

TABELLA IV.

Confronto dei valori teorici e sperimentali pel solenoide B.

$H = 78$; $N = 20$; $l = 1508$; $R_c = 0.0375$; $\varrho = 15100$; $\varepsilon = 0.0032$; $r_1 = 0.44$; $L_e = 21000$.

I	Frequenza 50			Frequenza 100			Frequenza 165		
	30	45	60	30	45	60	30	45	60
R_{mis}	0.110	0.100	0.094	0.153	0.139	0.126	0.197	0.176	0.158
$\cos\varphi$	0.892	0.880	0.868	0.875	0.860	0.845	0.860	0.840	0.820
ωL_{mis}	0.055	0.054	0.053	0.084	0.082	0.080	0.117	0.114	0.110
L_{mis}	175000	172000	169000	134000	131000	128000	113000	110000	106000
$L_{mis} - L_e$	154000	151000	148000	113000	110000	107000	92000	89000	85000
x_1	6.43	6.07	5.69	9.09	8.58	8.05	11.67	11.02	10.32
δ	0.097	0.102	0.109	0.068	0.073	0.077	0.053	0.056	0.060
R'	0.095	0.091	0.087	0.130	0.124	0.117	0.164	0.156	0.146
ΔR	0.012	0.009	0.007	0.017	0.012	0.010	0.022	0.016	0.013
R	0.107	0.100	0.094	0.147	0.136	0.127	0.186	0.172	0.159
L_i'	269000	253000	236000	192000	180000	168000	150000	141000	131000
L_i	236000	210000	196000	169000	149000	139000	132000	117000	119000
$R\ R_{mis}$	0.97	1.00	1.00	0.96	0.98	1.01	0.95	0.98	1.01
$L_i : L_{i\,mis}$	1.53	1.39	1.32	1.50	1.35	1.30	1.42	1.32	1.28

Nelle due ultime righe orizzontali sono iscritti i rapporti fra i valori calcolati e quelli misurati della resistenza e della induttanza interna equivalente.

Per il solenoide B, di piccola sezione, se si prescinde da una media divergenza negativa di 2 %, che è probabilmente dovuta a piccoli errori di misura, od alla approssimazione limitata del calcolo delle perdite supplementari per isteresi, ovvero ancora alla divergenza del conduttore dalla forma cilindrica, si può ritenere che la resistenza calcolata e quella misurata coincidano fra di loro, ciò che può indurre in altri casi consimili a calcolare la resistenza dei solenoidi composti di materiale magnetico, ed aventi le spire di sezione relativamente piccola ed un passo non piccolissimo, con le stesse formole che si applicano ai conduttori rettilinei, astraendo cioè dalla mutua induzione fra le spire, e dalla loro curvatura. Anche i valori misurati con le spire a 1 cm. di distanza non superano quelli qui riportati di più che 2 %, per cui la divergenza media fra i valori calcolati e quelli misurati non eccede anche in tal caso 4 %.

Per il solenoide A, di sezione notevolmente maggiore, la divergenza si accentua in senso positivo al crescere della frequenza e della intensità di corrente, e la causa è da ricercare nella distribuzione particolare del campo e della corrente, che si manifesta internamente al conduttore avvolto ad elica. In entrambi i casi poi il coefficiente teorico di induzione interna, ossia il flusso interno che si può immaginare concatenato con la corrente unitaria, supera considerevolmente quello dedotto in base alla f. e. m. di reattanza, conservandosi la divergenza media dell'ordine di 30 a 50 % nel solenoide grande, con limitato accrescimento al crescere della frequenza e della corrente, laddove nel solenoide B la divergenza va sistematicamente decrescendo al crescere dell'una e dell'altra.

Se si tiene debitamente conto del fatto, che la reattanza totale è dedotta dalla resistenza in base al fattore di potenza, il quale dipende dalla lettura di tre istrumenti; e che la deduzione è fatta passando dal coseno alla tangente di un angolo, in una regione dove questa seconda funzione trigonometrica varia molto più rapidamente della prima; e finalmente che la induttanza interna è ricavata da quella totale sottraendone il flusso esterno, che per il 2° solenoide rappresenta 12 a 20 %, e per il 1°, 22 a 50 % di quello totale; non si vorrà attribuire eccessiva importanza alle piccole anomalie che eventualmente si manifestino in taluni risultati, interessando soprattutto verificare se le divergenze medie constatate trovano la loro spiegazione nelle teorie più razionali enunciate per i solenoidi.

Per le ragioni già esposte, non giova l'applicazione della primitiva teoria di Wien e di quella di Sommerfeld, del solenoide a spire combacianti; ed invero la costante caratteristica diventa in questo caso, per il grande solenoide, con riferimento all'argomento della funzione di Bessel:

$$\alpha = 2 \times 1.95 \sqrt{\frac{2\pi\omega\mu}{\varrho}} = 2.5\, x_1$$

e assume perciò valori compresi fra 40 e 90.

Nel caso di grandi frequenze, o permeabilità, dovrebbe essere secondo l'autore il rapporto fra le resistenze:

$$\frac{R}{R_c} = \frac{\alpha}{2} .$$

Con la massima frequenza e permeabilità dovrebbe adunque questo rapporto avvicinarsi a 45, mentre quello calcolato in base alla teoria di Kelvin non eccede 12, e, in base alle verifiche precedenti, appare già esagerato.

Non vale nemmeno, per approssimare il valore teorico a quello misurato, il coefficiente di riduzione introdotto dall'autore, dell'ordine di 0.58-0.65, il quale ha d'altronde carattere esclusivamente empirico; nè quello suggerito da Esau, che diventerebbe in questo caso circa 0.7.

Per ragione analoga non è applicabile la formola di Coffin, la quale, se si introduce nel calcolo del flusso interno di selfinduzione il fattore di permeabilità, fornisce del pari valori notevolmente superiori a quelli che competono al conduttore rettilineo, e che noi abbiamo già verificato essere notevolmente esagerati. Nemmeno la correzione suggerita da Esau basta a stabilire una concordanza soddisfacente.

Volendo applicare la seconda teoria di Sommerfeld, si può ricorrere, per la determinazione del coefficiente φ, alla curva da lui tracciata, ovvero alla tabella di interpolazione riportata nella prima parte, la quale nel caso della spirale A, dove il rapporto fra la dimensione trasversale delle spire e il passo è 0.485, fornisce il valore:

$$\varphi = 1.64 .$$

Si deduce pertanto, con la formola delle alte frequenze:

$$\frac{R}{R_c} = 1 + 1.64\, r \sqrt{\frac{\pi \omega \mu}{2\varrho}} = 1 + \frac{1.64}{2\sqrt{2}}\, x_1 = 1 + 0.58\, x_1 .$$

Se si considera l'ultimo gruppo di misure alla frequenza 150 (che pel rame con permeabilità 1 e resistività 9 volte più piccola equivale a una frequenza di circa 15000), la x_1 varia da 35 a 28, per cui il rapporto $\frac{R}{R_c}$ dovrebbe risultare dell'ordine di 21 a 17, laddove il rapporto stesso, secondo la teoria di Kelvin per il filo rettilineo, è compreso fra 12 e 10, e in base alle mie verifiche appare già esagerato.

Anche per la spirale più sottile si manifesta, fra la resistenza calcolata in questo modo e quella misurata, un'analoga divergenza, per cui nel nostro caso specifico la seconda teoria di Sommerfeld non fornisce risultati concordanti con l'esperienza.

Secondo la teoria di Cohen, il rapporto fra la resistenza del solenoide e quella del conduttore rettilineo della medesima sezione, nel caso delle grandissime frequenze, a cui si può paragonare quello delle grandi permeabilità, dovrebbe in base alle nostre notazioni essere:

$$\frac{R}{R'} = \pi^2 N_1^2 r^2 .$$

Per la spirale A, portando in conto la distanza effettiva fra le spire, si ricava:

$$\frac{R}{R'} = \left(\frac{3.14 \times 1.1}{4.04}\right)^2 = 0.73\,.$$

Ora, se si considerano i valori misurati alla frequenza più elevata, di 150 periodi, depurati della parte supplementare dovuta all'isteresi, si ha:

I	100	150	200
$R_{mis} - \Delta R$	0.096	0.084	0.074
R′	0.113	0.103	0.092
Rapporto	0.85	0.83	0.080

Valori analoghi si deducono dalle misure a 100 periodi, per cui la formola limite di Cohen nel nostro caso fornisce valori della resistenza effettiva sensibilmente inferiori a quelli misurati, laddove l'applicazione della teoria di Kelvin (per il conduttore rettilineo) fornisce valori esagerati.

Si ottengono valori più approssimati ricorrendo alla formola completa di Cohen, la quale, in relazione alla resistenza offerta dal conduttore rettilineo per correnti continue R_c e per correnti alternate di grande frequenza R′, può scriversi:

$$R = R_c + 3.14^2\, R'\, N_1^2\, r^2\,.$$

Siccome per la nostra spirale A, alla frequenza 150, il rapporto $\frac{R'}{R_c}$ diventa, nelle condizioni ora considerate, 12.6, 11.4, 10.2, e l'aggiunta del primo termine equivale ad aumentare il rapporto teorico ora calcolato di 0.08 0.09 e 0.10 in cifra tonda, il nuovo rapporto teoricamente diventa 0.81, 0.82, 0.83, e nel suo valore medio approssima grandemente quello rilevato con le misure.

Non sembra il caso di tentare l'applicazione delle stesse formole al solenoide B, poichè, sia quando le spire si trovavano alla minima distanza, come quando esse erano alla massima, le condizioni del campo interno al solenoide soverchiamente differivano da quelle teoricamente supposte.

La teoria di Cohen per le variazioni di induttanza non si adatta al caso nostro, poichè l'autore ha lasciato fuori considerazione la permeabilità, e questa avrebbe nelle sue formole complete una funzione notevolmente complicata. Delle sue formole più semplici, che valgono nel caso limite delle alte frequenze, io non sono riuscito a stabilire alcun accordo coi risultati delle mie esperienze.

La teoria di Nicholson, come fu già osservato, prescinde dalla induzione mutua fra le spire, ed è sostanzialmente intesa a caratterizzare l'influenza della curvatura, la quale nel caso nostro ha per contro una importanza secondaria.

Volendo in verità fare l'applicazione di essa alle nostre spirali, che hanno elevata permeabilità, e dove, come suppone l'autore, il raggio delle spire è maggiore di 12 volte quello del conduttore, potremo ricorrere alla formola semplificata, che

dà il rapporto della resistenza effettiva per correnti alternate a quella per correnti continue, e che, per l'importanza trascurabile del 2° termine, diventa con le notazioni nostre:

$$\frac{R}{R_c}=\frac{\pi r^2}{\varrho}\sqrt{\frac{\omega\mu\varrho}{2\pi r^2}}=\frac{x_1}{2\sqrt{2}}.$$

Ora, per la spirale A, con i valori della permeabilità e della frequenza da me realizzati, x_1 rimane compreso fra 16 e 35, per cui il rapporto fra le funzioni caratteristiche di Bessel $\frac{W(x)}{V(x)}$ varia solamente da 0.74 a 0.72, ossia non differisce da $\frac{1}{\sqrt{2}}$ più di 2 a 4 %, e con questa approssimazione il rapporto di Nicholson per la spirale si può confondere con quello di Kelvin per il conduttore rettilineo. Per la spirale B l'argomento x varia da 6 a 12, e $\frac{W(x)}{V(x)}$ da 0.80 a 0.75, per cui il rapporto di Nicholson differisce da quello di Kelvin di 12 a 6 %. In entrambi i casi le divergenze hanno il segno di quelle rilevate sperimentalmente, e si accentuano al diminuire dell'argomento, ossia della permeabilità, come praticamente si è verificato. Esse peraltro si manifestano esagerate nel 2° caso, e nel 1° inadeguate a giustificare quelle della misura, per cui è giuocoforza ammettere che la ragione di queste risieda in altro elemento, che non sia la curvatura delle spire.

Anche la formola limite di Nicholson per la induttanza interna non dà ragione delle discrepanze da me verificate, poichè, limitandola al 1° termine, dal momento che gli altri sono piccolissimi, essa può scriversi:

$$L_i=\sqrt{\frac{\varrho\mu}{2\pi\omega r^2}}=\frac{2\sqrt{2}}{x_1}\frac{\mu}{2}.$$

Nella formola di Kelvin per il conduttore rettilineo, riferita all'unità di lunghezza, compare lo stesso fattore $\frac{\mu}{2}$ moltiplicato per $\frac{4}{x_1}\frac{Z(x)}{V(x)}$, e il rapporto di queste funzioni di Bessel non differisce da $\frac{1}{\sqrt{2}}$, fra i limiti dell'argomento da me realizzati per la spirale B, più di 1 % (0.698 a 0.705) e per quella A più di 1 ‰ (0.706-0.707).

In conclusione nessuna delle teorie finora enunciate sembra potersi applicare ai solenoidi di ferro con l'approssimazione, con la quale la teoria di Kelvin potè adattarsi ai conduttori magnetici rettilinei, e la cosa non deve soverchiamente meravigliare, se si considera che la maggior parte di esse è basata sopra ipotesi, che non si realizzano praticamente nelle spirali ordinarie di rame, e tanto meno in quelle di materiale magnetico. Solo la teoria di Nicholson sembra tenere correttamente conto dell'effetto della curvatura, che può assumere una certa importanza nei solenoidi di piccolo diametro, e quella di Cohen sembra giustamente interpretare l'effetto della vicinanza delle spire, almeno per ciò che riguarda la resistenza effettiva, della quale chiarisce la diminuzione entro certi limiti del passo, laddove, per passi molto piccoli, essa ne

prevede un considerevole aumento, in conformità della teoria di Sommerfeld, e per passi molto grandi non è più applicabile, in quanto vien meno la presupposta uniformità del campo interno al solenoide.

Della reattanza interna le teorie precedenti lascerebbero prevedere un notevole incremento al diminuire del passo, comparabile, nel caso limite delle grandi frequenze, a quello della resistenza effettiva, ciò che è diametralmente opposto a quanto pei nostri conduttori di grande permeabilità, e di sezione quadrata, l'esperienza ha permesso di verificare. Ora l'interpretazione di questo fatto può costituire uno dei punti più interessanti di questa ricerca, e, per arrivare ad essa con un procedimento razionale, io ho creduto necessario eseguire alcune misure accessorie sopra conduttori massicci di ferro, aventi una configurazione più semplice, e suscettibili di modificare fra vasti limiti la loro posizione relativa.

5. — Misure sopra aste magnetiche rettilinee.

Mi valsi all'uopo delle due sbarre di ferro commerciale, già ricordate nel 1° paragrafo, aventi una la sezione quadrata di 1.59 cm. di lato, l'altra la sezione circolare di 1.85 cm. di diametro. Le aree rispettive risultano di 2.52 e 2.69 cmq., i perimetri di 6.35 e 5.81 cm. Le resistività misurate sono di 13.500 e 13.800 unità assolute; le permeabilità, per campi di intensità superiori a 10 unità, non differiscono in modo apprezzabile, laddove, nella regione di massimo, quella del ferro quadro appare sensibilmente inferiore a quella del ferro tondo, probabilmente per il maggior incrudimento dovuto alla sagoma diversa di lavorazione. Limitando le osservazioni all'intervallo delle correnti superiore a 60 ampère, le massime intensità di campo interno risultano superiori a una ventina di unità, le permeabilità medie non differiscono che di alcune unità per cento, e i loro quozienti differenziali risultano perfettamente paragonabili.

Or bene, le misure di resistenza equivalente, eseguite isolatamente sopra ciascuna delle aste con correnti alternative variate da 60 a 150 ampère, e frequenze da 50 a 150, dopo che entrambe erano state ripiegate in due tratti uguali e paralleli, distanti di circa 12 cm., fornirono, a parità di lunghezza, valori quasi perfettamente coincidenti; più esattamente la resistenza equivalente del ferro quadro supera in media di 1 °/₀ quella del ferro tondo, mentre per correnti continue l'eccesso è di circa 5 °/₀. La cosa non meraviglia, se si considera che, per alte frequenze o permeabilità, la propagazione delle correnti alternate si fa quasi esclusivamente attraverso alla scorza periferica, il cui spessore per i due conduttori si può ritenere poco diverso, laddove lo sviluppo perimetrale è nel conduttore quadro di circa 9 °/₀ più grande.

Per chiarire meglio questa questione, e ricercare la influenza della contiguità dei conduttori su la loro resistenza e reattanza effettive, io ho sovrapposto le due sbarre coi rami paralleli, e simmetrici rispetto a un medesimo piano di mezzeria, variandone la distanza con interposizione di apposite stecche di legno, e collegandole in serie fra loro, una volta in modo che fossero entrambe attraversate dalla corrente nel medesimo verso, un'altra in verso opposto. A breve distanza dai morsetti di termine, destinati all'adduzione della corrente e al collegamento intermedio, erano

disposti altrettanti altri morsetti per le misure voltometriche e wattometriche, in modo da rendere queste indipendenti dalle cadute di tensione ai contatti. Le due coppie erano collegate ai pozzetti di un invertitore a mercurio, mediante il quale con la massima rapidità poteva essere collegata l'una o l'altra col circuito del voltometro e del wattometro. Eseguendo, per un' intensità di corrente qualunque, le misure alternate su l'una e l'altra coppia, il rapporto delle tensioni e quello delle potenze (ossia delle resistenze) si rendeva indipendente dalle letture dell'amperometro, e poteva perciò rilevarsi con la massima esattezza; essendo peraltro misurata contemporaneamente anche la corrente, era possibile dedurre ogni singolo valore della resistenza e del fattore di potenza, e quindi anche della reattanza.

Nella tabella seguente sono riassunti i risultati delle misure di resistenza, eseguite con le correnti in opposizione e in concordanza per due valori della frequenza *f*, e per due distanze diverse *d*, misurate fra le superficie affacciate delle aste, la minore delle quali corrisponde a $^1/_3$ circa della loro dimensione trasversale, la maggiore a circa il triplo di questa. Ogni valore denunciato scaturisce da un gruppo di osservazioni, eseguite simultaneamente ai tre apparecchi con 4 correnti diverse, di intensità 80 100 120 e 140 ampère.

d	*f*	Correnti opposte		Correnti concordi	
		R_1	R_2	R_1'	R_2'
0.55	50	0.0149	0.0156	0.0150	0.0157
»	150	255	267	265	274
5.00	50	146	154	144	152
»	150	260	270	258	272

Con le aste alla massima distanza, non è possibile rilevare alcuna sistematica divergenza fra i valori della resistenza misurati con correnti opposte e concordi, per cui l'effetto della contiguità appare completamente trascurabile. Dell'asta quadrata, a cui si riferiscono i valori delle seconde colonne R_2 ed R_2', la lunghezza utilizzata, per le esigenze delle connessioni, superava di circa 3 % quella dell'asta rotonda, e i valori medii della resistenza appaiono circa 5 % più alti, per cui, a parità di lunghezza, la resistenza appare circa 2 % più alta, e ciò concorda assai bene con quanto fu già dedotto dalle misure su le aste isolate; perciò sembra lecito concludere che, nei conduttori quadri, l'effetto pellicolare ha per conseguenza un aumento più piccolo della resistenza effettiva, rispetto a quelli circolari di eguale sezione, in causa del maggiore sviluppo periferico.

Ancora alla minima distanza di 0.55 cm. per correnti della frequenza 50 i valori della resistenza, misurati con correnti opposte e concordi, sono per ogni asta perfettamente paragonabili fra loro, mentre, alla frequenza di 150 periodi, si rileva con correnti concordi un piccolo aumento, che non si presume esclusivamente accidentale, poichè concorda con quello verificato già per il solenoide B, e la teoria stessa ne dà ragione, dovendosi accentuare la perturbazione interna, dovuta alla azione mutua fra le spire, tanto più, quanto più vicine sono le spire, e la corrente loca-

lizzata in uno strato più sottile contiguo alla periferia. Siccome l'aumento dovuto alle correnti concordi non eccede 3 % nell'asta quadrata e 4 % nella tonda, e nelle esperienze sopra i solenoidi io non ho in alcun caso realizzato passi così piccoli rispetto alle dimensioni trasversali delle spire, si può ritenere che tale fenomeno abbia generalmente in esse assunto un' importanza trascurabile. Sotto questo riguardo la più verosimile spiegazione della sistematica eccedenza delle resistenze, calcolate con le formole dei conduttori circolari e rettilinei rispetto a quelle misurate per il solenoide più grande, in quanto non se ne voglia accettare senza riserve la teoria di Cohen, è appunto da ricercare nella forma quadrata della sezione, la quale, a parità di area, possiede un perimetro circa 13 % più grande, e al limite tende perciò ad assumere una resistenza altrettanto più piccola; se si aggiunge l'azione delle masse libere alla superficie, nonchè della maggior riluttanza offerta alle linee di induzione, la quale attenua evidentemente il flusso interno, e quindi rende meno sensibile l'addensamento periferico della corrente, le divergenze constatate fra i valori teorici e quelli misurati, unicamente percettibili nella spirale di sezione maggiore, e leggermente crescenti con la frequenza, si possono ritenere perfettamente giustificate.

Circa la induttanza interna, è da osservare che, in base alla teoria di Rayleigh e di Coffin, essa dovrebbe, per la vicinanza delle spire, andar crescendo in modo analogo alla resistenza effettiva, con la quale al limite la reattanza tende a diventare uguale per correnti di frequenza molto elevata; l'esperienza prova d'altronde nel nostro caso che i valori, teoricamente calcolati per il conduttore cilindrico e rettilineo, superano considerevolmente quelli misurati per le spirali di sezione quadrata. La causa del fatto è probabilmente la stessa, in quanto il maggior sviluppo periferico, e l'azione demagnetizzante delle masse superficiali, concorrono, come or ora si disse, alla diminuzione del flusso interno, indipendentemente, o addirittura in contrasto con l'effetto della contiguità.

Per avere di ciò una conferma diretta, io ho raccolto nella occasione delle misure precedenti, e di altre sistematicamente eseguite sopra le stesse aste, situate in concordanza e in opposizione a distanza di 0.5 1.0 2.0 5.0 cm. e alimentate con correnti di frequenza 50 e 150, e di intensità variata da 50 a 150 ampère, i singoli rapporti fra le tensioni applicate e quelli fra le quantità di energia assorbite. Questi corrispondono senz'altro ai rapporti fra le resistenze, e, moltiplicati per l'inverso dei primi, forniscono il rapporto fra i fattori di potenza, in base ai quali potrebbero calcolarsi gli spostamenti di fase ed i valori equivalenti della reattanza:

$$\frac{\cos\varphi_1}{\cos\varphi_2} = \frac{W_1}{W_2}\,\frac{V_2}{V_1}\,.$$

Orbene, nessuna sistematica divergenza si rileva fra i rapporti delle resistenze e delle tensioni, per ciò che concerne le variazioni attribuite alla distanza dei conduttori e il verso delle correnti, per cui il comportamento relativo dei conduttori di profilo trasversale diverso, e composti di sostanza magnetica, si può ritenere indipendente dalla loro maggiore o minore vicinanza.

Per quanto concerne peraltro l'effetto della frequenza, l'asta quadrata subisce un incremento minore della resistenza, e un maggior decremento della induttanza, a

quanto si può rilevare dalla tabella seguente, che si riferisce a una lunga serie di osservazioni con correnti concordi:

f	*d*	$\frac{V_2}{V_1}$	$\frac{W_2}{W_1}$	$\frac{\cos\varphi_2}{\cos\varphi_1}$
50	0.55	1.021	1.033	1.012
»	1.05	1.025	1.037	1.012
»	2.00	1.028	1.045	1.017
»	5.00	1.023	1.038	1.017
		1.024	1.038	1.014
150	0.55	1.005	1 014	1.009
»	1.05	1.013	1.016	1.003
»	2.00	1.018	1.011	0.993
»	5.00	1.011	1.025	1.014
		1.012	1.017	1.005

La divergenza dei rapporti dall'unità è da attribuire in parte alla maggior lunghezza già ricordata dell'asta quadrata (3 %), ma la variazione relativa appare alla frequenza 150 sensibile nella misura del 2 % nelle resistenze, e di poco più di 1 % nelle tensioni, per cui la variazione relativa del fattore di potenza non supera 1 %, e quella della reattanza si può, con tutta l'approssimazione consentita da tali misure, ritenere dello stesso ordine di quella della resistenza.

Le misure sopra i solenoidi hanno mostrato una divergenza sistematica e più grave fra i valori calcolati e quelli misurati della reattanza, che non fra quelli della resistenza. È verosimile adunque che le cause del fenomeno siano molteplici, ovvero abbiano sul doppio ordine di fenomeni una influenza diversa; la diminuzione della resistenza nel conduttore di sezione quadrata rispetto a quello cilindrico è probabilmente dovuta in massima parte al maggiore sviluppo periferico, laddove quella della induttanza, oltre che da quella stessa causa, può essere occasionata dalla forza demagnetizzante dovuta alle masse magnetiche superficiali, in quanto essa ha per effetto una diminuzione del campo all'interno, e del lavoro di polarizzazione.

6. — Conclusioni circa il calcolo e l'impiego dei solenoidi magnetici.

In base alle premesse considerazioni, è chiaro che un calcolo rigoroso degli elementi elettromagnetici relativi ai solenoidi di ferro deve offrire in generale gravissime difficoltà. Ciò non toglie che, per gli scopi pratici, si possa con vantaggio ricorrere a metodi approssimati, pei quali le presenti ricerche forniscono alcuni elementi interessanti.

Da esse in verità scaturisce che le resistenze effettive, ove non si tratti di conduttori di sezione molto grande, si possono calcolare con sufficiente approssimazione con gli stessi artifizî già applicati ai conduttori cilindrici e rettilinei, secondo la

teoria di Rayleigh e di Kelvin, utilizzando i valori medii della permeabilità, rilovati coi soliti processi statici entro l'intervallo corrispondente di magnetizzaziono, e portando in conto le perdite supplementari di energia dovute all'isteresi. Quando le spire hanno sezione quadrata o rettangolare, e tali dimensioni trasversali, rispetto a cui lo spessore della scorza periferica, calcolato da Rayleigh, risulti molto piccolo, il valore della resistenza equivalente si può ottenere con maggiore approssimazione diminuendo quello calcolato per il cilindro di eguale sezione nella misura inversa dello sviluppo perimetrale. ossia di circa 12 °/₀ nel caso della sezione quadrata.

Il calcolo della reattanza interna per i solenoidi di sezione quadrata, sostituendo loro il conduttore cilindrico rettilineo di area eguale, fornisce in generale valori esagerati, e la correzione precedente, di cui nel caso limite delle grandi frequenze darebbe ragione la teoria, non basta a mettere d'accordo i valori calcolati con quelli della misura. Per questo conviene adunque ricorrere in via provvisoria, e fino a che non sarà sviluppata una teoria più completa, ad un coefficiente empirico di correzione, che, secondo le mie misure, si può ritenere dell'ordine 0.70 tanto per i piccoli come per i grossi conduttori. L'importanza relativa della correzione muta peraltro con la configurazione del solenoide e con la frequenza delle correnti, in quanto la si riferisca alla induttanza complessiva, di fronte alla quale la parte dovuta al flusso interno, al crescere della frequenza, perde per gradi la sua importanza, e può, per frequenze molto elevate, diventare trascurabile.

Sotto questo riguardo è nettamente da distinguere il vantaggio che il ferro può presentare nella costruzione dei solenoidi, impiegati come protezione nei circuiti di forti correnti, per bassa e per alta frequenza. Alle frequenze ordinarie, e coi valori medii della permeabilità, il flusso interno al conduttore magnetico suol prevalere di gran lunga su quello esterno, per cui la permeabilità elevata contribuisce alla efficacia della protezione, introducendo tuttavia una resistenza effettiva notevolmente maggiore di quella, che compete al passaggio di correnti continue, con che si rende necessaria una maggior spesa di energia. Nei conduttori di grosse dimensioni l'effetto pellicolare è talmente accentuato, da diminuire grandemente l'economia relativa dell'impiego del ferro, come si vede dalle cifre riportate nelle mie tabelle, dove il conduttore della spirale A, di sezione 1.95×1.95 cmq., non appare utilizzato per la conduzione delle correnti di frequenza 50 100 150, se non per uno spessore di 0.95 a 0.45 mm. e assume per esse una resistenza 6 a 12 volte maggiore di quella per correnti continue. La conseguenza pratica è che tale spirale, e molte altre, predisposte in origine per una corrente normale di 400 ampère su la base di circa 1 ampère per mmq., non ne poterono in realtà sopportare più della metà, e dovettero essere riformate collegandone le due sezioni in parallelo, con che la resistenza e la reattanza si ridussero approssimativamente alla quarta parte, e diminuì notevolmente l'efficacia della protezione.

Nei riguardi delle correnti di alta frequenza, che si possono manifestare negli impianti in causa di scariche atmosferiche ovvero di sovratensioni interne, la resistenza dei conduttori di ferro di notevole sezione diventa praticamente enorme, per la estrema sottigliezza dello strato periferico in cui viene esclusivamente localizzata la corrente, e da questo punto di vista la permeabilità del metallo può contribuire

alla più rapida dissipazione dell'energia, attenuando l'ampiezza delle onde nella loro propagazione ulteriore. In tali condizioni la resistenza delle spire di sezione rettangolare o quadrata si può calcolare, portando in conto il solo strato superficiale contiguo alla periferia interna del solenoide, secondo le formole limiti di Rayleigh e di Sommerfeld; con le dimensioni di questo è da porre parimenti in relazione la induttanza, quasi esclusivamente rappresentata dal flusso esterno al conduttore. In conseguenza la più o meno elevata permeabilità del ferro non ha più alcuna importanza nel fenomeno induttivo, per cui la reattanza si confonde con quella di un sistema analogo di spire di rame o di altro metallo qualunque, di fronte al quale la resistenza si può ritenere aumentata nella proporzione di $\sqrt{\varrho\mu}$.

7. — Ricerche sopra i conduttori magnetici frazionati.

Nei circuiti di correnti molto intense, l'impiego del ferro può concepirsi in forma di conduttori opportunamente frazionati, nel qual caso però interviene, a limitare gli effetti della reattanza interna, il fenomeno dovuto alla forza demagnetizzante, esercitata dalle masse superficiali. Per mettere questo in evidenza, io ho intrapreso l'ultima parte delle mie ricerche.

Mi sono valso per queste del fascio rettilineo di fili di ferro ricotto, del diametro di 0,4 mm., che già mi servì per le ricerche anteriori su la propagazione del magnetismo, e che ho brevemente descritto nel primo paragrafo della 2ª parte di questa Memoria [1].

All'uopo esso si adattava particolarmente bene, in confronto delle ordinarie funi di ferro e acciaio, composte di uno o più trefoli, attorcigliati nel solito modo, in quanto, essendo costituito di molti fili sottilissimi, tutti distesi parallelamente all'asso del fascio, ognuno di essi risentiva l'induzione propria e quella mutua di tutti gli altri nella forma più semplice di un campo interno e di un campo trasversale, simmetrici rispetto all'asse, senza alcuna componente longitudinale. Ora, il campo trasversale H_t, creato dalle correnti contigue, risulta enormemente attenuato internamente a ognuno dei fili dalla distribuzione superficiale delle masse magnetiche libere, che crea un campo contrario e uniforme, riducendone la intensità ad $\frac{H_t}{1+\varkappa N}$, dove $\varkappa$ è la suscettibilità magnetica, ed N il fattore di smagnetizzazione, notoriamente eguale a 2π. Per ciò la induzione trasversale interna non eccede apprezzabilmente il doppio della intensità del campo esterno. Il campo risultante in ogni conduttore elementare si può adunque confondere con tutta l'approssimazione con quello, dovuto alla sola corrente che lo attraversa, ed ognuno dei conduttori si comporta perciò, come se fosse completamente isolato e lontano sugli altri, attenuandosi in esso l'effetto pellicolare in ragione della 4ª potenza del diametro, a segno da rendersi alle frequenze ordinarie, e per fili molto sottili, quasi completamente trascurabile.

Del fàscio in esame, la cui permeabilità varia da 200 a 1200, variando la induzione da 200 a 10.000, io ho in verità misurato fra gli elettrodi di termine,

[1] Pag. 843.

situati alla distanza fii 590 cm., una resistenza per correnti continue alla temperatura ambiente di 0.0107 ohm, che, per una sezione di 0.724 cmq., corrisponde a una resistività di 13.100 unità assolute, paragonabile a quella del ferro della spirale A, studiata in precedenza.

Orbene, avendo disteso il fascio in due rami paralleli, alla distanza di 15.5 cm., con che la induttanza esterna risulta dell'ordine di 1220 unità assolute, e la reattanza corrispondente per le frequenze 50, 100 e 150 si eleva a 0.00038, 0.00077 e 0.00115 ohm, ossia rappresenta 3.6, 7.2 e 10.8 % della resistenza, io ho con correnti alternate della intensità di 50 a 150 ampère rilevato un fattore di potenza di 1.00, 0.98 e 0.95, ed un valore medio della resistenza equivalente di 0.0112 ohm, pressochè inalterato in tutti i casi, salvo le piccole oscillazioni dovute all'aumento inevitabile di temperatura con le correnti più intense.

Il valore predetto supera quello che compete alle correnti continue appena del 5 %, e ciò basta a dimostrare che l'effetto pellicolare, e le perdite supplementari di energia dovute alla magnetizzazione periodica trasversale e circolare, sono in questo caso quasi perfettamente trascurabili.

La reattanza equivalente che si deduce da queste misure, sebbene affetta da notevole incertezza per il rapido gradiente dell'angolo di fase in relazione al fattore di potenza, è sensibilmente superiore a quella che si calcolerebbe sottraendo ogni filo elementare all'influenza di tutti gli altri, e ciò dimostra non potersi da tale influenza prescindere completamente nei calcoli di precisione, o per le frequenze elevate. Praticamente però, e per le frequenze ordinarie, la induttanza interna assume di fronte alla resistenza nelle condizioni indicate una importnnza quasi completamente trascurabile.

Le condizioni si modificano però profondamente, se si attorciglia il fascio dei fili, conferendogli il carattere di un conduttore cordato, nel quale tutti o una parte dei fili elementari risultano avvolti ad elica, e creano al passaggio della corrente un campo longitudinale, che ha per effetto di magnetizzare i fili rimanenti, con essi concatenati. Il flusso di induzione, eccitato in tal modo al passaggio della corrente unitaria, e quindi la induttanza interna del fascio, cresce in tal caso in una ragione complicata al diminuire del passo dell'elica, e della disposizione relativa dei varii elementi.

Per avere un'idea intorno all'andamento del fenomeno, io ho ripetuto le misure con le medesime correnti e frequenze, dopo avere impresso ad ognuno dei due rami la torsione corrispondente alla rotazione di una delle estremità per dieci giri rispetto all'altra, nel medesimo senso. Con ciò i fili posti all'asse si potevano immaginare semplicemente torti, mentre quelli periferici, pure conservando invariata la distanza dall'asse, si venivano a trovare disposti secondo altrettante eliche, aventi un passo di circa 30 cm.

Non sarebbe eccessivamente difficile in questo caso il calcolo della componente longitudinale del campo, che si dovrebbe esercitare sopra gli elementi situati a diversa distanza dall'asse, nella ipotesi di una prestabilita ripartizione della corrente fra i fili elementari, quale si potrebbe prevedere nel caso del loro isolamento perfetto. In pratica però il fenomeno è in questo, e in quasi tutti i casi consimili, complicato

dalla conduttività superficiale, che rende possibile una parziale propagazione della corrente dall'uno all'altro filo, per cui il risultato sarebbe in gran parte illusorio.

Per il nostro scopo basterà segnalare il risultato delle nuove misure, le quali, per la resistenza equivalente, hanno fornito alle frequenze già indicate un valore medio di 0.0123, 0.0151 e 0.0177 ohm, superiore di 15, 41 e 65 % al valor minimo constatato per le correnti continue, e un fattore di potenza di 0.93, 0.88 e 0.85.

Misure comparative della resistenza equivalente di conduttori cordati del commercio, costituiti da un certo numero di fili di ferro, diversamente attorcigliati in modo da costituire un unico trefolo, o parecchi trefoli, attorcigliati a loro volta nello stesso senso, ovvero in senso contrario a quello dei fili elementari, sono già state pubblicate dall'Associazione degli elettricisti tedeschi un anno fa (1), quando, per lo stato di guerra, si elevarono in Germania grandemente i prezzi dei conduttori di rame, e si rese necessaria in molti casi la sostituzione loro, e l'installazione nei nuovi impianti, delle condutture di ferro. Nel tracciamento delle curve relative alla variazione di quelle resistenze in funzione dell'intensità di corrente, rispetto alla resistenza per correnti continue, è stato però sistematicamente commesso l'errore di raccordarle con l'origine, laddove è ben chiaro che, anche con intensità debolissime, l'effetto pellicolare si deve manifestare per correnti alternate in ragione della loro frequenza e della permeabilità iniziale del ferro, come bene risulta dalle curve riportate nelle mie figg. 2 e 3.

A prescindere da ciò, scaturisce chiara da quelle misure la convenienza di costituire i conduttori cordati con fili elementari del minimo diametro, e, se si tratta di un trefolo unico, di avvolgere in esso i diversi strati di filo in senso contrario, e, se si tratta di corde a diversi trefoli, di attorcigliare questi nel verso contrario a quello in cui in ogni trefolo sono avvolti i fili elementari.

Coordinando col risultato di queste quello delle mie misure, si deve concludere che il frazionamento dei conduttori magnetici può in essi attenuare quasi illimitatamente l'effetto pellicolare, per quanto riguarda la variazione della resistenza effettiva, purchè il frazionamento sia fatto in fili elementari di diametro convenientemente piccolo, parallelamente disposti gli uni rispetto agli altri, ovvero intrecciati o avvolti in strati successivi di verso contrario, in modo da non originare alcuna componente di campo nel senso longitudinale. In tali condizioni la permeabilità magnetica non ha influenza apprezzabile sopra la reattanza complessiva, e questa si può calcolare con sufficiente approssimazione, tenendo solamente conto del campo esterno.

Le perdite supplementari, dovute al campo trasversale, risultano a loro volta grandemente attenuate dalla azione smagnetizzante, dovuta alle masse magnetiche libere alla superficie, per la quale la induzione media trasversale non può assumere internamente ai fili un valore superiore al doppio della forza esterna. Tenendo conto della maggior resistività, si desume che le perdite supplementari debbono risultare più esigue nei fili molto sottili di ferro, che non in quelli analoghi di rame, con che, se si tien conto del rapido aumento della resistenza dei fili magnetici massicci,

(1) Elektrot. Zeitschr. 1915, pag. 44.

si vede che la resistenza critica nel concetto di Möller e di Rogowski deve per essi diventare di gran lunga più elevata.

L'impiego del ferro, frazionato in fili molto sottili, nella costruzione di spirali di induzione non avrebbe dunque scopo, poichè la grande riluttanza trasversale annullerebbe quasi interamente i vantaggi della permeabilità elevata, lasciando sussistere tutti gli inconvenienti della maggiore resistività. Dovendosi ricorrere a spirali magnetiche per correnti alternative molto intense, poco gioverebbe d'altronde il frazionamento in parecchi nastri sottili, avvolti in parallelo a guisa di eliche coassiali di diverso raggio, con la maggiore larghezza secondo le generatrici del cilindro, ovvero di eliche intrecciate, col lato maggiore secondo le generatrici dell'elicoide, poichè nell'un caso e nell'altro le correnti di frequenza elevata tenderebbero in prevalenza a localizzarsi nelle porzioni contigue alla periferia interna, lasciando quelle esterne in gran parte inutilizzate. Poco ancora gioverebbe scomporre il solenoide in parecchie sezioni consecutive o laterali, collegate fra loro in parallelo, poichè il concatenamento magnetico imperfetto darebbe luogo a una piccola reattanza complessiva.

La forma più razionale sarebbe quella di un solenoide unico, con le spire costituite di un nastro relativamente sottile, avviluppato col lato più lungo secondo le generatrici di un cilindro, ed avente un piccolo passo, in modo da approssimare la forma del solenoide omogeneo concepito da Sommerfeld e da Coffin. Anche se parecchi nastri si dovessero impiegare in parallelo, per ragioni costruttive, la migliore disposizione loro sarebbe a spire intercalate, avviluppanti il medesimo cilindro, in modo da far concorrere in eguale misura l'azione elettromagnetica di ognuna a rinforzare il flusso concatenato con tutte le altre. Sezioni diverse, messe in serie, e avvolte à strati coassiali, possederebbero bensì un ottimo concatenamento magnetico, ma renderebbero difficile l'isolamento, assumerebbero una capacità elettrostatica rilevante, e diventerebbero sede di notevoli perdite supplementari per la induzione esercitata mutuamente fra i diversi strati.

In nessun caso il piccolo aumento di reattanza interna, dovuto alla permeabilità più elevata, sembra compensare gli svantaggi che le spirali di ferro, per il loro maggior peso e ingombro, presentano di fronte a quelle comuni di rame, alle quali un'efficacia di proteazione assai maggiore per le correnti di alta frequenza si può conferire, disponendo in parallelo resistenze ohmiche convenienti, secondo il principio razionale dell'ing. Campos [1].

[1] Atti dell'Associaz. Elettrot. Ital., 1911, vol. XV, pag. 549.

INDICE DEL VOL. XI — SERIE 5ª

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

PAG.

U. Cerletti. *Sulla struttura della nevroglia* (con otto tavole) 1

F. Bottazzi. *Nuove ricerche sui muscoli striati e lisci di animali omeotermi.* Seconda Memoria: *Ricerche sul m. retractor penis (e su altri preparati muscolari lisci* 43

A. Borzì e G. Catalano. *La dottrina dei moti delle sensitive* (con una tavola) 155

V. Volterra. *Teoria delle potenze, dei logaritmi e delle funzioni di composizione* 167

L. Balbiano. *L'acido grafitico* 251

I. Guareschi. *La teoria atomistica e Sebastiano Basso con notizie e considerazioni su William Higgins* 289

F. Cantelli. *Sulla legge dei grandi numeri* 329

R. Perotti. *Studi di biologia agraria in rapporto al bonificamento dell'Agro romano* (con sei tavole) 351

P. Blaserna. *Sopra un gruppo di nuove trascendenti della forma generale* $\Phi_r(u) = \lim_{k=\infty} \left\{ \log k - \sum_0^k {}_h \frac{(h+1)^{r-1}}{(h+u)^r} \right.$ 561

G. Paoli. *Resultati botanici della Missione scientifica Stefanini-Paoli nella Somàlia italiana meridionale* 621

A. Issel. *Prime linee di un ordinamento sistematico delle pietre figurate* . 631

A. Stefani. *Contributi alla fisiologia del cuore e dei vasi* 669

L. Lombardi. *Ricerche intorno ai solenoidi composti di materiale magnetico* 815

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª Transunti.
2ª Memorie *della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali.*
3ª Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — Transunti. Vol. I-VIII. (1876-84).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — Rendiconti. Vol. I-VII. (1884-91).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — Rendiconti *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XXV. (1892-1916). Fasc. 8°. Sem. 2°.
Rendiconti *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche* Vol. I-XXIV. (1892-1916). Fasc. 3-4.
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XI. Fasc. 13.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XII. Vol. XIV. Vol. XV. Fasc. 1-3.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia è di L. [illegible]; per gli altri paesi le spese di posta in più

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

Ermanno Loescher & C.° — *Roma, Torino e Firenze.*
Ulrico Hoepli. — *Milano, Pisa e Napoli.*

SMITHSONIAN INSTITUTION LIBRARIES
3 9088 01354 6601